edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

JEUDI 13 MAI 1993, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :
. Règles graduées
. Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

1) On note ϕ l'application de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1, 1] \quad : \qquad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1, 1], \quad \phi(t) \in [-1, 1]$.

b) Etablir que, pour tout couple (t, t') d'éléments de $[-1, 1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leqslant 9\,|t - t'|$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad f_n(x) = 3 f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4 \left(f_{n-1}(\frac{x}{3})\right)^3$$

Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :

```
function f(n :integer;x :real) :real;
```

et qui fournit la valeur de $f_n(x)$

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* : \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$$

Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2

On considère la matrice carrée A d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{(n+2)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice i de cette matrice est donc : $\begin{pmatrix} \frac{1}{i!} & \frac{1}{(i+1)!} & \frac{1}{(i+2)!} & \cdots & \frac{1}{(i+n-1)!} \end{pmatrix}$.

1) On considère un vecteur colonne X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad AX = 0$$

On lui associe la fonction polynôme P, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$P(t) = \frac{x_1}{n!} + \frac{x_2}{(n+1)!}t + \cdots + \frac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}t^{k-1}$$

a) On pose : $f(t) = t^n P(t)$. Calculer $f(1), f'(1), \cdots, f^{(n-1)}(1)$.

b) En déduire les dérivées successives de P au point 1.

2) Démontrer que P est nul et en déduire que A est inversible.

EXERCICE 3

Un appareil est constitué de composants électroniques. Lorsque l'un de ceux-ci tombe en panne, il est remplacé immédiatement. Si n est un entier naturel non nul, on note T_n la variable aléatoire égale au temps, compté en semaines, écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la n-ième panne survenant à l'emplacement d'un composant donné. Si t est un réel strictement positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de pannes du même composant dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On suppose que N_t suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t \quad (\lambda > 0)$.

1)a) Comparer les événements : $(T_1 > t)$ et $(N_t = 0)$.

b) Reconnaître la loi de T_1.

2)a) Exprimer la probabilité de l'événement $(T_n > t)$ pour $t > 0$.

b) Montrer que T_n est une variable aléatoire à densité, dont on donnera une fonction de densité de probabilité.

3) On considère deux composants identiques au précédent. Etudier la loi de probabilité de T, variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'instant 0 et l'instant de la première panne de l'un des deux composants. (On précisera des hypothèses d'indépendance raisonnables que l'on sera amené à faire.)

PROBLÈME

Notations.

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad ; \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

f_n, g_n, les fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}_+$ par les relations :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k}) \quad ; \qquad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

I_n, U_n, V_n, les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad U_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad V_n = \int_{\frac{1}{\sqrt{H_n}}}^{1} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à $n-1$.

PARTIE 1

1)a) La suite de terme général H_n est-elle convergente ? La suite de terme général S_n est-elle convergente ?

b) Pour tout nombre réel positif ou nul x, prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \tag{1}$$

c) En appliquant la double inégalité (1) à $x = \dfrac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, montrer que $H_n \sim \ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

2)a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$, pour $x \in \mathbf{R}_+$.

b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x \leqslant U_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} \mathrm{e}^{-xH_n}\,\mathrm{d}x$$

c) En conclure que : $U_n \sim \dfrac{1}{H_n}$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer de façon analogue les inégalités :

$$0 \leqslant V_n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{H_n}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{S_n}{2}}}{H_n}$$

e) Démontrer que $V_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{H_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

3) A l'aide des questions précédentes, établir que : $I_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$ quand $n \to +\infty$.

PARTIE 2

1) On considère la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'éléments de E_n définie par :

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n : \quad e_k(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+k-1)(x+k+1)\dots(x+n) = \prod_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (x+i)$$

a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n.

b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$$

c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\mathbf{C}_{n-1}^{k-1}$.

2) Déduire de la question 1 de la partie 2 la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_{n-1}^{k-1} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

3) Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie 1 pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \mathbf{C}_n^k \ln(k+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$$

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

CONCOURS D'ADMISSION 1994

MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

MERCREDI 11 MAI 1994, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :

- Règles graduées
- Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifferemment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbf{N}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} / \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \right\}$$

1) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)

2) Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad a_n = \dfrac{1}{2^n}, \quad b_n = \dfrac{n}{2^n}, \quad c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

3) Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

4) Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.

5) Montrer que $\quad s : u \longmapsto s(u) \quad$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbf{R}$; quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} s$?

6) Déterminer $\operatorname{Ker} s$.

EXERCICE 2

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^n \,dt$$

1) Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

2)a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

3)a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0,x]$, montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad \left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

b) En déduire que : $\left|I - \left(I_0 - \dfrac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$

K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

4) On pose, pour tout réel x : $\operatorname{Arctan}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \qquad \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \operatorname{Arctan}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction Arctan.

EXERCICE 3

La notation $\min(a,b)$ désigne le plus petit des deux nombres réels a et b.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions φ_n et F_n de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ en posant :

$$\varphi_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n \quad \text{et} \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \min(\varphi_n(x), 1) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1) On suppose la constante n déja déclarée. Recopier, en la complétant, la déclaration de la fonction PASCAL F pour qu'elle renvoie la valeur $F_n(x)$. On calculera $y = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ par l'algorithme de Hörner.

```
function F(x :real) :real ;
var y :real ; k :integer ;
begin
  if x<0 then ......else begin
    y :=0 ; for ......do ...... ;
    if y<=1 then ...else ...
  end ;
end ;
```

2)a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer l'existence un nombre réel positif x_n unique tel que $\varphi_n(x_n) = 1$.

b) Exprimer $F_n(x)$ sans utiliser le symbole min selon que $x \in [0, x_n]$ ou $x \in [x_n, +\infty[$.

c) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité, X_n.

d) Que vaut $P(X_n \leqslant 0)$? Que vaut $P(X_n \geqslant 1)$?

3)a) Montrer, pour n dans $\mathbf{N}^*$, l'existence d'un unique réel μ_n tel que $F_n(\mu_n) = \frac{1}{2}$.

b) μ_n est une grandeur caractéristique de la variable aléatoire X_n. Quel est son nom ?

4) Comparer $F_{n+1}(\mu_n)$ à $F_{n+1}(\mu_{n+1})$, et en déduire le sens de variation, puis la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

5)a) Calculer $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ pour $x \in [0,1[$, et calculer le nombre $L \in [0,1[$ tel que $\varphi(L) = 1$.

b) En déduire, selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant L$, ou $x > L$ la valeur de $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$, et déterminer le seul nombre réel ℓ tel que $F(\ell) = \frac{1}{2}$.

c) Montrer sans calcul que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad F_n(\ell) < \frac{1}{2}$

d) Montrer aussi que, si $\varepsilon > 0$, on a pour n suffisamment grand : $F_n(\ell + \varepsilon) > \frac{1}{2}$.

e) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (μ_n).

PROBLÈME

Données et objectifs du problème.

p désigne un nombre réel fixé tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

On étudie le mouvement dans le plan d'un mobile M partant de l'origine et se déplaçant indéfiniment d'un point à l'autre de l'ensemble des points du plan à coordonnées (x, y) entières telles que $y \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 2$. On appellera "chemin" l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) sont des entiers et vérifient : $x \in \{0, 1\}$ et $y \geqslant 0$

Le mouvement est une succession de "pas". Si le mobile se trouve à un instant donné au point de coordonnées (x, y), le pas suivant le mènera au point (x', y') selon par la règle suivante :

- Si $x = 0$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 0$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité q : $x' = 1$ et $y' = y$
- Si $x = 1$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 1$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité $\frac{q}{2}$: $x' = 0$ et $y' = y$
  - Avec la probabilité $\frac{q}{2}$: $x' = 2$ et $y' = y$
- Si $x = 2$ (c'est-à-dire si le mobile est hors du chemin), alors $x' = 2$ et $y' = y + 1$

On note respectivement X_n et Y_n l'abscisse et l'ordonnée du mobile à l'issue du n-ième pas. A titre d'exemple, les événements $(X_0 = 0)$ et $(Y_0 = 0)$ sont certains.

PARTIE 1 *Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire.*

On admet que l'on dispose d'une fonction hasard, sans paramètre, à valeurs entières, qui retourne aléatoirement les valeurs -1 0 et 1, respectivement avec les probabilités $\frac{q}{2}$, p, et $\frac{q}{2}$.

Rédiger les lignes manquantes du programme PASCAL suivant pour que celui-ci simule le cheminement du mobile M en affichant à l'écran les coordonnées (x, y) des positions successives de M jusqu'à ce que son abscisse prenne pour la première fois la valeur 2 (c'est-à dire jusqu'à la sortie du chemin).

```
program simulation ;
var x,y,h :integer ;
begin
  x :=0 ; y :=0 ;
  while x<2 do begin
    h :=hasard ;
    ......................
  end ;
end.
```

PARTIE 2 *Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet sur le chemin.*

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & \frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1)a) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

b) Montrer que $p + \dfrac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre v relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

c) Montrer que $p - \dfrac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre w relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

d) En déduire une matrice inversible Π telle que la matrice $A' = \Pi^{-1}A\Pi$ soit diagonale. Expliciter A'.

e) Résoudre le système $\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire le produit $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Calculer explicitement la première colonne de la matrice A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

2)a) Justifier de façon précise :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1} = 0) \\ P(X_{n-1} = 1) \\ P(X_{n-1} = 2) \end{pmatrix}$$

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

3)a) Calculer $\ell = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$. Avez vous une justification intuitive du résultat ?

b) Donner un équivalent de la forme ab^n de $\ell - P(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On note T la durée du trajet sur le chemin, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que tel que $X_n = 2$.

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 2)$.

b) Déterminer la loi de probabilité de T.

c) Calculer l'espérance mathématique de T.

PARTIE 3 *Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue sur le chemin.*

Dans cette partie, $[a]$ désigne la partie entière d'un réel a.

1)a) On pose $y = n - 2k$. Déterminer, en fonction de l'entier k compris entre 0 et $[\frac{n}{2}]$, la probabilité que M parvienne en $(0, n-2k)$ en effectuant n "pas"le long d'un itinéraire donné, itinéraire constitué d'une succession de $n - 2k$ pas vers le haut et d'un nombre égal de pas vers la droite et de pas vers la gauche, dans un ordre déterminé.

b) y désignant maintenant un entier naturel quelconque, déterminer le nombre d'itinéraires possibles menant de O à $(0, y)$ en n pas. On aura soin de distinguer deux cas :

- $n - y$ impair ou strictement négatif.
- $n - y$ pair et positif.

c) En déduire, en distinguant toujours ces deux cas, la valeur de : $P((X_n = 0) \cap (Y_n = y))$.

2) Déterminer de même la valeur de : $P((X_n = 1) \cap (Y_n = y))$.

3) Dans cette question on cherche à retouver la loi de probabilité (marginale) de X_n à partir de la loi conjointe du couple (X_n, Y_n).

a) Justifier très précisement l'égalité : $P(X_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} P((X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k))$.

b) Retrouver ainsi la valeur de $P(X_n = 0)$.

c) Retrouver de la même façon la valeur de $P(X_n = 1)$.

4) On note D la variable aléatoire égale à la "distance parcourue sur le chemin", c'est-à-dire la valeur prise par la variable aléatoire Y_t où t désigne le plus petit des entiers n tels que $X_n = 2$.

a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire D ?

b) Montrer que : $(D = m) = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{N}} [(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)]$

c) Montrer que : $\forall m \in \mathbf{N} \qquad P(D = m) = \dfrac{p^m}{m!} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(m+1+2k)!}{(1+2k)!} \left(\dfrac{q^2}{2}\right)^{1+k}$.

d) Calculer cette probabilité pour $m = 0$, $m = 1$, et $m = 2$.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

CONCOURS D'ADMISSION
MATHEMATIQUES
OPTION GENERALE

LUNDI 15 MAI 1995, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-Règles graduées
-Calculatrices de poche, programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long X 15 cm de large.

L'épreuve comporte 3 exercices et 1 problème.

EXERCICE 1

Préliminaire :On rappelle que si (u_n) est une suite réelle , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 :$|u_n - a| \leq \varepsilon$.
En déduire que si (u_n) est une suite réelle convergente de limite a , strictement positive , alors il existe un entier naturel n_0 tel que , pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geq \dfrac{a}{2}$.
Ce résultat pourra être admis dans la suite de l'exercice .

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x.(1-x)$ et la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1 Etudier les variations de f .

2a Montrer que,pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$

2b Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est croissante .
En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.

2c Pour tout entier naturel n , on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in N}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3 On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4 Montrer à l'aide de la question 2b que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

EXERCICE 2

Partie I: E désigne un espace vectoriel sur R, de dimension n ($n \geq 2$)
On note i l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.
Soit s un endomorphisme involutif de E, c'est à dire vérifiant s o s = i.

1 Justifier que s est bijectif et définir s^{-1}.
2 Déterminer les seules valeurs propres possibles de s.
On suppose dans la suite de cette partie que de plus $s \neq i$ et $s \neq -i$.
3a Montrer que (s - i) o (s + i)= θ.
3b En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s.
4 Montrer que E = Ker (s - i) $\oplus$ Ker (s + i) (On montrera dans un premier temps que si pour tout x de E on a : x = u+v, avec u élément de Ker (s - i) et v élément de Ker (s + i), alors nécessairement s(x) = u -v)
s est appelée la symétrie par rapport à Ker (s - i) parallèlement à Ker (s + i).

Partie II : Etude d'un exemple.

M_n (R) désignant l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n, on note S l'ensemble des matrices symétriques de M_n (R) et A l'ensemble des matrices antisymétriques de M_n (R).
Si M est la matrice de M_n (R) dont $m_{i,j}$ est l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne et de la j$^{\text{ème}}$ colonne, avec i et j éléments de { 1,2,...,n } ,on rappelle que :
M est symétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = m_{i,j}$.
M est antisymétrique si et seulement si pour tout (i,j) : $m_{j,i} = -m_{i,j}$.
Dans la suite, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.
1 Vérifier que S et A sont des sous-espaces vectoriels de M_n (R).
2 Montrer que : $M_n(R) = S \oplus A$.
3 On note T l'endomorphisme de M_n (R) qui à chaque matrice associe sa transposée, montrer que T est la symétrie par rapport à S parallèlement à A.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif.

Partie I

1 j et k désignant des entiers naturels, $a_{k,j}$ des réels tels que, pour tout j la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ soit convergente, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$.

2 Soient X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variable aléatoire à valeurs dans { 0,1,...,n }. Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on définit l'espérance conditionnelle de S sachant que X=k par :

$$E(S / X=k) = \sum_{j=0}^{n} j P(S=j / X=k)$$

Montrer , en utilisant la première question , que : $E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S / X=k).P(X=k)$.

