

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (4 h.)

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}^+$ celui des réels positifs ou nul.

On adoptera la convention suivante :

$$\frac{x^0}{0!} = 1 \text{ quel que soit } x \text{ dans } \mathbb{R}^+.$$

NOTA : Les 3 parties peuvent être traitées indépendamment
(on signale dans les parties 2 et 3 les résultats de la partie 1 à utiliser).

1ère partie :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère les 3 suites définies par :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad w_n(x) = v_n(x) + \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

- 1 - Montrer que la suite $(v_n(x))$ est convergente et, en utilisant la formule de MAC-LAURIN, que sa limite est e^x . Montrer que la suite $(w_n(x))$ a la même limite.
- 2 - Démontrer que la suite $(v_n(x))$ est croissante et que la suite $(w_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang.
- 3 - En utilisant ce qui précède, établir les inégalités :

$$(1) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, \log 2[$$

$$(2) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in [0, 1].$$

2ème partie :

Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, ϕ_A désignera la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \phi_A(k) = 1 & \text{si } k \in A \\ \phi_A(k) = 0 & \text{si } k \notin A. \end{cases}$$

A toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout réel a dans $\mathbb{R}^+$, on associe la suite $(s_n^A(a))$ définie par :

$$s_n^A(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\phi_A(k)}{k!} a^k.$$

... / ...

- 1 - Démontrer que la suite $(s_n^A(a))$ est convergente.
- 2 - Le réel $a \in \mathbb{R}^+$ étant fixé, on pose, pour toute partie A de $\mathbb{N}$:

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^A(a).$$

Calculer :

$$m(\emptyset) ; m(\{0\}) ; m(\{p\}), p \neq 0 ; m(\mathbb{N}).$$

DANS LES QUESTIONS 3, 4, 5, on suppose : $a \in]0, \log 2[$.

- 3 - Démontrer les résultats suivants :
- a - Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ vérifiant $A \subset B$, alors $m(A) \leq m(B)$.
 - b - Pour toute partie A de $\mathbb{N}$: $m(A) \in [0, 2[$.
 - c - Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
- 4 - a - Soient A, B deux parties disjointes non vides de $\mathbb{N}$, et p le plus petit élément de $A \cup B$ (on supposera $p \in A$, et donc $p \notin B$). Démontrer, en utilisant l'inégalité (1) de la 1ère partie :

$$m(B) < \frac{a^p}{p!} \leq m(A).$$

- b - En déduire que si deux parties disjointes A, B vérifient $m(A) = m(B)$, elles sont vides.
- 5 - a - Démontrer que pour tout couple (A, B) de parties de $\mathbb{N}$:
- $$m(A) - m(B) = m(A \cap \bigcap_{\mathbb{N}} B) - m(B \cap \bigcap_{\mathbb{N}} A).$$
- b - En déduire que l'application :
- $$m : A \mapsto m(A) \text{ est une injection de } \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{ ensemble des parties de } \mathbb{N},$$
- vers l'intervalle $[0, 2[$ de $\mathbb{R}$.

3ème partie :

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, continues sur $[0, 1]$.

On considère l'application U qui, à tout élément f de $\mathcal{C}$, associe l'élément $U(f)$ défini par :

$$(U(f))(x) = \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

On définit, pour tout entier n , l'application U^n par :

$$U^n = U^{n-1} \circ U, \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } U^0 = I, \text{ application identique de } \mathcal{C}.$$

- 1 - a - Montrer que U est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

b - Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(U^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

en raisonnant par récurrence et en utilisant une intégration par parties.

... / ...

c - On note V_n l'endomorphisme défini, pour $n \geq 1$, par :

$$V_n = \sum_{k=1}^n U^k.$$

Démontrer les relations : $V_n \circ U = U \circ V_n = V_{n+1} - U$.

2 - a - Vérifier que l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

est une norme sur $\mathcal{C}$; c'est-à-dire vérifie :

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \\ \forall (f, g) \in \mathcal{C}^2 : \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \\ \|f\| = 0 \implies f = 0 \end{cases}$$

b - Démontrer que $\|U(f)\| \leq \|f\|$, pour tout f de $\mathcal{C}$.

3 - Soit V l'application qui, à tout élément f de $\mathcal{C}$, associe l'élément $V(f)$ défini par :

$$(V(f))(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Démontrer que $\|V(f) - V_n(f)\| \leq \frac{e}{n!} \|f\|$, pour tout entier $n \geq 1$, en utilisant l'inégalité (2) de la 1ère partie.

On admettra qu'on peut en déduire les égalités : $V \circ U = U \circ V = V - U$.

4 - a - Dédire de 3 - que $I - U$ et $I + V$ sont deux isomorphismes de $\mathcal{C}$ réciproques l'un de l'autre.

b - Application : trouver la solution f , élément de $\mathcal{C}$, de l'équation intégrale :

$$f(x) - \int_0^x f(t) dt = e^{-x}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon**CONCOURS D'ENTRÉE 1981****MATHEMATIQUES**
1ère épreuve*Coefficient 4**Samedi 23 Mai 1981 de 8 heures à 12 heures*

Nota : les trois parties sont indépendantes.

1ère partie :

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \text{si } t \neq 0 \quad f(t) &= \frac{1}{e} (1+t)^{\frac{1}{t} + \frac{1}{2}} \\ \text{si } t = 0 \quad f(t) &= 1. \end{aligned}$$

- 1 - a - Etablir le développement limité de $\text{Log}(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.
b - Montrer que f est continue et dérivable en 0.

- 2 - Soit φ la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(1+t - \frac{1}{1+t} \right) - \text{Log}(1+t)$.

- a - Etablir l'égalité

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \varphi(t) \cdot f(t) \quad , t \neq 0.$$

- b - En déduire que f' est continue sur $] -1, +\infty[$.

- c - Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in] -1, +\infty[$.

- d - En déduire :

$$\forall t \in] -1, +\infty[, f(t) \geq 1.$$

- 250 -

3 - Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(nx)^n \cdot n^{1/2}}{n!}$, $n \geq 1$.

a - Vérifier, pour $x > 0$, l'égalité $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e \cdot x \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b - Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$.

c - En déduire les limites des deux suites

$$v_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{n^{1/2}}{n!},$$

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2}\right)^k \cdot \frac{k^{1/2}}{k!}.$$

d - Etablir successivement les inégalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\text{Log}(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3},$$

$$\text{Log}(f(t)) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}.$$

e - En utilisant 3-a, établir la majoration

$$\text{Log}\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{k^3}\right), \quad n \geq 2,$$

et en déduire que la suite $\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est majorée.

f - En déduire la limite de la suite $\left(\frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!}\right)$.

2ème partie :

$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme Q_n de $\mathbb{C}[X]$ par

$$Q_n = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}].$$

1 - Déterminer le degré de Q_n .

2 - Pour tout entier naturel r , montrer que

$$(1) \quad Q_{2r} = \sum_{p=0}^r (-1)^p C_{2r+1}^{2p+1} X^{2r-2p}.$$

3 - a - Déterminer les racines de Q_n . Montrer que ces racines sont réelles.

b - En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

4 - Pour tout entier naturel r , montrer que

$$(2) \quad Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^r \left(X^2 - \cotg^2 \frac{k\pi}{2r+1}\right).$$

- 5 - En utilisant (1) et (2), établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^r \cotg^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$

(on calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r}).

En déduire que

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}.$$

- 6 - a - Pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, établir les inégalités

$$\cotg^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

- b - En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^r \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$.

- c - Montrer que la série numérique de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

3ème partie :

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1 , on pose

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

- 1 - Montrer que F_n est définie et continue sur $] -1, +\infty [$. Etudier son sens de variation.

Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.

- 2 - Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que

$$\forall t \in [0, x], \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leq \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

(on pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$).

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

- 3 - Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que

$$\forall t \in [x, 0], \left| \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right| \leq 2 \left| \frac{x}{1+x} \right|^n.$$

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

1er PROBLEME

On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt.$$

1. a. Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

- b. Montrer que F est décroissante et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4}.$$

2. a. Montrer que

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi} t \leq \sin t.$$

- b. En déduire successivement

$$\forall x > 0, F(x) \leq \frac{\pi}{4x} (1 - e^{-x}), \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

3. a. Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, |e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$$

- b. En déduire que

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, |F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

et que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4. a. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^+$, justifier l'existence de $H(x_0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x_0 \sin t} \sin t dt.$

- b. En utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, |e^{-a} - e^{-b} + (a-b)e^{-b}| \leq \frac{|a-b|^2}{2}.$$

- c. En déduire l'inégalité

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\}, \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0) \right| \leq \frac{\pi}{8} |x - x_0|.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

5. A tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on associe la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = F(u_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- a. En utilisant 3-b., montrer qu'il existe $m \in [0, 1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |u_{k+1} - u_k| \leq m^k |u_1 - u_0|.$$

- b. En déduire que pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2, p > q$:

$$|u_p - u_q| \leq \frac{m^q}{1-m} |u_1 - u_0|$$

et que, quel que soit α , la suite associée est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers une limite $\ell(\alpha)$ vérifiant

$$F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha).$$

... / ...

-2-

c - Montrer qu'il existe un seul $x \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $F(x) = x$.

Que peut-on en conclure pour les suites construites précédemment ?

2ème PROBLEME

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.

On appellera B la base de E composée des polynômes 1, X et X^2 .

Le polynôme F_α étant défini par

$$F_\alpha = \alpha 1 + X + X^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

on désigne par φ_α l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme R de E , reste de la division euclidienne du produit $F_\alpha \cdot P$ par le polynôme $X^3 - X$.

$\varphi_\alpha(P)$ est donc le seul polynôme R vérifiant

$$\begin{cases} F_\alpha \cdot P = (X^3 - X) \cdot Q + R \\ R = 0 \text{ ou degré}(R) < 3. \end{cases}$$

- 1 -
 - a - Déterminer les polynômes $\varphi_\alpha(1)$, $\varphi_\alpha(X)$ et $\varphi_\alpha(X^2)$.
 - b - Montrer que φ_α est une application linéaire de E dans E .
 - c - Montrer que $\varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha - \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
où I_E désigne l'application identique de E dans E .
- 2 - Déterminer la matrice M_α de φ_α relativement à la base B .
- 3 -
 - a - Calculer le déterminant de M_α et discuter la bijectivité de φ_α en fonction du paramètre α .
 - b - Calculer la matrice inverse M_α^{-1} lorsque M_α est inversible.
- 4 -
 - a - Montrer que $\text{Ker } \varphi_0$, noyau de φ_0 , est l'ensemble des polynômes de E admettant 1 pour racine. Déterminer $\text{Im } \varphi_0$, image de φ_0 .
 - b - Montrer que $\text{Ker } \varphi_{-2} = \text{Im } \varphi_0$ et $\text{Im } \varphi_{-2} = \text{Ker } \varphi_0$.
- 5 -
 - a - Calculer les valeurs propres de M_α .
 - b - Déterminer les sous-espaces propres de φ_α (on pourra utiliser 1-c.).
 φ_α est-elle diagonalisable ?
 - c - Construire une matrice T telle que
$$M_\alpha = T \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 \end{bmatrix} T^{-1}.$$
- 6 -
 - a - Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$.
 - b - Calculer $\varphi_{-2} \circ \varphi_0$.
Le résultat obtenu peut-il être déduit (sans calcul) de 4-b- ?
 - c - Calculer $(M_\alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, et en déduire pour $\alpha \neq -1$:
$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma, \quad k \in \mathbb{N}^*, \text{ avec } \gamma = \frac{2\alpha^k}{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}.$$
Exprimer $(\varphi_{-1})^k$ en fonction de k .

-FIN-

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1983

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 20 Mai 1983 de 8 heures à 12 heures

Nota : la partie I est complètement indépendante des parties II et III.

Les parties II et III sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

On considère les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx \text{ et } J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx, p \in \mathbb{N}.$$

1 - Étude de I_p .

a - Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \geq M, x^p e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

b - Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p , puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2 - Étude de J_p .

a - Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^*$.

b - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \frac{x^n}{e^x - 1} = x^n \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^n e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

c - Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx} dx.$$

.../...

d - Montrer que, pour $x \geq 0$,

$$e^x - 1 \geq x,$$

puis que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$,

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p \cdot e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

e - En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

3 - Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{p+1}}$.

Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p .

PARTIE II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie

$$(1) \quad \begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

1 - Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.

2 - a - Montrer que la suite (u_n) est monotone pour $n \geq 1$ et convergente.

b - Déterminer la limite de cette suite.

3 - On considère la série numérique de terme général $v_n = -1 + u_n$.

a - Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

b - En déduire que la suite (P_n) définie par

$$(2) \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$$

est convergente. (Ne pas essayer de calculer sa limite).

PARTIE III

1 - A tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

a - Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0, b \geq 0$ et $a \geq 0, b = 0$.

b - Montrer que $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geq 1$.

c - En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite qui est fonction de (a, b) , et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathcal{L}(a, b)$.

d - Montrer que, pour $a \geq 0, b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$(4) \quad \mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$$

$$(5) \quad \mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$$

$$(6) \quad \sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a+b).$$

2 - On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction

$$F : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \mathcal{L}(1, x).$$

a - Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Montrer que F est positive et croissante.

b - Montrer que, pour $x > 0$:

$$(7) \quad \sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$$

$$(8) \quad F(x) = x F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(9) \quad F(x) = \sqrt{x} F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$(10) \quad F(x) = \frac{1}{2}(1+x) F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

3 - En utilisant les résultats de 2 -

a - Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de $F'(1)$.

b - Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c - Montrer que F est continue en 0. Est-elle dérivable en ce point ?

d - Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{F(x)}{x}$ et $\frac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

4 - Pour $x > 0$, exprimer P_n , défini par (1) et (2), en fonction de $F(x)$ et $F(u_{n+1})$.

Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $F(x)$.

Note :

– les parties I, II et III peuvent être traitées de manière indépendante. Dans III, on signale les résultats de II à utiliser.

– $\mathbb{IN}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{IR}$ celui des nombres réels.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{IN}$, on considère les fonctions P_n et Q_n définies par

$$Q_n : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{IR} \\ \theta \longmapsto Q_n(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} & \text{si } \theta \in]0, \pi[\\ n+1 & \text{si } \theta = 0 \\ (-1)^n (n+1) & \text{si } \theta = \pi \end{cases}$$

$$P_n : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{IR} \\ x \longmapsto P_n(x) = Q_n(\arccos x).$$

1. a. Montrer que Q_n est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.
b. Montrer que P_n est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $] -1, +1 [$.
2. a. Pour tout $n \in \mathbb{IN}$, calculer $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$.
b. Pour tout $n \in \mathbb{IN}$, calculer $P'_n(0)$.
3. a. Pour tout $x \in [-1, +1]$, déterminer $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
b. Montrer que P_n vérifie la relation de récurrence :
 $\forall n \in \mathbb{IN}, \forall x \in [-1, +1], P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2xP_{n+1}(x)$.
c. En déduire que P_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et la parité.
4. a. Montrer, pour tout $a \in]0, \pi]$, l'existence de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

- b. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

existe et qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

PARTIE II

1. Si a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et à dérivée continue sur $[a, b]$, montrer que la suite numérique

$$\left(\int_a^b f(x) \sin nx dx \right)_{n \in \mathbb{IN}}$$

converge vers 0.

(On pourra utiliser une intégration par parties).

avec l'équation !

2. On considère la fonction g définie par :

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{IR} \\ x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a. Montrer que g est continue.
- b. Montrer que g est dérivable et que sa dérivée est continue.

PARTIE III

Nota : dans cette partie, on admet l'existence des intégrales $\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x} dx$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n définie par :

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ n & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, φ_n est continue.

b.. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ converge

montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x) dx$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties)

avec la suite on pose $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x) dx$ n'est pas absolument convergente ($\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \geq \sin^2 x$)

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx,$$

et on pose $J_n = I_{2n}$, $K_n = I_{2n+1}$.

- a. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

- b. Calculer, suivant la parité de n , $I_{n+2} - I_n$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de K_n , et, pour $n \geq 1$, montrer que $J_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Calculer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(P_n défini dans la partie I).

- c. Montrer que, pour $n \geq 1$:

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx.$$

En déduire : $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_n - K_n) = 0$, en utilisant II.

- d. Déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et indiquer sa limite.

- e. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que la suite $\left(\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ a même limite que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On se propose d'établir, pour tout $a > 0$:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

- a. Vérifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx.$$

- b. Démontrer (1) pour $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

(On pourra considérer $\int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ et appliquer II).

- c. Démontrer (1) pour $a \in]\frac{\pi}{2}, +\infty[$ en montrant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^a \varphi_n(x) dx = 0$.

4. Déterminer le nombre L , c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$.

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1985

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 17 mai 1985 de 14 heures à 18 heures

Nota :

- les deux problèmes sont indépendants.
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

Soient p un entier naturel ≥ 2 , et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p (on convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$). On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

PARTIE I

- Vérifier que Δ est une application linéaire.
 - Quel est le noyau de Δ ?
 - Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P , pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$.

- On définit les polynômes P_n pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq p$, par

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier } n \text{ tel que } 1 \leq n \leq p : \Delta P_n = P_{n-1} \text{ et } P_n(0) = 0. \end{array} \right.$$

- Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

- Montrer que la famille $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^p \alpha_n P_n \quad \text{avec } \alpha_n = (\Delta^n P)(0)$$

où $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_p[X]}$ et, pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq p$, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

PARTIE II

- Soit n un entier tel que $1 \leq n \leq p$.

- Montrer que $P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1)$.

b. Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P_n(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

c. Prouver, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$: $\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^p C_n^k (-1)^{n-k} P(X+k)$.

2. Démontrer que, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

(II) Pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

PARTIE III

1. a. Écrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$.

b. Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.

2. a. Quelles sont les valeurs propres de M ?

b. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout ce problème, on désigne par f la fonction définie par

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et par C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1. a. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

b. Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

c. Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

a. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$.

c. Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé. On donnera une valeur approchée des extremums de f à 10^{-1} près.

1. a. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$ converge.
- b. Calculer $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$.

2. a. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

On notera $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = f(x) e^{-2nx}.$$

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

3. a. Montrer qu'on peut écrire $\frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes.

b. Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que

$$I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i+1) + I_n.$$

4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On remarque que

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx + \int_1^{+\infty} f_n(x) dx.$$

a. On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $0,4 < \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in [0,1]$, puis montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx < 2,5 \int_0^1 x e^{-(2n+1)x} dx < \frac{2,5}{2n+1}.$$

b. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[1, +\infty[$, on a $0,8 < 1 - e^{-2x} < 1$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-(2n+1)x} dx < \frac{2}{2n+1},$$

et en déduire une majoration de $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$.

c. Conclure.

$$A_{p+2}(s) = sA_{p+1}(s) - A_p(s)$$

2. On définit un polynôme A_n par la relation

$$A_n(s) = sA_{n-1}(s) - A_{n-2}(s)$$

Prouver que le système (II) possède des solutions autres que l'élément nul de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $A_n(s) = 0$.

3. Déterminer :

- Le degré de A_n ;
- Le coefficient du terme de plus haut degré de A_n ;
- Le terme de degré 0 de A_n ;
- La parité de A_n ;
- Le coefficient de s^{n-2} dans $A_n(s)$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on définit les fonctions P_n et Q_n par :

$$P_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto P_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leq n, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

$$Q_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto Q_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a. Étudier les fonctions P_1 , P_2 et P_3 d'une part, Q_1 , Q_2 et Q_3 d'autre part. Tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à 4 cm. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on notera par C_i la courbe représentative de P_i , et par Γ_i celle de Q_i . On tracera enfin sur le même graphique la courbe E représentative de la fonction e^{-x} .

b. Montrer que la fonction P_n est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $P_n^{(n)}$. La fonction P_n est-elle de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$?

2. a. Soit φ_1 la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$\varphi_1(t) = \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \ln(1-t) - 1 + \frac{1}{1-t}$$

Montrer que $\varphi_1 \geq 0$ (on pourra étudier les variations de φ_1), et en déduire les variations de la fonction Ψ_1 définie sur $]0, 1[$ par $\Psi_1(t) = \frac{1}{t} \ln(1-t)$.

b. Soit φ_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi_2(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t}$.

Montrer que $\varphi_2 \geq 0$ (on pourra étudier les variations de φ_2), et en déduire les variations de la fonction Ψ_2 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Psi_2(t) = -\frac{1}{t} \ln(1+t)$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a :

$$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x).$$

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Quelle est la limite des suites de terme général $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, étudier l'existence des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} P_n(x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx.$$

Lorsqu'elles existent on note $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x) dx$ et $J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx$.

Calculer I_n et J_n . Quelle est la limite des suites de terme général I_n et J_n lorsque $n \rightarrow +\infty$?

PARTIE II

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto e^{-x} - P_4(x)$$

$$g : [0,4[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + 3 \ln \left(1 - \frac{x}{4} \right)$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Établir qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1,4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. En déduire les variations de la fonction f .
4. a. Montrer que l'on a l'encadrement : $1,8 < \alpha < 1,9$.
b. Calculer une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

PARTIE III

On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$.

1. Montrer l'existence de cette intégrale. On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$.

$$\text{Montrer que } I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx.$$

2. a. En utilisant la question 4. b de la partie II, montrer :
 $\forall x \in [0, \sqrt{2}], 0 \leq e^{-x^4} - P_4(x^4) \leq 0,08$.

b. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} P_4(x^4) dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$), et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

c. En déduire l'encadrement : $0,87 \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx \leq 1$

3. a. Montrer : $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{7/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y} dy$ (on pourra effectuer le changement de variable $y = x^4$).

b. En déduire une valeur décimale approchée de $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx$ à 10^{-2} près.

4. Conclure.

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 15 mai 1987 de 14 heures à 18 heures

Nota :

- Les deux problèmes sont indépendants.
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLEME

On désigne par $\mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Quelle est la dimension de E ?
2. On note u l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$, associe le polynôme $u(P)$ défini par

$$u(P) = X (P' + P'(0)) - 2 (P - P(0)).$$

Vérifier que u est une application linéaire.

Pour P élément de $\mathbb{R}_5[X]$, calculer $u(P)$; en déduire le noyau, l'image, les valeurs propres et vecteurs propres de l'application u .

Montrer que u est diagonalisable.

DEUXIEME PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (\text{N.B. } \ln \text{ désigne le logarithme népérien})$$

On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

PARTIE I

1.
 - a) Quel est le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?
 - b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0 , puis de f_n , $n \geq 1$.
 - c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1. Que vaut $f'_n(1)$?
 - d) Préciser la position de C_n par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2.
 - a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et calculer $f'_n(x)$.
 - b) Montrer que pour $n \geq 1$, f_n est prolongeable par continuité en 0. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?

3.
 - a) Étudier la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi_0(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$. Quel est le signe de $f'_0(x)$?
 - b) En déduire les variations de la fonction f_0 , et tracer C_0 , l'unité étant prise égale à 5 cm.

4.
 - a) Étudier les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ respectivement par $\varphi_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \ln x$ et $\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$.
 - b) En déduire les variations des fonctions f_1 et f_2 , et tracer C_1 et C_2 sur le même graphique que C_0 .

PARTIE II

On admettra que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, et que sa somme est égale à $\frac{\pi^2}{6}$.

1.
 - a) Montrer que, pour $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur le segment $[0,1]$.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 (f_0(x) - f_2(x)) dx$ est convergente.

On note $a_1 = \int_0^1 (f_0(x) - f_2(x)) dx$. Calculer a_1 .

c) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^1 f_0(x) dx$ est convergente.

On note $I = \int_0^1 f_0(x) dx$. Le but de cette partie est de calculer I .

2.
 - a) Pour $n \geq 2$, calculer

$$a_n = \int_0^1 (f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x)) dx$$

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente.

3. a) Établir, en utilisant l'étude de f_1 effectuée à la partie I, que, pour $n \geq 1$, $0 \leq x \leq 1$, on a

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n-1}}{2}$. En déduire que $\int_0^1 f_n(x) dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) On note $S_n = \sum_{p=1}^n a_p$. Montrer que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

4. a) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

c) Calculer I .

