# ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
EDHEC, ESC Bordeaux, ESC Marseille, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

**CONCOURS D'ADMISSION 1992**

# MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
OPTION GENERALE

**Aucun document n'est autorisé.**
L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

# EXERCICE 1

Notations :

- $a$ est un nombre réel fixé ;
- $\mathcal{C}^{\circ}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ;
- on note $\phi$ l'application qui, à tout élément $f \in \mathcal{C}^{\circ}(\mathbb{R})$, fait correspondre la fonction $g$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} & g(x) = \dfrac{1}{x-a} \displaystyle\int_x^{2x-a} f(t)\,dt \\ g(a) = f(a) & \end{cases}$$

**1°)** a) Vérifier que $\phi$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^{\circ}(\mathbb{R})$.

b) Justifier la dérivabilité de $g$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq a$.

c) On prend $f : t \mapsto |t-a|$ ; l'application $g$ correspondante est-elle dérivable en $a$ ?

d) $\phi$ est-il un endomorphisme surjectif ?

**2°)** a) Soit $u \in \mathcal{C}^{\circ}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = 2\,u(2x-a)$

(i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u\left(\dfrac{(2^n-1)\,a + x}{2^n}\right) = 2^n\,u(x)$

(ii) En déduire que $u$ est l'application nulle.

b) Déterminer le noyau de $\phi$.

**3°)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

Pour tout $k$ entier compris entre $0$ et $n$, on définit $d_k$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad d_k(x) = (x-a)^k \qquad \{d_0(x) = 1\}$$

a) Déterminer $\phi(d_k)$.

b) On note $\phi_n$ la restriction de $\phi$ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\phi_n$ est un automorphisme diagonalisable.

**4°)** Soit $n \in \mathbb{N}$ ;

a) $c_n$ désigne l'application $x \to x^n$. Ecrire $c_n$ comme combinaison linéaire de $d_0, d_1, \dots d_n$.

b) Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)\,x^n$$

# EXERCICE 2

a désigne un réel strictement compris entre 0 et 1.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C.

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est 1 - a.

S'il est en B, la probabilité qu'il aille en A est a, et celle qu'il aille en C est 1 - a.

Enfin, s'il est en C, la probabilité qu'il aille en A est a et celle qu'il aille en B est 1 - a.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n$ (respectivement $B_n$ et $C_n$) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) après le n-ième déplacement".

Si $n = 0$, on note $A_0$ (respectivement $B_0$ et $C_0$) l'événement : "le signal est en A (respectivement en B et C) avant le premier déplacement".

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$

**1°)** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$

On pose $N = {}^tM$

**2°)** a) Vérifier que le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N.

A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer les autres valeurs propres de N, et, suivant les valeurs de a, les sous-espaces propres associés.

c) N est-elle diagonalisable ?

**3°)** Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que P est inversible et déterminer $P^{-1}$

(on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \dfrac{1}{4}$

**4°)** a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N^n = PD^nP^{-1}$, où D est une matrice diagonale à préciser.

b) Calculer alors $N^n$ pour tout entier naturel n.

c) En déduire la valeur de $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**5°)** On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

# PROBLEME

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à deux, et $\beta$ un réel strictement positif.
Dans un rayon de magasin, il y a n articles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ francs.

Un client se présente et achète un nombre aléatoire A d'articles distincts de ce rayon ($0 \leq A \leq n$).
On suppose que, lorsqu'un client s'est décidé pour l'achat de A articles, les différents choix possibles de ces A articles sont équiprobables.

- On note S la somme payée par le client pour l'achat de ces A articles et, pour $1 \leq i \leq n$, $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le client achète l'article $a_i$, et 0 si non.
- L'objet du problème est principalement d'évaluer l'espérance et la variance de S, suivant deux hypothèses différentes sur A.
- Les deux parties du problème sont largement indépendantes ; seuls les résultats des questions 1°) et 6°) a) de la première partie sont utilisés dans la deuxième partie.

## Première partie

**1°)** a) Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P\big((X_i = 1) / (A = k)\big)$.

b) i et j désignant deux entiers distincts compris entre 1 et n,
calculer $P\Big(\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) / (A = k)\Big)$.

c) Comment s'exprime S en fonction des $X_i$ et des $\alpha_i$ ?

- On fait, dans cette première partie, l'hypothèse suivante :

**(H')** **A suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$**

**2°)** Calculer $P(X_i = 1)$ à l'aide de la formule des probabilités totales .

**3°)** Calculer l'espérance $E(S)$ en fonction des $\alpha_i$ .

**4°)** i et j désignent deux entiers distincts compris entre 1 et n ;

a) Calculer $P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big)$.

b) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple $(X_i, X_j)$ .
$X_i$ et $X_j$ sont-elles indépendantes ?

**5°)** a) Exprimer la variance $V(S)$ en fonction de $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$ .

b) On suppose, dans cette question b), que : $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\alpha_i = i$ .

Vérifier que : $V(S) = \dfrac{n(n+1)}{144}(3n^2 + 11n + 4)$.

**6°)** On suppose maintenant, plus généralement, que :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \alpha_i = i^{\beta}.$

a) Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{\beta}$

En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i^{\beta}$, puis de $E(S)$.

b) Donner un équivalent, de la forme $\gamma n^{\delta}$, de la variance $V(S)$, quand $n \to +\infty$ ;

( $\gamma$ et $\delta$ sont des constantes réelles que l'on déterminera).

# Deuxième partie

• a désigne un nombre réel appartenant à ]0,1[.
On fait, pour cette 2ème partie, l'hypothèse suivante :

**(H'')** **La loi de A est définie ainsi :**

$$\begin{cases} P(A=0) = a \\ \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad P(A=k) = \dfrac{\lambda}{k} \end{cases}$$

**1°)** Déterminer $\lambda$ .

**2°)** Etude du cas particulier : $n = 3$, $a = \frac{1}{12}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$.

Déterminer les lois de A et de S, et calculer E(S) et V(S).

• <u>On reprend maintenant l'étude du cas général.</u>

**3°)** Calculer $P(X_i = 1)$.

**4°)** i et j désignent encore deux entiers distincts compris entre 1 et n ;

a) Calculer $P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big)$.

b) Quelle relation doit-il exister entre a et n pour que les variables aléatoires $X_i$ et $X_j$ soient indépendantes ?

c) Calculer la covariance du couple $(X_i, X_j)$ .

**5°)** Exprimer E(S) et V(S) en fonction de $\lambda$ , $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^2\right)$ .

**6°)** On suppose, dans cette question, que : $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = i^{\beta}$.

a) Ecrire un algorithme qui, à partir de $n$, $a$, $\beta$, calcule $E(S)$ et $V(S)$.

Donner les résultats numériques pour :

(i) $n = 10$ ; $a = 0{,}1$ ; $\beta = 1{,}5$

(ii) $n = 20$ ; $a = 0{,}5$ ; $\beta = 1{,}2$.

b) On pose : $u_n = \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$

(i) Déterminer un équivalent de $v_n$ quand $n \to +\infty$ ; quelle est la nature de la série de terme général $v_n$ ? Rappel : $\ln(1+x) = x$ [illegible]

(ii) Déduire du (i) que la suite $(u_n)$ est convergente ;

montrer alors que : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

c) Donner un équivalent de $E(S)$ quand $n \to +\infty$.

d) Donner un équivalent de $V(S)$ quand $n \to +\infty$.

**7°)** Comparaison des hypothèses **(H')** et **(H")**.

a) Quelle est l'hypothèse la plus vraisemblable ?

b) Quelle est l'hypothèse la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur ?

(on discutera suivant les valeurs de n et a).

## EXERCICE 1

$n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2.

**1°)** Soit $f : ]0,1] \to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx$ soit convergente.

On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) (i) Pour $k \in [[1,n]]$, montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$.

(ii) Pour $k \in [[1,n-1]]$, montrer que : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(iii) En déduire que : $\frac{f(1)}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$.

b) En déduire la limite de $S_n$ quand $n \to +\infty$.

**2°)** a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}} du$.

b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que : $I = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

**3°)** Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$.

a) Ecrire un algorithme qui, pour $n$ donné, calcule et affiche $P_n$.

b) Donner les valeurs de $P_n$ pour $n \in \{20, 50, 100\}$.

c) A l'aide du **1°)**, déterminer la limite de $P_n$ quand $n \to +\infty$.

La convergence est-elle rapide ?

## EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

**1°)** a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda$ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si : $(a-\lambda^2)(d-\lambda^2) - bc = 0$.

b) En déduire l'équivalence suivante :

$\lambda$ est valeur propre de $\phi(A)$ $\Leftrightarrow$ $\lambda^2$ est valeur propre de $A$.

c) Exemple : si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$ ?

$\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

**2°)** On suppose maintenant que $a = 1$ et $b = 0$.

a) Pour $\lambda$ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{V}(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs $(x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

(i) Déterminer V(1) et V(-1), ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

(ii) Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

b) Etablir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \; et \; c = 0) \\ \quad ou \\ (d \rangle 0 \; et \; d \neq 1) \end{cases}$

c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

(i) $c$ et $d$ sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

(ii) $c$ et $d$ sont des *réels* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans [-5 ; 3].

d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas (i) et (ii) précédents.

## PROBLEME

Un jeu réunit une infinité de joueurs $A_1$ , $A_2$ , ... , $A_n$ , ...

* D'abord $A_1$ ,$A_2$ ,$A_3$ disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables.
  Le joueur classé dernier est éliminé.

* Les deux autres et $A_4$ disputent un deuxième tournoi analogue (indépendant du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.

* Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.

* Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec $A_5$ un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers) etc...

* A chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.

* Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à 2 tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).

- Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on note $G_n$ l'événement :
  . "$A_1$ est gagnant du jeu au $n$-ième tournoi".

- Enfin, soit X la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).
  L'objet du problème est d'étudier la v.a. X et de calculer la probabilité pour que le joueur $A_1$ gagne.

**Le problème est composé de deux parties largement indépendantes.**

## Première partie : loi de X et probabilité de $G_n$ pour $n \in\{2,3,4,7\}$

**A)** 1°) Calculer $P(G_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur $A_1$ remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut $P(X=2)$ ?

2°) Pour tout entier $k \geq 4$, on note $J_k$ l'événement : "$A_k$ joue".

a) Montrer que $P(J_5) = \dfrac{2}{3}$. Pour $i \geq 4$, que vaut $P(J_{i+1}/J_i)$ ?

b) En déduire que $P(J_k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-4}$

3°) a) Pour tout entier $n \geq 2$, comparer les événements $(X \geq n)$ et $J_{n+2}$.

b) En déduire la valeur de $P(X=n)$.

c) Vérifier qu'on a bien : $\sum_{n=2}^{\infty} P(X=n) = 1$.

4°) Quelle est la loi suivie par X-1 ? En déduire l'espérance et la variance de X.

**B)** Pour tout couple $(i, j)$ d'entiers naturels non nuls, on considère les événements $P_i$ et $S_j$ suivants :

$P_i$ : "$A_1$ est classé <u>premier</u> au $i$-ème tournoi" ;

$S_j$ : "$A_1$ est classé <u>second</u> au $j$-ème tournoi <u>et le jeu continue</u>" .

1°) Exprimer $G_3$ et $G_4$ à l'aide de ces événements.

2°) a) Calculer $P(G_3)$.

b) Montrer que $P(S_2/S_1) = \dfrac{1}{6}$ ; et que $P(S_2/P_1) = \dfrac{1}{3}$.

Prouver que $P(G_4) = \dfrac{1}{54}$.

3°) a) Ecrire les suites des classements de $A_1$ (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'événement $G_7$, (on vérifiera qu'il y en a huit).

b) Calculer $P(G_7)$.

## Deuxième partie : probabilité pour que le joueur $A_1$ gagne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [[0,n]]$, soit $\mathcal{U}_n^k$ l'ensemble des $n$-listes de $\{1,2\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

a) elles finissent par 2 ;

b) elles ne contiennent jamais deux "1" consécutifs ;

c) $k$ fois (exactement) un "2" est suivi d'un autre "2".

Exemples : la suite (1,2,2,1,2,1,2,2,2,1,2) appartient à $\mathcal{U}_{11}^3$; $(1,2,2,2) \in \mathcal{U}_4^2$ ; $(2,1,2,2) \in \mathcal{U}_4^1$ ; $(2,2,1,2,2) \in \mathcal{U}_5^2$ ; $(1,2,2,2,2) \in \mathcal{U}_5^3$.

On pose $u_n^k = card\,\mathcal{U}_n^k$, avec la convention : $u_0^0 = 1$.

### 1°) Calcul de $u_n^k$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{U}_n^0$, $\mathcal{U}_n^n$, $\mathcal{U}_{n+1}^n$, $\mathcal{U}_{n+2}^n$.

En déduire que $u_n^0 = 1$, $u_n^n = 0$, $u_{n+1}^n = 1$, $u_{n+2}^n = 1$.

b) En classant les n-listes de $\mathcal{U}_n^k$ suivant la valeur de leur ($n$-1)-ième élément, montrer que, pour $n \geq 3$ *et* $k \geq 1$ : $\underline{u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}}$.

c) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \in [[0,i]]$, on pose : $\underline{\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^j}$ *et* $\underline{\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j}$.

(i) Calculer $\gamma_i^0$ *et* $\gamma_i^i$ ; pour $i \geq 2$ *et* $j \in [[1,i-1]]$, exprimer $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$ en fonction de $\gamma_i^j$.
En déduire la valeur de $\gamma_i^j$.

(ii) Procéder de la même façon qu'au (i) pour obtenir $\delta_i^j$.

(iii) En déduire que : $\underline{\forall (k,p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = C_{k+p}^k}$.

**2°) Deux séries**

Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $f : [0,x] \to \mathbb{R}$

$$u \to \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(p)}(u)$.

b) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} C_{k+p}^{k} x^{p} \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} C_{k+n}^{k} \left( \frac{x}{1-x} \right)^{n}$$

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} C_{k+p}^{k}\, x^{p} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

d) Calculer $\displaystyle\alpha_k = \sum_{p=0}^{\infty} u_{k+2p+1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3}$ et $\displaystyle\alpha'_k = \sum_{p=0}^{\infty} u_{k+2p+2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+4}$

**3°) Probabilité pour que $A_1$ gagne : on note $p_1$ cette probabilité.**

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ (il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de $P(G_7)$ effectué à la fin de la première partie).

b) A l'aide d'une "permutation de $\Sigma$" (dont on admettra la validité), montrer que :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \beta_k, \quad \text{avec} \quad \beta_k = \sum_{n=k+2}^{\infty} u_{n-2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

c) Calculer $\beta_0$.

d) Pour $k \geq 1$, montrer que $\beta_k = \dfrac{4}{27}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{k+1}$

e) En déduire enfin la valeur de $p_1$.

# EXERCICE 1

**Calcul approché de ln $a$ pour $a \in [\,1\,,2\,]$.**

La notation $f^{(p)}$ désigne la fonction dérivée d'ordre $p$ de la fonction numérique $f$.

**1°** ***a)*** Soit $u\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $v\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ .

Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $u^{(p)}$ et $v^{(p)}$ .

***b)*** Soit $f\ :\ x \mapsto \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ .

Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ . Montrer qu'il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ à préciser tels que :

$$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \lambda\, u(x) + \mu\, v(x)\,.$$

En déduire $f^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_f$.

***c)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(2k)}(0)$ et $f^{(2k+1)}(0)$ .

Montrer que : $\forall x \in \left[\,0\,,\dfrac{1}{3}\right] \qquad \left|\,f^{(2n+3)}(x)\,\right| \leq (2n+2)\,!\,\dfrac{3^{2n+3}}{4^{n+1}}$ .

***d)*** On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ .

Montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\forall x \in \left[\,0\,,\frac{1}{3}\right] \qquad \left|\,f(x) + 2\,S_n(x)\,\right| \leq \frac{1}{4^{n+1}(2n+3)}\,.$$

**2°** ***a)*** Soit $a$ un réel de l'intervalle $[\,1\,,2\,]$ . On pose $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ .

Montrer, en utilisant **1°**, que : $\left|\,\ln a - 2\,S_n(x)\,\right| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}(2n+3)}$ .

*b)* Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ pour laquelle

$$\frac{1}{4^{n+1}(2n+3)} < 5 \times 10^{-4}$$

*c)* On choisit $a = \frac{3}{2}$ ; calculer $x$.

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ donner la valeur exacte de $\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Calculer $2S_3(x)$ (on écrira, avec toutes ses décimales, la valeur approchée de $2S_3(x)$ affichée par la calculatrice).

Comparer avec $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (on donnera l'ordre de grandeur de $\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2S_3(x)$).

❖

# EXERCICE 2

**Démonstration de l'égalité : [1]** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}$ .

**1°** Soit $g : ]\,0\,,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto -x \ln x$

Etablir le tableau de variations de $g$.

**2°** A l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}\,, \forall u \in \mathbb{R}$ $\qquad e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k\,!} + R_n(u)$ , où $R_n$ est continue et vérifie :

$$\forall u \geq 0 \qquad 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^u .$$

**3°** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^n\,\mathrm{d}u$ .

***a)*** Justifier l'existence de $J_n$ .

***b)*** Calculer $J_0$ ; à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $J_{k+1}$ et $J_k$ , pour $k \in \mathbb{N}$ ; en déduire la valeur de $J_n$ .

***c)*** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in ]\,0\,,1\,[$.

Effectuer sur l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k (\ln x)^k\,\mathrm{d}x$ le changement de variable $v = -(k+1)\ln x$ .

***d)*** En déduire l'existence et la valeur de $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x$ .

**4°** ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!} I_k + r_n\,, \quad \text{avec} \quad 0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)\,!\,e^{n+1}} .$$

***b)*** En déduire l'égalité [1] .

**5°** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ .

Montrer que $s_7$ , que l'on calculera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice, est une valeur approchée à $10^{-7}$ près de $\int_0^1 x^{-x}\,dx$ .

# PROBLEME

**Probabilité de trouver un mot donné dans un texte aléatoire.**

Dans tout le problème, $p$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et toutes les suites sont définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

– Dans une grande école de commerce, un étudiant a programmé son (micro-)ordinateur de la façon suivante :
l'ordinateur fait imprimer un nombre, aussi grand que l'on veut, de caractères (des lettres), les uns après les autres, de manière aléatoire ; pour chaque caractère imprimé, la probabilité que ce soit une lettre donnée est constante.

– **L'étudiant cherche la probabilité pour qu'un mot précis de $p$ lettres apparaisse au moins une fois dans le "texte" produit par l'ordinateur** (on ne tient pas compte des passages à la ligne).

– Soit $X_j$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ la variable aléatoire égale au *j–ième* caractère produit par la machine (voir note en bas de page).

– On note $\underline{x_0 x_1 \ldots x_{p-1}}$ la séquence de lettres qui forme le mot en question.

– Le mot voulu est écrit à partir du *i–ième* caractère si l'événement

$$\underline{A_i = (X_i = x_0) \bigcap (X_{i+1} = x_1) \bigcap \ldots \bigcap (X_{i+p-1} = x_{p-1})}$$

est réalisé.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse donc au calcul de $\underline{v_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}$, qui représente la probabilité

pour que le mot voulu apparaisse au moins une fois dans la suite des $n + p - 1$ premiers caractères imprimés.

• On fait les deux hypothèses suivantes :

**1)Les v.a. $X_j$ suivent toutes la même loi de probabilité.**

**2)Les v.a. $X_j$ sont mutuellement indépendantes.**

*Les deux parties du problème sont largement indépendantes : seuls les résultats des questions 1° et 8° de la première partie sont utiles pour la deuxième partie.*

---

Note : pour avoir des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffirait, par exemple, de remplacer les lettres par leurs rangs dans l'alphabet. Mais ceci n'a pas d'importance pour la suite du problème.

**PREMIERE PARTIE : relation de récurrence satisfaite par ( $v_n$ ) .**

**1°** Montrer que la suite ( $v_n$ ) est croissante.

**2°** Montrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P(A_i) = P(A_1).$$

Dans la suite du problème, **on note $a$ cette constante** (qu'on suppose non nulle).

**3°** On dit qu'une séquence de lettres $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ est <u>superposable en partie</u> (en abrégé : s.e.p.) si et seulement si :

$$\exists i \in [[ 1 , p-1 ]] \quad \forall j \in [[ 1 , p-1 ]] \ (j \geq i \Rightarrow x_j = x_{j-i}).$$

Regarder si les séquences suivantes sont s.e.p. (et donner une valeur de $i$ le cas échéant) :

***a)*** ENTENDENT

***b)*** ECRICOME

***c)*** FINI

Dans la suite du problème, on suppose que :

**la séquence $x_0 x_1 \dots x_{p-1}$ n'est pas s.e.p. .**

**4°** Soit $q$ et $r$ deux entiers strictement positifs.
Montrer que, si $1 \leq r \leq p-1$, alors $A_q$ et $A_{q+r}$ sont incompatibles.

**5°** Soit $k \geq p$. Montrer que : $v_{k+1} = v_k + a - P\left( \left( \bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i \right) \cap A_{k+1} \right)$.

**6°** Quelles sont les variables $X_j$ qui interviennent dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ ?

Et dans $A_{k+1}$ ? En déduire que : $v_{k+1} = v_k + a - a\, v_{k-p+1}$ .

**7°** Calculer $v_k$ pour $k \in [[ 1 , p ]]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\underline{u_n = 1 - v_n}$

**8°** Vérifier que ( $u_n$ ) est une suite décroissante de réels de [ 0 , 1 ] telle que :

$$\begin{cases} \underline{\forall k \in [[ 1 , p ]] \quad u_k = 1 - ka} \\ \\ \underline{\forall k \geq p \qquad u_{k+1} = u_k - a u_{k-p+1}} \end{cases}$$

## DEUXIEME PARTIE : étude de la suite ( $u_n$ ) ; exemples .

**1°** Justifier la convergence de la suite ( $u_n$ ) .
Quelle est sa limite ? En revenant à ( $v_n$ ), quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

**2°** **Majoration de $u_n$ .**
Montrer que : $\forall n \geq p \quad u_n \leq (1-a)^{n-p}(1-pa)$.

Retrouver ainsi la limite de ( $u_n$).

**3°** **Etude du cas particulier :** $p = 2$ **et** $a = \dfrac{4}{25}$ .

***a)*** Calculer $u_n$ en fonction de $n$.

***b)*** On suppose que, pour chaque caractère imprimé, la probabilité pour que ce soit la lettre A (respectivement S) est $\dfrac{40}{75}$ (respectivement $\dfrac{3}{10}$ ) .
Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "AS" dans un texte de 51 caractères ?
(on écrira toutes les décimales fournies par la calculatrice).

**4°** **On suppose dans cette question que** $p = 3$ **et** $a < \dfrac{2^2}{3^3}$ .

***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$.

Montrer que, pour $k \geq 3$, on peut écrire : $U_{k-1} = A\, U_{k-2}$ , avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer l'expression de $U_n$ en fonction de $n$, $A$, et $U_1$.

***b)*** Montrer que les valeurs propres de la matrice $A$ sont les nombres $\lambda$ solutions de l'équation :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + a = 0$$

***c)*** Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + a$ ;
En déduire que A admet trois valeurs propres réelles $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\lambda_3$ vérifiant

$$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1 .$$

***d)*** Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{n-1} = Q\, D^{n-1}\, Q^{-1}.$$

(on ne demande pas d'expliciter $Q$ )

*e)* En déduire qu'il existe trois réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *qu'on ne demande pas de calculer*, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \alpha \lambda_1^{n-1} + \beta \lambda_2^{n-1} + \gamma \lambda_3^{n-1}$$

**5°** **Dans cette dernière question :** $p = 4$.

*a)* On suppose, dans ce ***a***), que, pour chaque caractère, la probabilité du F (resp. du I, du N) est 0.02 (resp. 0.1 , 0.05).

*(i)* Ecrire un algorithme qui, pour $n$ donné, calcule $u_n$ et affiche la probabilité d'avoir au moins une fois le mot "FINI" dans un texte de $n + 3$ caractères.

*(ii)* Donner les valeurs numériques obtenues (arrondies à $10^{-4}$ près) pour $n \in \{50, 100, 300\}$.

*b)* On cherche, comme au **4°** précédent, à établir une expression de $u_n$ en fonction de $n$. On suppose que : $a < \dfrac{3^3}{4^4}$ .

*(i)* Soit le polynôme $R = X^4 - X^3 + a$ .

Montrer que $R$ a deux racines réelles $\mu_1$ et $\mu_2$ . Vérifier qu'elles appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$ .

*(ii)* Soit $\delta$ une racine complexe (non réelle) de $R$.

• Justifier son existence. Montrer que $\overline{\delta}$ est aussi racine de $R$.

*(iii)* Comment se factorise alors $R$ dans $\mathbb{C}[X]$ ?

En considérant le produit des racines de $R$, montrer que : $|\delta|^2 = \dfrac{a}{\mu_1 \mu_2}$ .

On démontre alors (et on admettra) que $|\delta| < 1$, et qu'il existe un unique quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \alpha_1 \mu_1^{n-1} + \alpha_2 \mu_2^{n-1} + \alpha_3 \delta^{n-1} + \alpha_4 \overline{\delta}^{\,n-1}.$$

Montrer que $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont réels, et que $\alpha_4 = \overline{\alpha_3}$ .

**Durée : 4 heures**
**Option Générale**

# EXERCICE 1

## Recherche des valeurs propres d'un endomorphisme

Dans cet exercice :
$E$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
On considère l'application $f$ qui, à tout élément $P$ de $E$, associe le polynôme $Q$ défini par :

$$Q(X) = (2X+1)\cdot P(X) - (X^2-1)\cdot P'(X)$$

1° Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

2° Soit $B$ un vecteur propre pour $f$, c'est-à-dire un élément non nul de $E$ tel qu'il existe un réel $\lambda$ satisfaisant à la relation : $f(B) = \lambda B$.

*a)* Montrer que $B$ est nécessairement de degré 2.

*b)* On suppose que $\lambda = 3$. Montrer que $-1$ est racine de $B$.
Soit $k$ l'ordre de multiplicité de la racine $-1$ ; il existe donc un polynôme $A$ tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \qquad \text{avec} \qquad A(-1) \neq 0$$

Montrer que $k = 2$ et que $A$ est constant.
En déduire que $\lambda = 3$ est valeur propre de $f$ et déterminer les vecteurs propres associés.

*c)* En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1. En déduire que $\lambda = -1$ est valeur propre de $f$ et déterminer les vecteurs propres associés.

*d)* On suppose maintenant que $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que $-1$ et 1 sont racines de $B$. En déduire une factorisation des polynômes $B$ obtenus, ainsi que la valeur propre associée à $B$.

3° <u>Étude d'un cas particulier</u>
Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et $g$ la restriction de $f$ à $F$. On désigne par $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $F$.

*a)* Montrer que $g$ est un endomorphisme de $F$.

*b)* Écrire la matrice $A$ de $g$ relativement à la base $\mathbf{B}$.

*c)* Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D$ de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice $P$ de $GL_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

*d)* Expliciter alors $A^n$ en fonction de $n$.

## EXERCICE 2

On désigne par $x$ un nombre réel tel que $x > 1$ et l'on se propose d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Lorsque la série converge, sa somme est notée : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

### 1° Étude de la dérivabilité de $f$

***a)*** Justifier la convergence de la série définissant $f$.

***b)*** Déterminer la limite, quand $n$ tend vers plus l'infini, de : $n^{\frac{x+1}{2}} \cdot \ln^2(n) \cdot u_n(x)$.
En déduire la convergence de la série de terme général : $\ln^2(n) \cdot u_n(x)$ et, a fortiori, la convergence de la série de terme général : $\ln(n) \cdot u_n(x)$.

***c)*** Pour $x > 1$ et pour tout réel $h$ tel que : $|h| \leq \frac{x-1}{2}$ montrer, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, que :

$$\left| u_n(x+h) - u_n(x) + h \cdot \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \ln^2(n)$$

puis que : $$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) \cdot u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) \cdot u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

***d)*** En déduire que $f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ ; donner l'expression de la dérivée de $f$ sous la forme de somme d'une série.

### 2° Représentation de $f$

***a)*** Pour $x > 1$ et pour $k$ entier naturel non nul, vérifier que l'on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

et que, pour tout entier $N > 1$ :

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N} \frac{dt}{t^x}$$

***b)*** Prouver alors que :

$$1 + \frac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

***c)*** Préciser les limites de $f$ quand $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures et quand $x$ tend vers plus l'infini.

***d)*** Déduire des questions précédentes les variations de $f$, et donner l'allure de sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 4 cm. On admettra à cet effet que :

$$f(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad f(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

# PROBLÈME

On dispose de deux urnes A et B contenant respectivement $a$ et $b$ boules ($a$ et $b$ sont deux entiers naturels non nuls).
On procède alors à l'expérience suivante : on choisit une des urnes pour en extraire une boule que l'on met dans l'autre urne, en admettant que la probabilité de choisir l'urne A est $q$, que la probabilité de choisir B est $p$, avec $p + q = 1, p \in ]0, 1[$.
On répète cette épreuve jusqu'à ce que l'une des urnes soit vide, si cela se produit, ou bien indéfiniment. On pose : $x = \frac{q}{p}$.

## A) Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $U$ définie par la relation de récurrence suivante :
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$\text{(I)} \qquad U_n = p \cdot U_{n+1} + q \cdot U_{n-1}$$

$U_0$ et $U_{a+b}$ étant deux réels donnés.

**1°** Prouver que l'on a, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$p \cdot \left( U_{n+1} - U_n \right) = q \cdot \left( U_n - U_{n-1} \right)$$

**2°** Lorsque $p = q$, montrer que la suite $U$ est arithmétique. En déduire $U_n$ en fonction de $n$, $a$, $b$, $U_0$ et $U_{a+b}$.

**3°** Lorsque $p$ est différent de $q$, montrer qu'il existe deux constantes réelles $\lambda$ et $\mu$ telles que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad U_n = \lambda + \mu \cdot x^n$$

Déterminer $U_n$ en fonction de $n$, $a$, $b$, $U_0$ et $U_{a+b}$.

## B) Étude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Soit $k$ entier tel que $0 \leq k \leq a + b$.
On note $E_k$ l'événement : "à partir d'un contenu de $k$ boules dans l'urne A, l'expérience s'arrête parce que l'urne A est vide". Ainsi :

$$P(E_0) = 1 \ , \ P(E_{a+b}) = 0$$

Et enfin, on note A l'événement : "le tirage se fait dans l'urne A".

**1°** Pour $k$ entier tel que $1 \leq k \leq a + b - 1$, établir une relation entre $P(E_k)$, $P(E_{k+1})$ et $P(E_{k-1})$.

**2° a)** En utilisant les résultats du **A)**, calculer la probabilité $P(E_a)$ de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne A.