Partie II

Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble .A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
On émet les hypothèses suivantes :
-Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée .
-Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers .
(Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur)
Enfin , pour tout entier naturel k , on appelle S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ .

1 Montrer que pour tout j appartenant à { 1,2,...,n } et pour tout entier naturel k :

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n} P(S_k = j-1) .$$

2 En déduire que $E(S_{k+1}) = 1 + (1 - \frac{1}{n})\, E(S_k)$.

3 Après avoir justifié que $E(S_0) = 0$, déterminer $E(S_k)$ pour tout entier naturel k .

4 Montrer que si S désigne la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné : $E(S) = n(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})$

PROBLEME

p et n désignent deux entiers naturels non nuls .

Partie I

On pose : $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1a Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1 : $0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

1b En déduire que la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ est élément de [0,1] . On note maintenant : $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

2a Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{p+x} dx$.

2b En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \le u_p \le \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$.

2c A l'aide de cette dernière inégalité , établir que : $\frac{1}{2(n+1)} \le r_n \le \frac{1}{2n}$

3 Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

Partie II

Dans cette partie , k est un entier supérieur ou égal à 1 .

On pose , pour tout réel t strictement positif : $f_0(t) = \dfrac{1}{t}$ et $f_k(t) = \dfrac{1}{t(t+1)\ldots(t+k)}$

1 Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = k.f_k(t)$.

2 En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k.(n+k)!}$

Partie III

On note P_k le polynôme défini par :

$P_1(t) = t$ et , pour tout k supérieur ou égal à 2 , $P_k(t) = t(1-t)(2-t)\ldots(k-1-t)$.

On pose d'autre part : $a_k = \int_0^1 P_k(t)dt$.

1a Vérifier que, pour tout x positif : $\dfrac{1}{p+x} = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{1-x}{p+x}$

1b En déduire que $u_p = \dfrac{1}{2p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)} \displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}dx$.

2a Montrer que pour tout k entier supérieur ou égal à 1 , et pour tout réel x positif :

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}$$

2b En déduire , par récurrence sur k , que:

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx$$

2c Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx \le \frac{a_{k+1}}{p-1}$

2d En déduire , en utilisant la partie II , que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$$

avec $0 \le r_{n,k} \le \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

2e Construire une suite $(v_{n,k})_{n\in N}$, de limite γ telle que : $0 \le \gamma - v_{n,k} \le \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

3a Calculer a_1, a_2, a_3, a_4 .

3b Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

3c Ecrire , en Turbo-Pascal , un algorithme permettant le calcul de v_{n_0} , puis de $v_{n_0,3}$.

3d Donner la valeur de γ à 10^{-5} près .

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 7 mai 1996, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées :

- Règles graduées
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm x 15cm de large, sans limitation de nombre.

EXERCICE 1

Soit F la fonction réelle définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ si $x \in]\,0,1\,[$, $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln 2$.

1) Vérifier que F est bien définie sur $[\,0,1\,]$.

2) a. Pour tout x élément de $]\,0,1\,[$, vérifier que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln 2$.

   b. Montrer que, pour tout x de $]\,0,1\,[$: $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.

   c. En déduire que F est continue sur $[\,0,1\,]$.

3) a. Montrer que F est dérivable sur $]\,0,1\,[$ et calculer $F'(x)$ pour tout x de $]\,0,1\,[$.

   b. En déduire que F' est continue sur $[\,0,1\,]$.

4) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$.

   Montrer que I est une intégrale convergente puis donner sa valeur.

EXERCICE 2

Toutes les matrices en jeu dans cet exercice sont considérées comme éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels.
Une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est dite involutive si et seulement si $M^2 = I$.

Ecole de Hautes Etudes Commerciales du Nord. Association régie par la loi de 1901.
58, rue du Port 59046 LILLE Cedex. Tél. 20.15.45.00. Fax 20.15.45.01. SIRET 783 707 060 00027. APE 803 Z. CCP LILLE 247723J.
393, promenade des Anglais B.P. 116 06202 NICE CEDEX 3. Tél. 93.18.99.66. Fax 93.83.08.10. SIRET 783 707 060 00035. APE 803 Z.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) a. Montrer que $M^2 = (a + d)\,M - (ad - bc)\,I$.
   b. En déduire que M est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.
   c. Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction seulement de a, b, c et d.

2) a. Montrer que la matrice αI, α désignant un nombre réel, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.
   b. On suppose, dans cette question que $M \neq I$ et $M \neq -I$.
   Montrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   a. Trouver un nombre réel α tel que $A = \alpha I + B$, B étant une matrice involutive.
   b. Calculer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I et B.
   c. Montrer que A est inversible et vérifier que la formule trouvée en 3)b est encore valable pour $n = -1$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, x désigne un réel de $]\,0, \pi/2\,[$.

1) Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).$$

   a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\dfrac{x}{2^n}$ est géométrique.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de x et n.
   c. Montrer enfin que (u_n) est convergente et donner sa limite.

2) On considère l'algorithme suivant :

```
Program schw ;
var x, a, b : real ;
     k, n : integer ;
Begin
Readln(x) ; Readln(n) ; a := 1 ; b := 1/cos(x) ;
For k := 1 to n do begin
                   a := (a + b)/2 ;
                   b := sqrt (a * b) ;
                   end ;
Writeln(a, b) ;
end .
```

   a. Montrer que, lorsque x appartient à $]\,0, \pi/2\,[$, cet algorithme permet le calcul des $(n + 1)$ premiers termes de deux suites (a_n) et (b_n) dont les premiers termes sont respectivement $a_0 = 1$ et $b_0 = 1/\cos(x)$.
   b. Vérifier que $b_1 = \dfrac{\cos(x/2)}{\cos(x)}$.

c. Écrire, pour $n \geq 1$, les relations de récurrence liant a_n, b_n, a_{n-1} et b_{n-1}.
d. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

3) a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - a_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n$.
c. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).
d. En utilisant le résultat obtenu à la question 3)a , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right).$$

e. Montrer finalement que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite ℓ.

4) a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = \dfrac{u_n \cos(\frac{x}{2^n})}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2(x)}$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

PROBLÈME

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe d'origine O ; à chaque instant, il est soit en O (d'abscisse 0), soit en A (d'abscisse 1), soit en B (d'abscisse 2) soit en C (d'abscisse 3)
Les règles de ce "voyage" sont les suivantes :

- Le mobile est en O à l'instant 0.
- Le point O est "réfléchissant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en O, il est certain qu'à l'instant (n + 1) il sera en A.
- Si à l'instant n le mobile est en A , alors à l'instant (n + 1), il sera soit en O, soit en B et ceci de façon équiprobable.
- Si à l'instant n le mobile est en B , alors à l'instant (n + 1), il sera soit en A, soit en C et ceci de façon équiprobable.
- Le point C est "absorbant", c'est-à-dire que, si à l'instant n le mobile est en C, il est certain qu'à l'instant (n + 1) il sera encore en C.

Pour tout entier naturel n :

- On désigne par X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce mobile à l'instant n.
- On appelle M la matrice réelle, carrée d'ordre 4, dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est $P\left(X_{n+1} = i \,/\, X_n = j\right)$, pour tous i et j appartenant à {0, 1, 2, 3}.
- On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Partie I

1) a. Déterminer la matrice M.
b. Montrer que $U_{n+1} = M\, U_n$.

 (option S)

2) a. Vérifier que 0, 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont valeurs propres de M.

b. En déduire l'existence d'une matrice P inversible, qu'on choisira de telle manière que chacune de ses colonnes contienne un nombre maximum de "1", et vérifiant $M = PDP^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

c. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter la première colonne de M^n. (on distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$)

e. Préciser U_0 et en déduire, pour tout entier naturel n, la loi de X_n.

Partie II

1) On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre C la première fois.

a. Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 3 :

$$(Y = j) = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_k \neq 3)\right] \cap (X_j = 3)$$

b. Montrer que $(X_{j-1} \neq 3) \cap (X_j = 3) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$.

c. En déduire, en comparant les événements $(X_{j-1} = 2)$ et $\left[\bigcap_{k=0}^{j-2}(X_k \neq 3)\right]$, que :

$(Y = j) = (X_{j-1} = 2) \cap (X_j = 3)$, puis donner la loi de Y.

d. Montrer que Y a une espérance et en déduire le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre C la première fois.

2) On désigne par Z la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B la première fois.

a. Pourquoi ne peut-on pas écrire, d'une manière analogue à celle utilisée dans la première question de cette partie, que : $(Z = j) = (X_{j-1} = 1) \cap (X_j = 2)$?

b. Exprimer, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(Z = 2j)$ à l'aide d' événements liés aux variables $X_0, X_1, \ldots, X_{2j}$. En déduire $P(Z = 2j)$ pour tout j de $\mathbb{N}$.

c. Pour tout j de $\mathbb{N}$, calculer $P(Z = 2j + 1)$.

d. En déduire que Z a une espérance, puis déterminer le nombre moyen de déplacements nécessaires au mobile pour atteindre B la première fois.

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées :

Une règle graduée.
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.
   b. En déduire que Δ n'est pas surjective.
3) Montrer que Δ est injective.
4) On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.
   a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\ e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.
   b. Déterminer alors $\Delta(f)$.
5) Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.
6) Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.
   a. Montrer que F_n est de classe C^{n+1}.
   b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

a. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \int_{x}^{2x} g(t)\, dt = 0$.

c. En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a. Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0 [$ et sur $] 0, +\infty [$.

b. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] 0, +\infty [$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in] 0, +\infty [, \, | f(x) | < \frac{1}{2x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5) a. Montrer que $f(\pi / 2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

b. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\, dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

c. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

EXERCICE 3

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.
On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1) Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) a. Montrer que Im gof $\subset$ Im g.

b. Montrer que dim Im g ≤ 2.

c. Déduire des questions précédentes que dim Im gof ≤ 2.

d. Conclure que gof n'est ni surjective, ni injective.

3) En déduire une valeur propre de BA.

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

a. Montrer que $BX \neq 0$.
b. Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est valeur propre de BA.
c. En déduire que BA est diagonalisable.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

Partie I

Une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, étant définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A étant un événement de $\mathcal{A}$, de probabilité non nulle, on définit la variable aléatoire $T = Z / A$ (Z sachant que A est réalisé) par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = P([Z = k] / A)$.

On considère un événement A vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.

Montrer que si Z a une espérance, alors Z / A et $Z / \overline{A}$ ont aussi une espérance et que :

$E(Z) = P(A)\, E(Z / A) + P(\overline{A})\, E(Z / \overline{A})$.

Partie II

On dispose de deux urnes, U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient 2n boules numérotées de 1 à 2n.

On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, un nombre compris entre 1 et 2n, puis à transférer la boule portant le numéro choisi, de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre urne.

Pour tout entier k élément de $[\![0, 2n]\!]$, on dit que U est dans l'état E_k lorsque U contient k boules et on dit que U accède à l'état E_k lorsque U contient k boules **pour la première fois**.

On note X_k la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que U accède à l'état E_k et égale à 0 si l'état E_k n'est jamais atteint.

On admettra que X_k a une espérance, notée m_k.

Enfin, pour tout entier j, élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$.

Le but de cette partie est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_k, c'est-à-dire d'évaluer le nombre m_k.

1) Montrer que X_0 et X_1 sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.

2) a. Donner, pour tout j élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, une interprétation de la variable N_j.

b. Montrer que N_j a une espérance que l'on notera μ_j dans la suite.

3) Soit j un élément de $[\![1, 2n-1]\!]$.

a. Soit A_j l'événement : " U accède à l'état E_{j+1} depuis l'état E_j, en une seule épreuve". Calculer $P(A_j)$.

b. Montrer que N_j / A_j est la variable certaine égale à 1 et que $N_j / \overline{A}_j = 1 + N_{j-1} + N_j$.

c. Montrer, en utilisant la partie I, que : $\forall j \in [\![1, 2n-1]\!]$, $\mu_j = \dfrac{2n + j\,\mu_{j-1}}{2n - j}$.

d. En déduire que : $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!]$, $\mu_j = 2n \displaystyle\int_0^1 x^{2n-j-1}(2-x)^j\,dx$

4) Soit k un élément de $[\![1, 2n]\!]$.

a. Écrire, en la justifiant, la relation liant X_k et $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$.

b. En déduire la relation liant m_k et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$.

c. Vérifier que : $\forall x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1}(2-x)^j = x^{2n-k}\left(\frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}\right)$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{2n-k}\left[\frac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}\right]dx$ est convergente.

5) En déduire que : $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $m_k = n\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{2n-k}\left[\frac{(1+t)^k - (1-t)^k}{t}\right]dt$.

Partie III : étude de deux cas particuliers.

1) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_n, c'est-à-dire pour que, pour la première fois les urnes U et V contiennent le même nombre de boules.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$ (on pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique).

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

c. En déduire alors que : $m_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$.

2) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_{2n}, c'est-à-dire pour que, pour la première fois l'urne V soit vide.

a. Pour tout entier naturel p, on pose : $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^p - (1-t)^p}{t}\,dt$.

Vérifier que I_p est une intégrale convergente puis calculer $I_p - I_{p-1}$.

b. En déduire que $m_{2n} = n\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{2^k}{k}$.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ÉCOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

Option Scientifique

Mardi 5 Mai 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

Question préliminaire :
La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

et d'autre part la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
2) Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3) a. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   b. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.
   En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5) a. Montrer que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   b. En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   c. En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

EXERCICE 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "Pile" ou "Face" avec la probabilité 1/2.
On note P_k (resp F_k) l'événement : " on obtient Pile (resp Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ".
Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" puis "Face" dans cet ordre aux lancers k−1 et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" suivi de "Pile" aux lancers k−1 et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, "contre toute attente", $E(Y) > E(X)$.

1) Calculer $P(X = 2)$.

2) a. Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si le premier lancer est un "Pile", alors il faut et il suffit que $P_2 P_3 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

b. En déduire que :
$$\forall\, k \geq 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
Déterminer u_k, puis donner la loi de X.

3) Montrer que X a une espérance, notée E(X), et la calculer.

4) a. Montrer que (F_1, P_1P_2, P_1F_2) est un système complet d'événements.

b. En déduire que, pour pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :
$$P(Y = k) = \frac{1}{2} P(Y = k-1) + \frac{1}{4} P(Y = k-2). \quad (*)$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = P(Y = k)$.
Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a,
pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $v_k = \frac{1}{2} v_{k-1} + \frac{1}{4} v_{k-2}$.

d. En déduire la suite $(v_k)_{k\geq 0}$ puis donner la loi de Y.

e. Montrer que Y a une espérance, notée E(Y), et la calculer.