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1988

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Vendredi 13 mai 1988 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– Les deux problèmes sont indépendants.

IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

On note n un entier naturel, $n \geq 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1}e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

1.
 - a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n .
 - b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f .
2. Écrire la matrice de f relativement à B .
3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?
4. On revient au cas général.
 - a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ , calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.
 - b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$, il existe deux réels distincts a_k et b_k , que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f . Examiner le cas où $2k = n + 1$.
 - c) Montrer que f est diagonalisable.

DEUXIÈME PROBLÈME

N.B. : les questions 4., 5. et 6. sont indépendantes de la question 3.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = e^{-n(x + \frac{1}{x})} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1. Exprimer f_n en fonction de f_1 . Montrer que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier les variations de f_n . Tracer approximativement la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé et la situer par rapport à celle de f_{n+1} .
Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) \leq e^{-2n}$.

3. a) Montrer que, pour tout $a \neq 0$, l'équation d'inconnue x

$$f_n(x) = a(x - 1)$$

admet une unique solution notée u_n .

- b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

- c) L'équation d'inconnue x

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(x - 1)$$

admet une unique solution notée v_n .

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

- d) Quelle est la pente a_n de la droite joignant le point $A(1,0)$ au point $M_n(n, f_n(n))$?

Montrer que cette pente vérifie l'inégalité $a_n > \frac{e^{-n^2}}{n^2}$ quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation d'inconnue x

$$f_n(x) = \frac{e^{-n^2}}{n^2}(x - 1)$$

admet une unique solution notée w_n . Montrer que $n < w_n$, et en déduire la limite de w_n , lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ fixé, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.

Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ de cette série.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

- a) Démontrer que la fonction F_n est dérivable. Étudier le sens de variation de F_n .

- b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f_n(x) < e^{-nx}$.

En déduire que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

6. Montrer que les séries de termes généraux

$$J_n = \int_0^1 f_n(t) dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt \quad \text{et } I_n \text{ sont convergentes.}$$

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Mardi 16 mai 1989 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– Les deux problèmes sont indépendants.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

Partie A

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, p et q deux endomorphismes de E tels que :

$p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p \circ q = q \circ p$. On pose : $f = p + q$, $g = p \circ q$.

1.
 - a) Vérifier $g \circ g = g$
 - b) Montrer que les valeurs propres de p et de q sont dans $\{0; 1\}$.
 - c) Démontrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0; 1; 2\}$.
2.
 - a) Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0\}$.
 - b) Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0\}$.

Partie B

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes nul ou de degré $\leq N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, on note T_n l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ définie de la façon suivante :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k, \text{ avec } \lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}, \text{ alors } T_n(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k.$$

Ainsi, par exemple, avec $N = 4$: $T_3(X + X^2 + 2X^3 + X^4) = X + X^2 + 2X^3$ et $T_4(X + X^2) = X + X^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, T_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_N[X]$.
2.
 - a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$: $T_n \circ T_n = T_n$.
 - b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, déterminer le noyau et l'image de T_n .
 - c) Montrer pour tous n, r de $\mathbb{N}$ tels que $n \leq N$ et $r \leq N$: $T_n \circ T_r = T_r \circ T_n$.

3. Soient n, r deux entiers naturels tels que $0 < n \leq r < N$.
- a) Comparer $\text{Ker}(T_n)$ et $\text{Ker}(T_r)$; comparer $\text{Im}(T_n)$ et $\text{Im}(T_r)$.
- b) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de $T_n + T_r$.
- c) $T_n + T_r$ est-il diagonalisable ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I

1. Montrer que, pour tout réel x de $] -\infty ; \frac{1}{4}]$, il existe un réel unique y de $] -\infty ; \frac{1}{2}]$ tel que $x = y - y^2$, et calculer y en fonction de x .
- On note f l'application définie par : $f :] -\infty ; \frac{1}{4}] \longrightarrow] -\infty ; \frac{1}{2}]$
- $$x \longmapsto \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4x})$$
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -\infty ; \frac{1}{4} [$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -\infty ; \frac{1}{4} [$:
- $$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}.$$

Partie II

L'objet de cette partie est de déterminer une approximation de f sur $] -\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} [$ par des fonctions polynômiales.

1. a) Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} [$: $f(x) = Q_n(x) + R_n(x)$

$$\text{où } Q_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!}{(k-1)! k!} x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

b) Calculer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$

2. a) Pour $x \in [0 ; \frac{1}{4} [$ fixé, quelle est la borne supérieure de l'application
- $$[0; x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
- $$t \longmapsto \frac{x-t}{1-4t} \quad ?$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0 ; \frac{1}{4} [$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(4x)^n}{2\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -\frac{1}{4} ; 0]$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{(-4x)^n \cdot |x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}.$$

4. Donner un majorant de $|f(x) - Q_n(x)|$, indépendant de x pour $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.
5. a) Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^{-4} (n+1) \sqrt[3]{n}} < 1).$$
- b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow |R_n(-\frac{1}{6})| < 10^{-4}).$

Partie III

On étudie dans cette partie une autre méthode d'approximation de f sur $[0; \frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} P_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2. \end{cases}$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4 .
2. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et de $P_{n+1} - P_n$ sont des entiers naturels.
En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- b) Montrer (par récurrence sur n) que, pour tout $x \in [0; \frac{1}{4}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) \leq f(x)$.
- c) Démontrer que, pour tout $x \in [0; \frac{1}{4}]$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Coefficient 4

Lundi 30 avril 1990 de 14 heures à 18 heures

Les deux problèmes sont indépendants.

1er PROBLÈME

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales de t dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier $k \in [0 ; n]$, μ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [0 ; n]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ est convergente.

2. Soit f un élément de E . Montrer qu'on peut définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

3. a. Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$.

b. Montrer que, pour tout entier $k \in [0 ; n-1]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1) L(\mu_k)$.

$$\text{En déduire } L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j.$$

c. Montrer que, pour tout élément f de E , $L(f)$ appartient à E .

On considère l'application $L : E \longrightarrow E$
 $f \longmapsto L(f)$

4. a. Montrer que L est une application linéaire et injective.
 b. Ecrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leq k \leq n}$.
 Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} (on pourra utiliser 3. b.).
5. a. Soient λ une valeur propre de L , et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ .
 Montrer que λ est non-nul et que, pour tout réel x , $(1 - \lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.
- Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f(x)$.
- Montrer que φ est constante.
- b. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L .
 Est-ce que L est diagonalisable ?

2ème PROBLÈME

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.
 $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

PARTIE A. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
 On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

PARTIE B. Expression intégrale de γ .

- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe,
 et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) dx$ existe.
- Montrer que, pour tout $t \in]-1; +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$.
 - En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq e^{-x}$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0; \sqrt{n}[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) - \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right).$$

d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I.

4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ existent et sont égales.

On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_1^n \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J.

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $K_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$ existe.

b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

7. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - J_n = K_n - \ln n$.

b. En déduire $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma$.

PARTIE C. Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \frac{(-1)^l}{(l+1)! (l+1)} \leq 1 \leq \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)! (l+1)},$$

puis
$$-\frac{1}{(2n)! 2n} \leq I - \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)! (l+1)} \leq 0 .$$

c. Donner une valeur approchée de I à $0,5 \cdot 10^{-3}$ près.

2. a. Montrer : $\forall x \in [1 ; +\infty[, 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \leq \frac{e^{-x}}{x} .$

b. Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 \cdot 10^{-3} .$

c. On admet que $\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y} dy$ vaut 0,2193 à $0,25 \cdot 10^{-3}$ près .

Donner une valeur approchée de J à $0,5 \cdot 10^{-3}$ près.

d. Conclure.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1991

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Lundi 6 mai 1991 de 8 heures à 12 heures

1er PROBLÈME

Notations

$\mathcal{B}$ est la base canonique du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$,

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à $\mathcal{B}$, g est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice

relativement à $\mathcal{B}$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note

$M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M_A .

Partie A

- Déterminer les valeurs propres de g et, pour chaque valeur propre de g , déterminer une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable ?
- Soit $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.
 - Montrer que f_A est combinaison linéaire de id , g , $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.
 - En déduire les valeurs propres de f_A .

- c. Dans cette question 2-c., et celle-ci seulement, on suppose $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -2$. Déterminer pour chaque valeur propre de A la dimension du sous-espace propre associé.

Partie B

- Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\beta \neq 0$, et $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β) pour qu'il existe $X \in \mathbb{C}^4$ tel que : $f_A(X) = (0, 0, 0, 0)$ et $X \neq (0, 0, 0, 0)$.
- Trouver quatre nombres complexes α, β, u, v tels que, en notant $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$ et $B = (u, u + v, u + 2v, u + 3v)$, on ait :

$$\beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } M_A M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2ème PROBLÈME

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$.

I - Calcul de I_1

- Montrer que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ est convergente.

- Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right).$$

- On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3} \operatorname{Arc tan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Calculer la fonction dérivée de f .

En déduire I_1 .

II - Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

- Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ est convergente.

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$3n I_{n+1} = (3n - 1) I_n.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq a, \quad \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1}{3n-1}.$$

4. Dédurre de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

III - Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

1. On considère les trois suites définies par :

$$\text{pour } n \geq 1, \quad u_n = n^{1/3} I_n, \quad v_n = \ln u_n, \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

- a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\frac{1}{n}$.

Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

- b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif. (On ne cherchera pas à calculer h).

- c. Indiquer la nature de la série numérique de terme général I_n .

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1} I_n$ pour $n \geq 1$.

- a. La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

- b. Soit $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, pour tout entier $n \geq 1$.

Vérifier que

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \cdot \frac{1}{1+x^3} dx.$$

- c. Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

- d. Soit t un nombre réel strictement positif.

A l'aide d'un changement de variable simple calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 + x^3} dx.$$

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1992

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Lundi 4 mai 1992 de 8 heures à 12 heures

PROBLÈME 1

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante sauf la question II-3 qui utilise les résultats de I.

Partie préliminaire

On considère les deux matrices à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour a et b réels, on pose $M_{a,b} = aA + bB$.

Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{ M_{a,b} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Quelle est sa dimension ?
2. Exprimer en fonction de A et B les matrices suivantes :
 A^2 , AB , BA , B^2 .
3. Est-ce que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$?
Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie I. Éléments propres des matrices de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $B^3 + B^2 - 2B = 0$.

2.
 - a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .
 - b. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ? Est-ce que B et A sont diagonalisables ?
3. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$.
 - a. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de $M_{a,b}$.
 - b. Préciser, en fonction de a et b, les valeurs propres de $M_{a,b}$. Est-ce que $M_{a,b}$ est diagonalisable ?

Partie II . Exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}$.

Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$ telle que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On considère les deux matrices suivantes :

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A - 2B .$$

1.
 - a. Calculer en fonction de M_1 et M_2 les matrices suivantes :
 $(M_1)^2, \quad M_1 M_2, \quad M_2 M_1, \quad (M_2)^2$.
 - b. Montrer que (M_1, M_2) est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{E}$.
 - c. On pose $M_{a,b} = x M_1 + y M_2$.
 Exprimer x et y en fonction de a et b.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
 - a. Calculer $(M_1)^n$ et $(M_2)^n$.
 - b. En déduire l'expression de $(M_{a,b})^n$ en fonction de n, a, b, M_1 et M_2 .
 - c. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (M_{a,b})^k$ avec la convention suivante :
 $(M_{a,b})^0 = I$ matrice unité d'ordre 3.
 - Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que
 $S_n = I + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2$.
 - Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) convergent vers des réels λ et μ que l'on déterminera. On rappelle que, pour tout réel x ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x .$$
3. On pose alors

$$e^{M_{a,b}} = I + \lambda M_1 + \mu M_2 .$$
 Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $e^{M_{a,b}}$.
 Est-ce que $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable ?

PROBLÈME 2

Pour tout réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier relatif $E(x)$ tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha E\left(\frac{1}{x}\right) .$$

PREMIÈRE PARTIE

1. Étudier la continuité de f_0 sur $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$, et tracer la courbe représentative de f_0 sur cet intervalle (repère orthonormé, unité 5 cm).
2. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fixé, la limite de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. Pour quelles valeurs de α f_α peut-elle être prolongée par continuité à droite en 0 ?
3. Tracer les représentations graphiques de $f_2, f_1, f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$ (sur trois figures distinctes, repère orthonormé, unité 5 cm).