**b)** Calculer la limite de $P(E_a)$ lorsque $b$ tend vers plus l'infini.
Interpréter ce résultat lorsque $p < q$.

**c)** Pour $p$ différent de $q$, déterminer la limite de $P(E_a)$ lorsque $p$ tend vers 0,5.

**3°** Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B ?

**4°** Quelle est la probabilité de voir l'expérience se terminer ?

**C)** **Étude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer**

Pour $k$ entier tel que $0 \leq k \leq a+b$, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages qu'il faut effectuer pour vider l'une quelconque des urnes A ou B, à partir d'un contenu initial de $k$ boules dans l'urne A. Si l'expérience est sans fin, on pose $X_k = -1$, et alors, d'après la question **B) 4°**, on sait que $P(X_k = -1) = 0$. On admet que $X_k$ possède une espérance que l'on note $E\left(X_k\right)$. Ainsi :

$$E\left(X_0\right) = 0 \text{ et } E\left(X_{a+b}\right) = 0$$

Soit $A_1$ (resp. $B_1$) l'événement "l'expérience se termine parce que l'urne A (resp. B) est vide". On note $P_{A_1}$ (resp. $P_{B_1}$) la probabilité conditionnelle sachant $A_1$ (resp. $B_1$).

**1°** Pour $j$ entier naturel non nul et $1 \leq k \leq a+b-1$, montrer que :

$$P_{A_1}\left(X_k = j\right) = q \cdot P_{A_1}\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P_{A_1}\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

et :

$$P_{B_1}\left(X_k = j\right) = q \cdot P_{B_1}\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P_{B_1}\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

puis que :

$$P\left(X_k = j\right) = q \cdot P\left(X_{k-1} = j-1\right) + p \cdot P\left(X_{k+1} = j-1\right)$$

En déduire :

$$E\left(X_k\right) = 1 + q \cdot E\left(X_{k-1}\right) + p \cdot E\left(X_{k+1}\right)$$

**2°** Pour $p = q$ :

***a)*** Montrer l'existence d'un réel $\alpha$ tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha \cdot k^2$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 : E\left(Y_k\right) = \frac{1}{2} \cdot E\left(Y_{k+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot E\left(Y_{k-1}\right)$$

***b)*** En utilisant le **A)**, montrer que $E\left(X_a\right) = ab$.

**3°** Pour $p$ différent de $q$ :

***a)*** Montrer l'existence d'un réel $\beta$ tel que la variable $Z_k = X_k + \beta \cdot k$ ait une espérance qui vérifie la relation :

$$\text{pour } k \geq 1 : E\left(Z_k\right) = p \cdot E\left(Z_{k+1}\right) + q \cdot E\left(Z_{k-1}\right)$$

***b)*** En utilisant le **A)**, montrer que :

$$E\left(X_a\right) = \frac{1}{p-q}\left(\frac{(a+b)(x^a - 1)}{x^{a+b} - 1} - a\right)$$

***c)*** Quelle est la limite de $E\left(X_a\right)$ quand $p$ tend vers 0,5 ? (on pourra poser : $x = 1 + y$)

***d)*** Quelle est la limite de $E\left(X_a\right)$ quand $b$ tend vers plus l'infini dans le cas $p < q$ ?

# ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

**CONCOURS D'ADMISSION 1996**

# MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option Générale

**Aucun document n'est autorisé**
L'énoncé comporte 5 pages.

**Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.**

# EXERCICE 1

## 1.1. Étude préliminaire

On considère l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{*+} & f(x) = x^x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Dresser le tableau des variations de $f$.
3. On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$ dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?
4. On note $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Démontrer que $g$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.

## 1.2. Étude d'une fonction

1. Démontrer qu'il existe une application $\varphi$ de $J$ sur $I$ telle que :

$$\forall x \in J \qquad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x$$

2. Établir que $\varphi$ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de plus l'infini.
3. Déterminer le plus grand intervalle $K$ inclus dans $J$ sur lequel $\varphi$ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K \qquad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x\,(\varphi(x) + \ln x)}$$

4. On note $(\Gamma)$ la courbe représentative de $\varphi$ dans le repère $\mathcal{R}$, et, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à $(\Gamma)$ en son point d'abscisse $n$.

   a. Déterminer l'abscisse $u_n$ du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$.

   b. Donner un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers plus l'infini.

## EXERCICE 2

Désignant par $n$ un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que :

$$P(X) + P(X+1) = 2X^n \qquad (1)$$

1. On considère l'application $\Phi$ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :
$$\Phi\left[Q(X)\right] = Q(X) + Q(X+1)$$
   a. Établir que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   b. Notant $p$ un entier naturel, on désigne par $\Phi_p$ la restriction de $\Phi$ à $\mathbb{R}_p[X]$.
      i. Montrer que $\Phi_p$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
      ii. On note $B_p = (1, X, X^2, ..., X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$. Établir que la matrice de $\Phi_p$ dans $B_p$ est une matrice triangulaire supérieure dont on déterminera les termes diagonaux.
      iii. En déduire que $\Phi_p$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
   c. Prouver que $\Phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   d. Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1). On précisera son degré et on le notera $E_n(X)$.

2. On écrit :
$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$$
   a. Vérifier que :
$$E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \left[ a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} \right] X^j$$
   b. En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont les solutions. Préciser la valeur de $a_{n,n}$.
   c. Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$ et $E_2(X)$.
   d. Démontrer que , pour tout entier naturel $n$ :
$$E_n'(X) = nE_{n-1}(X)$$
   et en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée $k$-ème de $E_n(X)$).
   e. Montrer que :
$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$$
   et en déduire, pour $n$ pair strictement positif, la valeur de $E_n(0)$ et $E_n(1)$, ainsi que, pour $n$ impair, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$.
   f. Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$.

# PROBLÈME 3

### 3.1. Étude d'une variable aléatoire $X$ :

1. On considère la fonction numérique $F$ de la variable $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

   et l'on note $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

   a. Dresser le tableau des variations de $F$. On notera $f$ la dérivée de $F$.

   b. Démontrer que le point $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $(\Gamma)$. Donner une équation de la tangente $(\Delta)$ à $(\Gamma)$ en $\Omega$.

   c. Établir que $f$ est paire, et étudier la concavité de $(\Gamma)$.

   d. Construire $(\Gamma)$ et $(\Delta)$.

   e. Prouver que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, et exprimer $F^{-1}(x)$ pour $x$ élément de $]0, 1[$.

   f. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

2. On désigne par $X$ une variable aléatoire admettant $f$ pour densité de probabilité.

   a. Déterminer les quartiles de $X$, c'est-à-dire les réels $Q_i$ vérifiant, pour $i$ entier compris entre 1 et 3 :

$$F(Q_i) = \frac{i}{4}$$

   et les faire apparaître sur la figure du 3.1.1.d.

   b. Soit $\varepsilon$ un élément de $]0, 1[$. Exprimer en fonction de $\varepsilon$ le plus petit réel $\alpha$ tel que :

$$P\left[\{|X| > \alpha\}\right] \leqslant \varepsilon$$

   c. Montrer que $X$ possède une espérance mathématique et la calculer.

### 3.2. Calcul de deux intégrales :

On se propose dans cette partie de calculer les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x}\, dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{x}\, dx$$

*(On rappelle le résultat suivant : Si $f$ est une fonction continue sur $]0,\ 1]$, prolongeable par continuité à droite en zéro, alors l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ est convergente).*

1. Étude de la convergence de $I$ et $J$.

   a. Démontrer que $J$ est convergente.

   b. Pour tout réel $\varepsilon$ de $]0,\ 1]$, on pose :

   $$h(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\ln x}{1+x}\, dx$$

   Montrer que $h$ est monotone et bornée sur $]0,\ 1]$. En déduire que l'intégrale $I$ est convergente.

2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout élément $x$ de $[0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \qquad (1)$$

3. On désigne par $k$ un entier naturel. Établir la convergence de l'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 x^k \ln x\, dx$$

   et la calculer.

4. Étudier succinctement les variations de la fonction $\rho$ continue sur $[0, 1]$ et définie par :

$$\begin{cases} \rho(0) = 0 & \\ \forall x \in\ ]0, 1] & \rho(x) = x \ln x \end{cases}$$

5. Montrer, grâce à la relation (1), que, pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| \leqslant \frac{1}{e(n+1)}$$

   puis que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = I$$

6. On note $\theta$ la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 & \\ \forall x \in\ ]0, 1] & \theta(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{cases}$$

a. Déduire de (1) que, pour tout entier naturel non nul $n$, il existe une fonction $R_n$ définie sur $[0,1]$ telle que, pour tout élément $x$ de $[0,1]$, on ait :

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x) \qquad \text{et} \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+2} x^{n+1}$$

b. En déduire que :

$$\left| \int_0^1 \theta(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)^2}$$

et que $J = -I$.

7. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que :

$$J = -I = \frac{\pi^2}{12}$$

### 3.3. Calcul de la variance de $X$ :

1. Prouver que $X$ possède une variance.
2. Démontrer, en utilisant la parité de $f$ et un changement de variable, que :

$$V(X) = 2\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}\, dx$$

3. Calculer la dérivée de la fonction $\psi$ définie sur $]0,1]$ par :

$$\psi(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$$

et déterminer :

$$\lim_{x \to 0} (\ln x)\psi(x)$$

4. En déduire, grâce à une intégration par parties, que :

$$V(X) = 2\,(J - I)$$

et donner enfin la valeur de $V(X)$.

# ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

**CONCOURS D'ADMISSION 1997**

# MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option scientifique

**Aucun document n'est autorisé**
L'énoncé comporte 7 pages.

**Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.**

## EXERCICE 1

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à deux. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. On note $id_{\mathcal{E}}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
Lorsque $x$ et $y$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, le produit scalaire de $x$ par $y$ s'écrit $\langle x, y\rangle$, et $\|x\|$ représente la norme de $x$.
Quand $u$ est un vecteur *non nul* de $\mathcal{E}$, on définit l'application $\varphi_u$ de $\mathcal{E}$ dans lui-même par :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u - x$$

1. Montrer que $\varphi_u$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_{\mathcal{E}}$).

2. Démontrer que $u$ est un vecteur propre de $\varphi_u$, associé à une valeur propre que l'on précisera.

3. Établir que $\varphi_u$ conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2 \qquad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

En déduire que $\varphi_u$ conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base $u$, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ orthogonaux à $u$ (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

   a. Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $-1$ pour $\varphi_u$.

   b. $\varphi_u$ est-il diagonalisable ?

   c. $t$ étant un réel non nul, comparer les applications $\varphi_u$ et $\varphi_{tu}$.

5. *Étude d'une réciproque*

On suppose que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une droite vectorielle $\Delta$ de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall y \in \Delta \qquad \psi(y) = y \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \Delta^{\perp} \qquad \psi(z) = -z$$

a. Montrer que $\psi$ est involutif et conserve le produit scalaire.

b. Établir qu'il existe au moins un vecteur $u$ non nul de $\Delta$ tel que l'on ait :

$$\psi = \varphi_u$$

c. Soit $\mathcal{M}$ la matrice de $\psi$ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{E}$. Soit $a_{ij}$ (où $i$ et $j$ désignent des entiers compris entre 1 et $n$) le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que :

$$a_{ij} = \langle \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle$$

En déduire que :

$${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$$

où $I_n$ désigne la matrice unité d'ordre $n$.

# EXERCICE 2

1. On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \qquad f(x) = x^x$$

et la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

 a. Montrer que l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$

 converge (ici, on ne demande pas de la calculer).

 b. Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

2. Soit trois entiers naturels $n$, $p$ et $k$ ; on pose :

$$J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n\, dx \qquad \text{et} \qquad K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k\, dx$$

 a. Montrer que $J_n$ et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).

 b. Pour $k$ différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.

 c. En déduire la valeur de $J_n$ en fonction de $n$.

3. *Calcul de $I$*

 a. Donner, sur $]0,1]$, un majorant de la fonction qui à $x$ associe $|x \ln x|$.

 b. Démontrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à deux :

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J_k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}}$$

 (On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle)

 c. En déduire que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

 d. Calculer avec une précision d'au moins $2 \times 10^{-7}$ une valeur approchée de $I$.

# 3. PROBLÈME

Le but de ce problème (dont *les trois parties sont indépendantes*) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps.
On rappelle que, si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives $f$ et $g$, $X+Y$ admet pour densité de probabilité la fonction $h$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,dx$$

À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, $X$ étant une variable aléatoire à densité, on désignera par $F_X$ sa fonction de répartition, et par $f_X$ une fonction densité de probabilité de $X$.

## 3.1. Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes $A_1$, $A_2$ et $A_3$ entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t=0$, $A_1$ et $A_2$ s'adressent simultanément aux deux guichets. $A_3$ attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par $A_1$, soit par $A_2$.
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de $A_i$ ($i = 1$, 2 ou 3) est une variable aléatoire $X_i$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ ;
- les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont mutuellement indépendantes ;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

### 3.1.1. Étude d'un événement

On se propose de calculer la probabilité de l'événement $E$ :"$A_3$ quitte la mairie en dernier".

1. Montrer que la variable $X_2'$ définie par $X_2' = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1,0]$.

2. On admet l'indépendance de $X_1$ et $X_2'$.
   Calculer une densité de probabilité $\varphi_1$ de la variable $Y_1$ définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.
   On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
   En déduire $\Phi_1$, fonction de répartition de $Y_1$.

3. Calculer la fonction de répartition, $\Phi_2$, de la variable $Z_1$ définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, $\varphi_2$, de $Z_1$.

4. On admet l'indépendance de $Z_1$ et $-X_3$.

   a. Calculer une densité de probabilité, $\varphi_3$, de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

   b. En déduire la probabilité de l'événement $\{Z_1 - X_3 \leqslant 0\}$.
   Quelle est la probabilité de $E$ ?

### 3.1.2. Étude d'une variable aléatoire

On pose :

$$T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$$

1. Que représente $T_3$ pour $A_3$ ?

2. Calculer la fonction de répartition, $F$, de $\inf(X_1, X_2)$.
   En déduire une densité de probabilité, $f$, de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \end{cases}$$

   est une densité de probabilité de $T_3$.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de $T_3$.

### 3.2. Étude de $n$ guichets

Dans cette partie, $n$ guichets sont ouverts au public.
$n$ personnes $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les $n$ guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).
On suppose que :

- la durée de passage au guichet de $A_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) est une variable aléatoire $X_i$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont mutuellement indépendantes.

1. On désigne par $U_n$ la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la loi de $U_n$. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

2. On note $V_n$ la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
   Déterminer la fonction de répartition de $V_n$. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :
   $$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$
   .

3. Soit $t$ un réel strictement positif. On désigne par $W_t$ la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant $t$.
   Donner la loi de $W_t$ ainsi que son espérance mathématique.

### 3.3. Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public.
Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite $N$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, ... de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables $X_i$ ($i \in \mathbb{N}^*$) suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ strictement positif donné, et que $N$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ (où $p$ désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$ ).
$N$ personnes $A_1$, $A_2$, ..., $A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel $i$ non nul, la durée de passage au guichet de $A_i$ est donnée par la variable aléatoire $X_i$. On pose :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple :

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, $S$, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables $X_i$, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Soit $x$ un réel strictement positif. Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $\{S \leqslant x\}$ soit réalisé sachant que l'événement $\{N = n\}$ l'est.

   a. En déduire la fonction de répartition de $S$ (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul).
   Donner une densité de probabilité de $S$.
   Reconnaître la loi de $S$.

   b. Montrer que :
   $$E(S) = E(X_i)E(N)$$

**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 2063

**CONCOURS D'ADMISSION 1998**

# MATHEMATIQUES

Lundi 18 mai 1998 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures
Option scientifique

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé**
**Aucun document n'est autorisé**
L'énoncé comporte 7 pages.

**Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.**

**Tournez la page S.V.P.**

# EXERCICE 1

On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi définie pour tout entier $n > 0$ par :

$P(X_n = -1) = p \quad P(X_n = +1) = 1 - p$ où $p$ est un réel tel que $0 < p < 1$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ par : $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

1 - On pose $\forall\, n \geq 1 \quad \begin{cases} a_n = P(Z_n = -1) \\ b_n = P(Z_n = +1) \end{cases}$

a) Calculer $a_n + b_n$.

b) Montrer que : $\forall\, n \geq 1 \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $Q$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

2 - a) Montrer que : $\forall\, n \geq 1 \quad Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$ où $p_n$ est un réel tel que $0 < p_n < 1$ et donner une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$.

b) En déduire une expression explicite de $p_n$ en fonction de $n$ et $p$.

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Que peut - on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

3 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p$ pour que les variables $Z_1$ et $Z_2$ soient indépendantes.

On suppose cette condition réalisée : quelle est alors la loi de $Z_n$ ?

Montrer que :

$$\forall\, n \geq 1 \quad P(Z_1 = \varepsilon_1, \ldots, Z_i = \varepsilon_i, \ldots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} \quad \text{où } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ pour tout } i \ (1 \leq i \leq n)$$

Que peut - on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ ?

## EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$x \to F(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)\,dt$$

1 - Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2 - Déterminer F dans les cas suivants :

a) $x \to f(x) = \sin 2\pi x$ ;

b) $x \to f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 - Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $f \to T(f) = F$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Est-elle injective ? surjective ?

4 - On dit que le réel $\lambda$ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$ ; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre $\lambda$.

a) Montrer que 0 est valeur propre de T.

b) Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.

c) Etudier les variations de cette fonction $\lambda$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

Tournez la page S.V.P.

## PROBLEME

L'objectif de ce problème est de "prolonger" la fonction factorielle $n \to (n-1)!$ définie sur $\mathbb{N}^*$ en une fonction définie sur les réels qui ne sont pas des entiers négatifs.
On étudie ensuite quelques propriétés de cette fonction.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls.
On pose $E = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$ : E est donc l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

**Partie A**

On considère une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f a la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est définie en } 1 \text{ et } f(1) = 1 \\ \forall x \in D \quad x+1 \in D \quad \text{et} \quad f(x+1) = x\, f(x) \end{cases}$$

1 - a) Montrer qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en x entier négatif ou nul.
b) Montrer que si $D = \mathbb{N}^*$ $n \to f(n) = (n-1)!$ a la propriété $\mathcal{P}$.
(On adopte la convention : $0! = 1$)

2 - a) On considère la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $x \to \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$

En utilisant, sans les démontrer, des résultats du cours, montrer que $\Gamma$ a la propriété $\mathcal{P}$ et rappeler la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.

b) Montrer que pour tout x réel strictement positif et tout n entier strictement positif :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\, x\, \Gamma(x)$$

3 - Pour tout élément x de E et tout entier n tel que x+n soit strictement positif,

on pose : $A_n(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$

a) Montrer que pour $x > 0$ et $n > 0$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n.

b) Soit x un réel négatif non entier.

Montrer que $x + n$ est strictement positif à partir d'un rang dépendant de x noté $N_x$.

Soient n et p deux entiers naturels. Pour n strictement supérieur à $N_x$, calculer $A_{n+p}(x)$ en fonction de $A_p(x+n)$.

En déduire que : $\forall\, n > N_x \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad A_{n+p}(x) = A_n(x)$.

c) Le réel $A_n(x)$ étant indépendant de n pour $n > N_x$, on définit sur E une fonction $\tilde{\Gamma}$ par $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ pour $n > N_x$.

Montrer que la fonction $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$, et que pour tout x réel strictement positif $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.

En déduire que : $\forall\, x \in E \qquad \tilde{\Gamma}(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)\, x\, \tilde{\Gamma}(x)$

On dit que $\tilde{\Gamma}$ prolonge la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par abus de notation, on notera désormais dans tout le problème simplement $\Gamma$ et non plus $\tilde{\Gamma}$, la fonction ainsi prolongée.

4 - a) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} t \ln t \; e^{-t}\, dt$

Montrer que I et J sont des intégrales absolument convergentes.

b) Soit h la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par :

$$(t, x) \rightarrow h(t, x) = t^{x-1}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \rightarrow u_t(x) = h(t, x)$, montrer que :

$$\forall\, t \in\, ]0, 1[ \quad \forall\, x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[ \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| \, \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} \qquad (1)$$

et que : $$\forall\, t \in [1, +\infty[ \quad \forall\, x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[ \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1|\, t \ln t \qquad (2)$$

c) Montrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[ \quad | \Gamma(x) - \Gamma(1) | \leq K | x - 1 | \qquad (3)$$

En déduire que la fonction Γ est continue au point 1.

5 - En utilisant la question précédente, montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

En déduire un équivalent simple de Γ (x) au voisinage de x = - n ($n \in \mathbb{N}^*$).

6 - On admet l'équivalence suivante :

$$\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x} \qquad (*)$$

a) Calculer pour x réel fixé $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

b) Montrer que si x est un entier naturel n, l' équivalence (*) permet de retrouver la formule de Stirling : $\quad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

c) Montrer que : $\quad \forall x \in E \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = 1$

d) En déduire que : $\quad \forall x \in E \quad \Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$

**Partie B**

On se propose dans cette partie de donner une autre expression de la fonction $\Gamma$ sur E.

1 - Pour n strictement positif, on pose $g_n(x) = \dfrac{e^{x/n}}{1 + x/n}$ et $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} g_k(x)$.

Montrer que pour tout réel x positif, la série de terme général $u_n(x) = \ln g_n(x)$ est convergente.

En déduire, pour tout réel x positif, l'existence de $\lim_{n \to +\infty} G_n(x)$.

On appelle G (x) cette limite. On définit ainsi une fonction G sur $\mathbb{R}^+$.

2 - Montrer que la suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente pour x réel négatif non entier. (On remarquera que pour tout x fixé, $g_n(x)$ est strictement positif pour n suffisamment grand).

On a donc une fonction G définie sur E par : $x \to G(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x)$.

3 - Vérifier que : $\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ et retrouver le résultat suivant :

la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ a une limite finie strictement positive $\gamma$ quand n tend vers $+\infty$. $\gamma$ s'appelle la constante d'Euler.

( On pourra utiliser, en le justifiant, le résultat : $\forall x > 0 \quad e^x > x + 1$ )

4 - Montrer que : $\forall x \in E \qquad G_n(x) = x\,\Gamma(x)\,\dfrac{n!\,\exp\left(x \sum_{k=1}^{n} 1/k\right)}{(x+n)\Gamma(x+n)}$.

5 - En utilisant la question A- 6-c), montrer que : $\forall x \in E \qquad \Gamma(x) = \dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\,G(x)$.

**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 6204

CONCOURS D'ADMISSION 1999

# MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 1999 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures
Option scientifique

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**
L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## Exercice 1

Soit $f_n$ la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$(x, y) \rightarrow f_n(x, y) = (x^n - y)\, e^{x-y}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On se propose de déterminer les extremums éventuels de cette fonction dans les deux cas particuliers n = 2, puis n = 1.

### Question 1

1 a) - Justifier que $f_n$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1 b) - Calculer les dérivées partielles du premier ordre de $f_n$.

### Question 2

*On se place dans le cas n = 2.*
2 a) - Montrer qu'il n'existe qu'un seul point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions nécessaires d'existence d'un extremum.
2 b) - Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f_2$ et montrer que le point $(x_0, y_0)$ est bien un extremum dont on précisera la nature.

### Question 3

*On se place dans le cas n = 1.*
3 a) - Montrer qu'il existe une infinité de points en lesquels le gradient de $f_1$ s'annule.
3 b) - Montrer qu'en ces points la fonction $f_1$ admet un minimum.

## Exercice 2

**Question 1**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1 a) - Montrer que les valeurs propres de M sont 1 et 2 et déterminer les sous-espaces propres associés.
1 b) - M est-elle diagonalisable ?

*On se propose de calculer $M^n$ pour tout entier naturel n.*

**Question 2**

Soit H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4 écrites sous forme de blocs :

$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$, $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)$

$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$, $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $A' = (a'_{ij})$ $(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)$

Vérifier que le produit HH' s'écrit sous forme de blocs :

$HH' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ où $C'' = C + AC'$

**Question 3**

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe une matrice colonne $U_n$ à 3 lignes telle que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ où V est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Question 4** *Calcul de $V^n$.*

On pose $W = V - 2I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
Pour tout entier naturel n, calculer $W^n$ et écrire explicitement la matrice $V^n$.

**Question 5** *Calcul de $U_n$.*

5 a) - Soit X la matrice colonne représentant dans la base canonique l'unique vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, dont la première composante vaut 1.
Calculer MX puis $M^nX$.

5 b) - On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire du 5 a) les valeurs de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.

**Tournez la page S.V.P.**

# Problème

Le but de ce problème est l'étude de la répartition des revenus dans une population donnée, ainsi que de deux modèles d'imposition.
Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

## Partie I : Répartition des revenus dans une population donnée

On fait choix d'une unité u de revenu (par exemple u = 1000 F) et on appelle X la variable aléatoire représentant dans cette unité le revenu annuel d'un individu pris au hasard dans une certaine population.
On suppose que X suit la loi de Pareto de paramètres $\alpha$, $r_0$, 0 c'est-à-dire qu'une densité f de X est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{r_0}\left(\dfrac{r_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq r_0 \\ 0 & \text{si } x < r_0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad r_0 > 0 \ , \ \alpha > 1.$$

$r_0$ est le revenu minimal recensé dans la population.

### Question 1

1 a) - Calculer la fonction de répartition F de X et donner l'allure de son graphe.

1 b) - Calculer le revenu moyen m d'un individu de la population.

### Question 2

Soit N l'effectif total de la population et N(r) le nombre des individus ayant un revenu au moins égal à r (r réel positif).

2 a) - Quel est le montant total M des revenus de la population ?

2 b) - En exprimant de deux façons différentes la probabilité qu'un individu, pris au hasard dans la population, ait un revenu au moins égal à r, montrer que :

$$N(r) = [1 - F(r)]\, N$$

En déduire l'expression de N(r) en fonction de N, $\alpha$ et $r_0$.

### Question 3

On change d'unité de revenu (on remplace u par une autre unité $u' = \lambda u$, où $\lambda > 0$) et on appelle X' la variable aléatoire représentant le revenu annuel d'un individu exprimé dans l'unité u'.

Calculer X' en fonction de X et montrer que la loi de X' est aussi une loi de Pareto.

## Partie II : Etude d'un modèle d'imposition par tranches

Dans la plupart des pays, l'Etat prélève une partie des revenus déclarés des habitants par un impôt direct.
On suppose dans cette partie II que ce prélèvement se fait *par tranches*.
Une unité u de revenus étant choisie, les tranches sont déterminées par une suite strictement croissante de réels $q_n$ (on suppose $q_0 = 0$). La partie des revenus d'un individu se trouvant dans la tranche $[q_i, q_{i+1}[$ est imposée au taux $\tau_i$, la suite $(\tau_i)$ étant une suite croissante de réels de [0, 1] (plus les tranches sont hautes, plus le taux d'imposition est élevé).
Ainsi un individu disposant d'un revenu annuel r paiera un impôt :

$$i(r) = \begin{cases} r\,\tau_0 & \text{si } 0 \leq r < q_1 \\ q_1\,\tau_0 + (q_2 - q_1)\,\tau_1 + \ldots + (q_n - q_{n-1})\,\tau_{n-1} + (r - q_n)\,\tau_n & \text{si } q_n \leq r < q_{n+1} \text{ avec } n \geq 1 \end{cases}$$

Soit N(r) le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r.
On suppose que la fonction $r \to N(r)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on admet que la tranche $[q_n, q_{n+1}[$ rapporte à l'Etat la somme : $I_n = \tau_n \displaystyle\int_{q_n}^{q_{n+1}} N(r)\,dr$.

On suppose dans cette partie que :

- pour tout entier naturel n, $q_n = n$, et chaque tranche $[n, n+1[$ est imposée au taux $\tau_n = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-bn})$, où b est un paramètre réel strictement positif.
- le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r est :

$$N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r \leq 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Cela revient à prendre pour unité de revenu le revenu minimal recensé dans la population, N étant le nombre total de contribuables.

### Question 1

1 a) - Quel est le taux d'imposition de la tranche $[0, 1[$ ?
1 b) - Ecrire, en Turbo-Pascal, un programme qui saisit le revenu r d'un contribuable et la valeur choisie pour b, qui calcule et affiche la valeur de l'impôt i(r) acquitté par ce contribuable.

**Question 2**

Montrer que la série de terme général $\left(\frac{\tau_n}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ est convergente et que le montant total de l'impôt encaissé par l'Etat est $I = N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$.

On désigne désormais cet impôt total par I(b) (et non plus simplement I) pour mettre en évidence qu'il dépend du paramètre b.

**Question 3**

3 a) - En admettant que : $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $0 < x < 1$, montrer que :

* $I(b) = \frac{N}{2}(1 - e^b)\ \ln(1 - e^{-b})$

3 b) - Montrer que I est une fonction de b continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

3 c) - Etudier $\lim_{b\to 0} I(b)$ et $\lim_{b\to +\infty} I(b)$.

3 d) - Dresser le tableau de variations de la fonction I.

**Question 4**

On admet que le montant total des revenus de la population est dans ce modèle $M = 2N$.

Avec le système d'imposition étudié dans cette partie II, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct le dixième de ce montant total ? Peut-il en prélever le tiers ?

* Partir de $N \sum_{n=1} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$ et faire 4 sommes + 2 ch. d'indice

$\left( \frac{1}{n(n+1)} = \text{—} \quad \text{—} \right)$

## Partie III : Etude d'un modèle d'imposition continu

On reprend les notations de la partie II, mais on suppose ici que le taux d'imposition est une fonction $r \to \tau(r)$ continue et croissante. On admet que le montant total de l'impôt est dans ce cas : $J = \int_0^{+\infty} N(r)\,\tau(r)\,dr$ sous réserve de convergence de cette intégrale.

On suppose désormais que :

- $\tau(r) = \frac{1}{2}(1 - e^{-br})$, où b est un paramètre réel strictement positif.
- le nombre d'individus ayant un revenu supérieur ou égal à r est :

$$N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r \leq 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & \text{si } r > 1 \end{cases} \qquad \text{(même hypothèse qu'au II)}$$

**Question 1**

Donner le tableau de variations de la fonction $\tau$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Question 2**

On note maintenant J(b) l'impôt total pour mettre en évidence qu'il dépend du paramètre b.

2 a) - Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2}\,dr$ est convergente.

2 b) - Montrer que $J(b) = \frac{N}{2}\left[2 + \frac{e^{-b} - 1}{b} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2}\,dr\right]$

2 c) - Montrer sans chercher à calculer sa dérivée que J est une fonction croissante de b.

Tournez la page S.V.P.

**Question 3**

On pose, pour tout réel b strictement positif, $\varphi(b) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2}\, dr$.

3 a) - Montrer que, pour $b > 0$, on a : $\varphi(b) \leq e^{-b}$. En déduire $\lim\limits_{b \to +\infty} \varphi(b)$.

3 b) - Justifier, pour $A > 1$, l'inégalité $\int_1^{A} \frac{e^{-br}}{r^2}\, dr \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2}\, dr$ et en déduire que :

$$e^{-bA} - \frac{1}{A} \leq \varphi(b) \leq 1$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on fixe $A > 1$ tel que l'on ait $\frac{1}{A} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Montrer alors qu'on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour $0 < b < \eta$, on ait :

$$1 - \varepsilon < e^{-bA} - \frac{1}{A}$$

En déduire que : $\lim\limits_{b \to 0} \varphi(b) = 1$.