EXERCICE 3

1) On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

a. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

b. Déterminer la fonction de répartition de Z.

c. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

2) Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.
b. Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.
c. Déterminer l'espérance de Z.
d. On pose $T = | Z |$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; on rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \dots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par : $Q = (X - 1)P' - XP''$.

Partie I : étude de φ.

1) a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Pour tout j élément de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$.
   c. Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.
   d. En déduire que φ est diagonalisable.
2) Pour tout k élément de $[\![0, n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$ et on écrit $L_k = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, avec $a_p = 1$.
   a. Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k.
   b. Déterminer L_0.
   c. Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ sont solutions.
   d. En déduire que : $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!\left[C_k^i\right]^2$.
3) On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
   Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$.

Partie II : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1) P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\psi(P, Q) = (P / Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)\,dx.$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

b. Vérifier que l'intégrale définissant (P / Q) est convergente.

c. Montrer que ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$, montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)\,g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t)\,dt.$$

3) Montrer que : $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_k^{(i)}(0) = 0$. (f_k étant la fonction définie à la question I3)

4) Soient i et k deux entiers naturels.

a. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)\, f_k^{(k)}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)\, f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)\, f_k(t)\,dt.$$

b. En déduire que $\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)\,dt$

c. Montrer que, pour le produit scalaire ψ, la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. Montrer que $I_{k+1} = (k + 1)\, I_k$, puis donner la valeur de I_k.
En déduire la norme de L_k, notée $\| L_k \|$, puis donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III : étude des racines de L_n.

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.

On pose $R(x) = \prod_{j=1}^{p}(x - x_j)$, où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n. On convient que R(x) = 1 si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}^+$.

2) On suppose dans cette question que p < n.

a. En remarquant que R est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $(R / L_n) = 0$.

b. En déduire que RL_n est le polynôme nul.

3) a. En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que p = n.

b. En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 7 mai 1999, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) = \int_n^x e^{t^2}\, dt$.

1) Étude de g_n.
   a. Montrer que g_n est dérivable sur son domaine et donner son sens de variation.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
   c. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté x_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $g_n(x_n) = 1$.

2) Étude de la suite (x_n).
   a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-x_n^2} \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$.

3) On pose $u_n = x_n - n$
   a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, u_n$.
   c. Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

Exercice 2

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1) a. Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?
   b. Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2) a. Calculer $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 1)$.
   b. Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.
   c. En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.
3) Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement :
   "On obtient la boule noire pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage".
   a. En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.
   Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.
   b. Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.
   c. Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.
4) Montrer que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.
5) Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.
   a. Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de $P(X_{2i+j+1} = 1 / X_{2i+1} = 1)$.
   b. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!]$, $\operatorname{cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = \dfrac{-1}{n^2}$.
6) Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.
   a. Montrer que, pour tout k de $[\![1, n-i-1]\!]$, $P(X_{2i+2k} = 1 / X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   b. Montrer que, pour tout k de $[\![0, n-i-1]\!]$, $P(X_{2i+2k+1} = 1 / X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   c. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!]$, $\operatorname{cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.
7) Montrer que la variance de X est : $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}$.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$ et θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :

(A_1) : $u^2 = -Id$ (il faut comprendre $u \circ u = -Id$).
(A_2) : $v \neq Id$.
(A_3) : $(v - Id)^2 = \theta$.
(A_4) : $Ker(u + v - Id) \neq \{0\}$.

1) Étude d'un exemple.
Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement
$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

2) a. Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et Id.
3) a. Établir que : $Im(v - Id) \subset Ker(v - Id)$.
   b. En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $Im(v - Id) = Ker(v - Id)$.
4) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $dim\ Ker(u + v - Id) = 1$.
5) Soit (e_2) une base de $Ker(u + v - Id)$, on pose : $e_1 = -u(e_2)$.
   a. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Donner les matrices de u et v dans cette base.
6) Donner la conclusion de cet exercice.

Problème

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, ..., f_n$ définies par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_k(x) = x^k e^{-x}$.
On appelle E_n l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$.
On note d l'application qui à toute fonction de E_n associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de E_n.
2) a. Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.
   b. Montrer que d est un endomorphisme de E_n.

3) a. Vérifier que d est un automorphisme de E_n.

b. Justifier que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d(\frac{1}{k!} f_k) = \frac{1}{(k-1)!} f_{k-1} - \frac{1}{k!} f_k$.

c. En déduire, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, ..., f_n)$.

4) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale $I_j = \int_0^{+\infty} x^j e^{-x}\, dx$ converge, puis donner sa valeur en fonction de j.

5) Montrer que l'application qui à tout couple (f, g) de E_n associe :

$(f / g) = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^x dx$ est un produit scalaire sur E_n.

Pour tout f de E_n, on note désormais $\| f \|$ la norme de f.

Partie 2

1) On pose $E_{n-1} = \text{vect}\,(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$.

a. Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant :

$\| f_n - h \| = \underset{g \in E_{n-1}}{Inf} \| f_n - g \|$.

On pose désormais $h = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c. En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, (j+k)! \; + \; (k+n)! = 0.$$

2) On considère la fonction P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = a_0 \; + \; \sum_{j=1}^{n-1} a_j\, (x+1)\ldots(x+j) \; + \; (x+1)\,(x+2)\ldots(x+n).$$

a. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(k) = 0$.

b. En déduire explicitement P, puis vérifier que $P(n) = n!$.

3) a. Montrer que $\| f_n - h \|^2 = (f_n - h \,/\, f_n)$.

b. En déduire la valeur de $m = \underset{(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in IR^n}{Inf} \int_0^{+\infty} (x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k)^2 \; e^{-x} \; dx$.

edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mercredi 3 mai 2000, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

   a. On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction F, la probabilité $p(t, h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t.

   b. Établir que, lorsque h est au voisinage de 0^+, $p(t, h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}\, h$.

   On pose désormais, pour tout réel positif t : $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geq 0$.

   La fonction positive λ_X est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de X.

2) Soit X une variable aléatoire qui possède une densité continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de taux de panne λ_X.

   a. Pour tout réel strictement positif t, calculer $\int_0^t \lambda_X(u)\,du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" λ_X permet de déterminer la fonction de répartition F de X.

   b. Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

3) La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire X dont le "taux de panne" est la fonction λ_X définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

   a. Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

   b. Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Exercice 2

Dans cet exercice, x désigne un réel élément de $[0,1[$ et n un entier supérieur ou égal à 1.

1) a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{p+1} \leq \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$.

b. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$.

2) a. Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

b. En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de x.

3) a. Pour tout x de $]0,1[$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n^2 \ln(n) x^n)$.

b. En déduire que, pour tout x de $[0,1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.

On pose maintenant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) x^k$.

4) Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque x est au voisinage de 1^-.

a. Montrer, en utilisant la première question, que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

b. En déduire que : $0 \leq \dfrac{1}{1-x}\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right) - S_n(x) \leq \dfrac{x}{1-x}$.

c. Justifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 0$.

d. En déduire que : $S(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 3

Un sondage consiste à proposer l'affirmation « A » à certaines personnes d'une population donnée. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas...

L'enquêteur dispose d'un paquet de 20 cartes, numérotées de 1 à 20, qu'il remet à la personne sondée. Celle-ci tire une carte au hasard et ne la montre pas à l'enquêteur.

La règle est alors la suivante :

- si la carte porte le numéro 1, la personne sondée répond *"vrai"* si elle est d'accord avec l'affirmation « A » et *"faux"* sinon.
- si la carte porte un autre numéro, la personne sondée répond *"vrai"* si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation « A » et *"faux"* sinon.

Le but de l'enquête est d'évaluer la proportion p de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation « A ».

1) On interroge une personne selon ce procédé et on considère l'événement suivant, noté V : « la personne répond *"vrai"* ». On note $\theta = P(V)$.
En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer θ en fonction de p, puis en déduire p en fonction de θ.

2) Certaines considérations théoriques laissent penser que $p = \dfrac{17}{18}$.

a. Vérifier que $\theta = \dfrac{1}{10}$.

b. Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant répondu *"vrai"* soit d'accord avec l'affirmation « A ».

On revient au cas général où l'on ne connaît ni p, ni θ.

3) On considère un échantillon aléatoire, de taille n, extrait de la population considérée et on note S_n le nombre de réponses *"vrai"* obtenues. On suppose n assez grand pour pouvoir considérer que cet échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise.

a. Donner la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.

b. Montrer que $\dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4) Dans cette question, on suppose que l'on a réalisé un échantillon de 100 personnes et on constate que 23 personnes ont répondu *"vrai"*.

a. Donner une estimation ponctuelle de θ et de p.

b. Donner un intervalle de confiance à 95 % de θ puis de p.

On rappelle que, si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$.

Problème

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(\,.\, / \,.\,)$ défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u/u)}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.
Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu' un réel α tels que : pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on ait : $(u_i / u_j) = \alpha$.
La partie 1 permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie 2 étudie les propriétés d'une telle famille et la partie 3 propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

Partie 1

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel a, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à a. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1) a. J est-elle diagonalisable ?

b. Calculer J^2 et en déduire les 2 valeurs propres de J.

2) a. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour déterminer les deux valeurs propres de M_a.

b. En déduire que M_a est inversible si et seulement si : $a \neq 1$ et $a \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

Partie 2

On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ formée de n vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, et un réel α solutions du problème.

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.

a. Montrer que $M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.

b. En déduire la valeur maximale de n lorsque $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

2) Étude du cas $\alpha = 1$.

a. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_i et u_j (avec $i \neq j$). À quelle condition a-t-on l'égalité ?

b. En déduire que $n = 1$.

3) Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4), formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

a. Donner la valeur de α.

b. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

Partie 3

1) Donner une famille solution du problème posé, pour $n = 3$ et $\alpha = 0$.

2) On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$.

a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

b. Trouver deux réels λ et μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.

edhec
School of Management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES
Option scientifique

Mardi 15 mai 2001, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des fonctions φ de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(*)$ suivante :
$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\ \varphi(x)$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.

3) Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

   a. Vérifier que f est élément de E.

   b. Soit g la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.

   Montrer que g est élément de E

4) a. Soit h une solution de $(*)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.

   b. Montrer finalement que (f, g) est une base de E.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $w_n = v_n - ln(n)$.

On rappelle que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

1) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geq 0$.

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

c. En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

2) a. Montrer que la série de terme général $(w_n - w_{n+1})$ est convergente.

b. En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3) Montrer que la série de terme général u_n converge.

4) a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \dfrac{1}{2} v_n - 1$.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = 24\,(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \dfrac{6n}{n+1}$.

5) En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(\,.\,/\,.\,)$ défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,\ (u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u / u)}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.
On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a, b, c)$ et on suppose que c est non nul.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $\varphi(u) = (yc - zb,\ za - xc,\ xb - ya)$.

1) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2) a. Vérifier que ω appartient à $\text{Ker}\varphi$.

b. Montrer que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre.

c. Déduire des questions précédentes que $\text{Ker}\varphi = \text{vect}(\omega)$.

3) a. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $(\varphi(u) / \omega) = 0$.

b. En déduire que : $\text{Im}\,\varphi = (\text{Ker}\,\varphi)^{\perp}$.

4) a. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $\text{Ker}\,\varphi \times \text{Im}\,\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

b. Montrer que $(u / \omega) = (u_1 / \omega)$.

c. En déduire que $u_1 = \dfrac{(u / \omega)}{\| \omega \|^2}\,\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.

5) a. Montrer que $M^3 = -\| \omega \|^2 M$.

b. En déduire que : $\forall v \in \text{Im}\,\varphi,\ \varphi \circ \varphi(v) = -\| \omega \|^2 v$.

c. Montrer finalement que : $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \varphi \circ \varphi(u) = -\| \omega \|^2 u + (u / \omega)\,\omega$.

Problème

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant : $n \geq 2$ et $r \geq 3$.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $R_1, R_2, \ldots, R_r$ de probabilités respectives $x_1, x_2, \ldots, x_r$. On admet que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1) a. Exprimer la variable X en fonction des variables $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, \ldots, r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

2) a. Donner la valeur de $x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ puis écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera f, des $(r-1)$ variables $x_1, \ldots, x_{r-1}$.
La fonction f est donc définie sur l'ouvert $(\,]0, 1[\,)^{r-1}$ de $\mathbb{R}^{r-1}$.

b. Montrer que f est de classe C^2 sur $(\,]0, 1[\,)^{r-1}$.

3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $R = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$.

4) Déterminer la matrice M, élément de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R)$.

5) On pose $A = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Montrer que J est diagonalisable.

b. Exprimer J^2 en fonction de J et r. En déduire que les valeurs propres de J sont 0 et $r-1$.

c. Montrer que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre $r-1$ est de dimension 1.

d. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour montrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P d'inverse ${}^tP$, telle que $A = PD\,{}^tP$ où D est la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont les $(r-2)$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la $(r-1)^{\text{ème}}$ ligne étant égal à r.

6) a. Déduire des questions précédentes que pour tout H non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tHMH > 0$.

b. En posant ${}^tH = (h_1, h_2, \ldots, h_{r-1})$, exprimer ${}^tHMH$ en fonction des réels h_i et des dérivées partielles d'ordre 2 de f au point R.

c. En déduire que f présente un minimum local au point R.

d. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

edhec

School of Management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 (1-\ln t)\,dt$ converge et donner sa valeur.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt$ converge pour tout x strictement positif.

On pose alors : $\begin{cases} \forall x > 0,\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\,dt \\ F(0) = 0. \end{cases}$

c. Montrer que F est continue en 0.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner ses variations (la limite de F en $+\infty$ n'est pas demandée).

2) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

b. Montrer que $u_0 \geq u_1$ puis déterminer par récurrence les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout x de $[0,1]$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

a. Montrer qu'il existe un unique réel β de $]0,1]$ tel que $g'(\beta) = 0$, puis donner les variations de g.

b. En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de $]\beta,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

4) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \alpha$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 2

Dans cet exercice, x et y désignent des réels strictement positifs.

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison 2002, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation. Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros.

Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.

On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison 2002 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X.

On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison 2002.

On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$.

On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) En distinguant deux cas selon la valeur de U, montrer que :
$Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)$.

2) a. Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.

b. Exprimer, sous forme de somme, l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.

c. Montrer enfin que $E(Y_n) = (x + y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - n) P(X = k) + nx$.

Dans la suite, on suppose que $P(X = 0) < \dfrac{x}{x + y}$.

3) a. Exprimer $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$ en fonction de x, y et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

b. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :

$$\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}.$$

c. En déduire que ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

4) Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que X suit la loi de Poisson de paramètre a, où a est un réel strictement positif.

a. Exprimer $P(X = k + 1)$ en fonction de $P(X = k)$.

b. Utiliser ce résultat pour écrire un programme en Turbo Pascal permettant de calculer et d'afficher n_1 lorsque l'utilisateur entre au clavier les valeurs de x, y et a.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe une fonction g, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que :
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_1(x)f_2(y)=g(x^2+y^2)$.