DEUXIÈME PARTIE

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$I_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x) dx \quad \text{et} \quad J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^n I_\alpha(p).$$

1. Calculer $I_\alpha(n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1} \left(\left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}} \right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
 - a. Exprimer $J_\alpha(n)$ sous forme d'une seule intégrale.
 - b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$
 - c. Conclure quant à la convergence de la suite $(J_\alpha(n))_{n \geq 1}.$
4.
 - a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}.$
 - b. Établir : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x}.$
 - c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(n) \geq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}.$$

- d. Conclure quant à la convergence de la suite $(J_0(n))_{n \geq 1}.$

TROISIÈME PARTIE

On note $M = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} J_2(n)$, c'est-à-dire $M = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad v_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}, \quad w_n = v_n - u_n.$$

1. a. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1},$$

et calculer a, b, c .

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{p=2}^n v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

- c. Montrer que la série $\sum_{p \geq 2} v_p$ converge et calculer sa somme.

- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, calculer $\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$.

2. a. Calculer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- b. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $w_n = \frac{v_n}{n^2}$.

- c. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \frac{1}{2n^4}.$$

3. a. Déterminer un entier naturel n tel que $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

- b. En déduire une valeur approchée de M à 10^{-7} près.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1993

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Lundi 10 mai 1993 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées:

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

- I. Soit E un espace vectoriel réel ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E , O l'endomorphisme nul de E , e l'endomorphisme identité de E .

Pour tout φ de $\mathcal{L}(E)$, on note $\varphi^0 = e$, $\varphi^1 = \varphi$, et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$: $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.

- Soient
- p, q deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = e$,
 - a, b deux réels distincts et non nuls,
 - f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\begin{cases} f = ap + bq \\ f^2 = a^2p + b^2q. \end{cases}$$

1. a. Montrer : 1) $(f - ae) \circ (f - be) = (f - be) \circ (f - ae) = O$.
2) $\begin{cases} f - ae = (b - a)q \\ f - be = (a - b)p. \end{cases}$
b. En déduire : $p \circ q = q \circ p = O$.
c. Montrer : $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.
2. Prouver, pour tout n de $\mathbb{N}$: $f^n = a^n p + b^n q$.
3. a. Calculer : $f \circ \left(\frac{1}{a} p + \frac{1}{b} q \right)$.
b. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de p, q, a, b .
4. a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{a, b\}$.
b. En supposant que E est de dimension finie, f est-il diagonalisable ?

II. On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$;

on note 0 la matrice nulle.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta I$ et calculer (α, β) .
2. En déduire deux réels a, b tels que :
 $(M - a I)(M - b I) = 0$.
3. Montrer qu'il existe un couple (A, B) d'éléments de $M_3(\mathbb{R})$, que l'on exprimera en fonction de M et I , tel que :

$$\begin{cases} A + B = I \\ aA + bB = M. \end{cases}$$
4. En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on donnera de façon explicite les neuf coefficients de la matrice).

PROBLÈME 2

Les parties I et II sont indépendantes. La résolution de la partie III utilise les notations et des résultats des parties I et II.

Partie I

A. Soit f l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f(x) = \frac{x}{\sin x} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 5 cm).

B. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$, tel que pour tout réel $x > 0$:

$$\left| \int_0^1 \sin(xt) g(t) dt \right| \leq \frac{A}{x}.$$

2. En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \sin(xt) g(t) dt.$$

- C. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme φ l'application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{P(x)}{\sin \frac{\pi x}{2}}$.

a. Exprimer φ à l'aide de la fonction f étudiée au A.

b. En déduire que φ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi t}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P , associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t)dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P(t)dt.$$

A. Étude de h .

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q'(x) = x \int_0^1 P(t)dt - \int_0^x P(t)dt$.

b. Calculer Q'' .

2. Montrer que h est une application linéaire et que

- le noyau de h , $\mathcal{N}(h)$, est l'ensemble des polynômes constants,
- l'image de h , $\mathcal{I}(h)$, est l'ensemble des polynômes Q tel que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme Q , $h(Q'')$).

B. Étude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = \frac{x^2}{2} - x \\ \text{et} \\ \forall n \geq 2, P_n = h(P_{n-1}). \end{cases}$$

- Calculer P_2 et P_3 .
- Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$, pour $n \geq 2$?
- Exprimer, en fonction de n , le monôme de plus haut degré de P_n .
- Déduire du II A. 1. la relation : pour $n \geq 2$, $P_n'' = \int_0^1 P_{n-1}(t)dt - P_{n-1}$.

Établir alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :

$$\forall n \geq 2, \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t) \cos(k\pi t) dt,$$

puis

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie III

A. 1. Établir, pour tout N entier naturel non nul :

$$\forall t \in]0, \pi], \sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \left(\frac{\sin(N + \frac{1}{2})\pi t}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) dt.$$

3. **Application.** Montrer que les sommes de séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.

B. 1. On pose $P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p} X^p$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{cases} a_{n,0} = 0, \\ a_{n,1} = 0, \\ a_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1}, \\ a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)}, \text{ pour tout entier } p \in [3, 2n]. \end{cases}$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \beta_n \pi^{2n},$$

pour un entier n , $1 \leq n \leq 25$, donné par l'utilisateur.

a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme ?

b. Écrire un programme en PASCAL qui calcule les coefficients de P_n puis le réel β_n et l'affiche.

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1994

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Lundi 9 mai 1994 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

On définit les polynômes suivants :

$$P_0(X) = -\frac{1}{6} (X-1)(X-2)(X-3)$$

$$P_1(X) = \frac{1}{2} X(X-2)(X-3)$$

$$P_2(X) = -\frac{1}{2} X(X-1)(X-3)$$

$$P_3(X) = \frac{1}{6} X(X-1)(X-2).$$

- Pour tous entiers i et j entre 0 et 3, calculer $P_i(j)$.
 - Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X))$ est une base de E .
 - Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. On note M cette matrice.
 - Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss : le détail des calculs devra figurer sur la copie.

2.

On définit le polynôme :

$$P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3).$$

On note φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme $T(X)$, associe le reste $\widehat{T(X)}$ de la division suivant les puissances décroissantes de $T(X)$ par $P(X)$.

- Démontrer que φ est linéaire.
- Démontrer que, pour tout polynôme $T(X)$:

$$\widehat{T(X)} = T(0)P_0(X) + T(1)P_1(X) + T(2)P_2(X) + T(3)P_3(X).$$

- En utilisant la formule vue en b., déterminer les composantes des polynômes $1, X, X^2, X^3$ dans la base $\mathcal{C}$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

3.

Soit $S(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On désigne par Ψ l'application qui, à tout polynôme $Q(X)$ de E , associe $\widehat{Q(X)S(X)}$.

- Démontrer que Ψ est un endomorphisme de E .
- Calculer $\Psi(P_0(X)), \Psi(P_1(X)), \Psi(P_2(X)), \Psi(P_3(X))$.
Est-ce que Ψ est diagonalisable ?
- On se place ici dans le cas particulier : $S(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 1$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Ψ .

PROBLÈME 2

PREMIÈRE PARTIE

On note

$$\begin{aligned} f_0 : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{-x^2} \end{aligned}$$

et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_n : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n e^{-x^2} \end{aligned}$$

- Étudier, pour tout entier naturel n , la continuité et la dérivabilité de f_n .
- Dresser le tableau des variations de f_0 , et celui de f_n pour tout entier naturel non nul n .
- Pour tout x de $[0; +\infty[$ et tout entier naturel n , comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ (on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$).
- On note C_n la courbe représentative de f_n . Tracer sur un même schéma C_0, C_1, C_4 (repère orthonormé, unité 10 cm). On ne cherchera pas à déterminer d'éventuels points d'inflexion.

2.

(Les résultats de cette question 2. ne seront pas utilisés dans la suite du problème).

- Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$, d'inconnue $x \in [0; 1]$, admet une solution et une seule, qu'on notera x_n .
- Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge. On note, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
- b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
- c. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n (on distinguera deux cas suivant la parité de n et on donnera le résultat à l'aide de factorielles ; on rappelle : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
4. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel a , la convergence des intégrales généralisées :
- $$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos(ax) dx, \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \sin(ax) dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

On note F et G les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout réel a , par :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx, \quad G(a) = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin(ax) dx$$

(ces intégrales généralisées convergent d'après la question 4. de la première partie).

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R}, G(a) = \frac{1}{2} a F(a)$.

2. a. Soient $a \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, x \in [0; +\infty[$.

Montrer :

- $\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du$

- $\left| \int_a^{a+h} (a+h-u) \cos(xu) du \right| \leq \frac{h^2}{2}.$

b. En déduire, pour tout nombre réel a et tout nombre réel non nul h :

$$\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

c. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, F'(a) = -G(a).$$

3. Calculer, en fonction du réel a , $F(a)$ et $G(a)$.

(On pourra considérer l'application H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(a) = e^{\frac{a^2}{4}} F(a)$).

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1995

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Vendredi 12 mai 1995 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

- si $1 \leq i \leq n-1$: $a_{i,i+1} = i$;
si $2 \leq i \leq n$: $a_{i,i-1} = n+1-i$;
si $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$: $a_{i,j} = 0$.

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & . & . & . & . \\ 0 & n-2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & n-1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. On suppose, dans cette question seulement, $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Déterminer les valeurs propres de A_3 .
 - La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?
 - La matrice A_3 est-elle inversible ?
2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
- On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E :
- $$\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1}).$$
- On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A_n .
- Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n - 2$, $u(X^j)$.
 - Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E :
- $$u(P(X)) = (n - 1) X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$
- (où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$).
3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u , et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.
- On suppose : $\lambda \neq n - 1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.
 - On suppose : $\lambda \neq 1 - n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.
 - On suppose : $\lambda = n - 1$.
- Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que :
- $$P(X) = (X + 1)^s T(X) \quad \text{et} \quad T(-1) \neq 0.$$
- Montrer que : $s = n - 1$.
- Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.
- On suppose : $\lambda = 1 - n$.
- Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :
- $$P(X) = a(X - 1)^{n-1}.$$
- On suppose : $\lambda \neq 1 - n$ et $\lambda \neq n - 1$.
- Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que :
- $$P(X) = (X - 1)^r (X + 1)^s T(X) \quad \text{et} \quad T(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad T(1) \neq 0.$$
- Montrer que :
- $$\begin{aligned} 1 &\leq r \leq n - 2, \\ s &= n - 1 - r, \\ \lambda &= n - 1 - 2r. \end{aligned}$$
- Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.
4. a. Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n - 1$, calculer $u[(X - 1)^r (X + 1)^{n-1-r}]$.
- b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
- Démontrer que $\mathcal{C} = ((X - 1)^r (X + 1)^{n-1-r})_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E .
5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 2

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On note $r :]-1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

1. Étude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

- Montrer : $\forall x \in]0 ; +\infty[, 0 \leq F(x) \leq 1$.
- En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F .
- Montrer que F est de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$ et que :
 $\forall x \in]0 ; +\infty[, x F'(x) = -F(x) + r(x^4)$.
- Montrer : $\forall x \in]0 ; +\infty[, r(x^4) \leq F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. Étude locale de F en 0

- Montrer que F est continue en 0.
- α . Établir :
 $\forall u \in [0 ; +\infty[, 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right) \leq \frac{3}{8}u^2$.
 β . En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, et déterminer celui-ci.
 γ . Montrer que F est dérivable en 0, et calculer $F'(0)$.
- Établir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, et déterminer celui-ci.
- Établir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude locale de F en $+\infty$

- α . On note $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x \in]0 ; +\infty[$.

- β . En déduire : $\forall x \in]0 ; +\infty[, x F(x) + \frac{1}{x} F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$.

- α . En déduire : $F(x) \xrightarrow{x \longrightarrow +\infty} 0$.

- β . Montrer : $F'(x) \xrightarrow{x \longrightarrow +\infty} 0$.

- Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion, et on admettra que $F(1)$ admet 0,93 comme valeur approchée à 10^{-2} près).