3 c) - On se propose ici d'étudier la continuité de la fonction $\varphi$ sur $]0, +\infty[$.

Pour b fixé strictement positif, écrire $\varphi(b+h) - \varphi(b)$ sous forme d'une intégrale.

Montrer que pour $|h| < \frac{b}{2}$ et $r > 0$, on a : $|e^{-hr} - 1| \leq |h|\, r\, e^{br/2}$

En déduire qu'on peut trouver une constante $K_b$ telle que pour $|h| < \frac{b}{2}$,

$$|\varphi(b+h) - \varphi(b)| \leq K_b |h|$$

Conclure.

**Question 4**

4 a) - Montrer que la fonction J est continue sur $]0, +\infty[$.

4 b) - Calculer $\lim\limits_{b \to 0} J(b)$ et $\lim\limits_{b \to +\infty} J(b)$.

4 c) - Donner l'allure du graphe de J.

**Question 5**

On admet que le montant total des revenus de la population est dans ce modèle $M = 2N$.

Avec le système d'imposition étudié dans cette partie III, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct le tiers de ce montant total ?

J. 0691

**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

**CONCOURS D'ADMISSION 2000**

Option scientifique

# MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## Exercice 1

m est un entier supérieur ou égal à 3. On identifie un vecteur de $IR^m$ à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique. **Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.**

Si M est une matrice, on note ${}^tM$ sa transposée. On rappelle que pour deux matrices M et N, ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

Si M est une matrice carrée d'ordre m, on note respectivement $E_M$ et $F_M$ le noyau et l'image de l'endomorphisme de $IR^m$ dont la matrice dans la base canonique est M.

$IR^m$ est muni de son produit scalaire canonique défini pour deux vecteurs X et Y par : $(X \mid Y) = {}^tX\,Y$.

La norme euclidienne d'un vecteur X, associée à ce produit scalaire, est notée $\| X \|$.

**Soit n un entier supérieur ou égal à -1.** On dit qu'une matrice A carrée d'ordre m est de type n si ${}^tA = A^n$.

1) a) Qu'est-ce qu'une matrice de type 0, de type 1 ?

b) Donner un exemple, sous forme de tableau, de matrice non diagonale de type -1.

**On suppose désormais que n est strictement plus grand que 1.**

2) Dans cette question seulement on suppose m = 3.

Soit x un nombre réel et N ( x ) la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier strictement positif k on a : $(N(x))^k = N(kx)$.

b) Déterminer alors les réels x tels que N ( x ) soit une matrice de type n.

On revient au cas général m quelconque et on considère maintenant une matrice A carrée d'ordre m et de type n. On se propose d'établir quelques propriétés de A.

3) a) Etablir l'égalité $A^{(n^2)} = A$.

b) On pose $B = A^{n+1}$. Montrer que $B^n = B$ et que B est une matrice symétrique.

c) Que peut-on en déduire quant aux valeurs propres de B ?

d) Soit V un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1. En calculant ${}^tV\,B\,V$ de deux manières différentes montrer que l'on aboutit à une contradiction et qu'ainsi -1 ne peut pas être valeur propre de B.

e) Montrer que B est une matrice de projecteur orthogonal.

4) a) Montrer que $E_B$ est inclus dans $E_A$ puis que $E_B = E_A$.

b) Montrer que $F_A = F_B$ et que $E_A$ et $F_A$ sont supplémentaires orthogonaux.

5) Soit U un vecteur de $F_A$. Montrer que $\| AU \| = \| U \|$.

6) Montrer que si A est inversible et de type n alors A est aussi de type -1.

7) Montrer que si A est à la fois de type n et de type n+1 alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

**Exercice 2**

a et b sont deux réels strictement positifs, s est un réel vérifiant $0 < s < 1$.

1) a) Etablir la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a}\,du$.

b) Calculer J. (On pourra, par exemple, calculer au préalable aJ.)

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k>0}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre b.
On considère également une variable aléatoire N définie sur le même espace probabilisé, indépendante des $Y_k$ et suivant la loi géométrique de paramètre s. On admet que Z définie par $Z = \text{Max}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$ est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que si $\omega$ est un élément de $\Omega$ alors $Z(\omega)$ est le plus grand des réels :

$$Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_{N(\omega)}(\omega)$$

2) Soit j un entier strictement positif et t un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z \leq t / N = j)$.

3) a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une densité de Z.

4) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}$.

**Seul le résultat de la question 4) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.**

5) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(0) = 1$ et $g(t) = \frac{t \cdot \exp(-t)}{1 - \exp(-t)}$ pour $t > 0$.

a) Montrer que la fonction g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

b) Etablir, pour tout réel t appartenant à $[0, +\infty[$ et tout entier n positif, l'égalité :

$$g(t) = g(t) \cdot \exp(-(n+1) \cdot t) + \sum_{k=0}^{k=n} t \cdot \exp(-(k+1) \cdot t)$$

6) Justifier la convergence, pour tout entier positif k, de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cdot \exp(-(k+1) \cdot t)\,dt$ et la calculer.

7) Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente et égale à $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

8) On admet que la somme de cette série est $\frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$, c'est-à-dire $\int_0^1 \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}\,ds$, est égale à $\frac{\pi^2}{6b}$.

**Tournez la page S.V.P.**

## Problème

p est un réel vérifiant $0 < p < 1$.

Une entreprise dispose de N copies d'un logiciel. Une proportion p de ces disquettes est infectée par un virus. Il est malheureusement impossible de discerner une copie saine d'une copie contaminée.

On suppose que le nombre N peut s'écrire $N = nm$, n et m étant deux entiers strictement supérieurs à 1.

Un des responsables du service statistiques propose la méthode suivante pour assainir le lot :

Les N copies initiales forment la génération 0.

On prélève n disquettes au hasard et avec remise dans la génération 0, on les copie chacune en m exemplaires. Les $nm = N$ disquettes ainsi obtenues constituent la génération 1.

On procède de la même façon pour fabriquer la génération 2 à partir de la génération 1, la génération 3 à partir de la génération 2, etc. Durant tout le processus, la copie d'une disquette saine est saine, celle d'une disquette contaminée est automatiquement contaminée.

Le statisticien pense que si la proportion p initiale est faible, on a de bonnes chances d'obtenir un lot sain après un assez grand nombre d'opérations. L'objet de ce problème est de vérifier ou d'infirmer cette conjecture.

Résultat préliminaire

On considère un couple de variables aléatoires ( X , Y ) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que u et t sont deux entiers strictement positifs.

On suppose que X prend u valeurs réelles $x_1, x_2, \dots, x_u$ et que Y prend t valeurs réelles $y_1, y_2, \dots, y_t$.

g désigne une fonction définie sur IR.

Pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq u$, on définit le réel $E_j$ par : $$E_j = \sum_{i=1}^{i=t} g(y_i)\, P(Y = y_i \,/\, X = x_j) .$$

$E(g(Y))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $g(Y)$.

Démontrer que $$E(g(Y)) = \sum_{j=1}^{j=u} E_j\, P(X = x_j) .$$

fin du préliminaire

**k désigne dans tout le problème un entier positif ou nul.**

On note $T_k$ le nombre de disquettes infectées obtenues parmi les n disquettes tirées dans la génération k pour constituer la génération k + 1.

1) a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $T_k$ ?

b) Pour j décrivant l'ensemble de ces valeurs, déterminer la loi conditionnelle de la variable $T_{k+1}$ sachant que l'événement $(T_k = j)$ est réalisé.

2) a) En déduire, à l'aide du résultat préliminaire, une relation entre $E ( T_{k+1} )$ et $E ( T_k )$.

b) Montrer alors que pour tout entier positif k on a : $E ( T_k ) = np$.

3) On considère maintenant la variable aléatoire $Z_k = T_k ( n - T_k )$.

a) En utilisant le préliminaire avec le couple $( T_k , T_{k+1} )$ et une fonction g convenablement choisie,

montrer que la suite de terme général $E ( Z_k )$ est géométrique.

b) Donner l'expression de $E ( Z_k )$ en fonction de n , k et p.

c) Montrer que la suite de terme général $E ( Z_k )$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

4) a) Que signifie concrètement l'événement $( Z_k = 0 )$ ?

b) Quelle est la plus petite valeur de $j ( n - j )$ quand j décrit l'ensemble $\{ 1 , 2 , ... , n - 1 \}$ ?

c) En déduire, à l'aide de 3) c), que $P ( 0 < T_k < n )$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

d) Calculer la limite de $P ( Z_k = 0 )$ quand k tend vers l'infini et interpréter ce résultat.

e) Déterminer, <u>en fonction de n uniquement</u>, une valeur de k telle que $P ( Z_k = 0 ) > 0{,}99$.

5) On cherche maintenant à calculer la probabilité de l'événement F suivant :

F = "A partir d'un certain rang, les générations ne sont constituées que de disquettes infectées."

a) Montrer que la suite d'événements $(( T_k = n ))_{k>0}$ est croissante pour l'inclusion.

b) Que représente alors $P ( F )$ pour la suite $(P ( T_k = n ))_{k>0}$ ?

6) Soit j un entier vérifiant $0 < j < n$. Déterminer la limite de $P ( T_k = j )$ quand k tend vers l'infini.

7) En utilisant le résultat de la question 2), donner la valeur de $P ( F )$.

8) On cherche maintenant à calculer la probabilité de l'événement G suivant :

G = " A partir d'un certain rang, les générations ne sont constituées que de disquettes saines."

a) Calculer $P ( G )$.

b) Que pensez-vous de la méthode proposée par le statisticien ?

9) Reprendre les questions 1) , 2) , 3) dans le cas de tirages sans remise.
Le fait que les tirages se fassent avec ou sans remise a-t-il une influence sur les résultats obtenus dans ce problème ?

**FIN DE L'EPREUVE.**

**ECRICOME**

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 4714

**CONCOURS D'ADMISSION 2001**

Option scientifique

# MATHÉMATIQUES

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire - X.

2) Montrer que Y - X admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(-bt) \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{et } h(t) = \frac{ab}{a+b}\exp(at) \quad \text{pour } t \leq 0.$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité $P(Z \leq s) = 1 - \dfrac{b\exp(-as) + a\exp(-bs)}{a+b}$.

4) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

## Exercice 2

Soient n un entier $\geq 2$ et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I est la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E. Si $A = (a_{ij})$ appartient à E, on appelle trace de A et on note tr( A ), la somme $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ des éléments diagonaux de A. On considère l'application g de E x E dans IR, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1) Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.

2) a) Soit M une matrice de E. Montrer que $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}({}^tM)$.

b) En déduire que, pour tout couple ( A, B ) de matrices de E, on a $g(A, B) = g(B, A)$.

3) Soit A un élément de E. Montrer que g( A, A ) est la somme des carrés des coefficients de A.

4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $IR^n$ et f l'endomorphisme de $IR^n$ défini par :

$$f(e_1) = e_n \text{ et, pour tout entier k tel que } 2 \leq k \leq n,\ f(e_k) = e_{k-1}.$$

5) a) Montrer que f est un automorphisme de $IR^n$.

b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

*On suppose, pour les deux questions suivantes, que n = 4.*

6) Calculer $U^2$ et $U^3$ et montrer que $(I, U, U^2, U^3)$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire g.

7) On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(I, U, U^2, U^3)$ et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F.

**Problème**

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier *pair* supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Un joueur dispose initialement d'une fortune a. On note $F_n$ la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du du $n^{\text{ème}}$ lancer. On convient que $F_0$ est la variable aléatoire certaine égale à a. On obtient la fortune $F_{n+1}$ à partir de $F_n$ de la manière suivante :

avant le lancer n+1, le joueur mise une partie $X_n$, entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. Si le lancer n+1 fait apparaître pile, la fortune $F_{n+1}$ est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune $F_{n+1}$ est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples ( parties 1 et 2 ) dans lesquels les mises $X_n$ sont des *variables aléatoires*. A cet effet, on associe aux variables aléatoires $F_n$ des polynômes $G_n$ dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

E( X ) et V( X ) désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X.

**Résultats préliminaires .**

1) Pour tout entier positif ou nul n, montrer que $F_n$ prend ses valeurs dans $\{ 0 , 2 , 4 , ..., 2a_n \}$.

Pour tout entier positif ou nul n, on définit le polynôme $G_n$ par : $G_n( x ) = \sum_{k=0}^{a_n} P( F_n = 2k )x^k$

2) a) Calculer $G_n( 1 )$.

b) Que représente concrètement $G_n( 0 )$ ? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n( 0 )$ est croissante et convergente.

c) Montrer que $G'_n( 1 ) = E( F_n ) / 2$. Etablir de même que $V( F_n ) = 4G''_n( 1 ) + 2E( F_n ) - E( F_n )^2$.

3) Montrer que le polynôme $G_n$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

**Première partie**

Soit n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de $X_n$ sachant $\{ F_n = 2k \}$ est une loi uniforme sur $\{ 0, 1, 2, ...,2k - 1, 2k \}$.

1) Etablir, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2k$, l'égalité $P( F_{n+1} = 2j \cap F_n = 2k ) = \dfrac{1}{2k+1} P( F_n = 2k )$.

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer n + 1.)

2) En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P( F_{n+1} = 2j )$.

3) Montrer que pour x appartenant à [ 0 ,1 [, $G_{n+1}( x ) = \sum_{k=0}^{a_n} \dfrac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)\cdot(x-1)} P( F_n = 2k )$.

**Tournez la page S.V.P.**

4) En déduire, pour x appartenant à IR, l'égalité : $(1 - x)G_{n+1}(x) = \displaystyle\int_x^1 G_n\left(t^2\right) dt$ (1)

5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geq 0$, on a $E(F_n) = a$.

**Deuxième partie** *(Les deux sous parties A et B sont indépendantes)*

On suppose maintenant que la *loi conditionnelle* de la variable $X_n$ sachant $\{F_n = 2k\}$ est une loi binômiale de paramètres 2k et r, r étant un réel de ] 0 , 1 [.

**A) Simulation informatique de l'expérience**

On considère le programme suivant :

```
program simulation ;
var a , n , i , X , F : integer ;
        r , p : real ;
function mise( m : integer , s : real ) : integer ;
    .................
    end ;
begin
randomize ; readln ( n ) ; readln( p ) ; readln( r ) ; readln( a ) ; F := a ;
for i := 1 to n do
        begin X := mise( F , r ) ;
              if random < p then ......................
              ................................................
        end ;
end.
```

La fonction " random " est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur [0 , 1]. L'instruction " randomize " est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binômiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binômiale de paramètres m et s.

1) Rédiger les lignes manquantes ( déclarations et instructions ) dans la définition de la fonction " mise ".

2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_1, ..., F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

**B) Etude théorique**

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + (1 - p)(1 - r)^2$ et $B = 2[pr + (1 - p)(1 - r)]$.

1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$, on a : $G_{n+1}(x) = p\,G_n[(xr+1-r)^2] + (1-p)\,G_n[(x-xr+r)^2]$. (2)

*Dans les questions 2 et 3, on suppose que p = 1/2.*

On considère le trinôme Q, défini par $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$, et la suite $(u_n)$ définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q(u_n)$.

2) a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité : $Q(x) = x + A(x - 1)^2$.

b) Montrer que l'intervalle [0 , 1] est stable par Q.

c) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.

3) a) Montrer, en utilisant ( 2 ) et la convexité de $G_n$, que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a l'inégalité : $G_{n+1}(x) \geq G_n[Q(x)]$.

b) Etablir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité : $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n)$. Conclure.

*On revient au cas général p quelconque.*

4) a) Montrer à l'aide de ( 2 ), que la suite $(E(F_n))_n$ est géométrique de raison B.

b) En posant $p' = 1/2 - p$ et $r' = 1/2 - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.

c) Montrer que si la suite $(E(F_n))_n$ tend vers 0, alors la suite $(P(F_n = 0))_n$ tend vers 1.

5) a) Pour tout entier $n \geq 0$, établir à l'aide de ( 2 ) une relation entre $G''_{n+1}(1)$, $G''_n(1)$ et $G'_n(1)$.

b) Montrer que la suite de terme général $v_n = G''_n(1) / B^n$ est arithmético-géométrique.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une expression explicite de $G''_n(1)$ en fonction de a, n, A, B.

*On suppose, dans cette dernière question, que p = r = 1/3.*

6) a) Calculer les trois réel A, B, $B^2$ et en déduire un équivalent de $V(F_n)$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité $P(F_n < 2^{n/4} a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités : $2^{1/4} > 10/9$ et $3 \cdot \sqrt{2} > 4$ .)

**Fin de l'épreuve**

ecricome

J. 1697

**banque d'épreuves communes**

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

**CONCOURS D'ADMISSION 2002**

option scientifique

# MATHÉMATIQUES

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

# 1. EXERCICE.

$E$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
$Id_E$ l'identité de $E$, $\Theta$ l'endomorphisme nul.
$\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
Pour tout $n$, $\mathbb{C}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à l'entier $n$.
Si $g$ est un endomorphisme de $E$, on définit $g^n$ par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^n = g^{n-1} \circ g \ , \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_pX^p$, on note $P(g)$ l'endomorphisme de $E$ égal à :

$$P(g) = a_0Id_E + a_1g + \ldots + a_pg^p$$

On rappelle que pour tous polynômes $P, Q$ de $\mathbb{C}[X]$ on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

**Puissance d'un endomorphisme.**

On désigne par $T$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par $f$ un endomorphisme de $E$ satisfaisant à la relation :

$$T(f) = \Theta$$

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de $T$. Soient $\alpha$ et $\overline{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées. Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. On désigne par $\varphi$ l'application qui, à tout polynôme $P$ de $\mathbb{C}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de $P$ par $T$.

   a. Rappeler le théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes.

   b. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

   c. L'endomorphisme $\varphi$ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

3. On note $L_1, L_2, L_3$, les polynômes définis par :

$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha), L_2(X) = (X-1)(X-\overline{\alpha})$$

$$L_3(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$$

   a. Montrer que $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n)$ appartenant à $\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

et exprimer $a_n, b_n, c_n$ en fonction de $\alpha, \overline{\alpha}, n$. Vérifier que $c_n = \frac{1}{2}$.

c. Prouver que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

d. Justifier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vers des réels respectifs $a, b, c$.

4. On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

a. Montrer que $h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E)$.

b. Prouver enfin que $h$ est un projecteur.

## 2. EXERCICE.

On se propose ici d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où $x$ est un réel quelconque et $a_n$ un réel défini par :

$$a_n = \int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

### 2.1. Etude de l'absolue convergence de la série.

1. Prouver que pour tout $n$ entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}$$

2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur $x$, pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

### 2.2. Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.

On suppose maintenant, $-1 \leqslant x < 1$.

1. Pour $t \in [0, 1]$, montrer que :

$$2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1 - x)$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2dt}{2 - x - xt^2}$

**Tournez la page S.V.P.**

3. On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2 - x - xt^2}$$

Montrer que pour tous les entiers naturels $n$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{8\,|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

4. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

5. Donner la valeur de $a_0$, puis établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$$

6. Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à $10^{-p}$ près, le réel $x$ et l'entier $p$ étant supposés donnés.

## 3. PROBLEME.

Deux biens $C_1$ et $C_2$ indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché.
On appelle "panier de biens" tout couple $(x, y)$ de nombres réels appartenant à l'ensemble $D$ suivant :

$$D = \{(x, y) \text{ tels que } 0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y \leqslant 5, \quad 2x + 3y \leqslant 19\}$$

$x, y$ désignent respectivement les quantités du bien $C_1$ et du bien $C_2$ qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.
Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.
On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.
Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble $B$ des couples $(x, y)$ de $D$ tels que $x + y \leqslant 8$.
Les préférences de ce consommateur sur $B$, sont définies de la façon suivante :

$(x, y)$ est préféré ou indifférent à $(x', y')$ si et seulement si $(y-3)\exp(x+2) \geqslant (y'-3)\exp(x'+2)$

L'application $u$ définie sur $B$ par :

$$u(x, y) = (y-3)\exp(x+2), \text{ pour } (x, y) \in B$$

s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

### 3.1. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

   a. $(x, y)$ est préféré ou indifférent à $(x, y)$.

   b. Si $(x, y)$ est préféré ou indifférent à $(x', y')$ et si $(x', y')$ est préféré ou indifférent à $(x'', y'')$ alors $(x, y)$ est préféré ou indifférent à $(x'', y'')$.

   c. $(x, y)$ est préféré ou indifférent à $(x', y')$ ou $(x', y')$ est préféré ou indifférent à $(x, y)$.

**3.2. Courbes d'indifférence.**

1. Représenter graphiquement l'ensemble $B$ dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de $B$.

2. Dans ce qui suit, pour $m$ réel, on désigne par $A_m$ l'ensemble défini par :

$$A_m = \{(x, y) \in B \text{ tel que } u(x, y) = m\}$$

   a. Déterminer la fonction numérique $f_m$ telle que, pour $m$ fixé on ait, pour tout élément $(x, y)$ de $A_m$ , $y = f_m(x)$.

   b. Etudier et représenter dans le même repère que celui de la question 3.2.1, la fonction $y = f_m(x)$ pour $m = -8$, $m = 0$, $m = 8$.
   ( $e^{-2} \approx 0.14, e^{-3} \approx 0.05, e^{-4} \approx 0.02, e^{-5} \approx 0.007, e^{-6} \approx 0.002, e^{-7} \approx 0.001$ )

   c. Déterminer $m_0$ pour que la courbe représentative de $y = f_{m_0}(x)$ soit tangente à la droite $(T)$ d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

   Représenter $y = f_{m_0}(x)$ sur le graphique.
   ( $e^3 \approx 20.09, e^2 \approx 7.39, e \approx 2.72$ ).

**3.3. Recherche d'un élément maximal sur $B$ pour la relation de préférence.**

1. On admet que $B$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est borné.

2. Justifier l'existence d'un couple $(x_0, y_0)$ de $B$ préféré ou indifférent à tous les couples $(x, y)$ de $B$.

3. On note $\overset{\circ}{B}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples solutions du système :

$$\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < 5 \\ 2x + 3y < 19 \\ x + y < 8 \end{cases}$$

   Montrer que $u$ n'admet pas d'extremum local sur $\overset{\circ}{B}$.

4. On étudie dans cette question le maximum de la fonction $u$ sur $B$, sous la contrainte

$$2x + 3y = 19$$

   a. Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction $g$ de la variable réelle, définie sur $[2, 5]$ par :

$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3} \exp(x + 2)$$

   b. Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

**Tournez la page S.V.P.**

5. Etudier de même la recherche du maximum de la fonction $u$ sur $B$, sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Déduire de ce qui précède la valeur du couple $(x_0, y_0)$.

### 3.4. Etude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien $C_1$.
Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.
Pour tout $i$ de $\mathbb{N}^*$, le numéro $X_i$ affecté au $i^{ème}$ consommateur interrogé est une variable aléatoire.
Les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :
- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.
- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier $N$ , avec $N$ supérieur ou égal à 2.

Enfin, on note $T_1$ (respectivement $T_2$) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

#### 3.4.1. Partie 1

On suppose que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent la même loi, une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$.
Par convention : $C_n^j = 0$ pour $j > n$.

**Etude d'un cas particulier.**

1. Pour cette question seulement, $N = 3$.

   a. Donner la loi des variables $T_1$ et $T_2$.

   b. Calculer leur espérance et leur variance.

**Etude de la loi de $T_1$.**

1. Quel est l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $T_1$ ?

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, la probabilité de l'événement $\{T_1 > n\}$ est donnée par :

$$p\{T_1 > n\} = \frac{C_N^n}{N^n}$$

   En déduire la loi de $T_1$.

3. Montrer que l'espérance de $T_1$ est donnée par :

$$E(T_1) = (1 + \frac{1}{N})^N$$

4. De même, prouver que :

$$E(T_1^2 - T_1) = 2(1 + \frac{1}{N})^{N-1}$$

En déduire la variance $V(T_1)$ de $T_1$ en fonction de $N$.

5. Donner les limites de $E(T_1)$ et $V(T_1)$ lorsque $N$ tend vers l'infini .

**Etude de la loi de $T_2$.**

1. Montrer que, pour tous entiers naturels $r, n$ :

$$\sum_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$$

2. Quel est l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $T_2$ ?

3. Par récurrence sur l'entier $n$ inférieur ou égal à $N$, prouver que :

$$\forall\, j \in \{1, 2, \ldots N\} \qquad p\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant j\} = \frac{C_j^n}{N^n}$$

4. En déduire la loi de $T_2$.

5. Quelle est votre conclusion ?

### 3.4.2.- Partie 2

On suppose que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires absolument continues qui suivent une loi uniforme sur le segment $[1, N]$.

1. Montrer que la densité de probabilité $f_n$ d'une somme de $n$ variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$, est donnée sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Prouver que si la variable $X$ suit une loi uniforme sur le segment $[1, N]$, alors la variable $Y$, définie par $X = 1 + (N-1)Y$, suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

3. En déduire la loi de $T_2$.

ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 4681

**CONCOURS D'ADMISSION 2003**

# MATHÉMATIQUES

## option SCIENTIFIQUE

lundi 28 avril 2003 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**
**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page S.V.P.**

## 1. EXERCICE.

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

### 1.1. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.

2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

### 1.2. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$$

1. Prouver que pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1 + \frac{1}{u_n})$$

   En déduire que quels que soient les entiers naturels $p$ et $n$ :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(1 + \frac{1}{u_n})$$

2. En déduire que quels que soient les entiers naturels $k$ et $n$ :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1 + \frac{1}{u_n})$$

3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée $\alpha$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$$

   En passant à la limite pour $n$ fixé dans l'encadrement 1.2.2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$$

En déduire, lorsque $n$ tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

5. On pose :

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$$

Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$$

6. Prouver enfin que lorsque $n$ tend vers l'infini :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$$

## 2. EXERCICE.

Dans cet exercice, on adopte les notations suivantes :
$M_n(\mathbb{R})$ : ensemble des matrices carrées d'ordre $n$, à coefficients réels ($n$ entier naturel non nul).
$S_n(\mathbb{R})$ : le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
$A_n(\mathbb{R})$ : le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

On rappelle qu'une matrice $A$ de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$${}^tA = -A$$

${}^tA$ étant la matrice transposée de $A$.
On définit les applications $Tr$ et $\varphi$ par :

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B$ de $M_n(\mathbb{R})$, $\quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \varphi(A,B) = Tr({}^tAB)$

1. Montrer que $Tr$ est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall B \in M_n(\mathbb{R}) \qquad Tr(AB) = Tr(BA)$$

2. Prouver que $Tr$ est surjective. Donner la dimension du noyau de $Tr$.



**Tournez la page S.V.P.**

3. Prouver que $\varphi$ définit un produit scalaire dont la norme associée, $\| \ \|$, vérifie :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

4. Etablir que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad |Tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$$

5. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$ pour $\varphi$.

6. Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. En déduire que pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $M_n(\mathbb{R})$,

$$\underset{M\in S_n(\mathbb{R})}{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-m_{ij})^2 \text{ existe et vaut } \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})^2$$

## 3. PROBLEME.

On rappelle que :
- La fonction $\Gamma$ est la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$$

- Si $X$ suit une loi normale et si $\alpha$ est un réel non nul alors $\alpha X$ suit également une loi normale.

On admettra que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

### 3.1.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i^2$, où $X_1, X_2, \ldots.., X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition $F_{Y_1}$ de $Y_1 = X_1^2$.
2. En déduire que $Y_1$ est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.

3. Justifier que $Y_n$ suit une loi gamma de paramètres $(2, \frac{n}{2})$.

4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de $Y_n$.

5. On dit alors que $Y_n$ suit une loi du $Chi - deux$ à $n$ degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$. Soient $G_n$ la fonction de répartition de $Y_n$ et $\beta$ un réel dans l'intervalle $]0,1[$. Montrer qu'il existe un réel unique $t$ tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$

*Dans la suite du problème on considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (3.2) puis une estimation par intervalle de confiance (3.3 et 3.4) de la variance $\sigma^2$.*

Si $g$ est une fonction de $n$ variables réelles, et que $Z_n = g(X_1,\dots,X_n)$, on rappelle que :
- $g$ est un estimateur de $\theta$ ($Z_n$ est un estimateur de $\theta$) lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur $Z_n$ est dit sans biais lorsque pour tout $n$ entier naturel non nul :

$$E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur $Z_n$ est dit convergent lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} V(Z_n) = 0$$

**3.2. Estimation ponctuelle de $\sigma^2$.**

Pour $n$ entier naturel non nul, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - F_n)^2$$

1. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est un estimateur convergent sans biais de $m$.

2. Soit $n$ un entier naturel non nul.

a. Démontrer que :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

puis que :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

b. Prouver que :

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

c. En déduire un estimateur sans biais de $\sigma^2$.

### 3.3. Estimation par intervalle de confiance de $\sigma^2, m$ étant connue.

Pour $n$ entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$$

1. Justifier que $U_n$ suit une loi du $Chi-deux$ à $n$ degrés de liberté.
2. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \quad \text{et} \quad \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right]$$

En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ est $1-\alpha$.

### 3.4. Estimation par intervalle de confiance de $\sigma^2, m$ étant inconnue.

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à $n$ lignes et 1 colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour $n$ entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$$

1. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A$ définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ii} = n-1 & \\ a_{ij} = -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et $B$ la matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Justifier que $A$ est une matrice diagonalisable.

b. Calculer le produit $AB$, en déduire une valeur propre de $A$ et un vecteur propre de $A$ associé à cette valeur propre.

c. Montrer que :

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi - nId_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

d. En déduire la dimension de $Ker(\varphi - nId_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A$.

e. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre $n$. Prouver que : $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$.

f. Justifier l'existence d'une matrice $P$ inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à $B$ et d'une matrice diagonale $D$ que l'on déterminera, telle que :

$$P^{-1}AP = D \text{ avec } {}^tP = P^{-1}$$

(On ne demande pas la matrice $P$).

g. On note $(p_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ les coefficients de la matrice ${}^tP$, montrer que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$$

puis que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = 1$$



**Tournez la page S.V.P.**

2. Soit $q$ l'application de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = \ {}^tXMX \ \text{ où } \ M = \frac{1}{n}A$$

a. On pose $Y = \ {}^tPX$, montrer que :

$$q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$$

puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \left( x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$ , montrer que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j \right)^2$$

3. Pour tout $i$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ on pose :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}X_j$$

a. Justifier que $Y_i$ suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b. En utilisant les résultats de la question 3.4.2, montrer que :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$$

c. En admettant que les $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que $U_n$ suit une loi du $Chi - deux$ à $n-1$ degrés de liberté.

d. Montrer que les événements :

$$\left[ \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] \quad \text{et} \quad \left[ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right]$$

sont égaux.

e. En déduire que la probabililité de l'événement :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

est $1-\alpha$.