1) On suppose, dans cette question seulement, que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g(x)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x}{2}}$.

2) a. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \forall y\in\mathbb{R},\ \dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)}=\dfrac{2g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$.

b. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x)=\dfrac{f_1'(x)}{x f_1(x)}$.

Soient x_1 et x_2 deux réels distincts et non nuls. Montrer que $h(x_1)=h(x_2)$ et en déduire que h est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. On note a cette constante.

c. Soit k la fonction définie pour tout réel x par $k(x)=f_1(x)\,e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

Montrer que k est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que sur $\mathbb{R}_-^*$. En déduire que k est constante sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'il existe un réel K tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=K e^{\frac{ax^2}{2}}$.

d. Utiliser le fait que f_1 est une densité de probabilité pour montrer que a est strictement négatif. On pose dorénavant $\sigma_1=\sqrt{\dfrac{-1}{a}}$.

e. En déduire que X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_1)$.

3) On admet que l'on peut montrer de la même façon qu'il existe un réel σ_2 strictement positif tel que X_2 suive la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma_2)$.
Montrer, en revenant à la définition de g et en calculant $g(1)$ de deux façons, que $\sigma_1=\sigma_2$, c'est-à-dire que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi normale.

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^n$.

Partie 1 : étude des symétries de $\mathbb{R}^n$.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, non réduits au seul vecteur nul, et supplémentaires, c'est-à-dire tels que $\mathbb{R}^n=F_1\oplus F_2$.
On appelle symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ tel que $x=x_1+x_2$ (avec $x_1\in F_1$ et $x_2\in F_2$) par $s(x)=x_1-x_2$.
Dans les trois premières questions, on considère une telle symétrie notée s.

1) a. Montrer que : $\forall x\in F_1,\ s(x)=x$.

b. En déduire que $\mathrm{Ker}(s-Id)=F_1$.

2) a. Montrer que : $\forall x\in F_2,\ s(x)=-x$.

b. En déduire que $\mathrm{Ker}(s+Id)=F_2$.

3) Utiliser les questions précédentes pour montrer que s est diagonalisable et donner une forme possible de la matrice de s relativement à une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s.
4) Réciproquement, montrer qu'une telle matrice est la matrice d'une symétrie.

Partie 2 : étude de deux exemples.

1) Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de s ainsi que les sous-espaces propres associés.
b. En déduire que s est une symétrie.

2) Soit s un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $s \circ s = Id$.

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$: $x + s(x) \in \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $x - s(x) \in \mathrm{Ker}(s + Id)$.
b. En déduire que $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires.
c. Établir enfin que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

Partie 3 : symétries orthogonales.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle dans lequel le produit scalaire canonique est noté $< , >$.
Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E, on appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Montrer que la matrice M, présentée dans la première question de la deuxième partie, est la matrice d'une symétrie orthogonale.
2) On considère une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ et on se propose d'établir l'équivalence suivante :
s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

a. On suppose que s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
Vérifier que : $\forall x \in \mathrm{Ker}(s - Id)$, $\forall y \in \mathrm{Ker}(s + Id)$, $< x, y > = 0$, puis conclure que s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$.
b. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E.
On prend maintenant l'hypothèse : s est la symétrie orthogonale par rapport à F.
En écrivant $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(y_1, y_2) \in F \times F^{\perp}$, montrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $< s(x), y > \; = \; < x, s(y) >$. Conclure.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul et différent de E.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.

a. Montrer que $s = 2p - Id$.
b. En déduire que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} < x, u_i > u_i \ - x.$$

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que F a pour équation : $x - 2y + 3z = 0$.

a. Déterminer une base orthonormale de F.
b. En déduire la matrice N, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport à F.

EDHEC
BUSINESS SCHOOL
Lille - Nice

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 20 mai 2003, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)\,Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4\,u_{n+2} - 5\,u_{n+1} + 2\,u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1) a. Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A\,X_n$.
   b. Vérifier que $(A - I)^2 (A - 2I) = 0$.
2) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2 (X-2)$.
   a. Justifier l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n\,,\,R_n)$ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X^n = P\,Q_n + R_n$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que : $R_n(X) = a_n + b_n\,(X-1) + c_n (X-1)^2$.
   c. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

3) a. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A-I$ et $(A-I)^2$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.

4) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p,+\infty[$ et telle que $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1) a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)\,dt$.

b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que :

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

3) Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2b).

b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$.

c. La série de terme général R_n est-elle convergente ?

Exercice 3

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\operatorname{tr}(A)$ la trace de A, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A.

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice J, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associe le réel $< A , B > = \operatorname{tr}({}^tA\ B)$.

1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

2) Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.

3) On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2).
   a. Déterminer une base orthonormale de E, notée (K_0, K_1, K_2) telle que, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i (avec bien sûr $J^0 = I$).
   b. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}$.
      Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, déterminer $< K_i , A >$ en fonction de certains des éléments de A.
   c. On note p la projection orthogonale sur E. Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A.
   d. En déduire une base de $\operatorname{Ker} p$.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, r désigne un entier naturel et x désigne un réel de $]0, 1[$.

1) Pour tout entier naturel k non nul, calculer la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f, définie sur $]0, 1[$, par : $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

2) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, $C_{n+r}^{n} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

3) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{r+1} x^n = 0$.

4) Soit φ_x la fonction définie sur $[0, x]$ par $\varphi_x(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$.

   Montrer que : $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \varphi_x(t) \leq x$.

5) a. Écrire la formule de Taylor entre 0 et x avec reste intégral pour la fonction f à l'ordre n.
   b. En déduire que : $0 \leq f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{k+r}^{k} x^k \leq (n+r+1)\, C_{n+r}^{n}\, x^n \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$.
   c. Montrer finalement que : $\forall x \in]0, 1[$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{k} x^k = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Partie 2

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chacune d'entre elles, la probabilité de succès soit égale à p, avec $0 < p < 1$.

On note X_n le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser pour obtenir, pour la première fois n succès, pas forcément consécutifs (X_n est donc le numéro de l'épreuve où l'on obtient le $n^{\text{ème}}$ succès). On convient que $X_n = 0$ si l'on n'obtient pas n succès.

1) Dans cette question seulement, on considère le cas $n = 1$.
   a. Reconnaître la loi de X_1.
   b. Donner l'espérance et la variance de X_1.

Dans toute la suite, on suppose que $n \geq 2$.

2) a. Déterminer $X_n(\Omega)$.
   b. Pour tout entier naturel k, calculer la probabilité que l'on obtienne $n - 1$ succès au cours des $n + k - 1$ premières épreuves.
   c. Déduire de la question précédente que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = n + k) = C_{n+k-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^k$.
   d. Utiliser le résultat de la partie 1 pour vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n + k) = 1$.

   En déduire $P(X_n = 0)$.

3) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(n + k)\, C_{n+k-1}^{n-1} = n\, C_{n+k}^{n}$.
   b. En utilisant le fait que, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n + 1 + k) = 1$,

   montrer que X_n possède une espérance et donner sa valeur en fonction de n et p.

4) a. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{n-1}{n+k-1}\, C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-2}^{n-2}$.
   b. Utiliser le théorème de transfert pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\dfrac{n-1}{X_n - 1}$ possède une espérance et que $E(\dfrac{n-1}{X_n - 1}) = p$.

5) a. Justifier que $\dfrac{n}{X_n}$ possède une espérance (on n'en demande pas le calcul).
   b. Montrer, sans calculer $E(\dfrac{n}{X_n})$, que $E(\dfrac{n}{X_n}) > p$.

6) Dans cette question, on suppose que le paramètre p est inconnu.

   Pour tout $n \geq 2$, on pose : $Y_n = \dfrac{n-1}{X_n - 1}$ et $Z_n = \dfrac{n}{X_n}$.

   Des deux suites $(Y_n)_{n \geq 2}$ et $(Z_n)_{n \geq 2}$, laquelle est un estimateur sans biais de p ? On ne se préoccupera pas de l'éventuelle convergence de ces estimateurs.

EDHEC
BUSINESS SCHOOL
Lille - Nice

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 4 mai 2004, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Une première inégalité.

a. Montrer que $P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

b. En déduire l'inégalité $(*)$: $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$

2) Première amélioration de l'inégalité $(*)$.

a. Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et ayant une espérance. On note $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$. Montrer, en minorant $E(Y)$, que : $\forall a > 0,\ P(Y \geq a) \leq \dfrac{E(Y)}{a}$.

b. On considère une variable aléatoire discrète Z, d'espérance nulle et de variance σ^2. Montrer que, pour tout couple (a,x) de $]0,+\infty[\times \mathbb{R}_+$:
$P(Z \geq a) \leq P((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$.

c. En appliquant l'inégalité obtenue en 2a) à la variable aléatoire $(Z+x)^2$, montrer que :
$\forall a > 0,\ \forall x \geq 0,\ P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.

d. En déduire que : $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ (on pourra étudier la fonction f qui, à tout x de $\mathbb{R}_+$, associe $\dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$).

e. Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

3) Deuxième amélioration de l'inégalité (*).

Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k$.

a. Justifier l'existence de $G_X(t)$ et montrer que : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

b. Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[, \ \forall a > 0, P(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

c. Déterminer le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$.

d. En déduire que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

4) Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 2e) dès que λ prend des valeur assez grandes.

Exercice 2

1) On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$.

2) Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3) a. Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t^x)}$.

b. Pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[1, +\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1 + t^x}$, puis établir que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

c. En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ 0 \leq \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x + 1}$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

5) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = X + Y$.

1) a. Déterminer une densité de Z.

b. Montrer que, pour tout x de $]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leq 1 + x)$ sont indépendants.

2) On pose $T = \text{Max}(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Montrer que T est une variable à densité puis donner une densité de T.

b. En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c. On pose $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

Problème

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie 1

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0, 1]$.

En particulier, E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

On note N l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant de plus $f(0) = f(1) = 0$.

On considère l'application u de N dans E_0 qui, à toute fonction f de N associe sa dérivée seconde, notée f''.

1) Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2.

2) Montrer que u est une application linéaire injective.

3) Soit g un élément de E_0. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x - t|\, g(t)\, dt$.

a. Justifier que G est élément de E_1 et montrer que :

$$\forall x \in [0, 1],\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\, dt - \int_x^1 g(t)\, dt \right).$$

b. En déduire que G est élément de E_2 et déterminer G''.

c. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à N.

d. Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u est surjective.

e. Que peut-on déduire des questions 2) et 3d) ?

4) Vérifier que, pour tout x élément de $[0,1]$:

$$(u^{-1})(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x - t|\, g(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\, g(t)\, dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1 - 2t)\, g(t)\, dt.$$

Partie 2

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x, on pose $e_k(x) = x^k$, avec bien sûr $e_0(x) = 1$, et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ est une base de P_n.

On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à n et telles que $P(0) = P(1) = 0$.

Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.

1) Montrer que $C = (f_0, f_1, ..., f_n)$ est une base de N_{n+2}.

On considère l'application linéaire v de N_{n+2} dans P_n qui, à toute fonction P de N_{n+2} associe sa dérivée seconde, notée P''.

2) a. Pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, déterminer $v(f_k)$ en fonction de certains des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice A de v relativement aux bases C et $\mathcal{B}$.

b. En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n.

c. Simplifier, pour tout réel x et pour tout entier naturel k, la somme $\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

d. Justifier que le résultat de la quatrième question de la partie 1 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question 2c), la matrice A^{-1}.

e. Vérifier cette dernière, dans le cas où $n = 2$ (les calculs devront figurer sur la copie).

3) On considère l'application w qui à tout élément P de P_n associe $w(P)$, où $w(P)$ est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)\,P(x)$.

a. Montrer que w est un endomorphisme de P_n.

b. Pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$, déterminer $w(e_k)$.

c. En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 2a).

d. L'endomorphisme w est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de P_n ?

e. Dans le cas $n = 2$, déterminer les sous-espaces propres de w.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

<u>CODE EPREUVE</u> :

297
EDHECMATS

Concepteur : EDHEC

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 13 mai 2005 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
   a) Montrer que $\operatorname{Im} tr = \mathbb{R}$.
   b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} tr$.
   c) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} tr \oplus \operatorname{Vect}(I)$.
2) Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + tr(M)\, I$,
   a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.
En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + tr(M)\, J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.

On pose $X_1 = \lfloor X \rfloor$, $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.

c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.

2) a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.

b) Justifier que, pour tout k élément de $\{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = k)$,

puis montrer que : $\forall k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F(i + \frac{k+1}{10}) - F(i + \frac{k}{10})\right)$.

En déduire que $\forall k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$.

3) Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1) a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

b) Calculer les dérivées premières et secondes de f.

2) a) Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

3) a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.

4) a) Montrer que, pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ non nul, on a : ${}^tHA_nH > 0$.

b) En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$.

Problème

On considère deux jetons J_1 et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1) a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

b) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.

d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.

3) a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

c) Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.

c) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = \dfrac{5}{4}$.

4) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) = \text{Max}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal 2, comparer d'une part $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$, puis en déduire que : $(S = n) = (X = n \cup Y = n)$.

d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5) On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par : $\forall \omega \in \Omega$, $I(\omega) = \text{Min}(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie 2 : simulation des variables X et Y.

On rappelle que random(2) renvoie au hasard un entier de $\{0, 1\}$.

1) On considère le programme suivant :

```
Program edhec2005 ;
Var jeton, lancer, X : integer ;
Begin
Randomize ;
X : = 0 ; jeton : = random(2) + 1 ;
if  (jeton = 1)  then  begin
                       repeat
                       X : = X + 1 ;
                       lancer : = random(2) ;
                       until (lancer = 0) ;
                       end ;
Writeln (X) ;
end.
```

a) Expliquer le fonctionnement du programme suivant et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?

2) Écrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable aléatoire Y.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur :

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE EPREUVE :

297
EDHECMATS

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbb{C}$- espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{C}^m$ vérifiant : $(f-\lambda_1\, id) \circ (f-\lambda_2\, id) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

1) a) Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\big((f-\lambda_1\, id) - (f-\lambda_2\, id) \big) = id$.

b) En déduire que : $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(f-\lambda_1\, id) \oplus \mathrm{Ker}(f-\lambda_2\, id)$.

c) Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2) Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I$.

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

a) Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b) Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$.

On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.
Montrer que $X \in E_i \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{-i}$.

c) En déduire que, si $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, ..., \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}. Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.

d) Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 2

1) a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geq 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.

2) Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j$.

3) a) Établir que : $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Donner un équivalent de $\ln(\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$, où $\binom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$.

b) En utilisant la question 2), déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$, puis montrer que : $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(4^n)$.