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1996

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 6 mai 1996 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

PREMIER PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme P_n par :

$$P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k},$$

c'est-à-dire, si on note $E\left(\frac{n}{2}\right)$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1-X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2 - 1$.
Calculer P_3 .
2. Etudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n .

3. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+1)t = \sin t P_n(\cos t).$$

(On pourra développer $(\cos t + i \sin t)^{n+1}$ et étudier la partie imaginaire.)

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le polynôme P_n vérifie la relation :

$$(n^2 + 2n)P_n - 3XP'_n - (X^2 - 1)P''_n = 0.$$

(On pourra dériver deux fois dans la relation obtenue à la question 3.a.)

4. a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :

$$\sin(n+2)t + \sin t = 2\cos t \sin(n+1)t.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0.$$

- c. Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n , c'est-à-dire le coefficient de X^n dans P_n .

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et B_0 la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E .

Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''.$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .
2.
 - a. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(X^k)$.
 - b. Déterminer une base de l'image de Φ .
 - c. Déterminer une base du noyau de Φ .
3. On considère les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ définis dans la première partie.
 - a. Vérifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
 - b. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer $\Phi(P_k)$.
(On pourra utiliser le résultat de la question 3.b. de la première partie.)
 - c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ .
 - d. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que :
 $\Phi(P) = P_k.$

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt.$$

En particulier : $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

I. Étude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.

2. Démontrer : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.

On pourra intégrer par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.

On note $g : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$g(x) = (x+1) f(x+1) f(x).$$

3. a. Montrer que g est 1-périodique, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, g(x+1) = g(x).$$

b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, g(x+n) = g(x)$.

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Soit $x \in [0 ; 1]$.

α . En utilisant 1., montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (x+n+1) f(n+1) f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1) f(n) f(n+1).$$

β . En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+1}.$$

γ . Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[, g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. a. Établir : $\forall x \in [1 ; +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

II. Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k f(k)$.

1. a. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
(On pourra utiliser I.1. et I.5.)

- b. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On considère l'application $\varphi : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $\varphi(t) = \frac{1}{1 + \sin t}$.

2. a. Montrer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2 \cos^2 \frac{u}{2}}.$$

b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) dt$.

3. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) dt - S_n$.

- a. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 + \sin t} - \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sin t)^k \right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1 + \sin t} dt.$$

- b. En déduire : $D_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

- c. Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$?

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées:

Une règle graduée.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

PREMIER PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur E .

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0, 1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $e_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $t \longmapsto t^{i-1}$

On rappelle que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n .

2. Calculer, pour tout (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, $\phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

3. Étude du cas $n = 2$

- Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 .
- La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?
- Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. a. Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $b_1, \dots, b_n$ les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^n b_i e_i$,

A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Montrer : $\phi(P, Q) = {}^t A H_n B$ où ${}^t A$ désigne la transposée de A.

- En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.
- La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i = \phi(e_i, f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

On considère l'application $d : E_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P \longmapsto \|P - f\|$$

- Montrer : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(e_i, P_0 - f) = 0$.
- En déduire : $\forall Q \in E_n$, $\phi(Q, P_0 - f) = 0$.
- Établir : $\forall P \in E_n$, $\|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.
- Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.
- Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

f. Un exemple :

On choisit ici $n=2$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$t \longmapsto \left| t - \frac{1}{3} \right|$$

Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

DEUXIÈME PROBLÈME

I. Étude de la suite de terme général $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$

1. Pour tout entier naturel non nul n , on définit $v_n = -1 + n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

a. Montrer qu'il existe un réel α strictement négatif tel que $v_n \sim \frac{\alpha}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

b. En déduire la nature de la série de terme général v_n et montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ admet $-\infty$ comme limite.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on définit $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$.

a. Montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$v_n = \ln\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right).$$

b. En déduire la limite de la suite de terme général M_n .

II. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

1. Donner le tableau des variations et une représentation graphique de f_1 puis de f_n pour $n \geq 2$.
On ne déterminera pas les éventuels points d'inflexion.

Vérifier que M_n est la borne supérieure de f_n .

2. Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction F_n sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

a. Soit x un réel positif ou nul. Établir une relation entre $F_{n+1}(x)$, $F_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

En déduire, pour tout entier naturel non nul n :

$$F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente et vaut 1.

III. Étude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

1. Prouver, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t) dt - f_{n+1}(n).$$

En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel L vérifiant $0 < L \leq 1$.

2. Déterminer une valeur approchée décimale par défaut à 10^{-1} près de u_2 .

En déduire un nouvel encadrement de L .

3. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = \frac{t}{2-t} e^{2-2t}$.

a. Montrer : $\forall t \in [0, 1], 0 \leq h(t) \leq 1$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], \frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(h\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.

c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, n], f_n(x) \leq f_n(2n-x)$.

d. En utilisant l'inégalité précédente, montrer, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \leq \int_0^n f_n(2n-t) dt \leq \int_n^{+\infty} f_n(t) dt.$$

En déduire : $L \leq \frac{1}{2}$.

IV. Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste

Soient n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$, suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

On note $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On rappelle que Y_n suit une loi de Poisson.

1. Déterminer l'espérance de Y_n .
2. Exprimer la probabilité $P(Y_n \leq n)$ en fonction de u_n .
3. A l'aide du théorème de la limite centrée, que l'on énoncera avec soin, trouver la valeur de L .

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations :

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier naturel non nul k , X^k désigne la fonction polynôme $t \mapsto t^k$.

Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si d est le degré de P , alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$, où $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ sont des réels).

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E , l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ est convergente.

b. Pour tout entier naturel k , on note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt.$$

2.a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_n .

b. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n , calculer $\langle X^i, X^j \rangle$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

- 3.a.** Construire une famille orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2) de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0, 1, 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).

On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

- b.** Montrer pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \langle Q_2, Q_2 \rangle + (u+4)^2 \langle Q_1, Q_1 \rangle + (u+v+2)^2 \langle Q_0, Q_0 \rangle.$$

- c.** Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u, v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt.$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\Phi(P)(t) = tP''(t) + (1-t)P'(t).$$

- 1.** Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E_n .
- 2.a.** Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k}$ est liée.
En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ .
- b.** Montrer que Φ est diagonalisable.
- c.** Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.
En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \dots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -kP_k$.
- d.** Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \dots, n\}$, le degré de P_k .
- e.** Vérifier que $P_0 = Q_0$, $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$.

- 3.a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad \langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} t P'(t) Q'(t) e^{-t} dt.$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $(t \mapsto tP'(t)e^{-t})$ avec la fonction $(t \mapsto \Phi(P)(t) e^{-t})$.

- b.** En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .
- c.** En déduire que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2 + \sqrt{2}$ et $b = 2 - \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

b. Vérifier : $\int_0^{+\infty} P_2(t) e^{-t} dt = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

c. Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R , chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = Q P_2 + R$.

Montrer : $\langle P_2, Q \rangle = 0$.

En déduire : $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0, +\infty[, |f^{(4)}(t)| \leq M$.

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |f(t)| \leq T(t).$$

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$ converge.

b. Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall P \in E_3, D(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b)).$$

Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S(b) = f(b), S'(b) = f'(b).$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b .

On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(t))^2.$$

a. Vérifier que g s'annule en a , b et x_0 .

b. En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.

(On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

c. En déduire :
$$f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c) ,$$

puis :
$$\left| f(x_0) - S(x_0) \right| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M .$$

4.a. Etablir :
$$\forall x \in [0, +\infty[, \left| f(x) - S(x) \right| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M .$$

b. En déduire :
$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \frac{M}{6} .$$

5. Application :

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \frac{1}{10+t}$.

En admettant que $0.0915 \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \leq 0.0916$,

donner une valeur décimale approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt$. On en indiquera la précision.



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Judi 6 mai 1999 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre n avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

En identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a : $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$.

- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i - j| = 1$ et égal à 0 sinon.

$$\text{Ainsi, par exemple, } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A_3 est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = P D P^{-1}$.

2. Soit $\theta \in]0; \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k , $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$.

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S_θ , alors pour tout entier naturel k : $s_k = s_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$.
En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé à λ .

On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

- a. Montrer : $\begin{cases} \bullet \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$

Montrer pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$: $|\lambda| |x_k| \leq 2m$, et en déduire : $|\lambda| \leq 2$.

- b. On suppose $|\lambda| < 2$.

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0; \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

Montrer que la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

$$\begin{cases} \bullet \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, s_k = x_k \\ \bullet s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

En déduire qu'il existe un entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

- c. Soit $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que λ_p est valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p .
d. Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}$, $(p, q) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$.

Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice D_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

- 5.a. Montrer pour tout couple (p, q) de $\{1, 2, \dots, n\}^2$: $\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$.

En déduire que la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthogonale et que, pour tout couple (p, q) de $\{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $p \neq q$, on a : $\sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$.

- b. Montrer, pour tout p de $\{1, 2, \dots, n\}$: $\sum_{k=0}^n \cos 2k\theta_p = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$.

- c. En déduire : $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0; 1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0; 1[\\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1.a. Montrer que f est continue sur $[0; 1[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $]0; 1[$.

c. Etablir que $f'(t)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0; 1[$.

d. Montrer, pour tout réel t de $[0; 1[$: $\ln(1-t) + \frac{t}{1-t} \geq 0$.

e. Dresser le tableau de variation de f . On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . (On n'étudiera pas la dérivée seconde de f , et on admettra que f est convexe.)

2.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0; 1[$ et $x = 1$.)

On note $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0; 1]$, par :

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

b. Montrer que g est continue sur $[0; 1]$, de classe C^2 sur $[0; 1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; 1[$.

c. Etablir que $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

d. Dresser le tableau de variation de g . On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est : 1,65.

e. Etablir que g est convexe sur $[0; 1[$.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de g . On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3.a. Justifier que, pour tout réel t de $[0; 1[$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} t^n$ converge.

Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel n , $R_n : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k.$$

b. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0; 1[$: $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$
et en déduire que, pour tout entier naturel n , R_n est continue sur $[0; 1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

d. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

e. Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 1[$, la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n , $\rho_n : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0; 1[, \quad \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , ρ_n est continue sur $[0; 1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

d. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0; 1[$:

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0; 1[$:

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

f. Conclure que, pour tout réel x de $[0; 1[$: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
 I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La transposée d'une matrice M est notée tM .

- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle ., . \rangle$ défini par :

si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, alors $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les

matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $\langle x, y \rangle = {}^tX Y$.

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\| \cdot \|$.

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- a. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = P D {}^tP$.
2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- a. Vérifier que $(M - 2I_3)^3 = I_3$.
 - b. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
 - c. Calculer le produit ${}^tM M$.

Partie II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice tA relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle \quad \text{puis} \quad \langle (g \circ f)(x), x \rangle = \|f(x)\|^2.$$
2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.
3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels

que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tA A = Q \Delta^2 {}^tQ$.

6. Montrer que la famille $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n))$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.
7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.
 - a. Vérifier que les nombres réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont tous non nuls.
 - b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n) \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
 - c. Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R \Delta {}^tQ$.

Partie III

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R \Delta {}^tQ$ où M est la matrice définie dans I.2.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I - Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; \pi]$:

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

b. Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$:

$$\sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}.$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; \pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$ existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0; \pi] \end{cases}.$$

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

II - Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de I. 2. et I. 4.).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et de n .

4. Etablir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} .$$

III - Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

On note : $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

2.a. Montrer, pour tout réel t de $[0; 1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} .$$

b. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c. En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$ converge et que : $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$.

3.a. En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right),$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1} .$$

b. Etablir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1} .$$

4. En utilisant le résultat de II. 4., établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}} .$$



European Entrepreneurial Learning

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note $I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Le but du problème est la construction d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

On considère les applications $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définies par $f_0 = 1$ (application constante égale à 1) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt.$$

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

b. Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I .
On note :

$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

a. Calculer D_1 et D_2 .

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n.$$

On pourra étudier séparément les cas $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

d. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} D_n$.

En déduire que, pour tout x fixé dans I , la série $\sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On définit ainsi une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

b. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n \leq 2.$$

c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|.$$

5. a. Établir :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

b. En déduire que f est continue sur I .