## 1. EXERCICE.

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère une matrice $S$ de $M_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres réelles $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots$, $\lambda_n$ distinctes deux à deux.
L'objet de l'exercice est de montrer que, si $k$ est un entier naturel impair et si une matrice $A$ de $M_n(\mathbb{R})$ commute avec $S^k$, alors elle commute avec $S$.
Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P$ inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice $D$ diagonale.
   Dans la suite de l'exercice un entier naturel impair $k$ est fixé.

2. On considère l'application $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $T$ fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k))$$

   a. Montrer que $f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   b. En déduire l'existence d'un unique polynôme $U$ de $E$ tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1, U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

.

3. Prouver que le polynôme $R$, défini par :

$$R(X) = U(X^k) - X$$

   est un polynôme annulateur de $D$ puis de $S$.

4. Soit une matrice $A$ de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.

   a. Montrer que pour tout entier naturel $p$,

$$AS^{pk} = S^{pk}A$$

   b. En déduire que les matrices $A$ et $S$ commutent, c'est-à-dire que :

$$AS = SA$$

5. On considère les deux matrices $A$ et $S$ de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Vérifier que $S$ possède deux valeurs propres distinctes.

   b. Montrer que $A$ commute avec toute puissance paire de $S$, mais ne commute pas avec $S$.

## 2. EXERCICE.

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n \, dx \end{cases}$$

### 2.1. Etude de la bijection réciproque de $f$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ dans un intervalle $J$ que l'on précisera. On note $f^{-1}$ la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de $f$ et de $f^{-1}$.

3. Justifier que :

$$\forall x \in J, \qquad \begin{aligned} \cos(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

4. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J\setminus\{1\}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de $f^{-1}$ à l'ordre 1.

### 2.2. Etude des dérivées successives de $f$.

1. Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ème}$ de $f$ sur $I$.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un polynôme $P_n$ tel que :

$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

3. Déterminer les polynômes $P_1$ et $P_2$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.P_n$$

   En déduire le polynôme $P_3$.

5. Déterminer, pour tout entier naturel $n$ non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme $P_n$.

### 2.3. Etude de la suite d'intégrales.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer $I_2$.

2. Déterminer les réels $a$ et $b$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \qquad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$

3. En posant $t = \sin x$, déterminer $I_1$.

4. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x}dx \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

   En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}I_n$$

## 3. PROBLEME.

### 3.1. Etude d'une variable discrète d'univers image fini.

Deux urnes $A$ et $B$, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus $n$ et $m$ boules $(n \geqslant 1, m \geqslant 1)$.
On s'intéresse au protocole suivant :
- On choisit l'urne $A$ avec la probabilité $p \in ]0,1[$, l'urne $B$ avec la probabilité $q = 1-p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes $A$ ou $B$ soit pleine, c'est-à-dire contienne $n$ boules pour l'urne $A$ ou contienne $m$ boules pour l'urne $B$, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

#### 3.1.1. Préliminaires.

On définit la suite de terme général $a_n$ par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}C_{2n}^n}{4^n} \quad n \geqslant 1$$

1. Calculer $a_1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$

3. Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel $l$ tel que :

$$\frac{1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   On admet que $l = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

#### 3.1.2. Etude de cas particuliers.

Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.
On note $R_n$ la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de $R_1, R_2$ et $R_3$. Justifier vos calculs.

2. Calculer l'espérance et la variance de $R_1, R_2$ et $R_3$.

**Dans toute la suite du problème $n \geqslant 2$.**

3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $R_n$ ?

4. Soit $k$ appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.

   a. Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)^{ème}$ tirage l'urne $A$ contienne $n-1$ boules et l'urne $B$ contienne $k$ boules.

   b. Donner alors la probabilité $p([R_n = k])$.

5. Vérifier que :

$$\forall\ k\ \in \{0, 1, \ldots, n-2\}, \qquad 2(k+1)p([R_n = k+1]) = (n+k)p([R_n = k])$$

6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que :

$$E(R_n) = n - (2n-1)p([R_n = n-1])$$

7. Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand $n$ tend vers plus l'infini.

8. De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$$

9. En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de $n$ et $E(R_n)$.

10. Ecrire un algorithme, en langage Pascal, permettant de calculer l'espérance de $R_n$, l'entier $n$ étant donné par l'utilisateur.

### 3.1.3. Retour au cas général.

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. En utilisant un argument probabiliste, montrer que :

$$(1): \quad q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{n-1} = 1$$

2. On pose $u_m = \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{n-1}$

   a. Etudier le sens de variation de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et donner à l'aide de la relation (1) un majorant de $u_m$ ne dépendant pas de $m$.
   Etablir alors la convergence de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

   b. Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, donner un équivalent de $C_{m-1+k}^{m-1}$ lorsque $m$ tend vers $+\infty$.

   c. En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

   $$\lim_{m\to+\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{m-1}$$

   d. Prouver alors que :

   $$\lim_{m\to+\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$$

### 3.2. Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Dans cette dernière partie l'urne $B$, initialement vide, a une capacité illimitée et l'urne $A$, initialement vide, peut contenir au plus $n$ boules ($n \geqslant 1$).
On s'intéresse au protocole suivant :
- On choisit l'urne $A$ avec la probabilité $p \in ]0,1[$, l'urne $B$ avec la probabilité $q = 1-p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'urne $A$ soit pleine, c'est-à-dire contienne $n$ boules, les choix successifs des urnes étant mutuellement indépendants.
On note alors $T_n$ le nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne $B$ et $(Z_j)_{j\in\{1,...,n\}}$, les variables aléatoires définies de la façon suivante :
- $Z_1$ compte le nombre de boules mises dans $B$ avant de mettre la première boule dans $A$.
- Pour tout entier $j$ de $\{2, \ldots, n\}$, $Z_j$ compte le nombre de boules mises dans $B$ entre la $(j-1)^{\text{ème}}$ boule et la $j^{\text{ème}}$ boule mises dans $A$.
On admet que $T_n$ est une variable aléatoire.

1. Quel est l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $T_n$ ?

2. Pour tout entier naturel $k$ appartenant à $T_n(\Omega)$, donner la valeur de $p([T_n = k])$.

3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\left([T_n = k]\right) = 1$$

4. Pour tout entier $j$ de $\{1, \ldots, n\}$, donner la loi, l'espérance, la variance de $Z_j$.

5. Exprimer $T_n$ en fonction des variables $(Z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et de l'entier $n$.

6. En déduire l'espérance et la variance de la variable $T_n$.

ecricome

www.ecricome.org

Banque d'épreuves communes aux concours des Ecoles
escbordeaux/euromedmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

# CONCOURS D'ADMISSION 2005

# MATHÉMATIQUES
## Option Scientifique

Lundi 2 mai 2005 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidat bénéficiant de la mesure «Tiers-temps» : 8h00-13h20

**Aucun document n'est autorisé. Aucun instrument de calcul n'est autorisé.**

**L'énoncé comporte 6 pages**

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

*Tournez la page SVP*

## 1. EXERCICE

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels $a, b, c$ étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

1. Déterminer trois matrices $I, J, K$ dont les coefficients ne dépendent pas de $a, b, c$, telles que :
$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$$
Calculer $J^2$, $K^2$ et $K^3$. Déterminer une relation entre $I, J$ et $K^2$, ainsi qu'un polynôme annulateur de $K$.
Quelles sont les valeurs propres possibles de $K$ ?

2. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.
Déterminer $P$ et $D$ vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{11} < d_{22} < d_{33}$ (où $d_{ij}$ est le coefficient d'indices $i, j$ de $D$.)

3. En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de $I, K, K^2$, déterminer la matrice $({}^tP)MP$.
En déduire les valeurs propres de la matrice $M$.
Discuter suivant les valeurs de $a, b, c$ le nombre de valeurs propres distinctes de $M$ et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4. On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.
On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)\, X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   a. On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :
   $$f(x,y,z) = \frac{({}^tX)\, MX}{\|X\|^2}$$

      i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que
      $$f(x,y,z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de $f$ sur $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

b. On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

i. Soit $B$ une solution de l'équation (s'il en existe).
Montrer que $B$ et $M$ commutent.
En déduire que si $X$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda$ de $M$ attaché à la valeur propre $\lambda$, alors $BX$ appartient aussi à $E_\lambda$.
Montrer que les vecteurs propres de $M$ sont également vecteurs propres de $B$.
Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue $\Delta$ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

## 2. EXERCICE.

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

1. Montrer que pour tout entier $n$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2.

a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x).$$

b. En déduire que pour tout entier $n$, $u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $(\frac{u_{n-1}}{n^2})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c. Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier $n$ non nul, $1 \leqslant \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de $u_n$ en $+\infty$.

3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. A l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L$ que l'on précisera.

*Tournez la page SVP*

4. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \quad \text{puis} \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_{n-1}).$$
Justifier alors qu'il existe un entier naturel $N_0$ tel que pour tout entier $n$, si $n \geqslant N_0$ alors $u_n \geqslant u_{n-1}-\dfrac{1}{2}$.
Montrer que $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $1+u_n-u_{n-1}$, puis que la suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un certain rang.

5. Ecrire en langage Pascal une fonction récursive ayant pour nom **suite** qui calcule le terme d'indice $n$ de la suite lorsque $u_0=1$.

## 3. PROBLEME.

$X$ et $Y$ étant deux variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, admettant pour densités respectives $f_X$ et $f_Y$, on rappelle que la fonction $h$ définie par
$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt$$
est une densité de la variable aléatoire $X+Y$.

### Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel $\alpha$ l'intégrale $J_\alpha$ converge où
$$J_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel $\alpha$ supérieur ou égal à 1 on a :
$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,dt=\frac{1}{2\alpha}J_\alpha$$
En déduire que, pour tout réel $\alpha$ supérieur ou égal à 1 on a :
$$J_{\alpha+1}=\frac{2\alpha-1}{2\alpha}J_\alpha$$

3. Calculer $J_1$.
Pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, calculer $J_n$.

**Partie II : Loi de Student à $n$ degrés de liberté.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g_n$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $k_n$ tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
   Exprimer $k_n$ à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$. (On pourra, en justifiant sa validité, utiliser le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$).

2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité $f_n$. (On dira que $X$ suit une loi de Student à $n$ degrés de liberté).

   a. Montrer que $X$ admet une espérance si et seulement si $n > 1$ et la calculer dans ce cas.

   b. Montrer que $X$ admet une variance si et seulement si $n > 2$, exprimer $V(X)$ en fonction de $k_n$, $n$ et $J_{\frac{n-1}{2}}$ puis vérifier que

$$V(X) = \frac{n}{n-2}$$

*Lorsque $n = 1$ la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle* **loi de Cauchy** *et une densité sur $\mathbb{R}$ est donc :*

$$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

**Partie III : Simulation d'une loi.**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un rayon lumineux part de l'origine $O$ et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$, en un point $M$. On suppose que $\Theta$, mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$, est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\tan \Theta$. En déduire que $\tan \Theta$ est une variable aléatoire à densité, dont on explicitera une densité.

*Tournez la page SVP*

2. Exprimer $Y$, variable aléatoire égale à l'ordonnée du point $M$, en fonction de $\Theta$. Reconnaître la loi de $Y$.

3. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On considère le programme informatique suivant :

```
program simu;
var u,x:real;
begin
randomize;
u:=random;
x:=sin/cos(pi*u-pi/2);
end.
```

Quelle loi de probabilité ce programme permet-il de simuler ? Expliquer.

**Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.**

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit $Y$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition $F$. On notera $G$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

   a. On suppose dans cette question que $Y$ est une variable aléatoire de densité $f$ continue sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de $f$ et montrer que $Y$ et $-Y$ ont même loi si et seulement si $f$ est paire.
   On suppose cette condition vérifiée. Exprimer $G$ à l'aide de $F$ et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité $g$ de $|Y|$ en fonction de $f$.

   b. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité $g$, et que $Y$ et $-Y$ ont la même loi.
   Montrer que, pour tout réel $x$, $P([Y = x]) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$
   Exprimer $F(x)$ en fonction de $G$ et de $x$. (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
   En déduire que $Y$ est une variable à densité et exprimer une densité $f$ de $Y$ en fonction de $g$.

2. Soit $c$ un réel strictement positif. A l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}} dt$$

converge et la calculer.

3. Soient $X$ et $X'$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de même densité $\varphi$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$ ?

b. Montrer qu'une densité $h$ de la variable aléatoire $\ln |\frac{X}{X'}|$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

c. Déterminer une densité de la variable aléatoire $|\frac{X}{X'}|$ puis reconnaitre la loi de $\frac{X}{X'}$.

ecricome

www.ecricome.org

+ copie 24 pages bleu pâle

# CONCOURS D'ADMISSION 2006

# MATHEMATIQUES

## Option SCIENTIFIQUE

**Mercredi 19 avril 2006 de 8 h 00 à 12 h 00**
**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps": 8 h 00 - 13 h 20*

**Aucun instrument de calcul n'est autorisé. Aucun document n'est autorisé.**

**L'énoncé comporte 7 pages.**

**Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes, mais brèves, de leurs affirmations.**

Tournez la page S.V.P.

## 1. EXERCICE.

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$\langle x\,,\,y\rangle = {}^tXY$$

où $X$ et $Y$ désignent les matrices colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base $\mathcal{B}$.
Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de $F$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et $Id$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour $f$ endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice $M$ dans la base canonique, on note $f^*$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

### 1.1. Quelques propriétés de $f^*$.

Dans cette question $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\,y\rangle = \langle x\,,\,f^*(y)\rangle.$$

2. Montrer que $f^*$ est le seul endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\,y\rangle = \langle x\,,\,g(y)\rangle.$$

3. Soit $F$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par $f$ (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

   a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$ calculer $\langle x\,,\,f^*(y)\rangle$.
   b. En déduire que $F^\perp$ est stable par $f^*$.

### 1.2. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_u$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f_u^*$ appartient à $\mathcal{E}$.

3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$ , $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur $e_1$.

   a. Montrer que $e_1$ est un vecteur propre commun aux éléments $f_u$ de $\mathcal{E}$.

   b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par $f_u$.

   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f_u$ .

   d. Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$ .

   e. Montrer que $(e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   f. Justifier alors que la matrice de $f_u$ dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & l \end{pmatrix}$$

   où $e, f, g, h, l$ sont des réels.

## 2. EXERCICE.

On considère la fonction $f$ des deux variables réelles $x, t$ , définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. Etude de $f$.

   a. Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$.

   b. Pour $(x,t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

   c. Montrer que pour $(x,t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel $\alpha$ strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\, dt$$

est convergente.
En déduire que pour tout réel $x$ positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\, dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\, dt.$$

3. On considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\, dt.$$

a. Sans chercher à calculer la dérivée de $g$, montrer que $g$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

b. Soit $x_0 \in [0, +\infty[$.
Montrer que pour $(x, t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

$$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x - x_0|^2.$$

c. En déduire que pour $x_0 \in [0, +\infty[$,

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt\right| \leqslant \frac{|x - x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt.$$

d. Montrer que $g$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'$ est définie par

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Retrouver le sens de variations de $g$.

## 3. PROBLEME.

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in ]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les $n$ premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{ème}$ l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine

(si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
$\Omega$ désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $P_i$ l'événement "le $i^{ème}$ lancer amène Pile" et $F_i$ l'événement contraire.
Les trois parties sont indépendantes.

### 3.1. Etude des longueurs de séries.

1. On note $L_1$ la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements $P_i$ et $F_i$ pour $i$ entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que
   $$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$
   Vérifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$
2. On note $L_2$ la longueur de la deuxième série.
   a. Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements $P_i$ et $F_i$ pour $i$ entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b. En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1.$$
   c. Montrer que la variable aléatoire $L_2$ admet une espérance égale à 2.

### 3.2. Etude du nombre de séries lors des $n$ premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.
On note $N_n$ le nombre de séries **lors des $n$ premiers lancers** :
-La première série est donc de longueur $k < n$ si les $k$ premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{ème}$ l'autre côté et de longueur $n$ si les $n$ premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
-La dernière série se termine nécessairement au $n^{ème}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP...(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1 \ ; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2 \ ;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3 \ ; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4 \ ;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que $N_n$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de $N_1$, $N_2$ et $N_3$ et donner leurs espérances.

2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par $N_n$) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

3. *Simulation informatique :*
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $X_k$ la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{ème}$ lancer amène Pile et 0 sinon.
   On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random(2)` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$). Compléter le programme informatique suivant pour que, `m` étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les $m$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans le tableau `X`) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans le tableau `N`).

```
program simulation;
const nmax=100;
type suite=array[1..nmax]of integer;
var X, N: suite;
  m: integer;
begin
readln(m);
randomize;
X[1]: =....; N[1]: =....;
for i: =2 to m do begin
     X[i]: =...
     .....
     .....
     end;
end.
```

4. **Fonction génératrice de $N_n$.**
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

a. Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire $s^{N_n}$ avec $G_n(s)$.

b. Que représente $G'_n(1)$?

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$P\left((N_n = k) \cap P_n\right) = \frac{1}{2}P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2}P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P\left((N_n = k) \cap F_n\right) = \frac{1}{2}P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) + \frac{1}{2}P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right).$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$

d. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

e. Déterminer le nombre moyen de séries dans les $n$ premiers lancers.

### 3.3. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel $x$ on a

$$1 - x \leqslant e^{-x}.$$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n.$$

a. Justifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

b. Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant 3.3.1, que

$$P(C_n) \geqslant 1 - exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)).$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

c. Comparer pour l'inclusion les événements $C_n$ et $C_{n+1}$. Que peut-on en déduire pour

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) \ ?$$

d. Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i) = 1.$$

3. En considérant les événements $A_n$ "on obtient Pile au $(2n)^{ème}$ et au $(2n+1)^{ème}$ lancers", montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

ecricome
www.ecricome.org

CONCOURS D'ADMISSION 2007

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

# 1. EXERCICE.

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque $x$ est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. a. Montrer que pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in ]0,1[.$$

   b. En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2.

   c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$ ?

   d. Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

   Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} V_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

3. a. Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\right].$$

   b. Déterminer un équivalent, quand $k$ tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})$.

   c. En déduire que $u_n$ est équivalent, quand $n$ tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$ ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

   a. Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

   b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.

   c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

## 2. EXERCICE.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de $A$", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que $Tr$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice $A$.

1. Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A,B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{ où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

   Exprimer $\varphi(A,B)$ en fonction des coefficients de $A$ et $B$ et montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note $N$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

   $$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

   a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

   $${}^tP({}^tAA)P = D$$

   où $P$ est une matrice orthogonale et $D$ une matrice diagonale.
   On notera par la suite $\lambda_i$ le coefficient $d_{ii}$ de la matrice $D = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   b. Soit $\lambda$ une valeur propre de ${}^tAA$ et $X$ un vecteur propre associé.
   En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

   c. On pose $S = \ {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que

   $$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

d. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

e. On note $E_i$ le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à $n$ lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$$^tE_iSE_i = ||^tBPE_i||^2,$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer $^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de $S$.
Qu'en déduit-on, pour $i$ entier compris entre 1 et $n$, sur le signe de $s_{ii}$ ?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

## 3. PROBLEME.

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

### 3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité $X$ et $Y$ définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de $X$ et $Y$ par

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel $\lambda$,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(Cov(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

b. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(Cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \ ?$$

### 3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

$n$ désigne un entier non nul, $A$ et $S$ deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ la fonction $L_n$ par :

$$\begin{cases} L_n(a,b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leqslant a \leqslant A \\ L_n(a,b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

1. Justifier que $L_n$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$.
   Montrer que $L_n$ n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.
2. Montrer que
   $$\forall a \in [0,A[,\ \forall b \in ]0,+\infty[,\ L_n(a,b) < L_n(A,b).$$
   Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout $a$ de $]A,+\infty[$.
3. Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(b) = L_n(A,b)$.
   Montrer que $g$ admet un maximum absolu sur $]0,+\infty[$, atteint en un point $b_0$ que l'on exprimera en fonction de $A, S, n$.
4. Déduire de ce qui précède que $L_n$ admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point $(a_0,b_0)$ que l'on précisera.

### 3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire $X$ de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de $Y$ et la reconnaître.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $X$ admet un moment d'ordre $p$, $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.

5. *Simulation de la loi* $\mathcal{E}(a, b)$.

   a. Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b \ln(1 - U) + a$ suit une loi $\mathcal{E}(a, b)$.

   b. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a, b)$.

### 3.4. Partie III : Estimation des paramètres $a$ et $b$

$a$ et $b$ désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a, b)$.
Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires $S_n$ et $Y_n$ définies par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de $a$ et $b$.

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule $S_n$ et $Y_n$ (les valeurs étant stockées

respectivement dans `S` et `Y`).

```
begin
   randomize ;
   readln(a,b,n) ;
   X:=tirage(a,b) ;
   S:=... ;
   Y:=...;
   for i:= 2 to n do...
                ......
                ......
                ......
   ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.

3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a)$?
   En déduire une densité de $S_n$.

4. Déterminer la fonction de répartition de $Y_n$.
   En déduire que $Y_n$ suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera $a_n$ et $b_n$).
   Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

5. a. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de $Y_n$ en tant qu'estimateur de $a$.

   b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
   A l'aide de ce qui précède, prouver que $(Y_n)$ est une suite d'estimateurs de $a$ asymptotiquement sans biais, convergente.

6. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$.

   a. Calculer le biais de $Z_n$ en tant qu'estimateur de $b$.

   b. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de $Z_n$. Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} Cov(S_n, Y_n).$$

c. A l'aide du préliminaire montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

et en déduire que $(Z_n)$ est une suite d'estimateurs de $b$ asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction $L$ sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$

a. Montrer que $L$ est la fonction $L_n$ définie dans la partie I, pour des valeurs de $A$ et $S$ que l'on précisera en fonction des $x_i$.

b. Comparer les estimations de $a$ et $b$ obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de $Y_n$ et $Z_n$ avec les valeurs $a_0$ et $b_0$ obtenues dans la partie I.

# 1. EXERCICE.

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(a, b, c)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note $p$ le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et $q$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.
$Id$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle . , . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$ ?

2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices $P$ et $Q$ de $p$ et $q$ dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a. Montrer que :
   $$M^2 = -Q.$$

   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de $f$ et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de $f$.

   d. Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
   $f$ est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel $\theta$, on définit l'endomorphisme $g_\theta$ par :
   $$g_\theta = Id + (\sin\theta)f + (1 - \cos\theta)f^2$$
   où $f^2 = f \circ f$.

   a. Pour $\theta$ et $\theta'$ réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec $\theta''$ réel.

   b. En déduire que, pour tout réel $\theta$, $g_\theta$ est inversible et déterminer son inverse.

## 2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif $x$, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif $x$, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. *Etude de la dérivabilité de $F$.*

   a. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

   $$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   c. Montrer qu'il existe un réel $K$ tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

   $$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|.$$

   d. En déduire que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

## 3. PROBLEME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, $U$ désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, $g$ une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t)\,dt$.
L'espérance d'une variable aléatoire $X$ sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul $n$, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les $f_i$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

### 3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de $U$.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à $J$.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $U$.
   On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $J$.

b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On considère pour " $n$ suffisamment grand " que $\dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi(1,96)=0,975$ où $\Phi$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour $J$, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir $S_n$.

3. *Application :*

a. A l'aide du changement de variable $t=\sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=\pi$.

b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur $t$ du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
En utilisant le résultat de la question **3.1.2**. et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de $\pi$.