5) En utilisant le résultat de la question 3), montrer que : $\dfrac{4^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(\binom{2n}{n})$.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

On pose $Z = \text{Sup}(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2) a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

c) En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

d) Montrer de même que : $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$.

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3) a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie 1 : étude de la variable X_n.

1) Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$.

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, ..., n\}$, $P(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1} u_{n-k}$.

c) En remarquant que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} \dfrac{u_j}{n-j+1} = 1$.

d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.

4) a) En remarquant que la relation obtenue à la question 3a) peut s'écrire sous la forme $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $E(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{n-j}$ et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

Déduire de ces deux résultats que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Partie 2 : étude du premier retour à l'origine.

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

1) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(T = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

c) Déterminer les constantes a et b telles que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

En déduire que $P(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.

2) La variable T a-t-elle une espérance ?

Partie 3 : informatique.

1) Compléter les deux instructions manquantes pour que le programme Pascal suivant, dans lequel n est déclaré comme constante (ici $n = 100$), calcule et affiche u_0, u_1, ..., u_n, ainsi que l'espérance de X_n qui sera stockée dans la variable e.

```
Program edhec_2006 ;
const n = 100 ;
var i, k : integer ;
   s, e : real ;
   u : array [0..n] of real ;
Begin
  u[0] : = 1 ; writeln(u[0]) ; e : = 0 ;
  For k : = 1 to n do
  begin
    s : = 0 ;
    For i : = 1 to k do begin s : = ----- ; u[k] : = 1 – s ; end ;
    Writeln(u[k]) ;
    e : = ----- ;
  end ;
  Writeln(e) ;
end.
```

2) a) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par T lors de l'expérience aléatoire étudiée.

On rappelle que, si k est un entier naturel non nul, l'instruction random(k) renvoie aléatoirement un entier compris entre 0 et $k-1$.

```
Program edhec_2006bis ;
var T, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; T : = 0 ;
Repeat T : = T + 1 ; hasard : = random (-----) ; until (hasard = -----) ;
Writeln (T) ;
end.
```

b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « Repeat ... until » est fini ?

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
297
EDHECMATS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \geq \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On se propose de déterminer un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

b) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leq I$.

c) En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

d) Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (I, J, K, L) et Id l'endomorphisme identité de E.
On pose $A = J + K$.

1) Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.
2) a) Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b) Calculer J^2, K^2 et L^2 puis en déduire que : $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.
   c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel.
3) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4) On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :
$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$
   a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.
   b) Déterminer $\text{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.
5) a) Écrire la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.
   b) Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

On rappelle que l'application, notée tr, qui à toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ associe sa trace (c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux) est une application linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle également que l'application qui à tout couple (M,N) de $E \times E$ associe le réel noté (M / N) défini par $(M / N) = \text{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
On munit désormais E de ce produit scalaire.

6) a) Montrer que, pour tout couple (P,Q) de $E \times E$, $tr(PQ) = tr(QP)$.
   b) Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.
   c) En déduire que $\text{Ker}(\varphi_A - Id)$ et $\text{Ker}(\varphi_A + Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1) Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2) À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \dfrac{1}{2}$.
3) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$.

4) a) Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{2\,n^{n+1}}$.

b) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\int_0^1 z^{n-1}e^{-nz}dz$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et dans les deux premières parties de ce problème, on considère une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. Trois joueurs notés A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue le premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc. Le gagnant est le premier des trois qui extrait la boule blanche.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note A_k (resp B_k, C_k) l'événement « A (resp B, C) gagne au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

On note A (resp B, C) l'événement « A (resp B, C) gagne la partie ».

L'objectif de ce problème est de comparer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ selon le mode de tirage et, dans la troisième partie, avec une urne remplie aléatoirement.

Partie 1: les tirages se font avec remise de la boule tirée.

1) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $P(A_{3k+1})$, $P(B_{3k+2})$ et $P(C_{3k+3})$.

2) En déduire $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ et vérifier que $P(A) > P(B) > P(C)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Partie 2 : les tirages se font sans remise de la boule tirée.

1) Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $3k + 3 \leq n$:

$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \dfrac{1}{n}$.

2) a) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = \dfrac{m+1}{3m+1}$, $P(B) = P(C) = \dfrac{m}{3m+1}$.

b) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 2$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = P(B) = \dfrac{m+1}{3m+2}$, $P(C) = \dfrac{m}{3m+2}$.

c) On suppose, dans cette question que $n = 3m + 3$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$.

3) Conclure.

Partie 3 : les tirages se font sans remise dans une urne remplie aléatoirement.

L'urne est maintenant remplie de la façon suivante : on lance une pièce qui donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $1-p$. On pose $q = 1-p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang du premier "pile" obtenu lors de ces lancers.

Si N prend la valeur n ($n \in \mathbb{N}^*$), on place une boule blanche et $n-1$ boules noires dans l'urne.

1) a) En utilisant certains résultats de la partie 2, donner en fonction de m les valeurs de $P_{(N=3m+1)}(A)$, $P_{(N=3m+2)}(A)$ et $P_{(N=3m+3)}(A)$.

b) En déduire que $P(A) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+1} q^{3m} p$.

2) De la même façon, établir que $P(B) = \dfrac{pq^2}{3(1-q^3)} + \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m+1}{3m+2} q^{3m+1} p + \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{m}{3m+1} q^{3m} p$.

3) Déterminer, toujours de la même façon, une expression analogue de $P(C)$.

4) Conclure.

Dans les trois questions suivantes, on cherche à déterminer une expression intégrale de $P(A)$.

5) a) Pour tout x de $[0, 1[$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, écrire explicitement $\sum_{m=0}^{n-1} x^{3m}$ en fonction de x et n.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3} dx - \int_0^q \frac{x^{3n}}{1-x^3} dx$.

c) Établir enfin que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+1}}{3m+1} = \int_0^q \frac{1}{1-x^3} dx$.

6) Montrer, de la même façon, que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q^{3m+2}}{3m+2} = \int_0^q \frac{x}{1-x^3} dx$.

7) a) Déterminer les constantes a, b, c et d telles que, pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$\frac{m+1}{3m+1} = a + \frac{b}{3m+1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{3m+2} = c + \frac{d}{3m+2}.$$

b) En déduire que $P(A) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{p}{3q} \displaystyle\int_0^q \frac{2+x}{1-x^3} dx$.

8) Établir enfin que, lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, on a $P(A) \geq \dfrac{17}{24}$.

Partie 4

On décide de coder l'événement « on obtient la boule blanche » par le nombre 0.
On rappelle que la fonction random renvoie, pour un argument n de type integer (avec $n \geq 1$) un entier aléatoire compris entre 0 et $n-1$.

1) Compléter le programme Pascal suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans la partie 1 et en affiche le vainqueur.

```
Program edhec_2007 ;
Var   a, b, c, n : integer ;
Begin
Readln(n) ; Randomize ;
Repeat
a : = random(n) ;
If a = 0 then -------- else   begin b : = -------- ;
                                      If b = 0 then -------- else   begin c : = -------- ;
                                                                              If c = 0 then -------- ;
                                                                    end ;
                              end ;
until (a * b * c = 0) ;
End.
```

2) Modifier ce programme pour qu'il affiche qui est le vainqueur de ce jeu dans le cadre de la partie 2.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 6 mai 2008 de 8h à 12h

Code sujet
297
EDHECMATS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (respectivement Y).

a) Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité)..

c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 1-\sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1) On désigne par f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.

2) a) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos(\frac{2k+1}{2}t)$ et $\cos(\frac{2k-1}{2}t)$.

b) En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos\frac{t}{2} \right).$$

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2}$.

3) Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1) a) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors on a bien $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

b) Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, F et G, de E. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle alors symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par :

$$s(x) = x_F - x_G.$$

Déterminer s^2 et en déduire que $E = \operatorname{Ker} s \oplus \operatorname{Im} s$.

2) Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif (le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question).

a) Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.

b) Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.

(*i*) Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

(*ii*) Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} f$.

(*iii*) En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

c) Retrouver le résultat de la question 2b) en considérant la matrice de f dans une base bien choisie.

3) Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ ou encore $P = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_pX^p$, avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

a) Soit y un élément de $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$.

 (*i*) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.

 (*ii*) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$ puis déterminer y.

b) Établir que $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.
Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$.
Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour "pile") ou F (pour "face"). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.
Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois "pile", le joueur ayant noté (P, F, P) a 2 prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.
Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.
L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1) Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.
On pose alors, pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2) On pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

 a) Calculer $S_p + T_p$.

 b) Montrer que $S_p = T_p$.

 c) Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p, puis montrer que $r_p = \dfrac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.

Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

1) Montrer que $G_1(\Omega) = \{ \dfrac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-1]\!] \}$.

2) a) Montrer que $P_{(X_1=0)}(G_1 = \dfrac{n!}{n}) = (q_0)^{n-1}$.

 b) Montrer que, pour tout j élément de $[\![0, n-2]\!]$, $P_{(X_1=0)}(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}) = 0$.

 c) En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = 0)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = 0) = (n-1)!\,(q_0)^{n-1}.$$

3) a) Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[|0, n-1|]$, on a :

$$P_{(X_1=k)}(G_1 = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}.$$

b) Établir que $\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $(X_1 = k)$ est :

$$E(G_1 / X_1 = k) = (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}.$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

4) Utiliser les questions 3b) et 3c) pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.

Dans cette partie J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de celles de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).

On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2 :
$G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.

On pose, pour tout i de $\{1, 3, \ldots, n\}$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

1) a) Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $(p+1)$ prévisions correctes.

b) En déduire que $Y(\Omega) = [|p+1, 2p+1|]$.

2) Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

3) Pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$, montrer que $P(Y = k) = 2\,q_k$.

4) Montrer que $G'(\Omega) = \{\frac{n!}{j+1}, j \in [|0, n-2|]\}$.

5) a) Établir que, pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$ et pour tout j élément de $[|0, n-1|]$, on a :

$$P_{(Y=k)}(G' = \frac{n!}{j+1}) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}.$$

b) En déduire que, pour tout k de $[|p+1, 2p+1|]$, l'espérance de G conditionnellement à l'événement $(Y = k)$ est :

$$E(G' / Y = k) = n(n-2)!\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.$$

6) a) En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2\,n(n-2)!\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, 2^{n-1} > n$.

c) Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

297

EDHECMATS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 4 mai 2009 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

• On admet que si une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.

Plus précisément, si l'on a $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

• On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si : pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|U_n - U|) = 0$.

• On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable V à valeurs positives et possédant une espérance mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, P(V > \varepsilon) \leq \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

1) Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Comparer les événements $(Y_n > \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3) a) Montrer que, si la suite (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y, alors on aurait $P(Y = 0) = 1$.

b) Calculer l'espérance de Y_n.

c) Établir que $E(\,|Y_n - Y|\,) \geq E(Y_n) - E(Y)$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|)$.

4) Conclure.

Exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^{\alpha})^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1) a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{k\alpha})$.

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right]$.

c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\dfrac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.

Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de u_n :

```
Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1)   then  u : = ------
             else  u : = ------ ;
end ;
```

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1}\times\dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}P(\dfrac{1}{X})$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Vérifier que $f\,o f = Id$.
   b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.
3) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
   a) Montrer que les a_k $(0 \le k \le 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k\in\{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
4) Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f+Id)$.
5) On considère l'application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$, où l'on a noté $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique
   c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f+Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,dt$.

   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

   d) Établir alors que la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ est convergente et que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

   b) Utiliser la première question pour établir que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

1) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1-F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y.

3) Étude d'un cas particulier.

a) Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.

b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x) = -f(x)\ln(1-F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels positifs, définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(N=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On pose alors $Z = \text{Sup}(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie que :

$\forall \omega \in\Omega, Z(\omega) = \text{Max}(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$.

2) a) Montrer que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.

c) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

297

EDHECMATS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 7 mai 2010 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'ouvert $U =]\,0, +\infty[^{\,n}$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\Big).$$

1) Montrer que f_n est de classe C^2 sur U.

2) Montrer que f_n possède une infinité de points critiques $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et les déterminer.

3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.
   b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = n\,I_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

4) a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b) Vérifier que le vecteur v_n, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont tous les éléments sont égaux à 1, est un vecteur propre de J_n.
   c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de K_n.
   d) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.

5) Étude du cas $n = 2$
   a) Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4\,x_1 x_2$.
   b) En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.

6) Étude du cas général.
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Exercice 2

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté (x / y) et la norme de x est notée $\| x \|$.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda\,(x / u)\,u + x$.

1) Donner la dimension de $(\text{vect}(u))^\perp$.

2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

3) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

4) a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$.
   c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

5) Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
   a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\text{vect}(u))^\perp$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.
   b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.
   b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur [0, 1[.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
Var   x, y : real ;
Begin
x : = ------ ; y : = ------ ; z : = ------ ;
End ;
```

Problème

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2.

1) a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2) Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Partie 1 : convergence complète.

1) Soit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est-à-dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ est convergente.
Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

2) On se propose dans cette question d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
Pour ce faire, on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}$

a) Déterminer la probabilité $P(Y_n \geq 1)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

d) Utiliser la valeur de $P(Y_n \geq 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.

Partie 2 : étude d'un exemple.

Dans cette partie, on considère une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel k non nul, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. On suppose que les variables aléatoires B_k sont deux à deux indépendantes.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{E(S_n)}$ et on admet que les variables aléatoires S_n et Z_n sont, elles aussi, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On se propose, dans les questions 1) et 2), de montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1 et, dans les questions suivantes, de montrer que la suite (Z_n) converge complètement vers cette même variable.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donner sous forme de sommes les expressions de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
   b) Vérifier que $V(S_n) \leq E(S_n)$.

2) a) Montrer que $P(\,|Z_n - 1| \geq \varepsilon\,) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.
   b) Établir que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) À l'aide de l'inégalité établie à la question 2a) de cette même partie, montrer que la série de terme général $P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,)$ est convergente.

4) On désigne par e_n la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$, et on a donc : $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq Z_n \leq \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}$.

5) a) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1$.
   b) En déduire que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
$$\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon \text{ et } \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geq \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$
   c) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
   $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (\,Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2\,)$ et $(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset (\,Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2})$.
   d) En déduire alors que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
$$P(\,|\,Z_n - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq P(\,|\,Z_{(e_n+1)^4} - 1\,| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(\,|\,Z_{e_n^4} - 1\,| \geq \varepsilon^2\,).$$
   e) Conclure qu'effectivement, la suite (Z_n) converge complètement vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve :

297

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique
Vendredi 6 mai 2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et u un endomorphisme de E. On note Id l'identité de E.
Si $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_pX^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = a_0I + a_1u + ... + a_pu^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = Id$ par convention) .

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

1. Montrer que l'image de $(u - Id)$ est contenue dans $\text{Ker}(Q_1(u))$
2. On note $E_1 = Ker(u - Id)$.
   (a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$.
   (b) En déduire que $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$
   (c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$.
3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.
4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

   Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

Exercice 2

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue « au hasard »une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :
• à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules

dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.

• si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.

   (b) Donner, sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.

2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable T_1 :

```
begin
randomize; readln(n) ;t := 0 ;
repeat a := random(n)+1 ;b := random(n)+1 ;
t := t+1 ;
until....... ;
writeln(t) ;
end.
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

   (a) Que représente la variable X_i ?