6. a. Établir :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

b. En déduire :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

7. En déduire :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Rappel :

Pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes qui sont :

$$1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta} \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E .
- Pour tout endomorphisme f de E , on note $f^0 = \text{id}_E$, et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \star & f^p(x_0) = x_0, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est génératrice de } E, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle de f .

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f .
3. Montrer que $f^4 = \text{id}_E$.
4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f .

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n , et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p .

Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f .

1. Montrer : $p \geq n$.
2. Montrer que $f^p = \text{id}_E$. En déduire que f est bijective.
3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.
 - a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
 - b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
 - c. En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
4. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

- a. On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
En déduire : $f^n = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
 - b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.
 - c. Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$.
En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim(E) = n$).
Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f .
- a. Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f , alors $\lambda^n = 1$.
 - b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.
 - c. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f .

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt,$$

et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^n u_p = u_1 + \dots + u_n.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geq 1$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ , tel que $0 \leq \gamma \leq 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1.a. Établir, pour tout réel x :

$$1 + x \leq e^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t},$$

puis :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

2.a. Établir, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x de $[0; 1]$:

$$(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.$$

b. En utilisant 1.b. et 2.a., montrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

3.a. On note, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

Justifier l'existence de I_n .

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4.a. Établir, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1)).$$

b. On note, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

Justifier l'existence de J_n , et montrer, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

a. Justifier l'existence de U et de V .

b. Démontrer :

$$\gamma = U - V.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E .

On considère l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

- a. Vérifier : $\forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
- b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E .
3. Soient $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.
 - a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
 - b. Déterminer une base de $\text{Ker } u$.
 - c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II. Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E .

1. Pour tout couple (x, y) de E^2 , développer $\langle u(x+y), x+y \rangle$.
En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$
2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.
 - a. Montrer : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.
 - b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III. Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E .

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question II.1.

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u , alors $\lambda = 0$.
 2. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E .
En déduire que $\text{Ker } u = \text{Ker}(u^2)$.
 3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.
 - 4.a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.
 - b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u .
 - c. Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F , est stable par u .
 - d. On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par $\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle$.
On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp, u_1(x) = u(x)$.
Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$.
5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E .

PARTIE IV. Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E .

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E .
Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2 .
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice

associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

- FIN -

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 5 mai 2003 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application $\varphi : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geq 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale J_n existe.
2. a. Montrer que φ est strictement positive sur $[0; 1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
b. Établir, pour tout réel $t \in]0; +\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.
3. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $\varphi(t) \geq 1 - t$.
(On pourra étudier les variations sur $[0; +\infty[$ de l'application $t \longmapsto \sin t - t + t^2$).
b. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$: $J_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

1. a. Montrer, pour tout réel $x \in [1; +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

b. En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$:

$$|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.

c. Dédurre des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n pour $n \geq 2$

1. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b. Établir, pour tout entier $n \geq 2$: $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$.

2. a. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ converge; on note ℓ sa limite.

c. Établir, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0; 1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

(On pourra utiliser **I.2.**).

d. En déduire, pour tout réel $a \in]0; 1[$: $0 \leq \ell \leq a$, et conclure : $\ell = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n est convergente.

b. Établir : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n , $n \geq 2$

1. Montrer, pour tout entier $p \geq 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$.

2. En déduire, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser **I.3.b.**).

SECOND PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

On note id_E l'application identique de E , et $\tilde{0}$ l'application nulle de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E .

Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F .

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f , on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E , c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2. a. Soient λ et μ deux valeurs propres de f .

Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

b. En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

On suppose que f admet exactement $k + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E .

a. Montrer qu'il existe un unique $(k + 1)$ -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$.

b. Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k , montrer : $p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\text{id}_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k.$$

5. a. Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}.$$

b. Montrer : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k$.

c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\text{Im } f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f .

6. a. Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in E^2, \left(f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f \right)$.

7. Soit y un vecteur de E .

a. Montrer : $\forall x \in E, \left(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f \right)$.

b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|.$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E . On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.

4. a. Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b. Montrer : $\forall x \in E, p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

c. Déterminer la matrice M_2 .

5. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

MATHEMATIQUES

1^{ère} épreuve (option scientifique)

Lundi 3 mai 2004 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

I - Étude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

On note $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

1. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$: $F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du$.

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent, et que : $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x)$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x)$.

2. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ et tout réel $T \in]0; +\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

On note $A :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a. Montrer : $\forall x \in]0; 1], \quad 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln x.$

- b. En déduire que $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

- c. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

$$\text{II - Étude de la fonction } x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ et tout entier naturel k , l'application $t \longmapsto t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0; +\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

On note, pour tout entier naturel k , $B_k :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par : $B_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt.$

2. a. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

- b. En déduire, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

- c. Montrer que, pour tout entier naturel k , B_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad B'_k(x) = -B_{k+1}(x).$$

- d. En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$B''_0(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leq -B'_0(x) \leq \frac{1}{x^2},$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B'_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$

b. Justifier, pour tout réel $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[:$

$$\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

et en déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$

c. En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la Partie I et B_0 a été définie dans la Partie II.

On note $U :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2.$$

1. Montrer que U est constante sur $]0; +\infty[$.
2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, A(x) = B_0(x).$
4. Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

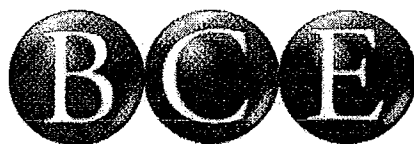
II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \dots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P .
 - a. Montrer que $P > 0$.
 - b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.
Établir que $c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} p_j \right) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.
 - c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser **III.1.b**).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.
3. Donner une caractérisation des matrices productives.
4. *Application* : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

CODE ÉPREUVE :

295
EML_MATS

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3 .
- 2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
- 4.a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.
- c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

- d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0 .$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta .$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1) T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n) T_n = 0 .$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

On note L l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP' .$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx .$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)) .$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx .$$

3. Établir que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \text{ puis } \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

4. Soit l'application $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0; \pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} \, dt$.

b. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$$
 convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3.a. Établir : $\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, $S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in ([0; +\infty[)^2$, $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|$.

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0; +\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0; +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$,

et en déduire : $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.

c. Conclure : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$.

7.a. Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

CODE ÉPREUVE :

295

EML_MATS

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME I

Préliminaires

- 1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.
- b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.
2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

- 3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.
- b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.
- c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F .
3. Déterminer les extrémums locaux de F . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- 3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ et $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$.

- 2.a. Montrer, pour tout $u \in [0; +\infty[$: $0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

PROBLÈME II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.

On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .

b. En déduire : $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$.

a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .

- 3.a.** Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(e_1)$.
- b.** En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et annulateur de f .
- c.** Soit λ une racine du polynôme P .
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.
- d.** Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .
- 4.a.** Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n - 1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.
- b.** En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.
- 5.a.** *Application 2* : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
- b.** *Application 3* : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.
- 6.** On note $B = {}^t C$ la matrice transposée de C .
- a.** Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.
- b.** En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.
- c.** Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
- d.** On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.
- 7.** Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.
- a.** Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
- b.** Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application

$$f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I

Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0 ; +\infty[$.

2. On considère l'application

$$A : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.

b. Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c. Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0 ; +\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d. Dresser le tableau de variation de A .

En déduire que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B .

En déduire que f est convexe sur $]0; +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

$$\text{où on a noté } J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$

et $G :]0; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]0; +\infty[^2$.

Exprimer, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x, y) en fonction de $x, y, f(x), f(y), f(xy), f'(x), f'(y), f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1, 1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

DEUXIÈME PROBLÈME

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E , le polynôme $((X^2-1)P)''$ est élément de E , où $((X^2-1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\phi : E \longrightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe $\phi(P) = ((X^2-1)P)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2, \phi(X) = 6X$.

3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

4. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

5. a. Montrer que ϕ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
b. Est-ce que ϕ est bijectif ?
c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k .
6. Soient $k \in \{0, \dots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .
a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k .
b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k .
7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 .

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P | Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2) P(x) Q(x) dx$ est un produit scalaire sur E .

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(. | .)$.

2. a. À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E .
b. Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E obtenue à la question I.7 est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

3. a. Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a : $(S | P_j) = 0$.
b. En considérant $(1 | P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$.
c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $] - 1 ; 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.
4. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $] - 1 ; 1[$ et $S_m = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_m)$.
a. Justifier : $m \leq j$.
b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$.
c. En considérant $(S_m | P_j)$, montrer que $m = j$.
d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $] - 1 ; 1[$.





BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

Code sujet

295

EML__MATS

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2008 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée

PROBLÈME

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge.

On note F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n .

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0; +\infty[^2$: $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.
2. En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx$ converge.

On note $(. | .)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u, v) \in E^2$, associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx$.

On notera la présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3.
 - a. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - b. Montrer que l'application $(. | .)$ est un produit scalaire sur E .
4. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(. | .)$ la restriction à F ou à F_n , pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(. | .)$ sur E . On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n .

On note $\|.\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(. | .)$, définie, pour tout $u \in E$, par :

$$\|u\| = \sqrt{(u | u)}.$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x), \text{ où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
Faire figurer les calculs sur la copie.
2.
 - a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .
 - c. Contrôler alors les résultats obtenus en II.1 et calculer H_4 .
Faire figurer les calculs sur la copie.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n .
4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:

$$(P' | H_{n-1}) = (P | H_n),$$

où $(. | .)$ est le produit scalaire sur F défini en I.4.

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P | H_n) = 0$.
- c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans F .
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de F_n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- a. Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} | H_0)$, où $\|\cdot\|$ est définie en I.4.
- b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F , pour tout $P \in F$, par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $(g(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F .

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F , et on note Id_F l'application identique de F .

2. a. Établir : $g \circ h = f - \text{Id}_F$ et $h \circ g = f + \text{Id}_F$.
- b. En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$.
4. a. Calculer $f(H_0)$.
- b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k + 1)H_k$.

5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:

$$(P' | Q') = (f(P) | Q) - (P | Q).$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- a. Montrer : $\forall P \in F_n, f(P) \in F_n$.

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par :

$$\forall P \in F_n, f_n(P) = f(P).$$

- b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n .
- c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n .

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi_a(x) = e^{ax}$.

1. Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.
2. Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $(\varphi_a | \varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$.
4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ' .
2. Soient G et K les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right) \frac{e^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

- a. Déterminer les limites des fonctions Φ , G et K en $+\infty$.
 - b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.
 - c. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$.
 - d. Montrer : $\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
3. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $P(X \leq x)$ à l'aide de la fonction Φ .
 - b. Soit c un réel strictement positif.

Pour tout réel x , on considère la probabilité conditionnelle $P_{(X > x)}(X \leq x + c)$.

Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

295

EML__MATS

Concepteur : EMLYON Business School

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2009 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME 1

Partie I - Calcul d'une intégrale

On note (a, b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ converge.

2. a. Établir, pour tout (ε, X) appartenant à $]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

(À cet effet, on pourra utiliser des changements de variable.)

b. En déduire, pour tout (ε, X) appartenant à $]0; +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

3. a. Montrer que l'application $h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto h(y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

est continue sur $[0; +\infty[$.

- b. En déduire : $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{b}{a}$.
- c. Établir, pour tout X de $]0; +\infty[$: $\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$.
- d. En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$.

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On note E l'ensemble des applications $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1 , telles que $f(0) = 0$.

- Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :
 $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = e^x - 1, \quad f_4(x) = 1 - e^{-x}$.
 Pour chacune de ces applications, indiquer, en le justifiant, si elle est ou non un élément de E .

- a. Montrer, pour tout $f \in E$: $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$.

- b. Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$ converge.

On note $(\cdot | \cdot) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \longmapsto (f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$.

- Établir que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .
- Démontrer, pour tout $(f, g) \in E^2$: $(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$.
 (À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un segment.)
- On note, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$, $u_\alpha : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :
 $u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.
 - Vérifier : $\forall \alpha \in]0; +\infty[, u_\alpha \in E$.
 - Calculer, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$, le produit scalaire $(u_\alpha | u_\beta)$.
 (À cet effet, on pourra utiliser les résultats de **II.5** et **I.3.d**.)
 - Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$: $(u_\alpha | u_\beta) > 0$.

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

On note c un réel strictement positif.