```
begin
 randomize ;
 readln(n) ;
 J := 0 ;
 for i := 1 to n do ....
 ...........
 writeln (' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.
```

### 3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1-U$ .
   On définit la variable aléatoire $Y$ par $Y = \frac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$ ?

2. On suppose $g$ strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0,1]^2$,
   $$(g(u) - g(w))\,(g(1-u) - g(1-w)) \leqslant 0.$$

   b. Soit $W$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de $U$.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U) - g(W))\,(g(1-U) - g(1-W))\right]$ ?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E\left[g(U)g(1-U)\right] \leqslant \left(E\left[g(U)\right]\right)^2.$$
   *On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.*

   c. Montrer alors que, lorsque $g$ est strictement monotone, $V(Y) \leqslant \frac{1}{2}V\left(g(U)\right)$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour $J$ au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note $\ell_n$ la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de $n$.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages $N$ de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur $\ell_n$ d'intervalle de confiance ?

### 3.3. Réduction de la variance par stratification.

#### 3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in ]0,+\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note :
$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$$
la matrice hessienne de $f$ en $A = (a_1, a_2, a_3)$.
Justifier que, pour tout $A \in ]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne $H$ à trois lignes, non nulle, on a :
$$^tH\,\nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. $f$ admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$ ?

4. On cherche désormais les extremums de $f$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que $f$ admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

### 3.3.2. Méthode de stratification.

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles $I_1, I_2$ et $I_3$ par
$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$
et on considère quatre variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, U_3$ et $T$, de lois uniformes respectivement sur $I_1, I_2, I_3$ et $[0, 1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U} = U_1 1_{[T \in I_1]} + U_2 1_{[T \in I_2]} + U_3 1_{[T \in I_3]}$ où $1_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement $A$. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément $\omega$ de l'univers $\Omega$ par :
$$\widetilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel $x$,
$$P(g(\widetilde{U}) \leqslant x) = aP(g(U_1) \leqslant x) + (b-a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1-b)P(g(U_3) \leqslant x).$$
En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour $g$, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$E\left(g(\widetilde{U})\right) = aE\left(g(U_1)\right) + (b-a)E\left(g(U_2)\right) + (1-b)E\left(g(U_3)\right).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, $n_1$ points dans $I_1$, $n_2$ points dans $I_2$, $n_3$ points dans $I_3$. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3})$ telles que :
• $U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}$ ont même loi que $U_1$,
• $U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}$ ont même loi que $U_2$,
• $U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3}$ ont même loi que $U_3$,
et on note $Z$ la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\left(g(U_1)\right) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\left(g(U_2)\right) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\left(g(U_3)\right).$$

4. *Application numérique :*
On suppose que, pour un certain choix de la fonction $g$ et des réels $a$ et $b$, on a

$$a^2V\left(g(U_1)\right) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\left(g(U_2)\right) = 1, \quad (1-b)^2V\left(g(U_3)\right) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles ($n_1$ points dans $I_1$, $n_2$ points dans $I_2$, $n_3$ points dans $I_3$). Quelles valeurs faut-il donner à $n_1, n_2, n_3$ pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de $J$ avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

écricome

CONCOURS D'ADMISSION 2009

1

# Mathématiques

## Option Scientifique

**Jeudi 14 mai 2009 de 8 h 00 à 12 h 00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle «trace de $A$», et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que $Tr$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice $A$.
Pour toutes matrices $M, N$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle M \mid N\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tM\ N\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de $M$ (resp. $N$) situé à l'intersection de la $i$-ième ligne et de la $j$-ième colonne.

Soit $A$ une matrice symétrique, on considère

- l'application $\Phi_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de $A$,
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs de $\Phi_A$,
- l'ensemble $\Gamma = \left\{\lambda - \mu, \quad (\lambda,\mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\right\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de $A$.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels $A$ :

★ $\Phi_A$ est un endomorphisme diagonalisable,

★ les valeurs propres de $\Phi_A$ forment l'ensemble $\Gamma$ c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}\left(\Phi_A\right) = \Gamma$.

## PARTIE I : Etude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- $\Phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
- la famille $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice $T$ de l'endomorphisme $\Phi_A$ dans la base $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   En déduire la diagonalisabilité de $T$.

2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de $T$ ?

3. Déterminer une base de l'espace propre associée à 0 de la matrice $T$.

4. Calculer $TX_1$ et $TX_2$ où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter alors une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $T = PDP^{-1}$ (*on ne demande pas le calcul de* $P^{-1}$).

## PARTIE II : Réduction de $\Phi_A$ dans le cas général

On revient désormais au cas général, $A$ étant une matrice symétrique quelconque de$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\Phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Prouver que l'application $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \langle M \mid N \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Etablir que, pour toutes matrices $M, N$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \Phi_A(M) \mid N \rangle = \langle M \mid \Phi_A(N) \rangle .$$

   En déduire que $\Phi_A$ est un endomorphisme diagonalisable.

4. Soient

   - $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$,
   - $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\mu$.

   On pose alors :

$$M_{X,Y} = X\ {}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

   (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$ puis que ${}^tY\ A = \mu {}^tY$.

   (b) Etablir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de $\Phi_A$ associé à la valeur propre $\alpha$.

   (a) On suppose que pour tout vecteur propre $Z$ de $A$, on a $MZ = 0$.

   Montrer alors que $M = 0$.

   En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre $Z_0$ de $A$ tel que $MZ_0 \neq 0$.

   On note $\mu$ la valeur propre associée à $Z_0$.

   (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que $MZ_0$ est un vecteur propre de $A$ pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de $\alpha$ et $\mu$.

   (c) Conclure.

écricome

# EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction $f$ définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt.$$

1. Domaine de définition de $f$ :

   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente et donner sa valeur.

   (b) Soit $x$ un réel fixé. Etablir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt$.

   Par conséquent, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de $f$ :

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel $x$ strictement positif et pour tout réel $t$ positif ou nul :

   $$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

   $$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

   (c) Préciser alors la nature de la branche infinie de la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de $f$ :

   (a) A l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque $x$ est un réel strictement positif :

   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}du.$$

   (b) Montrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

   (c) Justifier, pour tout réel $x$ strictement positif, l'égalité suivante :

   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

   En déduire que $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. Etude locale de $f$ et $f'$ en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel $x$ strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}du$ est convergente.

(b) A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que $f$ est une fonction de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

## PROBLEME

Dans tout le problème, $a$ et $b$ désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement $a$ boules blanches et $b$ boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard» et « avec remise» d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

### PARTIE I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable $Y$.
2. Pour tout entier $k$ compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.
3. Vérifier que
$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b},$$
et que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $b$, la formule suivante est vraie :
$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$
4. Soient $M$ un entier naturel non nul et $a_0, a_1, .., a_M$ une famille de réels. Etablir que :
$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M.$$
5. En déduire que $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Tournez la page s.v.p.

## PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$ , $q_n$ la probabilité de l'événement, noté $N_n$ : « la $n$-ième boule tirée est noire ».
- pour tout entier $n \geqslant 0$ , $X_n$ le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des $n$ premiers tirages. Par convention $X_0 = 0$.
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$ , $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des $n$ premiers tirages, on a obtenu exactement $k$ boules noires ».

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ , calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$ ?

2. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels $n$ et $k$ non nuls :
$$(\mathcal{A}) : N.p_{n,k} = (a+k)\,p_{n-1,k} + (b+1-k)\,p_{n-1,k-1}.$$

3. Calcul de l'espérance de $X_n$ :
   (a) A l'aide de la formule $(\mathcal{A})$ obtenue dans la question **II.2.**, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$ :
$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)]\,p_{n-1,k}.$$
   puis justifier que :
$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$
   (b) A l'aide de la formule ci-dessus, écrire une fonction en Pascal fournissant le calcul de $E(X_{2009})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.
   (c) En utilisant la dernière formule établie à la question **II.3.a**, prouver que, pour tout entier naturel $n$, on a :
$$E(X_n) = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

4. Calcul de $q_n$ :
   (a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante valable pour tout entier naturel $n$ :
$$N.q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)\,p_{n,k}.$$
   (b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer alors $q_{n+1}$ en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de $q_{n+1}$ en fonction de $n, b, N$.

5. Calcul de la variance de $X_n$ : On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
$$u_n = E\left(X_n(X_n - 1)\right).$$
   (a) A l'aide de la formule $(\mathcal{A})$ obtenue dans la question **II.2.** montrer que l'on a :
$$N.u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k]\,p_{n-1,k}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

(c) A l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

(d) Donner alors la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

■

écricome

CONCOURS D'ADMISSION 2010

1

# Mathématiques

## Option Scientifique

**Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 9 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

   (a) Vérifier que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

   En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ?

   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

   (b) Soit $k$ un entier naturel non nul.

   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$.

   (c) On introduit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

   A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction $f$, montrer que :

   $$\forall x \in ]-\infty, 0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**

(a) En utilisant la question **2**, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du.$$

(b) *On considère l'intégrale* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du$ *que l'on ne cherchera pas à calculer.*

Donner alors un équivalent de $v_n$ puis un équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de $I$.

# EXERCICE 2

Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$. On considère l'application $f$ qui à un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. Etude de $f$. Soit $n$ un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

   (a) Justifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, .., n\}$.

   Etablir alors que la matrice $A_n$ de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

   (c) Prouver que $f$ est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

   (d) Soit $P$ un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$.
   Etablir que : $\lambda = -4\deg(P)$.

   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $H_n$ de degré $n$ tel que

   $$(\mathcal{E}_n) : f(H_n) = -4nH_n.$$

   **Rappel** : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1.

2. Etude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad f(H'_n) = -4(n-1)H'_n.$$
   En déduire que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad H'_n = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ ?
   Calculer alors $H_2$ et $H_3$.

   (c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :
   $$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$
   Ecrire un programme en Pascal calculant $u_{2010}$.

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.

   On note $U$ l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :
   $$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$$
   ainsi que la fonction $V$ définie sur $U$ par :
   $$\forall (x,y,z) \in U, \quad V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

   (a) Etablir que $(\alpha,\beta,\gamma)$ est un point critique de $V$ si et seulement si $(\alpha,\beta,\gamma)$ est solution du système :
   $$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

   (b) On introduit le polynôme $Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.
   Montrer que $(\alpha,\beta,\gamma)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines $\alpha, \beta, \gamma$.

   (c) Prouver que si $(\alpha,\beta,\gamma)$ est un point critique de $V$ alors
   $$Q'' - 4XQ' = -12Q$$
   puis que $Q = H_3$ (cf. question **2.b**).

   Donner alors les points critiques de $V$.

ecricome

# PROBLEME

Soit $r$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient $r$ boules numérotées $1, 2, .., r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout entier $i \in \{1, 2, .., r\}$, on note $Y_i$ la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir $i$ boules distinctes ». On convient que $Y_1 = 1$.

On désigne par $X_r$ la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir les $r$ boules numérotées $1, 2, .., r$ ». Il est immédiat que $X_r = Y_r$.

Par exemple, en supposant que $r = 4$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

$$3, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 2, \quad 4, \quad 1, \quad ...$$

alors on a : $Y_1 = 1, \quad Y_2 = 4, \quad Y_3 = 8, \quad Y_4 = X_4 = 11.$

La partie **I** établit certains résultats préliminaires qui seront utilisés dans d'autres parties.

La partie **II** se consacre à l'étude de la loi des variables discrètes $Y_{i+1} - Y_i$ afin d'en déduire l'espérance et la variance de la variable discrète $X_r$.

La partie **III** détermine la loi de la variable $X_r$ puis étudie la distribution asymptotique de la variable $X_r$ autour de sa moyenne.

On note exp la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

## PARTIE I : Résultats préliminaires.

1. Etude d'une suite.

   On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln(n).$

   (a) Ecrire un programme Pascal permettant de calculer $u_n$ pour un entier $n \geqslant 1$ donné.

   (b) A l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

   En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

*Tournez la page s.v.p.*

(c) Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (*on ne demande pas le calcul de la limite).*

2. Loi de Gumbel.

Soit $Z$ une variable aléatoire continue. On suppose que $Z$ suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition $F_Z$ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \exp\left(-\exp\left(-t\right)\right).$$

(a) Vérifier que la fonction $F_Z$ est bien une fonction de répartition puis que $Z$ possède une densité que l'on précisera.

(b) On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$.

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $W$.

En déduire que la variable aléatoire $W$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

(c) Pour tout entier $k$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx$ est absolument convergente.

(d) En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable $Z$ admet un moment d'ordre $k$ valant :

$$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx.$$

## PARTIE II : Etude de la variable $X_r$

1. Etude du cas $r = 3$.

On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3 chacune pouvant être piochée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

(a) Soit $n$ un entier naturel non nul.

Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et $C_n$ : «les $n$ premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro».

Calculer la probabilité $P\left(C_n\right)$. En déduire la probabilité $P\left(Y_2 > n\right)$ puis donner la loi de la variable $Y_2$.

(b) Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$$

puis que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant 2, \quad P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

| Dans toute la suite du problème, $r$ désignera un entier supérieur ou égal à 2. |
|---|

2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, .., r-1\}$.

(a) Justifier que :

$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, ..\} = \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2, .., i-1\}$ et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

(b) Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant i, \quad P_{(Y_i = k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

(c) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres puis établir que :

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r.i}{(r-i)^2}.$$

3. Espérance et variance de $X_r$.

(a) Justifier que : $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.

En admettant que les variables $Y_2 - Y_1$, $Y_3 - Y_2, \ldots$, $Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que :

$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.$$

(b) A l'aide de la question **I.1**, prouver l'existence de deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$E(X_r) \underset{r \to +\infty}{=} r \ln(r) + \alpha r + o(r) \quad \text{et} \quad V(X_r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \beta r^2.$$

## PARTIE III : Loi de $X_r$ et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

Pour tout entier $k \in \{1, 2, .., r\}$ et tout entier naturel $m \geqslant 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$ : «le numéro $k$ n'a pas été pioché durant les $m$ premières pioches».

1. Loi de $X_r$.

   Soit $m$ un entier naturel non nul.

   (a) Pour tout entier $k \in \{1, 2, .., r\}$, calculer successivement :
   - la probabilité de l'événement $A_{k,m}$,
   - la probabilité de l'événement «$k$ numéros n'ont pas été piochés au cours des $m$ premières pioches».

   (b) Justifier que :

   $$P(X_r > m) = P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \cdots \cup A_{r,m})$$

   puis, en utilisant la formule du crible de Poincaré, démontrer que :

   $$\begin{aligned} P(X_r > m) &= \binom{r}{1}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^m - \binom{r}{2}\left(1 - \frac{2}{r}\right)^m + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r}\left(1 - \frac{r}{r}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^m. \end{aligned}$$

   En déduire la loi de $X_r$.

2. Comportement de $X_r$ au delà de sa moyenne.

   (a) A l'aide d'une récurrence sur $m$, montrer que, pour toute famille $(D_1, .., D_m)$ d'événements, on a :

   $$P(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m) \leqslant P(D_1) + P(D_2) + \cdots + P(D_m).$$

   (b) Démontrer que pour tout réel $x$, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x$. En déduire que :

   $$\forall m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, \quad \forall k \in \{1, .., r\}, \quad P(A_{k,m}) \leqslant \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$, on note $M_r$ la partie entière de $(1 + \varepsilon) r \ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

   $$M_r \leqslant (1 + \varepsilon) r \ln(r) < M_r + 1.$$

Comparer les événements « $(X_r > M_r)$ » et « $(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r))$ ».
En déduire que :

$$P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r)) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^{\varepsilon}}.$$

*Ainsi on vient d'établir que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{r\to+\infty} P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r)) = 0$$

*qui peut se traduire ainsi : l'événement «$X_r$ est significativement supérieur à sa moyenne » est un événement asymptotiquement rare.*

3. Distribution de $X_r$ autour de sa moyenne.

   On introduit la suite $(Z_r)_{r\geqslant 2}$ de variables aléatoires définie par :

$$\forall r \geqslant 2, \quad Z_r = \frac{X_r - r\ln(r)}{r}.$$

   Soit $t$ un réel fixé, on note $m_r$ la partie entière du réel $r\ln(r)+rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$m_r \leqslant r\ln(r) + rt < m_r + 1.$$

   (a) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que :

$$\forall r \geqslant r_0(t), \quad m_r \geqslant 1$$

   puis prouver l'égalité :

$$\forall r \geqslant r_0(t), \quad P\left(Z_r > t\right) = P\left(X_r > m_r\right).$$

   (b) Soit $k$ un entier naturel. A l'aide d'un développement limité, établir que :

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r\to+\infty}{=} -k\ln(r) - kt + o(1)$$

   (c) Démontrer que, pour tout entier $k$, on a : $\displaystyle\binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$.

   En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r\to+\infty} \binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}.$$

(d) En admettant que l'on a :

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!},$$

exprimer la valeur de la limite $\lim\limits_{r \to +\infty} P(Z_r \leqslant t)$ en fonction de $F_Z(t)$ (*définie à la question* **I.2**).

Quel résultat vient-on d'établir sur la suite de variables aléatoires $(Z_r)_{r \geqslant 2}$ ?

■

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2011

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :*
*8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 8 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

ecricome

**Ecricome Option Scientifique sujet principal**

# EXERCICE 1.

Soit $n$ un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

Pour tout entier naturel $j$, on note $P^{(j)}$ la dérivée $j$-ième de $P$.

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, .., n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $E$.

   (b) Montrer que pour tout entier $k$ appartenant à $\{1, ... n\}$, on a :

   $$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

   puis, pour tous les entiers $k, j$ vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

   (c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

   $$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \cdots + a_n P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$$

   puis établir que :

   $$\forall j \in \{0, 1, .., n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

   Ainsi on a établi la relation :

   $$\forall P \in E, \quad P = \sum_{l=0}^{n} P^{(k)}(k) P_k.$$

2. On considère l'application $u$ définie sur $E$ par :

   $$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

   (a) Etablir que $u$ est un endomorphisme de $E$.

   (b) Ecrire la matrice $A$ de l'endomorphisme $u$ dans la base $(P_0, P_1, ... P_n)$ de $E$.

(c) Déterminer le rang de $A$ ainsi que ses valeurs propres.

(d) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? (*Une réponse argumentée est attendue*)

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle .,. \rangle$ par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

(a) Démontrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.

(b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthonormale de $E$.

# EXERCICE 2.

On considère :

- la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t\left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right).$$

- la fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- $U$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U = ]0, +\infty[^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x > 0 \text{ et } y > 0\right\}.$$

- $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert $U$ et à valeurs réelles par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x = \exp(y \ln(x)) - \exp(x \ln(y)).$$

où $\exp(s)$ désigne l'exponentielle du réel $s$ c'est-à-dire que $\exp(s) = e^s$. On admet que $f$ est de classe $C^2$ sur $U$.

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction $f$ n'admet aucun extremum sur $U$.

1. Etudier les variations de $\psi$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de $\psi$.

*Tournez la page s.v.p.*

2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. *On admettra la convergence de cette série.*

4. Justifier que :
$$\forall t \in ]0,1[, \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in ]1,+\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que $(x,y)$ est un point critique de $f$ si et seulement si :
$$\begin{cases} x > 1, \quad y > 1; \\ \ln(x)\ln(y) = 1; \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x). \end{cases}.$$

6. Soit $(x,y) \in U$ un point critique de $f$. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\begin{cases} x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right); \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$

7. Prouver que $(e,e)$ est l'unique point critique de $f$.

8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que $f$ n'admet aucun extremum sur $U$.

# PROBLEME

La partie **I** consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$ possèdent la même loi lorsque $(X_1, ..., X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie **II** a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire $X$ possédant une densité $f$ avec $f$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f$ nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il n'existe aucune variable aléatoire $Y$ à densité dérivable $g$ sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$.

La partie **III** consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire introduite à la partie **II.**.

Les parties **I**, **II** et **III** sont largement indépendantes.

# PARTIE I. Etude des variables $Y_n$ et $Z_n$.

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit $X$ une variable aléatoire, rappelons que :

- $F_X$ désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leqslant t)$.

- $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $a \in ]0, +\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

  où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel $y$ c'est-à-dire que : $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $Y_n$ et $Z_n$ les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$\begin{aligned} Y_n &= \max(X_1, X_2, \ldots X_n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i, \\ Z_n &= \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}. \end{aligned}$$

où $\max(X_1, \ldots, X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, \ldots X_n$.

Pour finir, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 \text{ si } t < 0; \\ f_n(t) = n.\exp(-t)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} \text{ si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. On considère un tableau $X$ de nombres réels de taille 2011 (*c'est-à-dire «X = array[1...2011] of real»*) préalablement rempli.

   (a) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels :

$$\max(X[1], X[2]) \quad \text{et} \quad \max(X[1], X[2], X[3]).$$

(b) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel :

$$\max\left(X[1], X[2], \dots X[2011]\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2011}\left(X[i]\right).$$

2. (a) Pour tout réel $t$, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t)$, ... , $F_{X_n}(t)$.

   (b) Pour tout réel $t$, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de $n$ et $t$ en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geqslant 0$.

   (c) Vérifier alors que la fonction $f_n$ est une densité de probabilité de la variable aléatoire $Y_n$.

3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

   (b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité $d_{n+1}$.

4. Pour tout réel $x$, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n.\exp(nt)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} dt = \left(\exp(x) - 1\right)^n$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $Z_n$ est une variable aléatoire à densité dont $f_n$ est une densité. **Indication** : *Pour l'hérédité, on remarquera que* $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

## PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par $E$ l'ensemble des fonctions $f$ continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge. On admet que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toute fonction $f$ appartenant à $E$, on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fixe dans cette partie une fonction $f$ appartenant à $E$. Pour tout réel positif $x$, on note :

$$k_f(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt.$$

ecricome

1. Soient $\varphi, \psi$ deux fonctions appartenant à $E$, dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant l'équation $(\mathcal{D}_f)$. On introduit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x)$$

   (a) Prouver que la fonction $h$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à $E$, montrer que $\varphi = \psi$.

   Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans $E$ à l'équation $(\mathcal{D}_f)$ lorsque $f \in E$.

2. Pour tout réel positif $x$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t)dt$.

3. Etablir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)\ f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k_f'(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geqslant 0.$$

   (a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)dt,$$

$$(\beta) \ : \ \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x)dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)dx$$

   (b) Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x)dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x)dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x)dx.$$

*Tournez la page s.v.p.*

5. On revient au cas général où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\, dx$ converge.

6. Soit $X$ une variable aléatoire possédant une densité $f$ avec $f$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f$ nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Justifier qu'il n'existe aucune densité $g$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

# PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

A la partie **II**, on a établi que si $f$ appartient à $E$, il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt$$

appartenant à $E$ telle que :

$$k_f - k_f' = f.$$

On considère alors l'application $\varphi$ définie sur $E$ par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Etablir que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

   **Définition** : *On dit que le réel $\lambda$ est valeur propre de $\varphi$ s'il existe une fonction $f$ de $E$ non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que $f$ est un vecteur propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$ et on appelle sous-espace propre de $\varphi$ associé à $\lambda$ l'espace vectoriel*

   $$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \quad \textit{telle que} \quad \varphi(f) = \lambda f\}$$

   La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de $\varphi$.

2. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

   Vérifier que $f_a$ appartient à $E$, que $f_a$ est un vecteur propre de $\varphi$ et préciser la valeur propre associée.

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.

   (a) Montrer que $\lambda$ est nécessairement non nul.

   (b) Etablir que $f$ est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.

   (c) Pour tout réel positif $x$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de $\lambda$, $x$ et d'une certaine constante.

   (d) Montrer que $\lambda \in ]0, 1[$.

4. Préciser l'ensemble $\mathrm{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de $\varphi$ et, pour chaque valeur propre $\lambda$ de $\varphi$, proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.

■

# EXERCICE 1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale $I_a$ converge et donner sa valeur.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.
2. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Etablir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y - x}{2}$.
4. Montrer que $f$ réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note $\alpha$ cette solution. Justifier que $\alpha \in ]0, 1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel $x$ donné renvoie le réel $f(x)$.

   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier $N$ tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de $u_N$ correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :
$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction $T$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = xf(x)$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{puis que : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

# EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note :
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels ;
- $I_n$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $0_n$ la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si $U, V$ sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent alors :
- $U^k$ et $V^q$ commutent pour tous entiers $k$ et $q$;
- $U^{-1}$ commute avec $V$ lorsque $U$ est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.
   (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.

   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.

   (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A$.

   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \mathrm{Id})$ puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

2. Etude d'une suite de matrices. Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

   On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

   On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition

| |
|---|
| $(\mathcal{H}_k)$ : « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $B_k - B = [B(B - I_n)]\, C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$ » |

*Tournez la page s.v.p.*

(a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible. En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

(b) On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned}
2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k (B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\
B_{k+1} - B &= \left[(B_k - B)^2 - \left(B^2 - B\right)\right] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\
B_{k+1} (B_{k+1} - I) &= \left[B_k (B_k - I_n) (2B_k - I)^{-1}\right]^2
\end{aligned}$$

En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier $p$ tel que : $B_p (B_p - I_n) = 0_n$.

Etablir que la matrice $B_p$ est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geqslant p, \quad B_{k+1} = B_k$.

# PROBLEME.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de $Z_k$ ainsi qu'à calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de $Z_k$ ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} P(Z_k = r)$.

# Partie I : Etude de deux endomorphismes.

Soit $n$ un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, on désigne par $e_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k$$

Rappelons que $(e_0, e_1, .., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

1. Prouver que $g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que $g$ est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice $A$ de $f$ dans la base $(e_0, e_1, .., e_n)$ ainsi que la matrice $B$ de $g$ dans cette même base.
5. Montrer que $f$ et $g$ sont diagonalisables.

## Partie II : Etude d'une suite de variables aléatoires.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, .., n\}$, l'urne $U_i$ contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, .., i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne $U_n$. Si la boule porte le numéro $r$ alors on repose la boule dans l'urne $U_n$ puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne $U_r$.
- Plus généralement, pour tout entier $k$ non nul, si la boule numéro $s$ a été piochée au $k$-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne $U_s$.

Pour tout entier naturel $k$, on note :

- $Z_k$ est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au $k$-ième tirage. **On convient que $Z_0 = n$.**
- $F_k$ est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, x^r$.
- $E(Z_k)$ l'espérance de la variable $Z_k$.

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, ..., n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Etablir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, .., n-1\}$

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : (n+1)\, P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : (r+1)\, P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\, P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, .., n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.

*Tournez la page s.v.p.*

En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $S_n$.

En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $S_{n-1}$ et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)\, F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etablir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.

   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.

   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de $k$ et $n$. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de $Z_k$ en fonction de $k$ et $n$.

## Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties **I** et **II** et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question **II.4** la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, .., n\}$ on désigne par $u_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$u_k = (X-1)^k.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)\, e_r = F_k = f^k(e_n)$.

2. Prouver que $(u_0, u_1, .., u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, .., n\}$. Retrouver ainsi que $f$ est diagonalisable.

4. Justifier que : $e_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0, 1, ..., n\}, \quad u_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.

5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, .., n\}$. A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

   (a) Soit $j \in \{0, 1, .., n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

   puis justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, .., n\}$.

   (b) Déterminer un réel $C_n$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \dfrac{C_n}{2^k}$.

   La série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?

■

ECRICOME

VISER PLUS HAUT

**CONCOURS D'ADMISSION 2013**

1

# Mathématiques

## Option Scientifique

**Mercredi 17 avril 2013 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :*
*8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

*Tournez la page s.v.p.*

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

# EXERCICE 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à $n$ lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice $U$ ;
- $\ker(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où $M$ est une matrice de $\mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R})$ et un entier naturel $k$ non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_{n}(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de $B$ sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de $B$ ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im}(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in \operatorname{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.

# EXERCICE 2

On considère :

- la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5}\left[x^2\left(1 - x^2\right) + y^2\left(1 - y^2\right) + 2xy\right] \; ;$$

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad (u_0, u_1) \in [0,1]^2.$$

1. Etude de $f$.

   (a) Si $(a,b)$ un point critique de $f$, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de $f$ ainsi que la valeur de $f$ en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$$

   (b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

   (c) Démontrer que la fonction $f$ possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Programmation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Ecrire un programme en PASCAL demandant à l'utilisateur un entier $N$ ainsi que les valeurs initiales $u_0, u_1$ et calculant la valeur de $u_N$ correspondante.

3. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{avec} \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leqslant \dfrac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

   (b) Justifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant a_n$.

   (c) Etablir l'existence de quatre réels $\lambda, \mu, r, s$ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

   puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

# PROBLEME

Soit $x$ un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de $x$ c'est-à-dire l'unique entier $N$ tel que : $N \leqslant x < N+1$.
Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit $X_d$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor .$$

On admet que $X_d$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on l'appelle « la discrétisée de $X$ »
Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles **(PARTIE I)**
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme **(PARTIE II)**
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité **(PARTIE III).**

Les parties **I, II** et **III** sont largement indépendantes.

## PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. En PASCAL,

    - la commande **floor(x)** calcule la partie entière du réel $x$ ;
    - la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0,1]$) ;

    On rappelle que si $Z$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors, pour $a \in \mathbb{R}_+$, $aZ$ suit la loi uniforme sur $[0,a]$.

    Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) et $X_d$ sa discrétisée.

    Ecrire une fonction PASCAL qui à un réel $a$ (positif) fournit par l'utilisateur renvoie une réalisation de $X_d$.

2. Soit $X$ une variable aléatoire possédant une densité $f$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

3. Soit $N$ un entier naturel non nul et $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.
Déterminer la loi de $X_d$ (on précisera les valeurs prises par $X_d$).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète $Y$ en posant :
$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1, 2, .., 9\} \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), \\ \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{cases}$$
Proposer une densité $f$ telle que si une variable aléatoire $X$ posséde $f$ pour densité alors sa discrétisée $X_d$ suit la loi de $Y$.

5. Soient $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $n$ un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
   (a) Justifier que la variable $nX$ possède une densité $f_n$ que l'on précisera.
   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que :
$$\mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$
   (d) Donner un encadrement simple de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ dont on précisera la loi.

## PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus $n$ et on pose :
$$\forall k \in \{0, .., n\}, \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$
Si $Q$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\, dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, .., n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, .., e_n$.

Tournez la page s.v.p.

2. Etablir la linéarité de $u$ et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Etablir que la famille $(u(e_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter $Q_R$ lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \dfrac{x}{6}$.

6. Soient $N$ un entier naturel et $X$ une variable aléatoire dont $f$ est une densité.

   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel $n$ et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[ \ ; \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Etablir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, \dots, N\}, \\ \forall k \in X_d(\Omega), \quad \mathrm{P}(X_d = k) = R(k) \end{cases}.$$

   (b) On considère la variable aléatoire discrète $Y$ définie par :

   $$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \\ \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k}{6} \end{cases}.$$

   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

   et tel que $Y$ soit la discrétisée de $X$. **Indication** : *procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

## PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

On considère une variable aléatoire $Y$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui soit de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

On suppose en outre que $g$ est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel $x$, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0 \,; \\ f(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de $f$ ?

2. (a) Etablir que : $\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}.$$

(b) Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D\,|x-a|.$$

Justifier la continuité de $f$ en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $t$ un réel positif, pour tout entier $N$, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

*Tournez la page s.v.p.*

(a) Démontrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

puis que :

$$\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

(b) Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt.$$

(c) Justifier que : $\lim\limits_{k \to +\infty} g(k) = 0$ et que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = g(0).$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)\,dt$. Etablir que :

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et préciser sa valeur.

(c) Démontrer que $f$ peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire $X$ et que sa discrétisée $X_d$ suit la même loi que $Y$.

ECRiCOME

VISER PLUS HAUT

**CONCOURS D'ADMISSION 2014**

1

# Mathématiques

## Option Scientifique

**Mercredi 16 avril 2014 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes $P, Q$ appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, .., n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right. .$$

Pour toute fonction $f$ appartenant à $E$, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

et on note $\varphi$ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que $E$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$*).

| On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, .., u_n, v_n)$ est une base de $E$. |
|---|

2. Justifier que chaque fonction $f$ de $E$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, .., n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.

3. Démontrer que $\varphi$ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.

4. Ecrire la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$.

5. L'endomorphisme $\varphi$ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?

6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$. On suppose que $\lambda$ est non nul et on considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que $g$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ puis celle de $f$.

7. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $\varphi$, déterminer la dimension de l'espace propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$. L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

# EXERCICE 2

On rappelle que la fonction $\Gamma$ d'Euler est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x>0,\quad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On admettra que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\,]0,+\infty[,\quad \Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt.$$

On pose pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ :

$$L(x)=\ln(\Gamma(x))\quad\text{et}\quad \Psi(x)=L'(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x>0$ et tout $k\in\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $x$ et de $\Gamma(x)$. En déduire que :
$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\quad \Psi(x+1)-\Psi(x)=\frac{1}{x}$$
puis préciser la valeur de $\Psi(n+2)-\Psi(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :
$$\forall (x,A)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \left(\int_0^A \ln(t)\,e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2\leqslant\left(\int_0^A(\ln(t))^2e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt\right).$$
4. Démontrer que :
$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\quad (\Gamma'(x))^2\leqslant\Gamma(x)\Gamma''(x)$$
puis justifier que la fonction $\Psi$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $a \in ]0,1[$.

   (a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\right) - \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\right)$$

   et :

$$0 \leqslant \Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2)-\Psi(n).$$

   (b) Etablir que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2-a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$ en fonction de $\Psi$ et de $a$.

# PROBLEME

Soient $p$ un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1-p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- $A_0$ et $A_1$ s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur $A_2$. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant $A_2$. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur $A_3$ et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur $A_k$ participe au duel numéro $k$, qu'il peut remporter avec une probabilité $p$, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1-p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne $N$ jeux successifs lors du tournoï.

Pour tout entier naturel $n$, on considère l'événement $E_n$ : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro $n$ ».

# PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0, 1]$).

   (a) Ecrire une fonction DUEL en Turbo-Pascal qui créé un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction TEST_VICTOIRE en Turbo-Pascal qui, à trois nombres $a, b, c$ fournis par l'utilisateur, renvoie TRUE si les trois sont égaux, FALSE sinon.

   (c) Ecrire un programme TOURNOI en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : *Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions DUEL et TEST_ VICTOIRE en les répétant convenablement jusqu'à ce que TEST_ VICTOIRE sur trois DUEL consécutifs renvoie TRUE.*

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

numéro du joueur gagnant le duel ↓

| | | |
|---|---|---|
| duel 1 | 0 | ... |
| duel 2 | 0 | ... |
| duel 3 | 0 | ... |

Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro $n$, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels $\lambda$, $\mu$, $r_1$, $r_2$ tels que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

*Le calcul explicite de $\lambda$ et $\mu$ n'est pas demandé.* Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$ ? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

# PARTIE II : Etude du cas général.

On revient au cas général : $p$ désigne un réel quelconque de $]0,1[$ et $N$ est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme $Q$ défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, .., N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du $n$-ième duel, le vainqueur du $n$-ième duel a obtenu exactement $k$ victoires ».

   Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), .., P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

   On note désormais $r_N$ cette solution. Justifier que :
   $$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ (*question* **II**.2), établir que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Etablir la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ (*question* **II**.4) sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

   (a) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $(X = n)$ sont égaux.

   (b) Démontrer que $X$ admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

# PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie **II** sont conservées. Les résultats de la question **II.5**) pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :
   $$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$
   et on admet que :
   $$(qX - 1)\, Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N.$$
   Soit $z$ un complexe tel que
   $$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de $Q$ est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts $z_1, .., z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (Z - z_{N-1}).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \to & \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto & \left( S\left(\dfrac{1}{z_1}\right), .., S\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right) \right) \end{array} \right.$$

où $z_1, .., z_{N-1}$ sont les $N-1$ racines distinctes de $Q$.

(a) Prouver que $f$ est un isomorphisme.

(b) Ecrire sa matrice $A$ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$ (*la transposée de* $A$).

(c) En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{r} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{array} \right.$$

admet une unique solution $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$.

3. Soient $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ (cf. question **III.2c**). on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant N$ :

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ :

$$P(E_n) = u_n.$$

ECRICOME

VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2015

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 15 avril 2015 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

Soit $n$ un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour tout polynôme $P$ de $E$, on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.
   (b) Déterminer la matrice associée à $\varphi$ dans la base canonique de $E$.
   (c) Montrer que $\varphi$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout $(P,Q)$ de $E^2$, on note :
$$<P,Q>=\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.$$
   (a) Montrer que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $<P,Q>$ est bien défini.
   (b) Montrer que $(P,Q) \mapsto <P,Q>$ définit un produit scalaire sur $E$.
3. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de $E$ par :
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1,2,\dots,n\},\ P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{<P_i, X^k>}{<P_i,P_i>} P_i.$$
   (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de $\varphi$.

# EXERCICE 2

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ :
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que $u$ est dérivable sur $I$ et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de $u$ sur $I$.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de $v$ sur $I$.
   (f) Montrer que :
$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1(f) un encadrement de $\pi$.

3. On pose pour tout entier naturel $n$,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel $\theta$,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel $n$,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

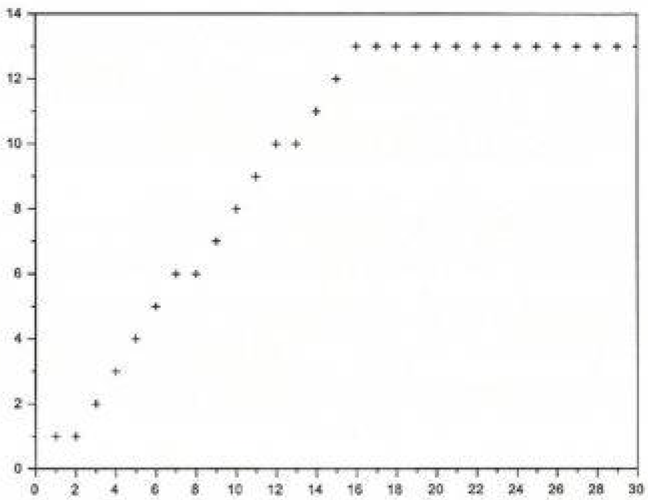
(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers $\pi$ quand $n$ tend vers l'infini.

(d) Compléter la fonction Scilab suivante afin qu'elle retourne, à l'aide des relations $(*)$ et $(**)$ et de la question 3(b), une approximation $x$ de $\pi$ à $e$ près, ainsi que le nombre $k$ d'itérations qui ont été nécessaires.