   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.

   (c) En déduire que T_n admet une espérance mathématique et que l'on a $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
   On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

   (a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 0])$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([S_n = 0])$.

   (c) Montrer que $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

5. Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :

```
begin
randomize; readln(n) ;m := n ;z := 0 ;
for k := 1 to n do
begin
a := random(m)+1 ;b := random(m)+1 ;
if a=b then begin z := z+1 ; m := m-1 ;end;
end;
writeln(z) ;
end.
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).$$

(b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur , alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \left\{ \begin{array}{l} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right.$$

(a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathcal{R}$.
Montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $L_k = M_k$.

(b) On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue (à partir de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

i. Justifier, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.

ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant $\mathcal{R}$.

(c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n, définie par : $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $(x \to e^x)$ ou exp.

Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie que $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)$.

(a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.

(b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.

2. (a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1.

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

puis que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x)(1 + \frac{1}{x^2}).$$

2. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\dfrac{\phi(x)}{x} = \dfrac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
4. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4., montrer que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour $n \geq 2$,

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.$$

6. (a) En utilisant la question 4., montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$2(\sqrt{2\ln n})\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\big(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\big) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

(b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)\big(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}\big) = 0.$$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, que l'on peut écrire pour tout entier n supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\textit{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2ln(n)} = 0.$$

7. On pose pour $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\ln n}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \dfrac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout x réel, et pour tout entier $n \geq 2$, en posant $c = e^{-x}$ que :

(a)

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$$

(b)

$$\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

(c) En déduire , en utilisant la question 1.b. que $\dfrac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$ puis que la suite $(\dfrac{M_n - b_n}{a_n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable G (la variable G est définie dans la partie 1.)

BCE

Code épreuve : 297

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Conception : EDHEC

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   b) En déduire les valeurs propres de f.
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$.
   b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.

On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.

Établir que $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que : $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Montrer que : $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$.

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} h^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\, Id)$, alors on a : $h^n = \alpha\, h^{n-1}$.

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-x\,X_0$.

b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - x\,X_0$, la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\lambda \frac{z}{x}} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

c) On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \operatorname{Sup}(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.

b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n.

c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que :

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

4) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0)$.

b) Montrer que $(Z = 0) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0)$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(X = n)$ et $(Z = n)$ ont même probabilité.

5) Informatique.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V.

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est "**function z : real ;**" qui simule la loi de Z.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division par $1+X^3$ du polynôme $(1-X+X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Déterminer $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   b) En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
   c) Donner la dimension de $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker} f$.
3) a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\operatorname{Im} f$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - 3Id)$$

   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.
   a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   b) Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Im} f$ dans E pour ce produit scalaire.
5) a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.
   b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ puis retrouver le résultat de la question 4b).

Problème

On admet que, si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ , } T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\, x_i$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)\, x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

   b) En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k\, x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\, y_n$.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\, dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln x\, dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ -1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$$

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Code épreuve : 297

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

6 mai 2013 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.
On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une déclaration de fonction Pascal dont l'en-tête est **function fact (*n* : integer) : integer ;** et qui renvoie $n!$ à l'appel de fact(n).

b) Écrire le corps principal d'un programme Pascal, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et d'afficher la valeur de u_n lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Tournez la page S.V.P.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.

e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

On revient au cas général.

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+2+\ldots+n)^2 \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}\right)$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1) Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

2) Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3) On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall (x,y) \in E \times E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

4) a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ.

Montrer que $(\mathrm{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.

3) On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et x.

4) a) Montrer que, pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x > \dfrac{1}{n}$.

En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5) a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Problème

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)\, u_{n+2} = (n+1)\, u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\, u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Tournez la page S.V.P.

c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

1) Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

2) a) Montrer qu'il existe une constante M telle que : $0 \leq \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leq M$.

b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u$.

3) a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\,dt$.

b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t\,x}$ pour montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

c) Montrer de la même façon que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x\sqrt{x}}$.

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1+t$, que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du$$

b) Utiliser le résultat de la question 2 b) pour en déduire que : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi\,x}}$.

Partie 3

1) Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

2) a) On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-t\,x$, on a : $e^u \leq e^x$. Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-t\,x$.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = u_k$.

c) Déduire des deux questions précédentes que : $\left| I(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}} \right| \leq \dfrac{2\,x^{2n+1}\, e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$.

d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}}$.

3) Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2014

Conception : ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHÉMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 6 mai 2014, de 8 h à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On rappelle que la fonction Γ (gamma) est la fonction, qui à tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1) On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite.
On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.

a) Montrer que la loi commune à U et V est la loi $\Gamma(2, \dfrac{1}{2})$.

b) Donner l'espérance et la variance de U et V.

2) On pose $W = U + V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner sans calcul la loi de W ainsi que son espérance et sa variance.

b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V, alors, une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$.

Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t)\,f_V(x-t)\,dt$$

c) Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt$.

Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A)=0$ et $\mathrm{Tr}(A)\neq 0$).
3) a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f\circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)\ f(M)$.
   b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4) Montrer que 0 est valeur propre de f.
5) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A)=0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   a) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
   b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge.

   b) Montrer que l'application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.

2) Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.

3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.

   b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.

   c) En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$ soit minimale.

   d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$$

4) Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.
5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.
7) Établir que ce minimum est global.

Problème

Question préliminaire

1) Soit x un réel quelconque.

   a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

   b) Montrer que : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)dt$$

On se propose dans les deux parties suivantes de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Partie 1 : étude de plusieurs cas où X est discrète

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

   a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

   b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

   c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

   a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*$ puis donner la loi de Y.

   b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

   a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

   b) En déduire $Y(\Omega)$.

   c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

   d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

Tournez la page S.V.P.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Begin  y : = ------ ;  End ;
```

6) On suppose, dans cette question, que $X-1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a) Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X.

b) Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Vérifier que la variable aléatoire $W=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Begin y : = ------ ;
End ;
```

7) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega)=\mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y=\frac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X\leq 0],[0<X\leq 1],[X>1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<\frac{1}{2}\\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \frac{1}{2}\leq x\leq 1\\ \Phi(x) \text{ si } x>1\end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

e) Soit $U_1,\ldots,U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48}U_k-24\right)$ par la loi normale centrée réduite, puis compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule Y.

```
Function y(lambda : real) : real ;
Var k : integer ;  aux : real ;
Begin
aux : = 0 ;
For k : = 1 to 48 do aux : = aux + random ;
x : = (aux-24)/2 ;
If ------  then  y : = ------  else
                         If  ------ then  y : = ------  else  y : = ------ ;
End ;
```

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENTIFIQUE

Mardi 5 Mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document, seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7) À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 :')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ------
for k = 2:n
I = ------ ; J = ------ ; end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1) a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3) a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.

b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4) Écrire une commande `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5) On considère les commandes `Scilab` suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
w = grand(1,n,'exp',1)
s = sum(w.*sqrt(w))/n/sqrt(%pi)
```

a) En remarquant que $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que `s` contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique de x et y.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, formée de vecteurs propres de f.

2) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.

b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.

c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.

b) Établir que g est bijectif.

c) Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1),\ g^{-1}(e_2),\ ...,\ g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

2) a) Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{r+2} x^n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

a) Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1 - x) S_{r+1} = x S_r$.

c) En déduire :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

d) Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1 - p$.

Tournez la page S.V.P.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante.
On note :
- X le nombre de manches auxquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires, définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Donner la loi de X (on pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »).

b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable T puis en déduire que l'on a :

$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = n)$.

b) En déduire, à l'aide de la partie 1, la loi de Y.

3) Calculer l'espérance de Y puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

4) a) Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$.

d) En déduire la variance de G.

5) a) Compléter, en utilisant la fonction `grand`, les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
disp(X)
disp(Y)
```

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour que la valeur prise par G soit calculée et affichée ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1202 – D'après documents fournis

Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1) a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2) Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

3) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

4) a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Tournez la page S.V.P.

5) On pose : $h(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x)=x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

1) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-Id)^2=0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

a) Déterminer $(f-Id)^2+f\circ(2Id-f)$.

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x=(f-Id)^2(x)+(f\circ(2Id-f))(x)$.

c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

2) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)=0$.

a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\,P(X)=1$.

b) En déduire que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

3) Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geq 2$), et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

a) Montrer qu'il existe p réels $a_1,\dots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $P=a_1X+\dots+a_pX^p$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

Exercice 3

Les questions 1) et 2) sont indépendantes des suivantes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma>0$). On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1=m$ et $\theta_2=\sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.

Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de X, avec $n\geq 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X.

On appelle vraisemblance du couple (θ_1,θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i)\text{, où } x_1, \dots, x_n \text{ sont des réels donnés}$$

1) Donner l'expression de $L(\theta_1,\theta_2)$, puis celle de $\ln(L(\theta_1,\theta_2))$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \dots, x_n$.

2) a) Justifier que la fonction f: $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln(L(\theta_1,\theta_2))$, définie sur l'ouvert $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, est de classe C^2 sur U.

b) Montrer que f admet un seul point critique $A=\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right)$ sur U tel que :

$$\widehat{\theta_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ et } \widehat{\theta_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\widehat{\theta_1}^2$$

c) Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.

On vérifiera en particulier que : $\partial^2_{2,2}(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \dfrac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

d) En déduire que f admet un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

e) Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$.

On pose dorénavant $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$.

3) Vérifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m.

4) Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2.

5) On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

a) Rappeler pourquoi la suite $\left(\overline{X_n}\right)$ converge en probabilité vers m. Qu'en déduire pour la suite $\left(\overline{X_n}^2\right)$? Justifier.

b) Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ converge en probabilité vers $\sigma^2 + m^2$.

c) Établir que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$\left(\left|Z_n - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

d) Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

Problème

Partie 1 : résultats préliminaires

1) Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.

On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est-à-dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!],\ \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.

On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On admet également que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.

2) Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est valeur propre de A.

3) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.

On considère le vecteur ligne $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix}$.

4) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$.

5) a) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_n M$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0 M^n$.

6) a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.

b) On considère les vecteurs $E_1 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telles que $M = QDQ^{-1}$.

8) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$.

9) Soit $L = (\ell_1 \ \ \ell_2 \ \ \ell_3 \ \ \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.

a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.

10) Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M^n$.

11) On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.

On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1.

c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.

12) On rappelle que la commande `X = grand(n, 'markov', M, X0)` renvoie les n premiers états suivant l'état initial X_0, d'une chaîne de Markov de matrice M et on rappelle également que `Scilab` assimile un booléen vrai au nombre 1 et un booléen faux au nombre 0.

On considère le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
M = [0,1,0,0 ; 1/9,4/9,4/9,0 ; 0,4/9,4/9,1/9 ; 0,0,1,0]
X = grand(n,'markov',M,4)-1
f = sum(X==0)/n
disp(f)
```

De quelle valeur exacte le contenu de f est-il proche lorsque n est assez grand ?

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

2 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1) a) Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
function y=f(x,n)
y=sum(------)
endfunction
```

b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f` :

```
function y=f(x,n)
  if x==1 then y=------
          else y=------
  end
endfunction
```

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x élément de $[0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3) a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.

b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5) On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
x=0
while f(x,n)<1
x=x+0.001
end
disp(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires, notées X_1, X_2, ..., X_n, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.

a) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$ puis montrer que M_n est une variable à densité.

b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n.

c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.

d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant, ne dépendant que de n et ε, de $P\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2 \right)$.

e) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon \right) = 0$. Que signifie ce résultat ?

2) On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
function Y=f(n)
X = grand(1,n,'unf',0,1)
Y =------
endfunction
```

b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

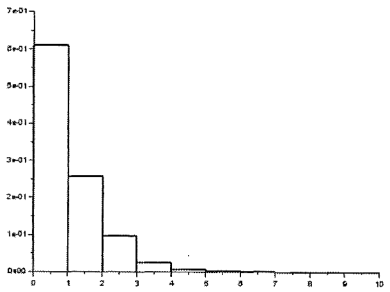
```
e=grand(1,10000,'exp',1)
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,e)
```

Script (1)

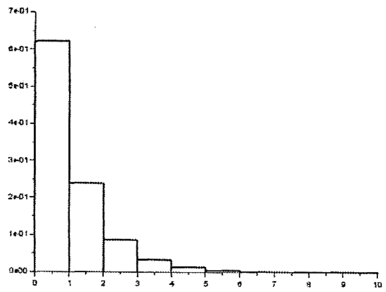
```
n=input('entrez la valeur de n : ')
Y=[]
for k=1:10000
    Y=[Y,f(n)]
end
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,Y)
```

Script (2)

Chacun de ces scripts simule 10 000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, ..., $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n=1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n).

3) a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2).

b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2b).

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J, puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J.

b) En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A.

c) Montrer que A est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien E, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\ \|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$$

On pose aussi :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right)$$

2) Calculer la norme du vecteur u.

3) a) Montrer que, pour tout i de $[\![0,n]\!]$, on a : $\| e_i \| = 1$.

b) Montrer également que, pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$$

c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ de E.

d) Montrer, en utilisant le résultat de la question 1c), que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.

4) On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in F \times F,\ f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle$$

a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

b) Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

c) En déduire que :

$$\forall (x,y) \in F \times F,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle$$

d) En déduire également que, pour tout x de F, on a :

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ e_k = X^k$$

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.

b) Montrer que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.

d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P-P')$.

b) Déterminer φ^{-1} puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $(e_0, e_1, ..., e_n)$.

c) On donne le script `Scilab` suivant :

```
n=input('entrez la valeur de n : ')
M=eye(n+1,n+1)
for k=1:n
M(k,k+1)=-k
end
A=------
disp(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $(e_0, e_1, ..., e_n)$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4) a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ est convergente.

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ est convergente.

5) a) Donner la valeur de $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$

b) Établir que, pour tout entier naturel k, on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$.

6) Informatique.

a) On admet que, si `u` est un vecteur, la commande `prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u` et la commande `cumprod(u)` renvoie un vecteur de même format que `u` dont le $k^{\text{ème}}$ élément est le produit des k premiers éléments de `u`. Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b) pour compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il calcule et affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$, les valeurs de x et de k étant entrées par l'utilisateur.