On considère l'application $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Montrer que v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou nulles, admettant v comme densité.

2. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ en fonction de c .
3. On note Y la variable aléatoire réelle définie par : $Y = \sqrt{X}$.
 - a. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle à densité et calculer une densité de Y .
 - b. Montrer que la variable aléatoire réelle Y admet une espérance et une variance, et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de c .

PROBLÈME 2

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n .
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de M . On note $\text{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ .
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0.$$
- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I - Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II - Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$ ce développement limité.

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X).$$

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
 - a. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g .
 - b. En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
 - c. Justifier que f est diagonalisable.
Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f , la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
 - a. Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
 - b. Donner un exemple de racine carrée de A . (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D .)
 - c. Soit R une racine carrée de A . Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
 - d. Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.
3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D .)
4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
Soit R une matrice symétrique positive telle $R^2 = S$.
 - a. Soit λ une valeur propre de R . Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2)$.

On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R .

b. Justifier :
$$\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

c. En déduire :
$$n = \sum_{i=1}^p \dim(\text{SEP}(R, \lambda_i)) \leq \sum_{i=1}^p \dim(\text{SEP}(S, \lambda_i^2)) \leq n.$$

d. Montrer que $\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{SEP}(R, \lambda_i) = \text{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

e. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

f. En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 2010 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Définitions et notations

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j .
- On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j .
- On dit qu'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$, si et seulement si : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, (A_n)_{i,j} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (A)_{i,j}$.
- On dit qu'une suite $(L_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1, \dots, p\}, (L_n)_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (L)_j$.
- On admet que, si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B , alors la suite $(A_n B_n)_{n \geq 1}$ de matrices converge vers la matrice AB .
- On admet que si la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n \geq 1}$ de matrices converge vers la matrice LA .

- On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, & (A)_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, & \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$$
 et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$\text{Montrer, pour toute } A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R}) : A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, & (A)_{i,j} \geq 0 \\ AV = V. \end{cases}$$

- b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, AB \in \mathcal{ST}_p$.

$$3. \text{ On note : } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

- b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ .

On note i un élément de $\{1, \dots, p\}$ tel que : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, |x_k| \leq |x_i|$.

- a. Montrer : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

- b. En déduire : $|\lambda| \leq 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$.

$$\text{b. Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.$$

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leq 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$
3. Montrer : $M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Delta$ et en déduire : $B_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} B$.
4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n \in \mathcal{ST}_p$.
b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, (A)_{i,j} = P_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie I.3, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1} .
4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geq 1}$.
5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geq 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J , par : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

Préliminaires

1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3. Montrer : $\forall x \in J, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$, et en déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. a. Montrer : $\forall (x, y) \in J^2, \forall t \in]0; 1], (x \leq y \implies t^x \geq t^y)$.

b. En déduire que f est décroissante sur J .

5. Montrer : $\forall x \in J, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

6. Déduire des résultats précédents : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

7. Soit $x \in J$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

b. En déduire que la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

8. a. Montrer : $\forall (x, y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \frac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x, y) \in J^2, |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$.

b. En déduire que f est continue sur J .

9. Montrer : $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1 .

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k l'application de classe C^2 de J dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x de J par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

1. Montrer : $\forall (x, y) \in J^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}$.

2. a. Justifier la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que f est dérivable sur J et que : $\forall x \in J, f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.

c. Déterminer $f'(0)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f . On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code épreuve :

295

Concepteur : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 2 mai 2011 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Partie I : Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Rappeler une densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, qui suivent la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n .
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler une densité de S_n .
3. Soit une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(1 - U)$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
4. Écrire un programme PASCAL, utilisant le générateur aléatoire PASCAL, simulant la variable aléatoire S_n , l'entier n étant entré par l'utilisateur.
5. Pour tout $t \in]0; +\infty[$, on note N_t la variable aléatoire égale à 0 si l'événement $(S_1 > t)$ est réalisé, et, sinon, au plus grand entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement $(S_n \leq t)$ est réalisé.
Ainsi, pour tout $t \in]0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(N_t = n)$ est égal à l'événement $(S_n \leq t) \cap (S_{n+1} > t)$.
Écrire un programme PASCAL, utilisant le générateur aléatoire PASCAL, simulant la variable aléatoire N_t , le réel t étant entré par l'utilisateur.

Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!},$$

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de f_n .

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N .

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x} dx$ converge.

On considère l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x) e^{-x} dx.$$

15. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \longmapsto T(P)(x) e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : x \longmapsto xP'(x) e^{-x}$.

18. En déduire, pour tout $(P, Q) \in E \times E$:

$$\langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x) e^{-x} dx.$$

19. Établir : $\forall (P, Q) \in E \times E, \quad \langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$.

20. En utilisant le résultat de la question 13, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer :

$$\forall P \in E_N, \quad T(P) \in E_N.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N , c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N, \quad T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, \dots, L_N)$ est une base de E_N .

24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, \dots, L_N)$ de E_N .

25. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?

Partie IV : Nature d'une série de maximums

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n , et calculer M_n .

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mu_n = \sqrt{n} M_n$ et $a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n$.

27. Former le développement limité de a_n à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

28. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$.

29. Établir que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.

30. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} M_n$?

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On considère les applications

$$\begin{aligned} f :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x e^{-x}, \\ F :]0; +\infty[^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x) + f(y) - f(x+y). \end{aligned}$$

31. Montrer que F est de classe C^2 sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x+y)$.

32. Établir que, pour tout $a \in]0; +\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet au plus une solution distincte de a .

33. En déduire que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad f'(x) = f'(2x).$$

34. Montrer que F admet un point critique et un seul, noté (α, α) , et montrer que $1 < \alpha < 2$.

35. Montrer : $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.

36. Montrer que F admet un extremum local, et un seul. Déterminer la nature de cet extremum.

★ ★ ★



Code épreuve : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2012 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0; +\infty[$ ou sur $]0; +\infty[$.

On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. Exemple :

Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad (P(x) > 0 \text{ et } P'(x) > 0).$$

1. Donner un exemple d'élément de E .
2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E, \quad P + Q \in E, \quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^x P(t) dt$.
Montrer : $P_1 \in E$.

4. Soit $P \in E$. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad P(x) \geq P(0)$.

Pour tout $P \in E$, on note $\tilde{P} : [0; +\infty[\longrightarrow [P(0); +\infty[, \quad x \longmapsto \tilde{P}(x) = P(x)$.

5. Montrer que l'application $\tilde{P}$ est bijective.
6. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\tilde{P}^{-1}$ de $\tilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tUAU \geq 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$? Justifier.
2. a. Montrer que si A est dans S_n^+ , alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$.
b. Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$, alors A est dans S_n^+ .

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n - 1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in S_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0); +\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans S_n^+ .
Soit S appartenant à S_n^+ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.
 - a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.
 - b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

2. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\tilde{P}$ a été définie dans la partie II.

3. *Exemple :*

On prend ici $n = 4$, $P = X^3 + X + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.

- Vérifier $P \in E$.
- Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in \mathbf{S}_4^+$.
- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.
- Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_4^+$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

- Calculer W_0 et W_1 .
- Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n > 0$.
- Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
 - En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$.
- Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n$.
 - En déduire : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$: $A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a. Justifier : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

- b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
5. a. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0; 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X .
- b. En déduire un programme en langage Pascal, utilisant le générateur aléatoire Pascal, simulant la variable aléatoire X , le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue, dans U_n , des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

6. Justifier : $P(T_n > n + 1) = 0$.
7. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$: $P(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.

On a donc : $k_n \leq y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

8. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.
9. En utilisant I 9.b., montrer : $P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.
10. a. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \longmapsto -t + (t - 1) \ln(1 - t)$ en 0.
- b. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.
11. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2013 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

On note $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

2. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.$$

En déduire : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Une autre expression intégrale de f

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Soit $(x, h) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.

a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

b. Établir : $\forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

c. En déduire : $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$.

7. Montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0; 1] \times [1; +\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$.

9. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

11. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

$$\text{puis : } \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12. Montrer : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

13. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$?

Partie III : Étude d'une densité

On note $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

14. Montrer que h est une densité.

15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a. Calculer $A_0 U_0$.
b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.
c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = P D P^{-1}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A , c'est à dire $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

3. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \text{Tr}(A)$, est linéaire.
4. Montrer : $\forall (A, B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
5. Vérifier : $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - a. Justifier : $U {}^tV \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U {}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V .
 - b. Exprimer $\text{Tr}(U {}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .
 - c. Quel est le rang de $U {}^tV$?

7. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.

8. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$, puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

10. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

a. Montrer : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.

b. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c. Montrer : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j$.

d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

11. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

12. Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

13. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

14. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

15. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16. Montrer que l'application : $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V {}^t V$.

17. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

18. a. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Vérifier $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

c. On note e l'application identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Conception : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2014 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On remarquera que E_1 est inclus dans E .

On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \longrightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E .

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).

À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

6. On note $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$.
Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif?

Partie II : Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f_a(t) = e^{at}$.

7. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, a \longmapsto \varphi(a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$

8. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}, T(f_a) = \varphi(a)f_a$.
9. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$.
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
10. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1; +\infty[$, il existe $f \in E - \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda f$.

Partie III : Deuxième exemple

On note : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = \frac{1}{|t| + 1}$.

11. Vérifier $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(h)(x)$.
À cet effet, on remarquera que h est paire, et on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 < x$.
12. Étudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln 2 \approx 0,69...$, $\ln 3 \approx 1,10...$
13. Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5. est vraie, c'est-à-dire, est-ce que, pour tout élément f de E , si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge?

Partie IV : Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note : $F :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto F(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$,

de sorte que $F(x) = 2T(h)(x)$, où h a été définie dans la partie III, et on note :

$$H :]1; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto H(x, y) = F(x) + F(y) - 2F(xy).$$

14. Montrer que H est de classe C^1 sur $]1; +\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H en tout $(x, y) \in]1; +\infty[^2$.
15. Établir que H admet un point critique et un seul, que l'on calculera.
On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.
16. On admet que H est de classe C^2 sur $]1; +\infty[^2$ et que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx -1,2 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \approx -4,5 \cdot 10^{-2}.$$

Est-ce que H admet un extrémum local sur $]1; +\infty[^2$?

Partie V : Transformée d'une densité

Soit $f \in E$. On suppose, dans cette partie, que f est une densité.

17. Montrer, pour tout (A, B) de $\mathbb{R}^2$:

$$\int_A^B T(f)(x) dx = \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{A-1}^{A+1} (A-x)f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{A+1}^{B+1} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{A-1}^{B-1} f(x) dx.$$

18. Montrer : $\forall B \in \mathbb{R}, \left| \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx \right| \leq T(f)(B).$

En déduire la limite de $\frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) dx$ lorsque B tend vers $+\infty$.

19. Établir que $T(f)$ est aussi une densité.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note V_i la matrice colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j} = V_i {}^t V_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A .

On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.
5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que tA est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et tA ont les mêmes valeurs propres.
7. Soient $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de tA).
Montrer que $X {}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A .
8. Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = (X_i {}^tY_j)_{(i,j) \in [1;n]^2}$.
Montrer que, pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, $V_i {}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Établir que Φ_A est diagonalisable.
10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A .

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0.$$

11. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.
12. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de $\mathbb{N}^*$ tel que : $T^q = 0$ et $q \leq n^2$.

On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

13. Justifier qu'il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
Montrer que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire : $p \leq n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P .

Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M | N) = \sum_{(i,j) \in [1;n]^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

14. Montrer que l'application $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
15. Montrer : $\forall (M, N) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad (M | N) = (M {}^tN | I_n)$.
16. Pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, calculer ${}^tC_i C_j$.
17. Pour tout (i, j) de $[1;n]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i {}^tC_j$ et en déduire la valeur de $(C_i {}^tC_j | I_n)$.
18. Pour tout (i, j, k, ℓ) de $[1;n]^4$, calculer $(C_i {}^tC_j | C_k {}^tC_\ell)$.
19. On considère la famille $\mathcal{G} = (C_i {}^tC_j)_{(i,j) \in [1;n]^2}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(. | .)$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de Φ_A .

Conception : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2015 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k .

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] ; P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X - 4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.

2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E .