```
function [x,k]=h(e)
    k = 0
    a = sqrt(3) / 2
    b = 1 / 2
    while ____________
        a = ____________
        b = ____________
        k = ____________
    end
    x = ____________
endfunction
```

(e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètre d'entrée un entier $p$ et qui retourne un vecteur de taille $p$ qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions $10^{-k}$, pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

(f) On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :




Commenter ce graphe.

# PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans tout le problème, on considère $X$ une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que $X$.
On note pour tout entier $n \geqslant 2$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de $X$ est **implosive** si $X$ n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que $Y_m$ admet une espérance.
Si la loi de $X$ est implosive, on appelle **indice d'implosion de** $X$ le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que $Y_m$ admet une espérance.

On notera $F$ la fonction de répartition de $X$ et $F_n$ la fonction de répartition de $Y_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
Dans le cas où $X$ (respectivement $Y_n$) admet une densité, on la notera $f$ (resp. $f_n$).

## Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction de répartition de $Y_n$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. On suppose dans cette question que $X$ admet une densité $f$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $Y_n$ admet une densité $f_n$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive $V$ admettant une densité $\varphi$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et dont on note la fonction de répartition $\Phi$, on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt \text{ converge},$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x t\varphi(t)dt = \int_0^x (1 - \Phi(t))dt - x(1 - \Phi(x)).$$

   (b) On suppose que $V$ admet une espérance.
   Montrer que $x\,(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
   En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge.

   (c) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge. Montrer que $V$ admet une espérance.

   (d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

## Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que $X$ admet pour densité la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1 + x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer le réel $\alpha$.

(b) Donner la fonction de répartition $F$ de $X$.

(c) Déterminer la fonction de répartition $F_2$ de $Y_2$ et justifier que $Y_2$ admet une densité $f_2$, que l'on calculera.

(d) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(e) En déduire un équivalent de $f_2$ en $+\infty$.

(f) En déduire que la loi de $X$ est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

(b) La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?

(c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

(d) Déterminer la loi de $Y_2$. Admet-elle une espérance ?

(e) Déterminer la loi de $Y_3$. Admet-elle une espérance ?

(f) La loi de $X$ est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

## Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geqslant 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à $m$ ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

(a) Déterminer un réel $a$ tel que la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, $X$ est une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.
Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.

(c) Discuter, en fonction de $\alpha$, l'existence de l'espérance de $X$.

(d) Discuter, en fonction de $n$ et de $\alpha$, l'existence de l'espérance de $Y_n$.

(e) Répondre à la question posée.

## Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. (a) Déterminer un réel $a$ tel que la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geqslant 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, $X$ est une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.
Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.

(c) La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?

(d) Discuter l'existence de l'espérance de $Y_n$.

(e) Répondre à la question posée.

Tournez la page s.v.p.

## Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit $Y$ une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire $X$ implose sur $Y$** si $X$ est implosive et si, en notant $m$ son indice d'implosion, $Y_m$ est de même loi que $Y$.

8. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles et soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 tel que $Y_n$ a la même loi que $Y$. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de $X$ en fonction de celle de $Y$.
9. Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire $X$ implosive qui implose sur $Y$.
10. Soit $m$ un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $Y$ admettant une espérance et une variable aléatoire $X$ implosive d'indice d'implosion $m$ qui implose sur $Y$.
    *(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).*
11. Soit $Y$ une variable aléatoire positive admettant une densité $g$. On note $G$ sa fonction de répartition.
    Soit $m$ un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire $X$ implosive, d'indice d'implosion $m$, qui implose sur $Y$, alors pour tout entier $k$ tel que $k \geqslant m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion $k$, qui implose sur $Y$.

## Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de $X$ est explosive** s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que $Z_m$ n'admet pas d'espérance. Si la loi de $X$ est explosive, on appelle **indice d'explosion** de $X$ le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que $Z_m$ n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier $m$ donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est $m$ ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?

ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2016

# prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 7 pages.



***CONSIGNES***

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque $x$ tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite $(w_n)$ converge vers un réel $\gamma$, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction $\varphi$ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général $u_n$ converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

ECRICOME

# EXERCICE 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier $n$ tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction $f$ définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de $\varphi$ pour une valeur propre à préciser.

   (d) Montrer que $\varphi$ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$$

   et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{array}$$

   (a) Justifier que $f$ admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.

   (b) Montrer que $f$ admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   La fonction $f$ admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note $S$ le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}(X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k)Q_k(X).$$

   (a) Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   (b) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

   (d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k\}$, on a :

$$Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

(f) Montrer que $u$ est un point critique de $f$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

En observant le terme dominant de $S$, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) À l'aide des résultats des questions question 1(d) et 3(f), montrer que la fonction $f$ admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.

(b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que $f$ admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

# PROBLÈME

## Partie A

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

(c) En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

(d) Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle $X$ admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que $X$ **suit la loi *beta* de paramètres** $a$ **et** $b$.

(a) Montrer que $X$ admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$

(b) Montrer que $X$ admet une variance et que :

$$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$

(c) Soit $F$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que $F$ est la fonction de répartition de $X$.

## Partie B

Soient $a, b$ deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement $a$ boules rouges et $b$ boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après $n$ épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des $n$ premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $R_n$ l'événement « on pioche une boule rouge au $n$-ième tirage ».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire $X_n$ en fonction de $n$.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à Scilab.
   (a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant $x$ boules rouges et $y$ boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res = tirage(x,y)
        r = rand()
        if .......... then
                res = 0
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui simule $n$ tirages successifs dans une urne contenant initialement $a$ boules rouges et $b$ boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de $X_n$ :

```
function Xn = experience(a,b,n)
        x = a
        y = b
        for k=1:n
                r = tirage(x,y)
                if r = = 0 then
                        x = ..........
                else
                        ...........
                end
        end
        Xn = .........
endfunction
```

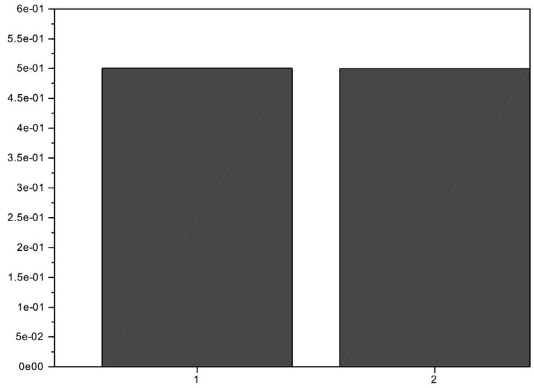
   (c) Écrire une fonction Scilab d'en tête :

```
        function loi = simulation(a,b,n,m)
```

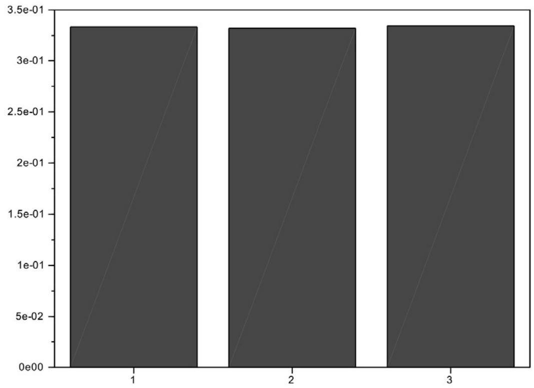
   qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de $X_n$. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \dots, P(X_n = n)$.

5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de $n$ entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de $X_n$ sous forme d'un diagramme en « bâtons ».

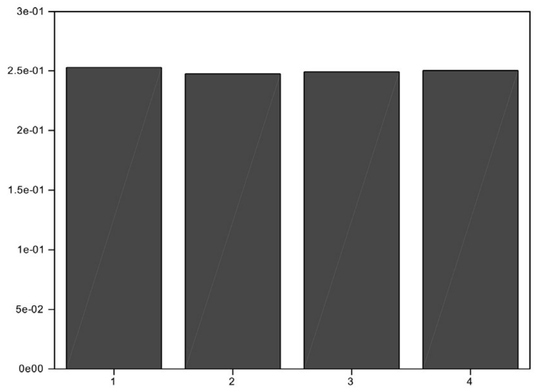
```
--> bar( simulation(1,1,1,100000))
```



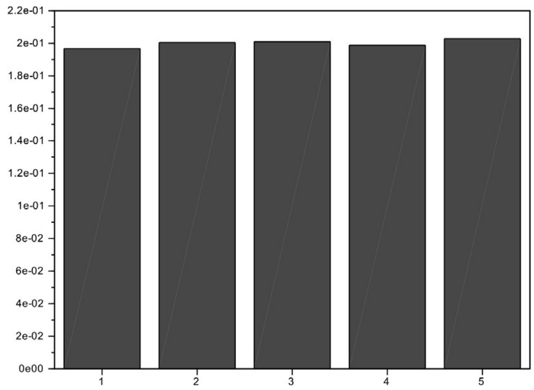

```
--> bar( simulation(1,1,2,100000))
```



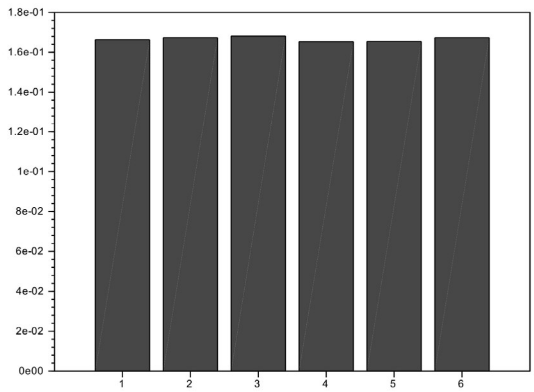

```
--> bar( simulation(1,1,3,100000))
```



```
--> bar( simulation(1,1,4,100000))
```




```
--> bar( simulation(1,1,5,100000))
```




(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de $X_n$.

(b) Déterminer la loi de $X_1$.

(c) Soient $k$ et $n$ deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur $n$, prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où $a$ et $b$ sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a + X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$

## Partie C

On admettra dans cette partie que si $a$, $b$ et $n$ sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i}\binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $X_n$ étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. On note $F_n$ la fonction de répartition de $Y_n$.

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$ ?
   (b) Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$ ?
8. On fixe $x \in ]0, 1[$. Pour tout réel $y$, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de $y$, c'est-à-dire le plus grand entier $m$ tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
   (a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.
   (b) A l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :
   $$F_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\displaystyle\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
   (c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\binom{m}{j}$ lorsque $m$ tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ (On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).
9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
10. Déduire de ce qui précède que la suite $(Y_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.
11. A l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.

ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2017

# prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 12 avril 2017 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.

***CONSIGNES***

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.



*Tournez la page s.v.p.*

## EXERCICE 1

On définit sur l'intervalle $\left]0,1\right]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1.(a) Les fonctions $f$ et $g$ admettent-elles des limites en 0 ?

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions $f$ et $g$ sur $]0,1]$.

(c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ est convergente. On notera $I$ sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \big(t\ln(t)\big)^n dt,$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Calculer $u_0$ et $u_1$.

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

(e) Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente.

(f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel $n$ et qui produit en paramètre de sortie la valeur de $S_n$.

3.(a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre $n$ appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel $n$ :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|I - S_n\big| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) Montrer que :

$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif $\varepsilon$ et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de $I$ à $\varepsilon$ près.

ECRICOME

## EXERCICE 2

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si $x$ est ainsi associé à $X$ et $y$ à $Y$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$<x, y>= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX,$$

où ${}^tX$ représente la transposée de $X$.

1. On note $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Justifier qu'il existe une matrice $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   $$J = PD\,{}^tP.$$
   (b) Déterminer le rang de $J$. En déduire une valeur propre de $J$ ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   (c) En examinant la trace de $J$, expliciter la matrice $D$.
2. On note $f$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$
   (a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$
   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = {}^tXMX.$$
   (c) Exprimer $M$ comme combinaison linéaire de $J$ et $I$, où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta$ à déterminer telle que :
   $$M = P\,\Delta\,{}^tP.$$
   (e) Montrer que la fonction $f$ admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :
   $$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ /\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
   et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de $f$ sur $\mathcal{S}$.

3. Dans cette question, $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier que $A$ est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   On note $v$ l'endomorphisme dont $B$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (b) À l'aide de $v$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (<x,y>)^2 \quad \leqslant \quad <u(x),x> \times <u^{-1}(y),y>$$
   Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.
   (c) En déduire que :
$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} (<u(x),x>) \times (<u^{-1}(x),x>) = 1$$
4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de $A$ sont strictement positives.
   (c) En déduire le minimum de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x_1,x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$
   sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

## PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

### Partie A

Dans toute cette partie, $a$ est un réel strictement positif et $g_a$ est la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Justifier que $g_a$ est une densité de probabilité.
2. Soit $Z_a$ une variable aléatoire admettant $g_a$ pour densité.
   (a) Soit $N$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance $a^2$.
   Rappeler une densité de $N$ et donner les valeurs de $E(N)$ et $E(N^2)$.
   (b) Montrer que $Z_a$ admet une espérance et calculer $E(Z_a)$.
   (c) Montrer que $Z_a$ admet une variance et calculer $V(Z_a)$.

**Partie B**

Pour tout entier $n$ strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de $n$ urnes initialement vides, numérotées de 1 à $n$ et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note $X_n$ le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire $X_n$ :

```
function X = tirage(n)
        urnes = zeros(1,n)
        X = 1
        choix = floor((rand()*n))+1
        while ...........
                urnes(choix) = urnes(choix)+1
                choix = floor((rand()*n))+1
                X = ...........
        end
endfunction
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
Déterminer la loi de $X_1$ ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Déterminer la loi de $X_2$ ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, $n$ désigne un entier strictement positif.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   (b) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$
   (c) Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, $X_n$ admet une espérance.
   (d) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $E(X_n)$ en fonction de $n$.
   Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
        facto = prod([1:n])
        fac = facto
        somme = 0
        puissance = n
        for k = 2 : (n+1)
                puissance = ........
                fac = ........
                somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
        end
        E = facto * somme
endfunction
```

**Partie C**

On reprend dans cette partie les variables aléatoires $X_n$ étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\alpha(n, m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,
$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$
2. En déduire que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$, on a :
$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n, m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$
3. On suppose dans cette question que $x \leqslant 0$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n} P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor\right)\right)$.
4. On suppose dans cette question que $x$ est un réel $x > 0$.
   (a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{n} x \rfloor$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) Justifier qu'il existe un entier $N$ tel que :
   $$\forall n \geqslant N, \quad \lfloor \sqrt{n} x \rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$
   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant N$, on a :
   $$P(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{n} x \rfloor - 1}{n} \exp\left(\alpha(n, \lfloor \sqrt{n} x \rfloor - 2)\right).$$
   (e) Montrer alors que $\sqrt{n} P(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor)$ admet une limite lorsque $n$ tend vers l'infini et déterminer cette limite.

**Partie D**

On **admettra** dans cette partie le résultat suivant :
*Si $W$ est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :*

- ⋆ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n$ admet une densité $h_n$ ;*
- ⋆ *la variable $W$ admet une densité $h$ ;*
- ⋆ *pour tout réel $x$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$ ;*

*alors, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $W$.*

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B. On introduit une variable aléatoire $U$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires $X_n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier entier strictement positif, la fonction $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}\ P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right).$$

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est une densité de probabilité.

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $P(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$.
*On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.*

(b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt.$$

(c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $Y_n$ est une variable aléatoire à densité, et que $Y_n$ admet $f_n$ pour densité.

(d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ à densité dont on précisera la densité.

3.(a) Rappeler l'énoncé du Théorème de Slutsky.

(b) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2018

prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Lundi 16 avril 2018 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.



***CONSIGNES***

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

On note $E$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.
Pour toutes matrices colonnes $X$ et $Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
Pour toute matrice colonne $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.

On considère $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, et on note $A$ et $B$ leurs matrices respectives dans la base canonique de $E$.

## Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de $u$ et $v$ dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $u$ et $v$ sont des projecteurs.
2. (a) Vérifier que les endomorphismes $u$, $v$ et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
   (b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
   (c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. (a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $a$, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

## Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, où $n$ désigne un entier tel que $n \geqslant 2$.
On suppose que $u$ et $v$ sont des projecteurs symétriques de $E$ et on pose : $C = BAB$.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ :
$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle.$$
   En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ :
$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$
5. Montrer que $C$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $\lambda$ une valeur propre de $C$ et $X$ un vecteur propre associé.
   (a) Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de $\lambda$ et $\|X\|$.
   (b) En déduire que les valeurs propres de $C$ sont réelles positives.
7. Soit $\mu$ une (éventuelle) valeur propre de $AB$ non nulle, et $X$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que $BX$ est un vecteur propre de $C$. En déduire que $\mu$ est strictement positive.
   (b) Montrer que : $ABX = \mu AX$. En déduire que : $AX = X$.
   (c) Montrer que : $\langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de $AB$ est inclus dans $[0, 1]$.

## EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0=0,\quad u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

et on note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2-6y.$$

On pose enfin : $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi>1$ et que les réels $\varphi$ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2-x-1=0$.

2.(a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
 (b) Montrer que les seuls points critiques de $f$ sont $(\varphi,\varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.
 (c) Étudier la nature des points critiques de $f$.

3. Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ : $u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$.

4.(a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n\geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme $u_n$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2:n
     ................
     ................
     ................
  end
  u=................
endfunction
```

 (b) Justifier qu'il existe des réels $\lambda$ et $\mu$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda\varphi^n+\mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

 (c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}$.
 (a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_nu_{n+1}}$ converge.
 (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
 (c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$S_{n+1}-S_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

 (d) Montrer que : $\varphi=1-\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}$.

# PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

### Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire $N$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel $b$ tels que :

$$\boxed{P(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1).}$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que $b$ est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(N=k) = \frac{b^k}{k!} P(N=0).$$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)$. En déduire que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $b$.
   Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2,\ P(N=k) = 0.$$
   (b) En déduire que $N$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de $a$.

3. On suppose **dans cette question** que $Z$ suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z=k-1).$$
   (b) En déduire que $Z$ vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de $a$ et $b$ correspondantes en fonction de $n$ et $p$.

4. On revient dans cette question au cas général : $a$ est un réel vérifiant $a < 1$, $b$ est un réel, et on suppose que $N$ est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $P(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$ :
   $$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) P(N=k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

(c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que $N$ admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de $a$ et $b$.

(d) Montrer que $N$ admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

(e) En déduire que $N$ admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de $a$ et $b$.

(f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si $N$ suit une loi de Poisson.

## Partie 2 - Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N=k),$$

où $N$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** $N$ la fonction $G$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)x^k.$$

et on suppose dans cette partie que $N$ vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1],\quad f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\forall x \in [0,1],\quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0,1]$.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que :

$$G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

En calculant $G(1)$, exprimer $p_0$ en fonction de $a, b$ et $\alpha$, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

## Partie 3 : formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable $N$ étudiée dans la question 4 de la partie 1.

On considère alors la variable aléatoire $S$ définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

9. Calculer $P(S = 0)$ lorsque $a \in ]0, 1[$ à l'aide de la partie 2.

10. (a) Calculer $P(S = 0)$ lorsque $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

(b) On considère la fonction Scilab suivante, où $n$ est un paramètre dont dépend la loi commune des $X_k$ :

```
function y=simulX(n)
  y=0;
  for i=1:n
    if rand()<1/2
      y=y+1;
    end
  end
endfunction
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

(c) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,"poi", lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.

On suppose que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, et que la loi des variables $X_k$ est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire $S$ :

```
function s=simulS(lambda,n)
  N = grand(1,1,"poi", lambda)
  .......................
  .......................
  .......................
  .......................
  .......................
endfunction
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où $N$ vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \geqslant 0, p_k = P(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall k \geqslant 0, q_k = P(X_1 = k).$$

Enfin, on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

*Indication : on pourra considérer la somme* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k)$.

(b) Justifier que :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(c) Justifier que:

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(d) En déduire finalement que :

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).$$

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2019

prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mardi 16 avril 2019 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 7 pages.



***CONSIGNES***

**TOUTES LES COPIES DOIVENT COMPORTER UN CODE-BARRES D'IDENTIFICATION.**
Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

## EXERCICE 1

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.

2.(a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

(d) Compléter la fonction `I` suivante, qui prend en entrée un entier positif $n$, afin qu'elle retourne un vecteur `y` qui contient les $2n+2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function y = I(n)
    u = zeros(1 , ........)
    u(0) = ........
    u(1) = ........
    for k = 1 : n
         ........
        end
        y = u
endfunction
```

3.(a) Rappeler un équivalent simple de $x \longmapsto \cos(x) - 1$ et $u \longmapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.

(b) Montrer que $n\ln\left(\cos(n^{-1/4})\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\sqrt{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right)^n$.

(c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n = 1$.

4.(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant n^{-1/4}.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(n^{-1/4}\right)\right)^n.$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5.(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$I_n \geqslant \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \geqslant n^{-2/3}\left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n.$$

En déduire la nature de la série de terme général $I_n$.

(b) Écrire une fonction en `Scilab` qui prend entrée un entier naturel $n$ et qui renvoie en sortie le terme de rang $n$ de la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n$.

6.(a) Montrer que pour tout réel $t$ de $]-\pi,\pi[$ : $\cos(t)+1=\dfrac{2}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(b) À l'aide du changement de variable $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\cos(t)}=1$.

(c) Montrer que pour tout entier $n$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\cos(t)}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\,dt$.

(d) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\,dt\right|\leqslant I_{n+1}$.

(e) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.

## EXERCICE 2

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dit qu'un vecteur $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est **symétrique** (respectivement **antisymétrique**) lorsque :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad x_i=x_{n+1-i},\quad (\text{respectivement } x_i=-x_{n+1-i}.\ ).$$

On note $F$ l'ensemble des **vecteurs symétriques** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $G$ l'ensemble des **vecteurs antisymétriques** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $S=(s_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad s_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad i=n+1-j,\\ 0 & \text{si} \quad i\neq n+1-j.\end{cases}$$

### Partie A

Dans cette partie et **uniquement dans cette partie**, on étudie le cas particulier où $n=3$.
La matrice $S$ est alors la suivante :

$$S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer $S^2$. En déduire les valeurs propres de $S$.
2. Déterminer une base de $F$ et de $G$.
   Vérifier que $F$ et $G$ sont des sous-espaces propres de $S$.
3. En déduire que : $F\oplus G=\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**Partie B**

On revient dans la suite dans le cas général où $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

4.(a) Expliciter $S$ et justifier que $S$ est diagonalisable.

(b) Calculer $SX$ lorsque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(c) Pour $i$ et $j$ deux entiers de $[\![1, n]\!]$, expliciter le coefficient en ligne $i$ et colonne $j$ de $S^2$ en fonction des coefficients $s_{k,\ell}$ de $S$.

En déduire que $S^2$ est la matrice identité d'ordre $n$.

5.(a) Soit $X$ un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(Y, Z)$ de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$Y \in F, \quad Z \in G \quad \text{et} \quad X = Y + Z.$$

(b) Montrer que $F$ et $G$ sont les sous-espaces propres de $S$. Préciser les valeurs propres associées.

6. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}.$$

On considère $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre associé.

(a) Vérifier que $AS = SA$.

(b) Montrer que $SX$ est un vecteur propre de $A$.

(c) On pose $Y = X + SX$. Exprimer $AY$ en fonction de $Y$ et $\lambda$.

(d) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre $\lambda$ de $A$ contient nécessairement un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.

# PROBLEME

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, I\!\!P)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k$ le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier $k$, $X_k$ est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, I\!\!P)$.

## Partie A

1. Déterminer la loi de $X_1$. Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de $X_2$ est donnée par :

$$I\!\!P\big([X_2 = 1]\big) = \frac{1}{6}, \qquad I\!\!P\big([X_2 = 2]\big) = \frac{2}{3}, \qquad I\!\!P\big([X_2 = 3]\big) = \frac{1}{6}.$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre $X_k$.
4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $I\!\!P_{[X_k=j]}\big([X_{k+1} = i]\big)$.
*(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de $i$ et $j$).*
5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad I\!\!P\big([X_{k+1} = i]\big) = \frac{i}{k+2} I\!\!P\big([X_k = i]\big) + \frac{3+k-i}{k+2} I\!\!P\big([X_k = i-1]\big). \qquad (*)$$

6. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de $X_3$.
7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ : $I\!\!P\big([X_k = 1]\big) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
   (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $I\!\!P\big([X_k = k+1]\big)$.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times I\!\!P\big([X_k = 2]\big)$.
   Exprimer $a_{k+1}$ en fonction de $a_k$ et de $k$.
   Montrer que la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.
   En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ I\!\!P\big([X_k = 2]\big) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

## Partie B

8. Que renvoie la fonction `Scilab` suivante pour un entier $k$ non nul ?
Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1  function x = mystere( k )
2     n = 1 ;
3     b = 1 ;
4     for i = 1 : k
5        r = floor(rand()*(n+b)+1)
6        if r > n then
7           n = n + 1
8        else
9           b = b + 1
10       end
11    end
12    x = b
13 endfunction
```

9. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function LE = loi-exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif $k$ et un entier $N$, qui effectue $N$ simulations de $k$ tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de $X_k$ (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [\![1, k+1]\!]$, `LE(i)` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des $N$ simulations).
On pourra utiliser la fonction `mystere`.

10. Recopier et compléter la fonction `loi-theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif $n$, afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de $X_n$.

```
function LT = loi-theo(n)
   M = zeros(n , n + 1)
   M(1,1) = 1 / 2
   M(1,2) = 1 / 2
   for k = 1 : n - 1
      M(k+1,1) = ........
      for i = 2 : k + 1
         M(k+1, i) = ........
      end
      M(k+1,k+2) = ........
   end
LT = ........
endfunction
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de $X_5$ le résultat suivant :

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}([X_5 = k])$ | 0.001368 | 0.079365 | 0.419434 | 0.418999 | 0.079454 | 0.00138 |

A-t-il utilisé `loi-exp` ou bien `loi-theo` ?

**Partie C**

12.(a) À l'aide de la formule $(*)$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1.$$

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

(c) Soit $Y_k$ la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après $k$ tirages.
Justifier que $X_k$ et $Y_k$ ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

13.(a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} I\!P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

**Partie D**

14. Pour tout couple d'entiers $(i,j)$ tels que $1 \leqslant j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}.$$

(a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.

(c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

(d) Montrer que pour tout polynôme $P$ dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.
*(Pour $P$ non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ où $n$ est le degré de $P$).*

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers $(i,j)$ tels que $1 \leqslant j \leqslant i$, en posant :

$$P_{1,1}(X) = 1, \qquad \text{et pour } 1 \leqslant j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + X - i)P_{i-1,j}(X)\right),$$

et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(X) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15.(a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$.

(b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$.
On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.

16. On considère, pour tout entier $i$ de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_i \ : \text{« } \forall k \in \mathbb{N},\ I\!P\big([X_k = i]\big) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k \ \text{ »}.$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout $i$ de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

(b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k = (k+1)!\,I\!P\big([X_k = i]\big) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k.$$

En utilisant la formule $(*)$ et la relation $(3 + X - i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}\left(P_{i,j}(X)\right)$, montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ est géométrique.
Déterminer $\alpha_0$ et en déduire que $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(c) Conclure.

17.(a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le résultat de la question 7(c).

(b) Déterminer $I\!P\big([X_k = 3]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

●

ecricome

**CONCOURS D'ADMISSION 2020**

# prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 15 avril 2020 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 7 pages.



***CONSIGNES***

**Tous les feuillets doivent être identifiables et paginés par le candidat.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

1.(a) Expliciter $T_2$ et $T_3$.

(b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de $T_n$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos\left((n+2)x\right) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos\left((n+1)x\right)$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ :

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3.(a) Montrer que pour tout couple $(P,Q) \in \left(\mathbb{R}[X]\right)^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

(c) Montrer que si $n$ et $m$ sont deux entiers naturels distincts, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$.

(d) Montrer que si $n$ et $m$ sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
*Indication : On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.*

(e) Montrer que :

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \geqslant 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

(f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit $n$ un entier non nul. On définit $d_n$ la distance de $X^n$ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$d_n = \inf\left\{ \|X^n - P\|,\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

(a) Justifier que : $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$.

(b) Montrer alors que : $d_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

(c) Déterminer en particulier la valeur de $d_2$.

## EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général $u_n$ converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p$ et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général $u_n$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

   $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ :

   $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

   (d) En déduire que :

   $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

   (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

 (a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

 (b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

 (c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$ :

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

 (d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p$ et que pour tout $n \geqslant 1$ :

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

 (e) La série $\sum_{n \geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

 (a) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0.$$

 (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

 (c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

 (d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p$ et que pour tout $n \geqslant 0$ :

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t.$$

## PROBLÈME

On étudie dans ce problème un processus temporel de comptage appelé **processus de Poisson**.
L'objectif de ce problème est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révèleront être équivalentes.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

### Partie A - Définition par $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

On considère dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.
Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $N_t$ la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de $n$ pour laquelle $S_n$ est inférieure ou égale à $t$, c'est-à-dire :

$$N_t = \sup \{n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose : $N_t = -1$.

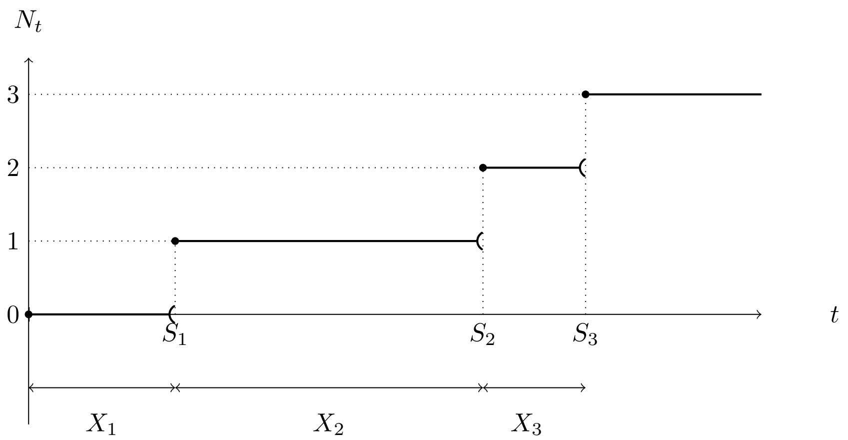



FIGURE 1 – Exemple de réalisation de $N_t$ en fonction de $t$.

1. Pour tout réel $t$ strictement positif, montrer que : $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si et seulement si $\lambda X$ suit la loi $\gamma$ de paramètre 1.
3. Pour tout entier $n$ non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire $\lambda S_n$.
4. Pour tout réel $t$ strictement positif et pour tout entier naturel $n$, comparer les événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Quelle est la loi de $N_t$ ?

7. On rappelle que l'instruction Scilab `grand(n,p,"exp",1/lambda)` renvoie une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre `lambda`.
On rappelle également que l'instruction Scilab `plot2d(x,y)` effectue un tracé qui relie les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ si `x` $= [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ et `y` $= [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ sont deux vecteurs de même taille.

(a) Écrire une fonction d'en-tête `function U = simulation_S(n,lambda)` renvoyant une réalisation de $S_n$.

(b) Écrire une fonction d'en-tête `function V = simulation_N(t,lambda)` renvoyant une réalisation de $N_t$.

(c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant toutes les valeurs $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tant que $S_n \leqslant t$. Compléter cette fonction.