```
k=input('entrez la valeur de k : ')
x=input('entrez la valeur de x : ')
p=prod(1:k)
u=------./------
s=p*------*exp(-x)
disp(s)
```

b) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u}du$

En déduire la commande manquante du script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
x=input('entrez la valeur de x : ')
k=input('entrez la valeur de k : ')
Z=grand(1,100 000,'exp',1)
s=exp(-x)*mean(------)
disp(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F=\psi(P)$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=e^{x}\int_{x}^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$$

7) a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F, F' et P.

c) Montrer que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8) On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de ψ pour une valeur propre λ non nulle.

a) Utiliser la relation obtenue à la question 7b) pour établir que : $P'=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}P$.

b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda=1$ est la seule valeur propre possible de ψ.

c) Montrer enfin que $\lambda=1$ est la seule valeur propre de ψ (on ne demande pas le sous-espace propre associé).

9) a) Montrer que les endomorphismes φ et ψ sont égaux.

b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x)\geq 0$, alors :

$$\forall x\geq a,\ \sum_{i=0}^{n}P^{(i)}(x)\geq 0$$

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

8 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \frac{1}{k\ln k}$.

b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \text{ si } x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[\\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4) a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leq 1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{-1}{n\ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1-u_n$ est divergente.

Exercice 2

On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

1) Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1.

À tout n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on associe le vecteur $w_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_k$.

On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leq \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geq \sqrt{n}$.
À cet effet, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

On considère l'application X, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $X(\omega) = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) u_k \right\|^2$.

On admet que X est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E(X_i X_j)$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

2) Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tous éléments de $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|v_k\| \leq 1$.

On pose $z = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$, on ait :

$$\|z - y_x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$.

On considère l'application Y, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $Y(\omega)=\left\| \sum_{k=1}^{n}(p_k - Y_k(\omega))v_k \right\|^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i,j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E\big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\big)$.

b) Justifier que Y possède une espérance et montrer que : $E(Y) \leq \dfrac{n}{4}$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 3

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisses 0, 1, …, n.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1) a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y=n)$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n.

b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n)=1$.

d) La variable Y admet-elle une espérance ?

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire que : $\forall j \geq 2$, $\ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \dfrac{1}{j}$.

c) Conclure alors que : $\sum_{k=1}^{j-1} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln j$.

4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer pour tout $i \geq j$, la probabilité $P_{(Y=i)}(Z=j)$.

b) Établir que :

$$\forall i \leq j-1, \ P_{(Y=i)}(Z=j)=\frac{i+1}{j(j+1)}$$

c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z=j)$ comme une somme finie.

d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

Tournez la page S.V.P.

5) Informatique

On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a,b]\!]$.

a) Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^e déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

b) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n=0
a=0
while a<2
n=n+1
 if grand(1,1,'uin',0,n)==0 then
a=a+1
     if a==1 then y=n, end
 end
end
disp(---,'y=')
disp(---,'z=')
```

Problème

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, par encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Montrer enfin que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4) Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n : '),
u=%pi/2
for ------
end
disp(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et ayant f pour densité.

6) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

7) a) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
 b) Montrer que X possède également une variance et la calculer.

8) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 a) Déterminer la fonction de répartition, notée F_n, de la variable aléatoire I_n.
 b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?
 c) Déterminer une densité de I_n, puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E\left(I_n^2\right) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n \, dx$$

 d) Établir que : $E\left(I_n^2\right) \le \pi u_n$.
 e) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9) Soit h la restriction de la fonction cosinus à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.
 b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis vérifier que Y suit une loi uniforme.
 c) On rappelle que la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` renvoie une simulation `Scilab` d'une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ et on admet que la fonction h^{-1} s'obtient par l'instruction `acos`. Compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de simuler la variable aléatoire X.

```
Y=grand(1,1,'unf',---,---)
X=---
```

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

18 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.

2) a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.

c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.

d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.

b) Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{n v_n}\right)}{-\ln v_n} = 0$ et en déduire que : $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.

c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

4) Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 2

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $\langle\, ,\rangle$ défini par :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3),\ \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

La norme du vecteur x est alors définie par : $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$$

1) Établir que : $\forall x\in\mathbb{R}^3,\ \langle f(x),x\rangle = 0$.

2) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question 1), que 0 est la seule valeur propre réelle de f.

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \text{ réel}$$

3) Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

4) Résoudre le problème posé si $\dim\operatorname{Ker}(f)=3$.

5) On suppose, dans cette question, que $\dim\operatorname{Ker}(f)=2$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où e_1 appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Vérifier que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f puis montrer que b et c sont nuls.

d) En considérant le réel $\langle f(e_1),e_1\rangle$, donner la valeur de a. Que dire de l'hypothèse $\dim\operatorname{Ker}(f)=2$?

6) On suppose, dans cette question, que $\dim\operatorname{Ker}(f)=1$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\operatorname{Im}(f)$ et où e_3 appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que a et d sont nuls et que $c=-b$.

d) Conclure.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y=\sqrt{X}$.

1) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler Y.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) En déduire une densité f_Y de Y.

3) a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.

4) On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

a) Vérifier que $U(\Omega) = [0,1[$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation `Scilab` de Y utilisant uniquement la fonction `rand`.

Problème

Dans ce problème, on désigne par λ un réel strictement positif.
On admet que toutes les variables aléatoires présentées dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On s'intéresse aux appels parvenant à un central téléphonique et on suppose, d'une part, qu'ils arrivent de façon indépendante au central, et d'autre part, que le nombre d'appels reçus par le central pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus par le central pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel t positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps $[0,t]$ et on pose, pour tout entier naturel n : $p_n(t) = P(N_t = n)$.

1) Justifier que $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour n supérieur ou égal à 1. En déduire la loi de N_0.

On admet que, pour tout entier naturel n, p_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases}$$

2) Pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif, on pose : $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

a) Montrer que la fonction f_0 est constante, puis utiliser la première question pour déterminer cette constante.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n'(t)$ en fonction de λ et $f_{n-1}(t)$.

c) On suppose que, pour un certain entier naturel n non nul, on a : $\forall t \geq 0$, $f_{n-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

(i) Montrer qu'il existe une constante K telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geq 0$, $f_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} + K$.

(ii) En utilisant la valeur de $p_n(0)$ pour n supérieur ou égal à 1, donner enfin, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression explicite de $f_n(t)$ en fonction de λ, n et t.

3) a) Donner $p_n(t)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif.

b) Conclure que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note S_n la variable aléatoire égale à l'instant où survient le n-ième appel.

a) Comparer, pour tout réel t positif, les événements $(S_1 > t)$ et $(N_t = 0)$ puis reconnaître la loi de S_1.

b) Comparer, pour tout réel t positif, les événements : $(S_n > t)$ et $(N_t \leq n-1)$.

c) Montrer que S_n est une variable à densité dont une densité est la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

5) Soit (t, u) un couple de réels positifs tels que $u < t$.

a) Justifier sans calcul que les variables aléatoires N_u et $N_t - N_u$ sont indépendantes.

b) Établir l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i)$.

c) En déduire la valeur de $P(N_t - N_u = 0)$ puis celle de $P(N_t - N_u = 1)$.

d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t - N_u = n) = \dfrac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}$.

6) On pose, pour tout ω de Ω, $R_t(\omega) = \begin{cases} S_{N_t(\omega)}(\omega) \text{ si } N_t(\omega) \geq 1 \\ 0 \text{ si } N_t(\omega) = 0 \end{cases}$ et on admet que R_t est une variable aléatoire.

a) Décrire ce que représente la variable aléatoire R_t.

b) Utiliser le système complet d'événements $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que :

$$\forall t > 0, \ \forall u \in [0, t], \ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n > u] \cap [N_t = n])$$

c) Utiliser la question 4b) pour établir la relation :

$$\forall t > 0, \ \forall u \in [0, t], \ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i])$$

d) Montrer enfin que la fonction de répartition de R_t est la fonction F_t définie par :

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} \text{ si } 0 \leq u \leq t \\ 1 \text{ si } u > t \end{cases}$$

e) La variable R_t est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.

On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
     1.
r2  =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

Tournez la page S.V.P.

d) Donner une base de chacun des noyaux $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1,v_1,v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1,v_1) est une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1,v_1,v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$, deux à deux distinctes.
On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)\dots(D-\lambda_p I_n)=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\dfrac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$.

4) a) En distinguant les cas $i=k$ et $i\neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1,L_2,\dots,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{p-1}[X],\ P=\sum_{k=1}^{p}P(\lambda_k)L_k$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p}L_i=1$.

5) a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$.

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\operatorname{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\operatorname{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\operatorname{Arctan}(x)\underset{0}{\sim}x$$

2) a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n=\dfrac{\pi}{n}M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)^n$$

5) a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x)=\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.
Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.

b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.
On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4) a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a) Montrer que E_λ est stable par u^*.

b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) t^k$$

1) Calculer $G(1)$.

2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3) Établir la relation : $V(X)=G''(1)+G'(1)-\left(G'(1)\right)^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

4) a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1}\leq \ln(k+1)-\ln k\leq \frac{1}{k}$.

b) Montrer alors que : $\forall n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $\ln n+\frac{1}{n}\leq u_n\leq \ln n+1$.

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a<b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a,b]\!]$.
Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
(1)   n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)   A=1:n
(3)   p=n
(4)   for k=1:n
(5)       j=grand(1,1,'uin',1,p)
(6)       aux=----
(7)       A(j)=----
(8)       A(p)=----
(9)       p=p-1
(10)  end
(11)  disp(A)
```

7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
   if A(k)>m then m=A(k)
                  c=k
   end
end
disp(c)
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ?

c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.

Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées $A_1, A_2, \dots, A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.

On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1.

9) a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $\big((A_n = n), (A_n < n)\big)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

d) Donner la loi de X_4.

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c) reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (*)$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

11) En dérivant la relation $(*)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+z^2+1\right)}$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer le seul point critique A de f.

3) a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimum.

4) a) Montrer que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)\geq x\,\mathrm{e}^x$.
b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b) ?

5) On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire (C) : $\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C), f présente un minimum global au point $(1,0,0)$. Quelle est sa valeur ?

6) On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte (C') : $x\left(y^2+z^2+1\right)=1$.

Montrer que f possède un maximum global sous la contrainte (C'). En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0\,;\theta]$, où θ (theta) désigne un réel strictement positif.

1) On note f une densité de X, F sa fonction de répartition, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

a) Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x et θ.

b) Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Dans la suite, on suppose que le réel θ est inconnu et on en propose deux estimateurs. Pour construire ces estimateurs, on dispose d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de X, ce qui signifie que $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, elle aussi, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(x,y,'unf',a,b)` simule $x \times y$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Écrire des commandes `Scilab` permettant d'entrer les valeurs des variables qui sont nécessaires et de simuler Y_n.

b) On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Pour tout réel x, écrire $F_n(x)$ à l'aide de $F(x)$ puis déterminer explicitement $F_n(x)$.

c) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.

d) Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

3) On pose maintenant $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $E(Z_n)$ puis proposer un estimateur $\widehat{Z_n}$, construit de façon affine à partir de Z_n, et qui soit un estimateur sans biais de θ.

Définition

On dit qu'un estimateur T_n de θ est d'ordre de convergence $\alpha > 0$ lorsque la suite $\left(n^{\alpha}(T_n - \theta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas quasi-certainement nulle.

4) a) Utiliser le théorème de Slutsky pour établir le résultat suivant : si une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire R et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers le réel a, alors la suite $(a_n R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire aR.

b) Déduire de ce résultat l'unicité de l'ordre de convergence d'un estimateur (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'un estimateur T_n de θ possède deux ordres distincts, α et β, avec par exemple $0 < \alpha < \beta$).

5) On considère, dans cette question, une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ et on pose $Y=-T$. Déterminer la fonction de répartition, que l'on notera F_Y, de Y.

6) a) Justifier que, pour tout réel x positif ou nul, on a $P(n(Y_n-\theta)\leq x)=1$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n supérieur à $-\frac{x}{\theta}$, on a l'égalité :

$$P(n(Y_n-\theta)\leq x)=\left(1+\frac{x}{n\theta}\right)^n$$

c) Établir enfin que $n(Y_n-\theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y. Conclure quant à l'ordre de convergence de Y_n.

7) a) Justifier que $\widehat{Z_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2X_i)$, où $\widehat{Z_n}$ est l'estimateur présenté à la troisième question.

b) On pose $\widehat{Z_n}^*=\sqrt{n}\,\frac{\widehat{Z_n}-E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}$. En appliquant le théorème limite central à la suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\widehat{Z_n}^*=\frac{\sqrt{3n}}{\theta}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ et en déduire que $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{\theta^2}{3}\right)$. Donner l'ordre de convergence de $\widehat{Z_n}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n\geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f. On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1) On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p\circ p=p$.

a) Montrer que $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$

b) Établir que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(Id-p)$

c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :

$$\mathrm{rg}(p)=\mathrm{Tr}(p)$$

2) Montrer par récurrence sur k ($k\in\mathbb{N}^*$) que, si E_1, ..., E_k sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1+\ldots+E_k)\leq\dim(E_1)+\ldots+\dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, ..., p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

3) Montrer que si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4) a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$.

b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$.

c) Établir finalement l'égalité :

$$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_k)$$

5) a) Montrer que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.

b) En déduire que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a : $\forall x \in E$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\big(p_j(x)\big) = 0$.

c) Montrer alors que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
u=------
disp(u)
```

b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0\,;1[$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0\,;x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

c) Soit x un réel élément de $[0\,;1[$. On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

ii) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur pour x :')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=------
b=------
c=------
disp(c)
```

iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

Dans cette partie, on désigne toujours par x un réel de $[0;1[$.

4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$$

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5) a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\ln u \leq u$.

b) En déduire que la série de terme général $(\ln n)x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6) On pose : $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n$.

a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1c), que : $\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}-\dfrac{x}{1-x}\leq f(x)\leq\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x)\underset{1^-}{\sim}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8) a) En remarquant que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$, montrer que l'on a : $0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{(1-x)^2}-x$.

b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f.

c) On admet que f est continue sur $[0;1[$. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1079 – D'après documents fournis

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 4 mai 2021, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1) Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \le a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \le \ell$.

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$b_{2n} \ge \frac{b_n + a_n}{2}$$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

Tournez la page S.V.P.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.

b) Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

c) Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
n=1
u=1
S=1 // S1=u0=1
while S<=1000
u=----
S=----
n=n+1
end
disp(----)
```

3) Recherche d'un équivalent de u_n.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\dfrac{1}{2}$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

4) a) Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

b) Compléter le script Scilab suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2c) sans calculer S_n :

```
n=0
u=1 // u0=1
while u<=-----
u=----
n=n+1
end
disp(----)
```

Exercice 2

1) On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y=\mathrm{e}^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.

a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.

b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p (avec $0<p<1$), et définie par :

$$P(X_n=1)=p \text{ et } P(X_n=-1)=1-p$$

On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n=\prod_{k=1}^{n} X_k$.