```
function L = evolution_S(t,lambda)
    L = []
    S = grand(1,1,"exp",1/lambda)
    while ..........
        L=[L,S]
        S = S + ..........
    end
endfunction
```

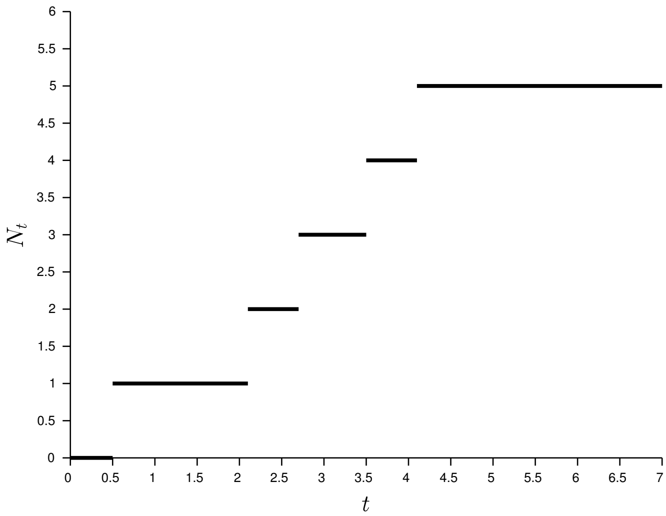
(d) On a commencé à écrire un script Scilab ci-dessous. Dans ce script, on note `S` $= [S_1, \ldots, S_n]$ et on souhaite tracer l'évolution de $N_t$ du temps 0 au temps $S_n$ de la même manière que sur la figure 1.

```
function S = trace_N(t,lambda)
    S=evolution_S(T;lambda)
    n = length(S)
    plot2d([0,S(1)],[0,0])
    for i = 1:n-1
        ..........
    end
endfunction
```

Par laquelle des instructions suivantes faut-il compléter la ligne manquante ?

i) `plot2d([S(i),S(i+1)],[i,i])`
ii) `plot2d([i,i+1],[S(i),S(i+1)])`
iii) `plot2d([S(i-1),S(i)],[i,i])`
iv) `plot2d([i,S(i+1)],[i,i])`

(e) Un·e étudiant·e exécute le script précédent pour $T = 7$ et $\lambda = 1$ et on obtient la figure suivante :




Que valent dans ce cas $N_{3.2}$ et $N_{5.5}$?
Donner une valeur approximative de $S_2$ et de $X_4$.

## Partie B - Définition par $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

On rappelle que les parties de ce problème sont indépendantes.
Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(H_1)$ **:** $N_0 = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ;
- $(H_2)$ **:** pour tout $t > 0$, $P(N_t = 0) < 1$ ;
- $(H_3)$ **:** pour tous réels $h \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de la variable aléatoire $N_t$ ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et $N_h$ ont la même loi ;
- $(H_4)$ **:** $P(N_h \geqslant 2) = o(h)$ lorsque $h$ tend vers 0 par valeurs positives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

8. Propriétés élémentaires.
   (a) Que vaut $p_0(0)$ ?
   (b) Montrer que le processus est croissant, c'est-à-dire que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$ :
   $$P(N_{t+h} - N_t \geqslant 0) = 1.$$
9. Détermination de $p_0$.
   (a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que pour tout $t, h \in \mathbb{R}_+$ :
   $$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$
   (b) En déduire que la fonction $p_0$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$ :

$$p_0(ns) = \big(p_0(s)\big)^n.$$

En déduire que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \big(p_0(1)\big)^{m/n}.$$

*On pourra poser* $s = \dfrac{m}{n}$ *et utiliser le début de la question.*

(d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe deux suites $(u_n), (v_n)$ de nombres rationnels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant t \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = t.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$. Montrer que :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. Loi de $N_t$.

Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque $h$ tend vers 0.

(b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geqslant 2])$ est un système complet d'événements, montrer que :

$$p_1(h) \underset{h\to 0}{=} \lambda h + o(h).$$

(c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements introduit précédemment, montrer que

$$p_n(t+h) \underset{h\to 0}{=} p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h).$$

(d) Déduire de cette dernière égalité que,

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \underset{h\to 0}{=} \lambda\left(p_{n-1}(t) - p_n(t)\right) + o(1).$$

En déduire que $p_n$ est dérivable en $t$ et donner l'expression de $p_n'(t)$.

(e) Pour tous $n$ de $\mathbb{N}$ et $t$ de $\mathbb{R}_+$, on pose $q_n(t) = e^{\lambda t}p_n(t)$.
Justifier la dérivabilité de $q_n$, puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

(f) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(g) Quelle est la loi de $N_t$ ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n$ le premier instant $t$ où $N_t$ vaut $n$, c'est-à-dire :

$$S_n = \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = n\right\}.$$

(a) Que vaut $S_0$ ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de $N_t$.

(c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$P(S_1 \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

(d) Reconnaître la loi de $S_1$.

(e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = \sup\left\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leqslant t\right\}.$$

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2021

prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Lundi 19 avril 2021 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.

***CONSIGNES***

**Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.



*Tournez la page s.v.p.*

# EXERCICE 1

## Partie 1 : Étude de trois matrices

On note $A$, $J$ et $S$ les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $Sp(A) = \{0\}$.
   La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que $J$ et $S$ sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $Sp(S) = \left\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$. Montrer que tout vecteur propre de $S$ est vecteur propre de $J$.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P$ inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

## Partie 2 : Étude des matrices magiques

Soit $n \geqslant 3$. On dit qu'une matrice $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **magique** quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,
- pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$, $\ell_i(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$,
- pour tout $j$ de $[\![1, n]\!]$, $c_j(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ et $d_2(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1}$,

alors :

$$M \text{ est magique si et seulement si : } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M).$$

Si $M$ est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice $M$.

On note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre $n$, et **on admet que $\mathscr{E}_\mathbf{n}$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.**

5. Montrer que $\ell_1$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**On admettra dans la suite que, pour tout $i$ de $[\![2, n]\!]$ et pour tout $j$ de $[\![1, n]\!]$, les applications $\ell_i$, $c_j$, $d_1$, $d_2$ et $s$ sont des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.**

6. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}_n$ de somme nulle.
   Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_n$.
7. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathscr{E}_n$ et déterminer $s({}^tM)$.
8. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel $\lambda$ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$, avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
9. Soit $M \in \mathscr{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ et préciser la valeur propre associée.

**Partie 3 : Étude du cas où n = 3**

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

10. Vérifier que les matrices $A$, $J$ et $S$ définies dans la partie 1 sont magiques, et déterminer leur somme.
11. Montrer que pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2, \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} M_1 \text{ antisymétrique,} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{array} \right.$$

    On explicitera notamment $M_1$ et $M_2$ en fonction de $M$.
12. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 11.
    (a) Montrer que $M_1$ et $M_2$ appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
    (b) Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S.$$

13. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que $(A, J, S)$ est une base de $\mathscr{E}_3$.
14. On note $\Delta = \{M \in \mathscr{E}_3 \ / \ P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$, où $P$ est la matrice définie dans la partie 1.
    Montrer que $\Delta = \mathrm{Vect}(J, S)$.

# EXERCICE 2

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}. \end{array}$$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

On **admettra** dans la suite que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = 2\Big( \big(1 - (x^2 + y)\big)(1 - 2x^2) - 2x^2 \Big) e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\partial^2_{2,2} f(x, y) = -2\Big( x^2 + 2y + y(1 - 2y(x^2 + y)) \Big) e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\partial^2_{1,2} f(x, y) = -2x\Big( 1 + 2y(1 - x^2 - y) \Big) e^{-(x^2+y^2)}.$$

3. Montrer que la hessienne de $f$ en $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est diagonale.
   La fonction $f$ admet-elle un extremum local en $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ? Si oui, de quelle nature ?
4. Montrer que $f$ admet un extremum local en $\left(0, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ et préciser sa nature.
5. Montrer que la hessienne de $f$ en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ est la matrice $H = e^{-3/4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$.
   Justifier que $H$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont toutes deux strictement négatives.
   Qu'en déduire pour le point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ ?

6. (a) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \Big( \big(\max(|x|,|y|)\big)^2 + \max(|x|,|y|) \Big) e^{-(\max(|x|,|y|))^2}.$$

(b) En étudiant la limite en $+\infty$ de $u \longmapsto (u^2+u)e^{-u^2}$, montrer qu'il existe un réel $r$ strictement positif tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(|x|,|y|) \geqslant r \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}.$$

(c) Représenter l'ensemble $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|,|y|) \leqslant r\}$ et justifier que cet ensemble est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(d) Vérifier que tous les points critiques de $f$ appartiennent à $\mathcal{K}$.
En déduire tous les extrema globaux de $f$ sur $\mathbb{R}^2$, et les points où ils sont atteints.

On cherche maintenant à étudier les extrema de la fonction $f$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. On a représenté sur la figure 1 ci-dessous le champ de vecteurs correspondant au gradient de $f$ (une flèche partant du point de coordonnées $(x, y)$ représente le vecteur $\nabla f(x,y)$), ainsi que le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

7. En s'appuyant sur la figure 1, la fonction $f$ semble-t-elle admettre un extremum sous la contraine $x^2 + y^2 = 1$ au point de coordonnées $(1, 0)$ ? Justifier votre réponse.
8. Déterminer sur $[-1, 1]$ les extrema de la fonction $g : y \mapsto 1 + y - y^2$.
9. Déduire de la question précédente l'ensemble des points pour lesquels $f$ admet un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Commenter ce résultat au vu de la figure 1.

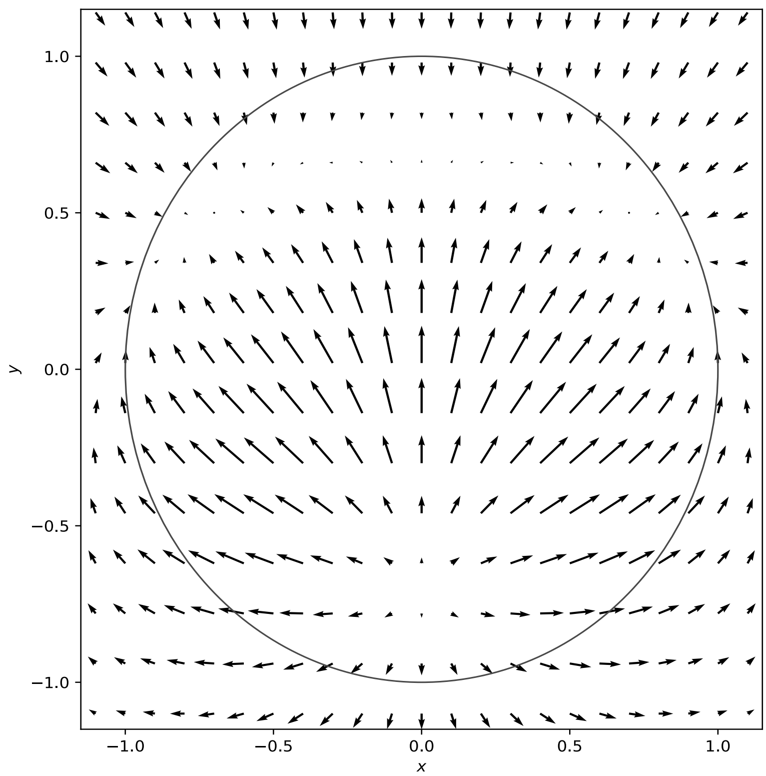



FIGURE 1 – Gradient de $f$ et cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$

# PROBLÈME

Soit $a$ un réel strictement positif.
On considère dans toute la suite du problème une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$.

L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de $a$.

Les parties 1 et 2 de ce problème sont indépendantes.

## Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

On note pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, appelé *estimateur de $a$ du maximum de vraisemblance*.

1. (a) On rappelle qu'en Scilab, l'instruction `grand(n,m,'unf',a,b)` permet d'obtenir une matrice à `n` lignes et `m` colonnes, où chaque coefficient simule une loi uniforme sur l'intervalle [`a`,`b`].
   Écrire une fonction d'en-tête `function V=sim_V(n,a)` prenant en entrée un entier naturel non nul $n$ et un réel $a$ strictement positif, et qui renvoie une réalisation de $V_n$.

   (b) On a tracé ci-dessous cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$, dans le cas où $a = 1$.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur $V_n$ ?

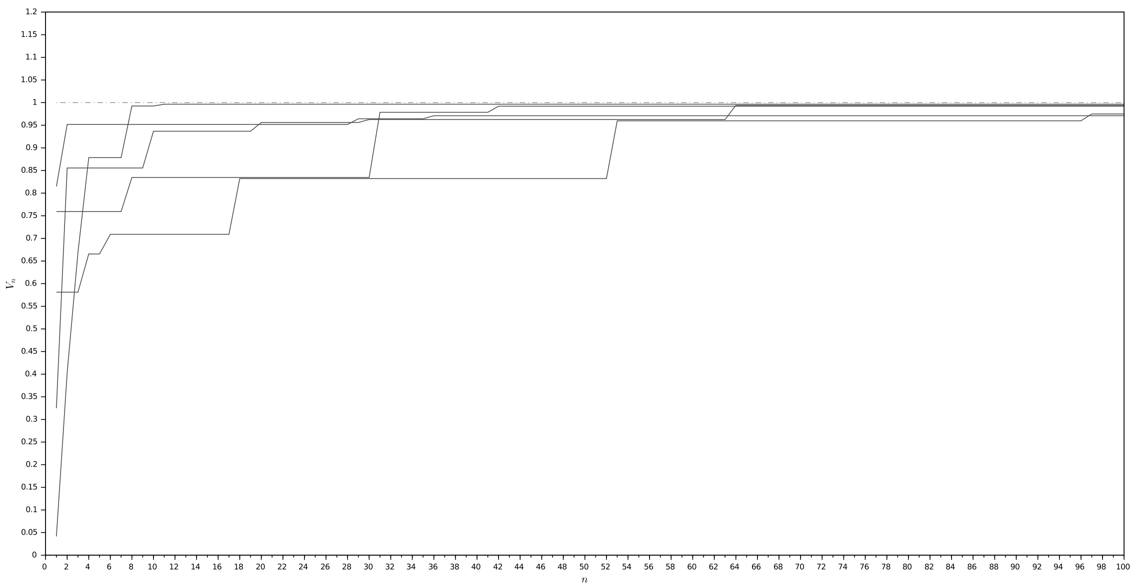



FIGURE 2 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \dots, V_{100})$ pour $a = 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de $X_1$, suivant la loi uniforme $\mathscr{U}([0, a])$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $V_n$.

   (c) En déduire que $V_n$ est une variable aléatoire à densité et donner une densité de $V_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $V_n$ admet une espérance et déterminer l'espérance de $V_n$.
   L'estimateur $V_n$ est-il sans biais ?

4. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \varepsilon)$ en fonction de $F_n$, de $a$ et de $\varepsilon$.
   L'estimateur $V_n$ est-il convergent ?

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t$, exprimer $\mathbb{P}\big(n(a - V_n) \leqslant t\big)$ à l'aide de $F_n$.
   En déduire que la suite $\big(n(a - V_n)\big)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son(ses) paramètre(s).
6. Soit $\alpha \in ]0, 1[$. Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre $a$, construit à l'aide de $V_n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $V_n$ admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que le risque quadratique de $V_n$ vaut $\dfrac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$.
   Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

**Partie 2 : Méthode des moments**

Pour un entier $n \geqslant 1$, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On note $M_n = 2\overline{X}_n$, appelé *estimateur de $a$ par la méthode des moments.*

8. Écrire une fonction d'en-tête `function y=sim_M(n,a)` qui, prenant en entrée un entier naturel non nul $n$ et le réel $a > 0$, renvoie une réalisation de la variable aléatoire $M_n$.
9. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. En déduire que $M_n$ est un estimateur sans biais.
10. Déterminer le risque quadratique de $M_n$. Cet estimateur est-il convergent ?
11. Justifier que la suite $\big(\sqrt{n}(M_n - a)\big)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le(s) paramètre(s).
12. Soit $\alpha \in ]0, 1[$.
    Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre $a$, construit sur $M_n$.
    Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 6 ?
13. Comparer le risque quadratique de $M_n$ à celui de $V_n$, obtenu à la question 7.(b).
    Commenter ce résultat à l'aide de la figure 3 ci dessous :

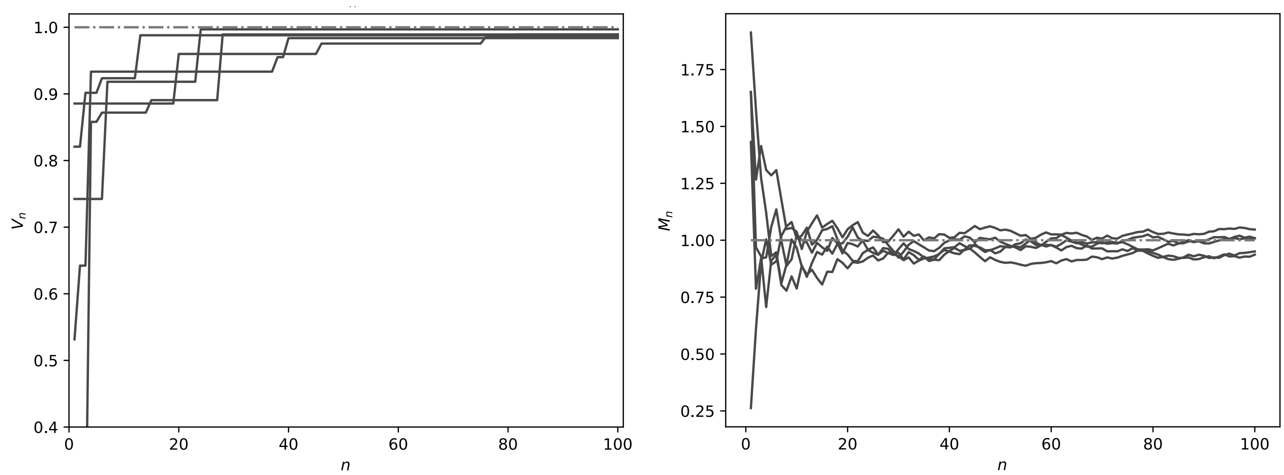



FIGURE 3 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \ldots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2, \ldots, M_{100})$ (à droite) pour $a = 1$

### Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

Dans les parties précédentes, nous avons montré que $(V_n)$ convergeait « plus vite » vers $a$ que $(M_n)$. Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure $(X_1)$ est erronée.
Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires $X_i$ sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :

- $X_1$ suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$ ;
- si $i \geqslant 2$, $X_i$ suit la loi uniforme sur $[0, a]$ (comme précédemment).

On considère toujours, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = 2\overline{X}_n = \dfrac{2}{n}\big(X_1 + \cdots + X_n\big)$.

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t$ de $]a, 2a]$, montrer que : $\mathbb{P}\big(V_n \leqslant t\big) = \dfrac{t}{2a}$.

    (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de $V_n$.
    La suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle en loi ?

    (c) Calculer $\mathbb{P}\left(V_n > \dfrac{3}{2}a\right)$.
    L'estimateur $V_n$ est-il toujours convergent ?

15. On pose pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 : $M'_n = \dfrac{2}{n-1}\big(X_2 + \cdots + X_n\big)$.
    On rappelle que la suite $(M'_n)_{n\geqslant 2}$ converge en probabilité vers $a$.

    (a) Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, exprimer $M_n$ en fonction de $X_1$, $M'_n$ et $n$.

    (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 :
    $$|M_n - a| \leqslant \frac{3a}{n} + |M'_n - a|.$$

    (c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\dfrac{3a}{n_0} < \varepsilon$.
    Pour tout entier $n$ vérifiant $n \geqslant n_0$, comparer les événements $\Big[|M'_n - a| < \varepsilon\Big]$ et $\Big[|M_n - a| < 2\varepsilon\Big]$.

    (d) La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 2}$ converge-t-elle en probabilité vers $a$ ?

16. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2022

prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Lundi 25 avril 2022 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 5 pages.



***CONSIGNES***

**Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

## Exercice 1

Dans tout cet exercice, on fixe $a$ un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale $f_n$ par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. (a) En notant pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $k$, $t_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$, exprimer pour $k$ un entier naturel non nul $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, $x$ et $k$.
   (b) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier $n$ et du réel $x$, renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
function S = f(n,x)
    t = 1 // t = t_0(x)
    S = 1 // S = f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t * .....
        S = .....
    end
endfunction
```

2. Justifier que, pour tout entier $n$ strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note $u_n$.
3. (a) Soit $x$ un réel positif.
   Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante et déterminer sa limite.
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(a) \leqslant u_n$.
   (b) Soit $K$ un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Montrer que $e^K \leqslant a$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(a)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ :

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

5. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
   On considère dorénavant un réel $M$ strictement positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |u_n| \leqslant M.$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leqslant e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) En déduire que

$$R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$e^x = f_n(x) + R_n(x).$$

   (b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathrm{e}^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \mathrm{e}^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire que :

$$\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

   (c) Justifier que $\dfrac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

   (d) En déduire finalement que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

## Exercice 2

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme $h$ est nilpotent quand il existe un entier naturel $p$ tel que $h^p$ soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que $f$ est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que $-1$ et $2$ sont des valeurs propres de $f$ et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) On suppose que $f$ est diagonalisable.
   En étudiant la trace de $A$, aboutir à une contradiction.
   Que peut-on en déduire sur $f$ ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\Big((f+\mathrm{Id})^2\Big)$ et que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}\Big((f+\mathrm{Id})^2\Big)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\Big((f+\mathrm{Id})^2\Big)$.

Pour simplifier les notations, on note dorénavant

$$F = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \text{ et } G = \mathrm{Ker}\Big((f+\mathrm{Id})^2\Big).$$

4. Montrer que $F$ et $G$ sont stables par $f$.
5. On note $P = (X+1)^2(X-2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \dfrac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2$ et $\pi_2 = -\dfrac{1}{9}(f+4\mathrm{Id}) \circ (f-2\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes $\pi_1$ et $\pi_2$ commutent.
7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$ ?
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$.
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ et que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7a et 8a que $\pi_1$ et $\pi_2$ sont des projecteurs.
11. Montrer que $\pi_2$ est le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$. Identifier $\pi_1$.

On pose maintenant

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \text{ et } h = f - g.$$

12. Justifier que $g$ et $h$ sont des polynômes de l'endomorphisme $f$.

13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de $g$ dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Montrer que $h = (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2$.
    En déduire que $h^2 = 0$.
15. Conclure.

## Problème

Dans ce problème, on considère un réel $\mu$ et un réel strictement positif $a$, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \longmapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

**Partie I**

1. Soient $a$ et $\mu$ deux réels tels que $a > 0$.
   (a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
   (b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
   (c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $I$ à déterminer.
   On note $G$ la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter $G$.
2. Soient $a$ et $\mu$ deux réels tels que $a > 0$.
   Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soient $\mu$ et $a$ des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ **suit la loi de Gumbel de paramètre** $(\mu, a)$, ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit $Z$ une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   Soit $\mu$ un réel et $a$ un réel strictement positif.
   Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(\mu, a)$.

On **admet** que réciproquement, si $X$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(\mu, a)$, alors $Z = \dfrac{X - \mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. (a) Soit $U$ une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function g = gumbel(mu,a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(\mu, a)$.
5. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(\mu, a)$ et $Z = \dfrac{X - \mu}{a}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u}\mathrm{d}u$ converge.
   (b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))\,\mathrm{d}t$ converge.
   On notera dans la suite :
   $$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que $Z$ admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.
   *On pourra utiliser le changement de variable* $u = \exp(-\exp(-x))$.
   (d) En déduire que $X$ admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de $\gamma$, $\mu$ et $a$.

On **admet** que $X$ admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de $X$ notée $\sigma^2$ est égale à $a^2c$ où $c$ est un réel strictement positif indépendant de $a$ et de $\mu$.

6. Soient $Y$ et $Z$ deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   (a) Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité $g$ de $-Z$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-(e^{-x}+1)u}du$ converge et déterminer sa valeur.
   (c) À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel $x$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt$ converge.
   (d) Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

**Partie II**

Soient $\mu$ et $a$ deux réels tels que $a > 0$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre $(\mu, a)$.

On définit pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

et

$$C_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

7. <u>Méthode des moments</u>
   (a) Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires $V$ et $W$, alors pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, la suite de variables aléatoires $(\alpha V_n+\beta W_n)_{n\geqslant 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.
   (b) Montrer que les variables aléatoires $M_n$ et $C_n$ convergent en probabilité respectivement vers $E(X_1)$ et $E\big((X_1)^2\big)$.
   (c) Montrer que $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de $a$.
   (d) Montrer alors que $S_n = M_n - A_n\gamma$ est un estimateur convergent de $\mu$.
8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script Scilab des valeurs approchées de $\gamma$ et de $c$, dans des variables notées `gamma` et `c`.
   (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function A = estimateur_a(X)` renvoyant la valeur de l'estimateur $A_n$ étudié précédemment, lorsque `X` est un vecteur-ligne de longueur $n$ dont les coefficients sont des réalisations de $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
   (b) On a tracé sur la figure 1 l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur $A_n$, pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$.
   Commenter ce graphique.

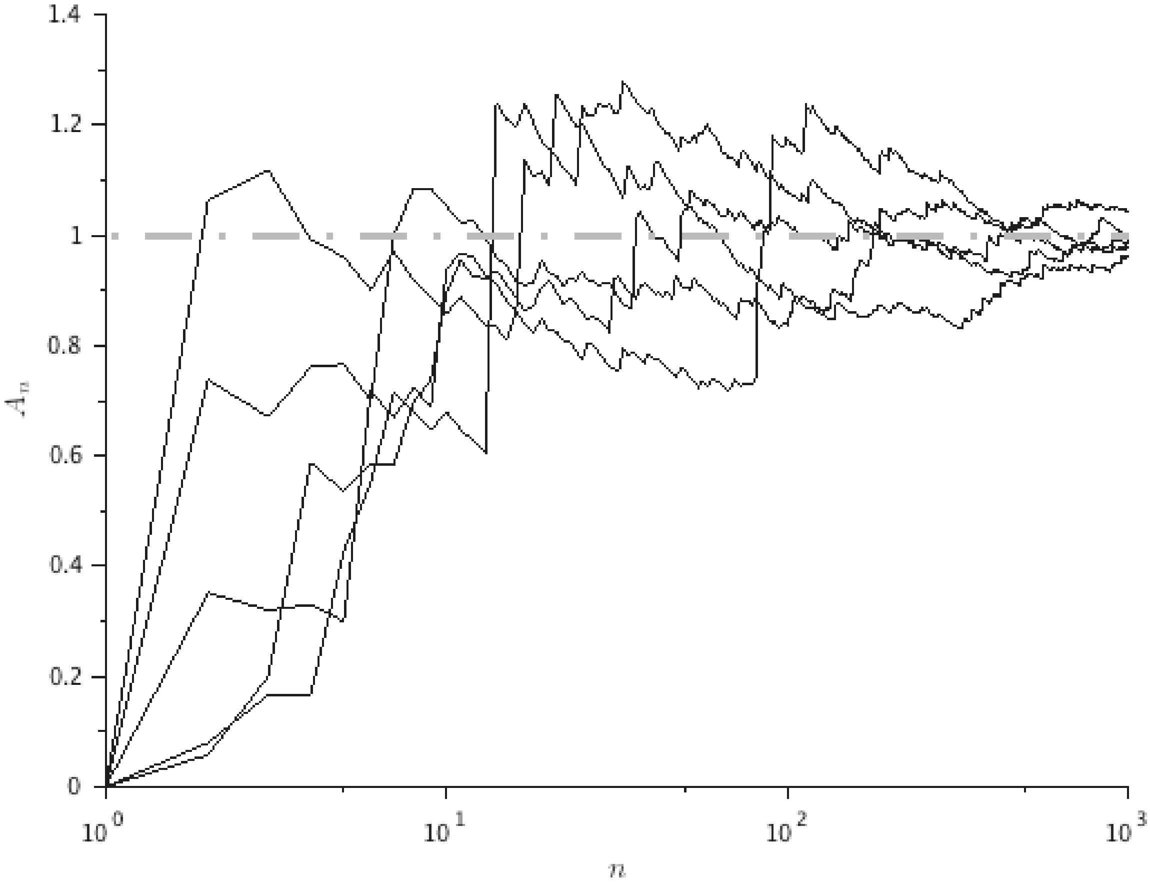



FIGURE 1 – Évolutions de $A_n$ pour $\mu = 2$ et $a = 1$

# SUJET ZÉRO

# MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
# VOIE ECG

## CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

# Mathématiques approfondies - Sujet zéro 1

## Exercice 1

Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E$.
On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $E$, et $\| \cdot \|$ la norme associée.
Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on notera $F^\perp$ l'orthogonal de $F$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

### Partie I

Dans cette partie, on note $g$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice $A^2$, puis la matrice $A^3$.
   Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2 A$.
2. Démontrer que 0 est valeur propre de $g$, et déterminer un vecteur $v_1$ de norme 1 tel que $(v_1)$ soit une base de l'espace propre de $g$ associé à la valeur propre 0.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de $g$.
4. L'endomorphisme $g$ est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?
5. On pose $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.
   Démontrer que $v_2 \in (E_0(g))^\perp$, puis déterminer un vecteur $v_3$ tel que la famille $(v_2, v_3)$ soit une base orhonormale de $(E_0(g))^\perp$.
6. Démontrer que la famille $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de $E$, et déterminer la matrice représentative de $g$ dans la base $\mathscr{C}$.

### Partie II

1. Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, démontrer que les deux propriétés $(P1)$ et $(P2)$ ci-dessous sont équivalentes :

$$\begin{array}{lcl} (P1) & : & \forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \\ (P2) & : & \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle. \end{array}$$

   Un endomorphisme vérifiant les propriétés $(P1)$ et $(P2)$ est dit **anti-symétrique**.
2. Démontrer que l'endomorphisme $g$ défini dans la partie précédente est anti-symétrique.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme $f$ de $E$ anti-symétrique.
L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il existe une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice représentative de $f$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha$ est un réel.

3. On veut démontrer par l'absurde que $f$ n'est pas bijective.
   On suppose donc que $f$ est bijective.
   Soit $x$ un vecteur non nul de $E$, et soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $x$ et $f(x)$.