2) a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n=1)$ et $P(T_n=-1)$.

c) Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n=1)$ et $P(T_n=-1)$, puis en déduire la loi de T_n.

d) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

3) Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

a) Établir l'inclusion suivante :

$$\left(|T_{n+1}-T'|<\frac{1}{2}\right)\cap\left(|T_n-T'|<\frac{1}{2}\right)\subset(|T_{n+1}-T_n|<1)$$

b) En déduire l'inégalité :

$$P(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)\leq P\left(|T_{n+1}-T'|\geq\frac{1}{2}\right)+P\left(|T_n-T'|\geq\frac{1}{2}\right)$$

c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1}-T_n$, que :

$$P(|T_{n+1}-T_n|\geq 1)=1-p$$

d) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4) Dans cette question, on prend $p=\dfrac{1}{2}$.

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires , $\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $U_n=\mathrm{e}^{n\overline{X}_n}$.

a) On rappelle que $\overline{X}_n^{\,*}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^{\,*}$ en fonction de $\overline{X}_n$.

b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $\left(U_n^{1/\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x,y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E.
On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle$$

1) Montrer que : $\forall x\in E$, $\langle f(x),x\rangle=0$.

2) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=E$.

3) On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4) On note g l'application qui à tout vecteur x de $\mathrm{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(f)$.

b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5) On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.

b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \ldots, e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6) Soit k un entier de $[\![1, p]\!]$.

a) Montrer que l'on a : $\| g(e_k) \|^2 = -\lambda \| e_k \|^2$.

b) On considère les vecteurs $e_k' = \dfrac{1}{\| e_k \|} e_k$ et $e_k'' = \dfrac{1}{\| g(e_k) \|} g(e_k)$.

Établir que $g(e_k') = \sqrt{-\lambda}\, e_k''$ et $g(e_k'') = -\sqrt{-\lambda}\, e_k'$.

7) a) Montrer que le rang de f est pair.

b) On pose $r = \dfrac{1}{2} rg(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1, \ldots, a_r$ strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & (0) & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & & \\ & & & & & a_r & 0 & & & \\ & & & (0) & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

Problème

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$. On a, en particulier $I(p,0)=\int_0^1 x^p dx$ et $I(0,q)=\int_0^1 (1-x)^q dx$.

1) Donner les valeurs de $I(p,0)$ et $I(0,q)$.

2) Montrer que, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

3) Pour tout q de $\mathbb{N}$, on considère la propriété H_q : « $\forall p\in\mathbb{N}$, $I(p,q)=\dfrac{p!\,q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$ ».

Montrer, par récurrence sur q, que H_q est vraie pour tout entier naturel q.

4) Donner explicitement, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q, puis en déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $I(n,n)$ en fonction de n.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

5) Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6) Reconnaître la loi de X_0.

7) a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n)=\dfrac{1}{2}$.

b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.

c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine que l'on précisera.

Partie 3 : simulation informatique de X_n.

On considère $2n+1$ variables aléatoires $U_1,U_2,\dots,U_{2n+1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivée de $2n+1$ personnes $A_1,A_2,\dots,A_{2n+1}$ à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout k de $[\![1\,;2n+1]\!]$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la k^{e} au rendez-vous (cette personne n'étant pas forcément A_k). On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.

8) On note F_U la fonction de répartition commune aux variables $U_1,U_2,\dots,U_{2n+1}$. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x<0$, $0\le x\le 1$ ou $x>1$.

9) a) Écrire la variable V_{2n+1} en fonction de $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$.

b) En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x.

10) a) Écrire la variable V_1 en fonction de $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$.

b) En déduire, pour tout réel x, la probabilité $P(V_1 > x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x.

11) Écrire un script `Scilab` permettant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

12) a) Montrer que l'on a :

$$\forall x \in [0,1],\ G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

b) Déterminer une densité g_{n+1} de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n.

c) On considère le script `Scilab` suivant :

```
U=[8,2,9,13,23,1,5]
V=median(U)
disp(V,'V=')
```

Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?

d) Écrire un script `Scilab` permettant de simuler X_n.

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1234 – D'après documents fournis

Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X, de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On pose :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x\leq a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}$$

1) Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

2) On note G la fonction de répartition de Y.
   a) Exprimer, pour tout réel x, $G(x)$ à l'aide de F.
   b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :

$$G(x)=P_{(X\leq a)}(X\leq x)$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1,...,Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.

a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G, puis à l'aide de F.

b) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

4) On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et on note H_n la fonction de répartition de Z_n.

a) Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\dfrac{F\left(a - \dfrac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{F\left(a - \dfrac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \ x = (x_1, x_2, x_3), \ y = (y_1, y_2, y_3), \ \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

La norme du vecteur x est définie par $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On se propose d'étudier l'ensemble F des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel k de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \| f(x) \| \leq k \| x \|$$

1) Déterminer l'ensemble F lorsque $k = 0$.

2) Un premier exemple.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2 puis en déduire les deux valeurs propres possibles λ et μ de A.

b) Vérifier que A est diagonalisable et en déduire que λ et μ sont bien valeurs propres de A.

c) Justifier, sans les déterminer, que les sous-espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

d) Utiliser ce résultat pour montrer que f appartient à F. On pourra écrire un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f - \mu Id)$.

3) Quelques propriétés générales de l'ensemble F.

a) Vérifier que Id n'appartient pas à F.

b) Montrer que F n'est pas un espace vectoriel.

c) Montrer que F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

d) Montrer que si f est un automorphisme de F, alors f^{-1} n'appartient pas à F.

4) a) Montrer que F ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul.

b) F contient-il des symétries ?

5) Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer qu'en posant $k = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

b) En déduire que f appartient à F si, et seulement si, les valeurs propres de f appartiennent toutes à $]-1,1[$.

6) Un deuxième exemple.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 3 et donner les valeurs propres possibles de f.

b) Montrer que f appartient à F, puis donner un réel k de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

c) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur du réel k défini à la question 5a) :

```
A=[0,-2,2;-2,-1,0;2,0,1]/6
k=---
disp(k)
```

Exercice 3

On désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

On suppose dans ce problème que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

On considère aussi une variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables X_i, et possédant une espérance.

On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. On admet que S est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer $S(\Omega)$.

b) Montrer, sans la calculer, que S possède une espérance.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi de S_n ainsi que son espérance.

3) Établir l'égalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k)P(N=n)$$

4) Étude d'un exemple : on suppose dans cette question que N est une variable aléatoire telle que $N-1$ suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer la loi de N.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\dfrac{p^k\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\dfrac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$.

En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S=k)=\frac{p^k\lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q+k)e^{-\lambda p}$$

c) Donner, grâce à $S(\Omega)$, l'expression de $P(S=0)$ en fonction de λ, p et q.

d) On se propose de calculer l'espérance de S grâce à la formule de l'espérance totale que l'on pourra utiliser sans aucune justification.
Donner la valeur de l'espérance conditionnelle $E(S\mid[N=n])$, puis exprimer l'espérance de S en fonction de λ et p, et vérifier que : $E(S)=E(X)E(N)$.

5) On rappelle que la commande `grand(1,1,'poi',lambda)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle permette de calculer la valeur prise par S lorsque la loi de N est celle décrite à la question précédente :

```
function y=S(lambda,p)
  N=------
  y=------
endfunction
```

Problème

1) Question préliminaire
Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

Montrer que $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch, en posant, pour tout réel x :

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

2) a) Étudier la parité de la fonction sh.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh.

c) Déterminer un équivalent en 0 de $\mathrm{sh}(x)$.

3) a) Étudier la parité de la fonction ch.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch.

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{ch}(x))^2-(\mathrm{sh}(x))^2=1$$

Partie 2 : une troisième fonction

5) a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

b) Vérifier que la fonction th est impaire.

c) En s'aidant éventuellement des relations $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, déterminer les variations de la fonction th.

d) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th.

6) a) Trouver les constantes a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{a\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{b\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire, à l'aide de la fonction th, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.

7) Montrer que $\ln\left(\mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Partie 3 : une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

8) a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\big((k+1)x\big)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}$$

b) En déduire l'encadrement, valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

9) a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est convergente.

b) Établir, pour tout réel x strictement positif, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

c) En déduire, en utilisant certains résultats des parties précédentes, l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

10) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}$ lorsque n et x sont entrés par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur strictement positive pour x :')
S=0
for k=1:n
S=------
end
disp(S)
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1134 – D'après documents fournis

Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC BS

MATHEMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Jeudi 4 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la bibliothèque `numpy` de `Python` est importée avec `import numpy as np` et que la librairie `numpy.random` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Partie 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M telle que $\mathrm{rg}(M)=1$.
On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

2) a) Montrer qu'il existe une matrice $L=(1\ \ \ell_2\ \ \ldots\ \ \ell_n)$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M=CL$.
   b) On rappelle que $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M. Montrer que $\mathrm{Tr}(M)=LC$.
   c) Établir que l'on a l'égalité :

$$M^2=\mathrm{Tr}(M)M$$

3) Montrer que $\operatorname{Tr}(M)$ est valeur propre de f.

4) On suppose $\operatorname{Tr}(M)=0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

5) On suppose $\operatorname{Tr}(M)\neq 0$. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Partie 2

On désigne par a, b, c trois réels non nuls et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1 & 1/a & 1/b\\ a & 1 & 1/c\\ b & c & 1\end{pmatrix}$.

On suppose que A n'est pas inversible.

6) a) En considérant le système $AX=0$, où $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, établir, en raisonnant par l'absurde, la relation : $ac=b$.

b) En déduire le rang de A.

7) a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, A^n appartient à $\operatorname{Vect}(A)$.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega)=[1,+\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

4) On pose $Y=\ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler X.

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c. On pose $Y_1 = \ln X_1$, $Y_2 = \ln X_2$ et $Z = X_1X_2$.

5) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulZ(c)` utilisant la fonction `simulX(c)` et permettant de simuler Z.

6) Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par :

$$V(Z) = \frac{c^2\left(2c^2 - 4c + 1\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

7) a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2.

b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.

8) a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de K, puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} c^2 x \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z. Exprimer, pour tout réel, $F_Z(x)$ à l'aide de H. En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

9) a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 6).

Exercice 3

On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p \in \left]0,1\right[$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note F_k l'événement « obtenir "face" au k^e lancer » et on pose $P_k = \overline{F_k}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1) a) Utiliser les événements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R, définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $R(\Omega) = \{0,1,2\}$.

Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.

a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'événement $(Q = k)$ à l'aide de la variable X.

b) En déduire que Q suit la loi $BN(1 - q^3)$.

3) Montrer que $P(R=0)=\dfrac{1}{1+q+q^2}$, $P(R=1)=\dfrac{q}{1+q+q^2}$ et $P(R=2)=\dfrac{q^2}{1+q+q^2}$.

4) Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.

5) Simulation des variables X, Q et R.

a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
    X=rd.geometric(p)-1
    return X
```

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q=------
    R=------
    return(X,Q,R)
```

Problème

Rappel de quelques formules trigonométriques utiles dans ce problème :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$
$$\cos(2a)=2\cos^2 a-1.$$
$$\cos(2a)=1-2\sin^2 a.$$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers (positifs ou négatifs) et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que l'ensemble E des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles (somme de deux applications et produit d'une application par un réel) est un espace vectoriel.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $I_n=[\![0,n-1]\!]$.
On rappelle qu'une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est dite n-périodique (ou de période n) si :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ f(k+n)=f(k)$$

On note F_n l'ensemble des applications n-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Soit h l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall k\in\mathbb{Z},\ h(k)=\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. Vérifier que h est élément de F_n.

2) Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit k un entier quelconque.
On admet qu'il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{Z}\times I_n$ tel que $k=nq+r$.
Montrer alors que, pour toute fonction f de F_n, on a l'égalité :

$$f(k)=f(r)$$

4) Pour tout i de I_n, on considère la fonction n-périodique e_i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ (e_i est donc élément de F_n) dont la restriction à I_n est donnée par : $\forall k \in I_n$, $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Utiliser la question 3) pour montrer que, pour tout élément f de F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$$

b) En déduire que la famille $B_n = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de F_n.

c) Quelles sont les coordonnées d'un élément quelconque f de F_n dans la base B_n ?

5) Pour tout couple (f,g) de $F_n^{\,2}$, on pose : $\langle f,g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)$.

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F_n. On note $\|\ \|$ la norme associée.

b) Montrer que la base B_n est orthonormale pour ce produit scalaire.

c) On admet que, pour tout couple (a,b) de réels, avec $b \in \left]0, 2\pi\right[$, et pour tout entier k, on a :

$$2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a+kb) = \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

Montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

d) En déduire les égalités $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$.

e) Déterminer la norme $\|h\|$ de l'application h présentée à la question 1).

6) On considère l'application notée D qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $D(f)$, que l'on pourra noter Df s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Df(k) = f(k+1) - f(k)$$

a) Vérifier que, pour tout f de F_n, Df est élément de F_n.

b) Montrer que l'application $D : f \mapsto D(f)$ est un endomorphisme de F_n.

c) Vérifier que l'application Dh est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

d) En déduire, à l'aide de la deuxième des égalités de la question 5d), que :

$$\|Dh\| = \sqrt{2n}\ \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

7) On considère l'application notée Δ qui, à tout élément f de F_n, associe l'application $\Delta(f)$, que l'on pourra noter Δf s'il n'y a pas de confusion possible, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$$

On admet que Δ est un endomorphisme de F_n.

a) Montrer que : $\forall (f,g) \in F_n^{\,2}$, $\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle$.

b) En déduire que Δ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien F_n.

c) Montrer que les valeurs propres de Δ sont négatives ou nulles.

Tournez la page S.V.P.

8) On note ε_0 l'application constante de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ égale à 1.

a) Vérifier que $\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

b) Montrer alors que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0)$.

9) On pose $c = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta) \setminus \{0\}\}$, où $\mathrm{Sp}(\Delta)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de Δ.
On considère un élément f de F_n tel que $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormale de F_n, formée de vecteurs propres de Δ, de la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right)$, puis montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$.

b) Montrer enfin que : $\|Df\|^2 \geq c\|f\|^2$.

10) Dans cette question, on prend $n = 3$ et on note A la matrice de Δ dans la base B_3 de F_3.

a) Vérifier que la première colonne de A est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On admet, pour la suite, que l'on a :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
En déduire les valeurs propres de Δ.
Comment s'écrit l'inégalité obtenue à la question 9b) dans ce cas ?

c) Que peut-on déduire du cas de l'application h ?