   (a) Déterminer la dimension de $F$.
   (b) Démontrer qu'il existe un vecteur $y$ non nul de $E$ tel que la famille $(x, f(x), y)$ est orthogonale.
   (c) Démontrer alors que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
   (d) Conclure.
4. Démontrer qu'il existe trois vecteurs : $e'_1$, $e'_2$, et $e'_3$ de $E$ tels que $e'_1$ appartient au noyau de $f$, et la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de $E$.
5. (a) Démontrer que la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{B}$' est anti-symétrique.
   (b) Conclure quant à l'objectif annoncé au début de cette partie.

# Exercice 2

## Partie I : Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $W_0$ et $W_1$.
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$
   puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

## Partie II : Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
2. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
   (b) En déduire que : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.
3. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\ell$.
4. À l'aide des résultats de la partie $I$, déterminer la valeur de $\ell$.
5. Démontrer alors la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

## Partie III : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $h$ définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,1],\ h(t) = te^{-t}$.
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   Quelle est la nature de la série de terme général $I_n$ ?
2. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

   Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Quelle est la loi de $S_n$? En donner une densité.
   (b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{n!}{n^{n+1}} P\left(S_{n+1} \leqslant n\right).$$
   (c) On rappelle que dans la librairie `numpy.random` importée sous `rd`, se trouve les commandes suivantes :
   ⋆ `rd.random()` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   ⋆ `rd.exponential(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mathtt{a}}$.
   ⋆ `rd.normal(0,1)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
   ⋆ `rd.gamma(a)` renvoie la simulation d'une variable aléatoire de loi gamma de paramètre $a$.

   Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle prenne en argument une valeur de $n$ entière, simule 10 000 fois la réalisation de la variable aléatoire $S_{n+1}$ et renvoie une valeur approchée de $P\left(S_{n+1} \leqslant n\right)$ :

```python
import numpy.random as rd
def proba(n):
    N=............
    c=0
    for i in range(N) :
        S=............
        if S<= n:
            c=............
    return ............
```

   (d) Écrire alors un programme qui demande à l'utilisateur une valeur de $n$, puis calcule et affiche sous forme de liste les valeurs estimées de $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
   *Ce programme pourra faire appel à la fonction Python de la question précédente.*
3. Pour tout entier $n$ non nul, on pose :
   - $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$,
   - $\overline{X}_n^*$ la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$,
   - $Y_n = \overline{X}_n^* + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   (a) Justifier que la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ dont on précisera la loi.
   On **admet** que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge alors également en loi vers la variable aléatoire $Z$.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(S_{n+1} \leqslant n\right) = P\left(Y_{n+1} \leqslant 0\right)$.
   (c) En utilisant les questions précédentes, et la formule de Stirling rappelée dans la partie précédente, montrer alors que :
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

# Exercice 3

Pour tous entiers naturels $a$ et $b$ non nuls, et pour tout entier naturel $r$, on considère l'expérience aléatoire ci-dessous.
Un urne contient initialement $a$ boules blanches et $b$ boules noires.
On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et **on rajoute systématiquement** $r$ **boules blanches** avant de procéder au tirage suivant.
On note dans tout le problème $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

## Partie I

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $A_n$ l'événement : « Lors des $n$ premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches. »

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln\left(P(A_n)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$, puis calculer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $P(X=0)=0$.

**Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers $a$, $b$ et $r$, simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire et renvoie la valeur de $X$ obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers $a$, $b$ et $r$, et une valeur de $N$, qui simule $N$ réalisations de la variable aléatoire $X$ et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r=0$.
   Donner la loi de $X$.
   Montrer que $X$ admet une espérance et une variance, que l'on exprimera en fonction de $a$ et $b$.
8. On suppose dans cette question que $a=b=r=1$.
   (a) Donner la loi de $X$.
   (b) Démontrer que $X$ n'admet pas d'espérance.

## Partie II : Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r=1$ et on suppose que $b$ est supérieur ou égal à 2.

1. On suppose de plus que $a=1$.
   (a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{b\cdot b!}{n(n+1)\cdots(n+b)} = \frac{b\cdot(n-1)!\cdot b!}{(n+b)!}.$$
   (b) On note $(v_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+b-1)} = \dfrac{n!}{(n+b-1)!}$.
   Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nP(X=n) = \dfrac{b\cdot b!}{b-1}(v_n - v_{n+1})$.
   (c) En déduire que $X$ admet une espérance, et que : $E(X) = \dfrac{b}{b-1}$.

On admettra que pour tout entier naturel $a$ non nul, $X$ admet une espérance.

2. Le réel $a$ n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1.
   On notera alors **et uniquement dans cette question** $X_a$ la variable aléatoire $X$.
   Soit $B_1$ l'événement : « On obtient une boule blanche au premier tirage ».
   (a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a|B_1) = 1 + E(X_{a+1})$.
   (b) Déterminer $E(X_a|\overline{B_1})$.
   (c) Démontrer que :
   $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a) = 1 + \frac{a}{a+b}E(X_{a+1}),$$
   puis que :
   $$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ E(X_a) = \frac{a+b-1}{b-1}.$$

## Partie III

On revient au cas général où $a$, $b$ et $r$ sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que $r$ est non nul.

On rappelle le résultat démontré dans la première partie :

$$\forall n \geqslant 1,\ -\ln(P(A_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right).$$

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $u_n = -\ln(P(A_n)) - \frac{b}{r}\ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.
3. Démontrer que $P(A_n)$ est équivalent à $e^{-\ell} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $nP(X = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{r}P(A_{n-1})$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire $X$ admette une espérance.

# SUJET ZÉRO n°2

# MATHÉMATIQUES APPROFONDIES
# VOIE ECG

**CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023**

# Mathématiques approfondies - Sujet zéro 2

## EXERCICE 1

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

On note alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. (a) Calculer $I_0$.

   (b) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

      i. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout réel $A$ strictement positif :

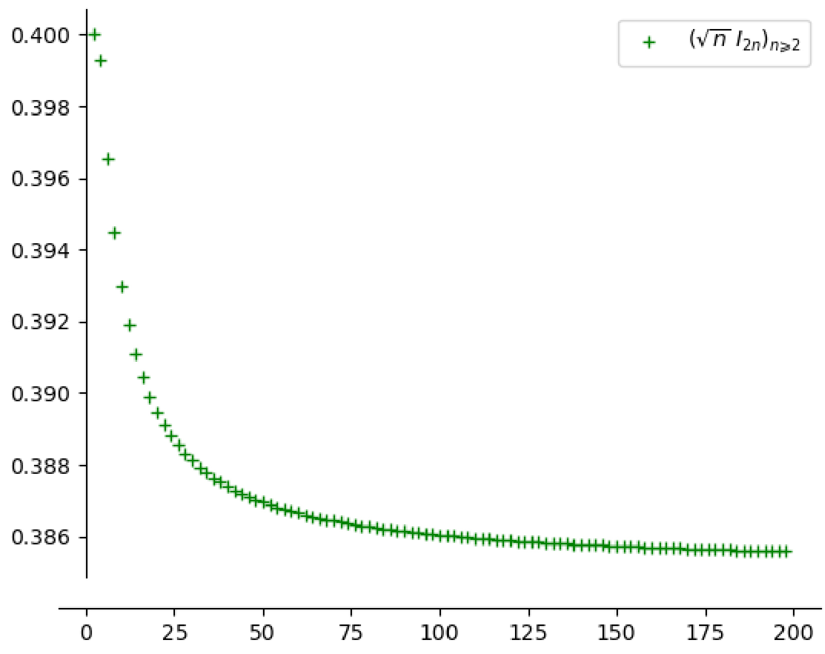
$$\int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = -e^{-A}\sin^{n-1}(A)(\sin(A)+n\cos(A)) - n\int_0^A e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t + n(n-1)\int_0^A e^{-t}\cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\ \mathrm{d}t.$$

      ii. En déduire que $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$.

3. (a) Compléter la fonction Python suivante pour que, prenant en argument un entier naturel $n$, elle calcule et renvoie la valeur de $I_{2n}$.

```
def calcul(n):
    I=.........
    for k in range(1,n+1):
        I = I * ...........
    return ..........
```

   (b) On a représenté ci-dessous la suite $(\sqrt{n}\, I_{2n})_{n\geqslant 1}$ à l'aide du programme Python précédent.
   Que peut-on conjecturer pour un équivalent de $I_{2n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?



4. Soit $n$ un entier naturel.

   (a) Justifier l'égalité :

$$\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \left(\sum_{k=0}^{N}\left((-1)^n e^{-\pi}\right)^k\right)\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$$

   (b) En déduire que :

$$I_n = \frac{1}{1-(-1)^n e^{-\pi}}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (c) Montrer que : $I_n > 0$.

5. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ : $u_n = -\ln(\sqrt{n} I_{2n})$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right)$.

   (b) Montrer, en utilisant la relation obtenue à la question 2, que $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$.

   (c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$, puis la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

   (d) Établir l'existence d'une constante strictement positive $K$ telle que $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

   (a) Déterminer un équivalent de $J_{2n}$ en $+\infty$ faisant intervenir $K$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_{2n+2} \leqslant J_{2n+1} \leqslant J_{2n}$.

   (c) En déduire un équivalent de $J_{2n+1}$ puis de $I_{2n+1}$ faisant intervenir $K$.

7. Les suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(\sqrt{n} I_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

# EXERCICE 2

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ muni du produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

- Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, de même dimension $d$.
- On note $p_F$ le projecteur orthogonal sur $F$ et $p_G$ le projecteur orthogonal sur $G$.
- Soient $\mathscr{U} = (u_1,\dots,u_d)$ et $\mathscr{V} = (v_1,\dots,v_d)$ des bases orthonormées de $F$ et de $G$ respectivement.
  On note $B$ la matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbf{R})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $B_{i,j} = \langle u_i, v_j\rangle$.

1. (a) Vérifier que l'ensemble $G$ est stable par $p_G \circ p_F$, c'est-à-dire que : $\forall x \in G$, $(p_G \circ p_F)(x) \in G$.

   (b) Montrer que l'application $\pi$ qui à tout élément $x$ de $G$ associe $(p_G \circ p_F)(x)$ est un endomorphisme de $G$.

   (c) Que vaut $\pi$ si $F = G$ ?
   Que vaut $\pi$ si $F$ et $G$ sont orthogonaux ?

2. On suppose **dans cette question uniquement** que $E = \mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, et que

$$F = \Big\{(x,y,z) \in E \ /\ x+y=0\Big\}, \quad G = \Big\{(x,y,z) \in E \ /\ y+z=0\Big\}.$$

   (a) Quelle est la valeur de $d$ dans ce cas-là ?

   (b) Déterminer une base orthonormée $\mathscr{U}$ de $F$ dont le premier vecteur est $u_1 = (0,0,1)$ , et une base orthonormée $\mathscr{V}$ de $G$ dont le premier vecteur est $v_1 = (1,0,0)$.

   (c) En déduire une expression de ${}^tBB$.

   (d) Déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$.

3. On revient au cas général dans cette question et les suivantes.

   (a) Soit $x \in G$. Montrer que : $(p_G \circ p_F)(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \left( \sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x \rangle \langle u_k, v_i \rangle \right) v_i$.

   (b) En déduire que la matrice de $\pi$ dans la base $\mathscr{V}$ est ${}^tBB$, puis que $\pi$ est un endomorphisme symétrique de $G$.

   (c) Montrer alors qu'il existe un unique $d$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbf{R}^d$, vérifiant, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d$ tel que la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}$ soit la matrice de $\pi$ dans une base orthonormée de $E$ que l'on note $\mathscr{C}$.

4. (a) Établir que pour tout vecteur $x$ de $G$ :

$$\langle x, \pi(x) \rangle = \langle x, p_F(x) \rangle = \|p_F(x)\|^2.$$

   (b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $\pi$, et $x$ un vecteur propre associé.
   Montrer que :

$$\lambda \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2.$$

   En déduire que $\lambda \in [0, 1]$.

5. En déduire que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, il existe un unique $t_k \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ , tel que $\lambda_k = \cos^2(t_k)$ où les réels $\lambda_k$ sont définis à la question 3.(c).

$Angle(F, G)$ **désigne le** $d$**-uplet** $(t_1, \ldots, t_d)$ **que l'on peut définir pour tout couple** $(F, G)$ **de sous-espaces vectoriels de** $E$ **de même dimension** $d$**.**

6. *Exemples* :

   (a) Montrer que $Angle(F, G) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \ldots, \dfrac{\pi}{2}\right)$ si et seulement si $F$ et $G$ sont orthogonaux.

   (b) Montrer que $Angle(F, G) = (0, \ldots, 0)$ si et seulement si $F$ et $G$ sont égaux.

   (c) Déterminer $Angle(F, G)$ si on reprend les hypothèses de la question 2.

# PROBLÈME

Dans tout le problème, $p$ désigne un réel de $]0, 1[$.

On réalise une expérience aléatoire qui consiste à effectuer une suite de tests successifs $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ sur un objet de la manière suivante:

- Le test $t_1$ est toujours effectué ;
- Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, sachant que le test $t_i$ a été effectué, soit l'expérience s'arrête alors avec une probabilité $p$, soit elle continue avec une probabilité $q = 1 - p$ et dans ce cas on réalise le test $t_{i+1}$.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience et on note :

- $N$ la variable aléatoire réelle égale au nombre total de tests effectués lors de l'expérience ;
- Pour tout entier naturel $i$ non nul, $T_i$ la durée aléatoire du test $t_i$ ;
- Pour tout entier naturel $k$ non nul, $D_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T_i$ ;
- $D$ la durée totale de l'expérience, en supposant que seules les durées des tests effectués sont comptabilisées.

On suppose enfin que, pour tout entier naturel $i$ non nul, $T_i$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i$, et que cette durée est indépendante des durées des autres tests et de $N$.

## Partie 1 - Loi de $D_k$

1. Montrer que pour tout entier naturel $k$ non nul, $D_k$ admet une espérance et donner une expression de celle-ci en fonction des $\lambda_i$ où $i \in [\![1, k]\!]$.

2. Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
   On suppose **dans cette question uniquement** que : $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$.
   Déterminer pour tout entier $k \geqslant 1$, une densité de $\lambda D_k$, puis de $D_k$.

3. On ne suppose plus à présent que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont tous égaux.
   On définit par récurrence les fonctions $f_k$ pour tout $k \geqslant 1$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & \text{sinon} \end{cases}$$

   et

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \qquad f_{k+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda_{k+1} e^{-\lambda_{k+1} x} \displaystyle\int_0^x f_k(t) e^{\lambda_{k+1} t}\, \mathrm{d}t & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k$ est une densité de probabilité de $D_k$ et que sa restriction à $\mathbf{R}_+$ est continue.

   (b) Donner une expression sans intégrale de $f_2(x)$ pour tout réel $x$.

4. Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2.
   On suppose dans cette question que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont distincts 2 à 2.
   On définit pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ le réel $\ell_{i,k}$ et le polynôme $L_i$ de $\mathbf{R}[x]$ par :

$$\ell_{i,k} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)},$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ L_i(x) = \ell_{i,k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (x - \lambda_j).$$

   On note enfin $P$ le polynôme défini par : $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i$.

   (a) Montrer que $P \in \mathbf{R}_{k-1}[x]$.

   (b) Pour tout $r \in [\![1, k]\!]$, calculer $P(\lambda_r)$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i = 1$ , puis que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} = 0$.

   (d) Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$ :

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (-1)^{k-1} \lambda_1 \cdots \lambda_k \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \ell_{i,k} e^{-\lambda_i x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Soit $\alpha$ un réel strictement positif.
   On suppose dans cette question que, $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha\, i$.
   Soit $k$ un entier naturel non nul.

   (a) Montrer que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\ell_{i,k} = \dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-1)!\alpha^{k-1}} \dbinom{k-1}{i-1}$.

   (b) En déduire que pour $x \geqslant 0$, $f_k(x) = k\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{k-1}$.

   (c) Déterminer $F_k$ la fonction de répartition de $D_k$.

## Partie 2 - Loi et espérance de $D$

6. On suppose que l'on a défini la fonction Python `lamb(i)` qui prend en argument un entier $i$ et qui renvoie la valeur de $\lambda_i$.
Compléter le script suivant pour qu'il affiche une valeur aléatoire qui suit la même loi que $D$ :

```
import numpy.random as rd
p=input('p=')
i=1 # numero du test
D=rd.exponential(1/lamb(1))
while rd.random() > ...... :
    i = i + ......
    D = D + ......
end
print(D)
```

7. (a) Donner la loi de $N$, et préciser son(ses) éventuel(s) paramètre(s).
   (b) En déduire que :
$$\forall x \geqslant 0,\ F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\mathbf{P}_{[N=k]}([D \leqslant x]),$$
puis que
$$\forall x \geqslant 0,\ F_D(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}F_k(x).$$

8. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$ : $f_k(t) \leqslant \lambda_1$.
*Indication : On pourra utiliser la définition de la fonction $f_k$ à la question 3.*
   (b) Montrer que pour tout réel $t$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} pq^{k-1}f_k(t)$ converge.

   Soit alors la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}f_k(t).$$
   (c) On admet, que la restriction de $f$ à $\mathbf{R}_+$ est continue.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1}\int_0^x f_k(t)\ \mathrm{d}t \leqslant q^n\lambda_1 x$$
   (d) Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ coïncide avec $F_D$ sur $\mathbf{R}_+$.
   (e) En déduire que $f$ est une densité de probabilité de $D$.

9. Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
On suppose **dans cette question uniquement** que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \lambda$
En utilisant le résultat de la question 2, établir que $D$ suit la loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

10. Soit $\alpha$ un réel strictement positif.
On suppose **dans cette question uniquement** que $\forall i \in \mathbf{N}^*$, $\lambda_i = \alpha i$.
   (a) En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la fonction de répartition de $D$, $F_D$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{p}{p+qe^{-\alpha x}}\left(1-e^{-\alpha x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F_D(x))\ \mathrm{d}x$ converge et vaut $-\dfrac{1}{\alpha q}\ln(p)$.
   (c) Montrer que pour tout réel $A > 0$,
$$\int_0^A tf_D(t)\ \mathrm{d}t = -A(1-F_D(A)) + \int_0^A (1-F_D(t))\ \mathrm{d}t.$$
   (d) En déduire que $D$ admet une espérance et préciser sa valeur en fonction de $p$ et $\alpha$.

ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2023

prépa

2

# Mathématiques Approfondies

Série ECG

**Lundi 17 avril 2023 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.

***CONSIGNES***

**Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.



*Tournez la page s.v.p.*

# Exercice 1

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul et $I_n$ désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

## Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $AB$ et $BA$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $AB$ et de $BA$.

Soit $A$ et $B$ deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de $AB$ et $X$ un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que $BX \neq 0$.
   (b) Montrer que $BX$ est un vecteur propre de $BA$ et que $\lambda$ est une valeur propre de $BA$.
3. Supposons que 0 est une valeur propre de $AB$ et $X$ un vecteur propre associé.
   (a) Supposons que $B$ est inversible.
   Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de $BA$.
   (b) Supposons que $B$ n'est pas inversible.
   Montrer que $\mathrm{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de $BA$.
4. Montrer que $AB$ et $BA$ ont le même spectre.
5. Les matrices $AB$ et $BA$ ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

## Partie 2

On considère $A$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.
Soit $B$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un $n$-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
   (a) Justifier que $A$ admet un polynôme annulateur non nul $Q$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) En étudiant les racines de ce polynôme $Q$ annulateur de $A$, aboutir à une contradiction.
   (c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ ?
7. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que l'espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ est l'espace vectoriel engendré par $X$.
   (b) Exprimer de deux manières différentes $BAX$.
   (c) En déduire que $BX \in \mathrm{Vect}(X)$.
8. Déduire que tout vecteur propre de $A$ est aussi un vecteur propre de $B$.
9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de $A$ et de $B$ telle que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ AX_i = \lambda_i X_i.$$
   (b) Pour tout entier $i$ de $[\![1, n]\!]$, on note $\mu_i$ le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$.
   Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i,\ i \in [\![1, n]\!]\}$.

10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant $n$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
    (a) Montrer que l'application $P \mapsto \big(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
    (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant
    $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ BX_i = P(\lambda_i)X_i.$$
    (c) Montrer que $B = P(A)$.
11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \big\{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AB = BA\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    (b) Montrer que $\mathscr{C}(A) = \big\{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\}$.
    (c) À l'aide de la question 6, déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

## Exercice 2

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on considère que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et que la norme associée au produit scalaire usuel est notée $\| \cdot \|$.

On considère un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^n$, symétrique dont les valeurs propres notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ vérifient
$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on considère un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et on définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle.$$

1. Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note alors $f^{-1}$ la réciproque de $f$.
2. (a) Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
    (b) Exprimer ${}^tA$ en fonction de $A$.
    (c) En déduire qu'il existe une matrice $P$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
    (d) Montrer que pour tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$.
    (e) Montrer que $\langle f(x), x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.
3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
    (a) Exprimer $g(x)$ en fonction des $x_i$, $a_{i,j}$ et $u_i$.
    (b) Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et préciser $\partial_1 g(x)$.
    (c) Vérifier que pour tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ :
    $$\nabla g(x) = f(x) - u.$$
4. Montrer que $g$ admet un unique point critique $m$ de $\mathbb{R}^n$ et que $m = f^{-1}(u)$.
5. Montrer que pour tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ :
$$\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = g(x) - g(m).$$
6. Que peut-on en déduire au sujet du point $m$, vis-à-vis de $g$ ?

On considère un réel $\alpha$ de $\left]0, \dfrac{1}{\lambda_n}\right]$ et un vecteur $m_0$ de $\mathbb{R}^n$, et l'on définit par récurrence des vecteurs $m_p$ de $\mathbb{R}^n$ par :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ m_{p+1} = m_p - \alpha\nabla g(m_p).$$

7. Soit $a, h$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
    (a) Montrer que
    $$\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle.$$

(b) En déduire que

$$g(a+h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h \rangle.$$

8. (a) En appliquant cette égalité à des vecteurs $a, h$ bien choisis, montrer que pour tout entier naturel $p$ :

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha \left\| \nabla g(m_p) \right\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel $p$ :

$$g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \left\| \nabla g(m_p) \right\|^2.$$

9. (a) Montrer que la suite $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

On admet que $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$, où $m$ a été défini à la question 4.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $p$,

$$\|m_p - m\|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\left(g(m_p) - g(m)\right).$$

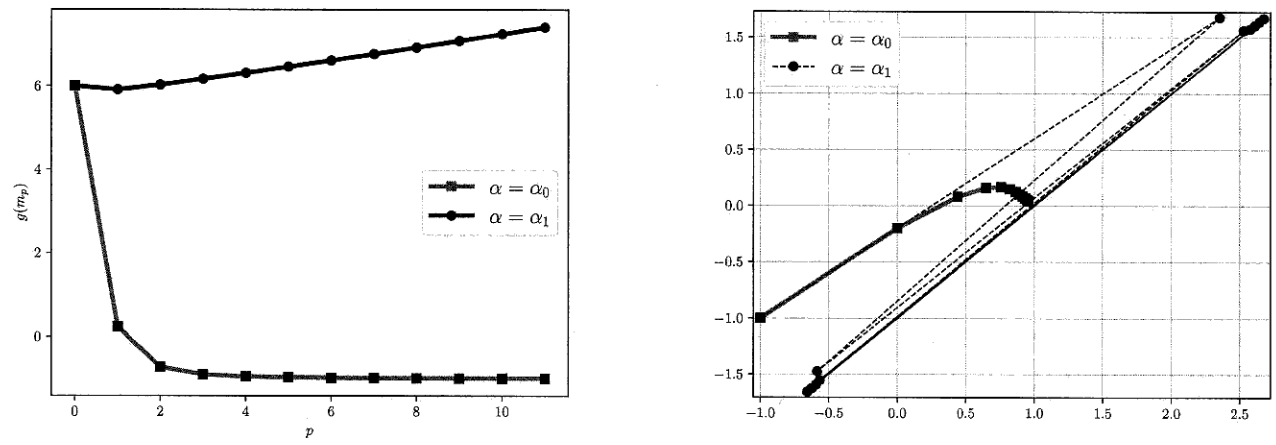
(c) En déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|m_p - m\| = 0$.

10. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $u = (2, 1)$ et

$$f : (x, y) \longmapsto (2x + y, x + 2y).$$

(a) Vérifier que $f$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

Dans la figure 1, on a représenté l'évolution des suites $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ en prenant deux paramètres différents ($\alpha_0 = 0,2$ et $\alpha_1 = 0,67$).
Dans la figure de gauche, on représente l'évolution de $g(m_p)$ en fonction de $p$, et dans la figure de droite on a représenté l'évolution de points $m_p$ dans le plan, en reliant les points successifs.




(a) Évolution de $g(m_p)$ en fonction de $p$

(b) Évolution des points $m_p$

FIGURE 1 – Deux descentes de gradient, pour deux valeurs de $\alpha$ différentes.

(b) Commenter ces courbes, et déterminer qualitativement lequel des deux $\alpha$ ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé (il n'y en a qu'un seul).

(c) Conjecturer la valeur de $m$, sachant que $m$ est à coordonnées entières.

(d) Vérifier que les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées, et que les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

# Problème

## Partie 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F : x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^x}.$$

1. La librairie Numpy est importée sous la dénomination np.
   Écrire une fonction en langage Python nommée F prenant en argument un réel $x$ et renvoyant en sortie le réel $F(x)$.
2. Justifier que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f = F'$, puis justifier que

$$f' : x \longmapsto \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

3. Dresser le tableau de variations des fonctions $f$ et $F$ sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les limites aux bornes.
4. Déterminer la parité des fonctions $f$ et $F - \dfrac{1}{2}$.
5. Sur un schéma, tracer l'allure de la courbe de $F$, en faisant apparaître tous les éléments remarquables (asymptotes, points d'inflexion notamment).
6. Justifier que $F$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I$ (à déterminer), et donner l'expression de $F^{-1}$ la fonction réciproque de $F$.

## Partie 2

7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

8. Justifier que $f$ est une densité de probabilité, et que $F$ est la fonction de répartition associée.

Dans cette partie et dans la suivante, on note $X$ une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la fonction de répartition est $F$, et dont $f$ est une densité.

9. Justifier que $X$ admet une espérance et une variance.
10. (a) En utilisant un résultat obtenu à la question 4 et à l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_{-\infty}^{0} x f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x.$$

    (b) En déduire la valeur de $E(X)$.
11. Justifier que

$$V(X) = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x,$$

puis que

$$V(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x.$$

12. Pour tout entier naturel $n$ non nul, justifier la convergence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x$.
13. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad V(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x\right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x\right),$$

où $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_N(x) = \dfrac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}.$

14. (a) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |R_N(x)| \leqslant x e^{-(N+1)x}$.

    (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

15. Déduire de toutes les questions précédentes que $V(X) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

## Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, toutes de même loi que $X$.

On admet que $X^2$ admet une variance et que $V\left(X^2\right) = \dfrac{16\pi^4}{45}$.

16. Montrer que $V_n = \dfrac{1}{n}\left(X_1^2 + \cdots + X_n^2\right)$ converge en probabilité vers $\dfrac{\pi^2}{3}$.
17. Construire une variable aléatoire $T_n$ qui converge en probabilité vers $\pi$. On justifiera précisément le résultat.
18. Montrer que si $U$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que $X$, où la fonction $F$ est définie dans la partie 1.
19. La bibliothèque `numpy.random` est importée sous la dénomination `rd`.
    On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 selon une loi uniforme sur $[0,1[$.
    Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation_X`, ne prenant aucun argument en entrée et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire $X$.
20. Écrire une fonction en langage Python, nommée `estimation_pi`, prenant un entier naturel $n$ en entrée et renvoyant une estimation de $\pi$ à l'aide de la question 17.
21. (a) Montrer qu'il existe un réel positif $z$ tel que $\Phi(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0,975$, où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
    On admet que $z \leqslant 2$, ainsi que $\pi \leqslant 4$.

    (b) Montrer que
    $$P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,95.$$

    (c) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95%, ne dépendant ni de $\pi$, ni de $z$.

    (d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $\pi$ au niveau de confiance 95%.
22. Dans la figure 2, on a tracé l'évolution, en fonction de $n$, de l'estimateur et de l'intervalle de confiance construits précédemment. Commenter la figure obtenue au regard des questions précédentes.

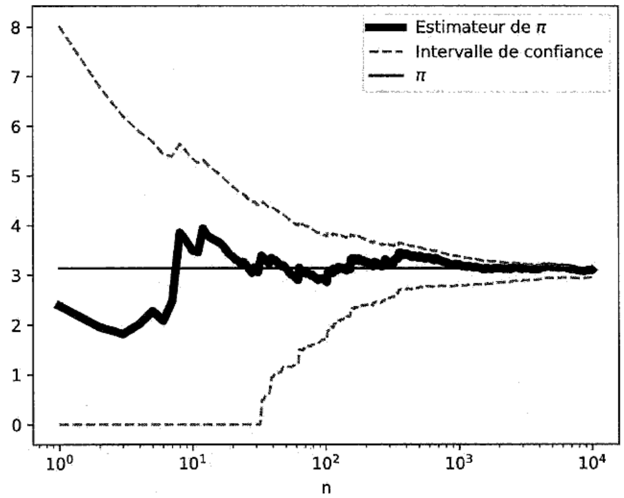



FIGURE 2 – Estimation de $\pi$

23. Pour toutes les valeurs de $n$ entre 1 et $10^3$, on a répété 100 fois l'expérience précédente, et on a tracé dans la figure 3 la proportion de fois où $\pi$ appartient bien à l'intervalle de confiance proposé (en traits plein), ainsi que la limite de 95% (en traits hachurés). Commenter la figure obtenue.

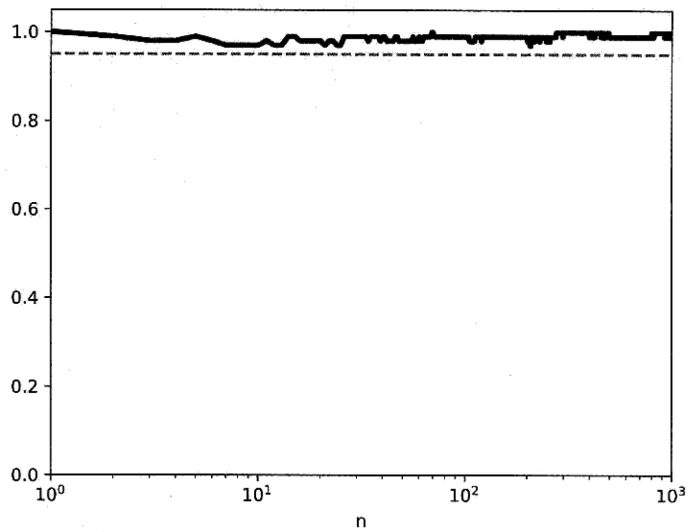



FIGURE 3 – Évaluation de la qualité de l'intervalle de confiance