3. En déduire une base de E et la dimension de E .

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X + 1) - Q(X).$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors

$$\Delta(Q) = ((X + 1)^2 - 3(X + 1) + 5) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2.$$

4. a. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- b. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q .
- c. Déterminer le noyau et l'image de Δ .
- d. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application ϕ .

5. a. Montrer : $f \circ f \circ f = 0$.
- b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .
- c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
- d. Est-ce que f est diagonalisable ?

PARTIE II : Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^4 P_1(k) P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.

On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X - 2)(X - 3), \quad L_2 = (X - 1)(X - 3), \quad L_3 = (X - 1)(X - 2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. a. Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.
- b. Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i = W L_i$.

9. a. Montrer que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

On note alors, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $N_i = \frac{1}{M_i(i)} M_i$.

- b. Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.
10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E .
11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E .
12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$: $u(P) = \sum_{i=1}^3 P(i) N_i$.
 - a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
 - b. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$.
 - c. En déduire que u est la projection orthogonale sur E .
 - d. Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X - 2)(X - 3)$ sur E .

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E .

$$\text{Montrer, pour tout } x \in]0; +\infty[: \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 u(t) e^{-xt} = 0.$$

En déduire que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E , on définit la fonction $L(u)$ sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt} dt.$$

3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$: $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v_i(t) = t^i e^{-at}.$$

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad w_n(t) = t^n$.

Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**

Soit u un élément de E . Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A; +\infty[, \quad |u(t)| \leq t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0; A], \quad |u(t)| \leq M.$$

Établir : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u(t)| \leq M + t^p$. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(s) ds$ converge.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $R(t) = \int_t^{+\infty} u(s) ds$.

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R . Montrer que R appartient à E .

b. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad R'(t) = -u(t)$.

c. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x).$

d. Soit $\varepsilon \in]0; +\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0; +\infty[$ tel que : $\forall t \in [B; +\infty[, |R(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, |L(u)(x) - R(0)| \leq x \int_0^B |R(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2}.$

e. Conclure : $\lim_{x \rightarrow 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) dt.$

8. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0; +\infty[$ tels que : $\forall t \in [A; +\infty[, |u(t)| \leq |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.$

b. En déduire que u appartient à E .

c. Établir : $\forall x \in]0; +\infty[, L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x).$

9. Dérivée puis dérivée n -ième d'une transformée de Laplace

Soit u un élément de E . On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = t^n u(t).$$

a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E .

b. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2} e^{|a|}.$

c. Soient $x \in]0; +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \frac{x}{2}.$

Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + t e^{-xt} \right| \leq |h| \frac{t^2}{2} e^{-xt/2}.$

En déduire : $\left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt.$

d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ à l'aide de $L(u_1).$

e. Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(L(u))^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n).$

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = e^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a. Montrer que u appartient à E et : $\forall x \in]0; +\infty[, L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x).$

b. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, (x^2 + 5x + 6) L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x,$

puis : $\forall x \in]0; +\infty[, L(u)(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3}.$

11. En déduire une fonction $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème posé.

• FIN •

Conception : EMLYON Business School

1^{ère} épreuve (OPTION SCIENTIFIQUE)

MATHÉMATIQUES

mardi 26 avril 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère, dans cette partie, les matrices de $M_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A , deux matrices P_1 et P_2 de $M_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2 .

2. a. Calculer les matrices P_1^2 , $P_1 P_2$, $P_2 P_1$ et P_2^2 .

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $M_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E .

On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E , associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E , associe l'élément nul de E .

On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, \dots, p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que : $\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$.

Enfin, on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^m (X - \lambda_\ell), \quad \text{et pour tout } i \text{ de } \llbracket 1; m \rrbracket, \quad M_i = \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \quad \text{et} \quad L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

PARTIE II : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$.
6. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.
7. a. Montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1; m \rrbracket^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égal à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.
b. En déduire, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $L_i(f) = p_i$.
8. a. Montrer : $e = \sum_{i=1}^m p_i$.
b. En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\text{Im}(p_1), \dots, \text{Im}(p_m)$.
9. Soit i appartenant à $\llbracket 1; m \rrbracket$.
a. Vérifier : $N = M_i(\lambda_i) (X - \lambda_i) L_i$.
b. En déduire, en utilisant le résultat de la question 6. : $\text{Im}(p_i) \subset \text{Ker}(f - \lambda_i e)$.
10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et que, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\text{Im}(p_i)$.
11. a. Montrer, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1; m \rrbracket^2$ tel $i \neq j$: $p_i \circ p_j = \tilde{0}$.
b. En déduire, en utilisant le résultat de la question 8.a., pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $p_i \circ p_i = p_i$.
c. Établir, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$: $p_i \circ f = \lambda_i p_i$.
12. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$, puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$.

PARTIE III : Intervention de produits scalaires

On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in E \times E$, par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^m \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et φ .

14. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ .

Quel résultat de la **partie II** peut-on alors retrouver sans calcul ?

15. Démontrer que, pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ .

PROBLEME 2

PARTIE I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout x de $\mathbb{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}^-$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.
 - a. Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.
 - b. En déduire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_0, |u_n - S(x)| \leq \varepsilon$.
 - c. Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
 - d. Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2p+1} \leq u_{2p-1}$.
 - e. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.
 - f. En déduire une fonction en Scilab qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{++}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3. : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.
- b. En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $] -1; +\infty[$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$.

7. Soit $x \in] -1; +\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$.

b. Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$ converge, puis que la limite de

$$\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt, \text{ lorsque l'entier } n \text{ tend vers } +\infty, \text{ est égale à } 0.$$

d. En déduire la relation : $I(x) = S(x+1) \Gamma(x+1)$,
où la fonction S a été définie dans la partie I.

8. En utilisant la partie I., déterminer la valeur de $I(1)$.

PARTIE III : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

9. Vérifier que la fonction f est paire.

10. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .

11. Déterminer la fonction de répartition de X .

12. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ converge.

En déduire que X admet un moment d'ordre n , que l'on note $m_n(X)$.

b. Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}$, $m_{2p+1}(X) = 0$.

c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $m_{2p}(X) = 4p I(2p-1)$.

13. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X .

14. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f .

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n .

b. En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera une densité.

• FIN •

Conception : emlyon business school

1^{ère} épreuve (OPTION SCIENTIFIQUE)

MATHÉMATIQUES

mardi 25 avril 2017, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
3. Déterminer une matrice P de $M_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $M_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = P D P^{-1}$.

PARTIE II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E , $T(P) = (X(X-1)P')'$, où l'accent désigne la dérivation.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = (X(X-1)2X)' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E .
5. Calculer, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$.
6. L'endomorphisme T est-il bijectif? Quel est le rang de T ? Déterminer $\text{Ker}(T)$.
7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable?

PARTIE III : Intervention d'un produit scalaire

On conserve les notations de la partie II.

On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
9. Démontrer : $\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(T(P), Q) = - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x) dx.$
10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ .
Quel résultat de la partie II peut-on retrouver ainsi?
11. a. Établir : $\forall P \in E, \quad \varphi(T(P), P) \geq 0.$
b. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P), P) = 0.$

PARTIE IV : Retour sur l'exemple de la partie I

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ de E ?
13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3 de la partie I, déterminer une base orthogonale $\mathcal{C}$ de E pour le produit scalaire φ , formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.
14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathcal{C}$ de E , un endomorphisme V de E , symétrique pour le produit scalaire φ , tel que :

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E, \quad \varphi(V(P), P) \geq 0 \end{cases}.$$

PROBLEME 2

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par :
$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt.$$

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I .
2. Montrer que H est décroissante sur I .
3. a. Calculer $H(1)$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.
c. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.
d. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. a. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t)$.
b. A l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$, montrer :
$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$
5. a. Justifier : $\forall u \in [0; +\infty[, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$.
b. En déduire : $\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}$.
6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. a. Montrer : $\forall u \in [0; 1], \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$.
b. A l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt$ converge et calculer sa valeur.
c. En déduire : $\forall x \in I, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.
d. Montrer : $\forall x \in I, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}$.

- e. En déduire la limite de H en $+\infty$.
8. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}$.
- a. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3.b.
- b. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- c. En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.
9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K .

PARTIE IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

10. Montrer que f est une densité.
11. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f .
- a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f .
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \frac{n}{M_n}$.
- a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n .
- b. Justifier : $\forall u \in]0; +\infty[, \operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$
et $\operatorname{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.
- c. Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0; +\infty[, \mathbf{P}(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.
- d. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

• FIN •

Conception : Emlyon business school

(1^{ère} épreuve) OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 27 avril 2018, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On définit la fonction I d'une variable réelle x par :
$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

PARTIE I : Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$,
$$W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k du.$$

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

2. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :
$$W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}.$$

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{\pi}{2}.$

PARTIE II : Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_k$.
Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.

4. a. Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

b. Donner la valeur de $I(0)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

a. Soient $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \mapsto e^u + e^{-u}$ entre 0 et xt , montrer :

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^n \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1} \pi}{2(2n+1)!} e^x.$$

c. En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$ converge et que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

PARTIE III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^+$:
$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

7. a. Montrer, pour tout v de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:
$$1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2.$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u} \sqrt{1-\frac{u}{2}}} du.$$

c. En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du.$$

8. a. Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

9. En déduire : $I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.$

PARTIE IV : Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

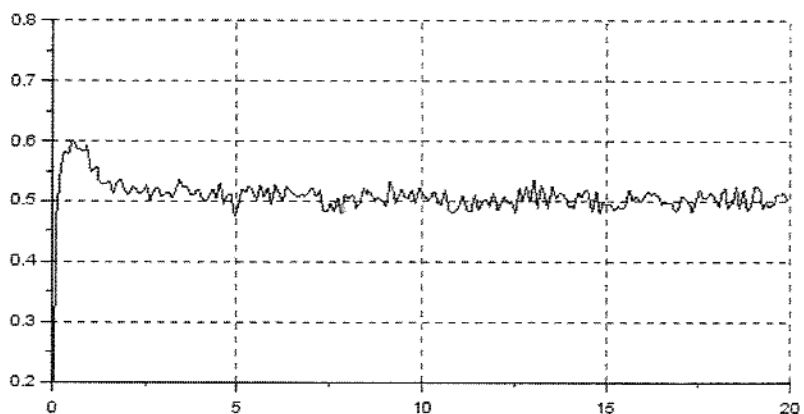
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ .

On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function r = estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y , et renvoie une estimation de $\mathbf{P}([X = Y])$.

On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'poi',lambda)` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

b. Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ , une estimation de $\sqrt{\pi\lambda} \mathbf{P}([X = Y])$ pour $\lambda \in]0; 20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $\mathbf{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $\mathbf{P}([X = Y]) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$

12. a. Exprimer $\mathbf{P}([X = Y])$ en fonction de λ et de la fonction I .

b. En déduire un équivalent de $\mathbf{P}([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP.$$

PARTIE I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1.
 - a. Montrer que φ est une application linéaire.
 - b. Calculer $\varphi(X^n)$.
 - c. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3.
 - a. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
 - b. Soit P un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$.
Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que P est de degré n .
 - c. En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
 - a. Pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $\varphi(P_k)$.
 - b. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
 - c. Déterminer les sous-espaces propres de φ .

PARTIE II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k -ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

- a. Déterminer la loi de Z_2 .
- b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $\llbracket 1; k \rrbracket$, la valeur de $\mathbf{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.

En déduire : $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \mathbf{E}(Y_k)$.

- c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$, montrer :

$$\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbf{P}([Z_j = 1]).$$

- d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

- e. Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k .

7. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([Y_k = i]) X^i.$$

- a. Déterminer les polynômes G_0 , G_1 et G_2 .

- b. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} \mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbf{P}([Y_k = i-1]).$$

- c. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) G'_k + X G_k.$$

- d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

8. a. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.

- b. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{E}(Y_k) + 1.$$

- c. Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ obtenue en question 6.e.

9. On rappelle que les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont définis à la question 5. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P_j = X^j (1-X)^{n-j}.$$

- a. Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$.

- b. Montrer, pour tout j de $\llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

- c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

- d. Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

**Code sujet : 295****Conception : emlyon business school**

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2019, de 14h00 à 18h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est constitué d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.

*La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est **indépendante** du reste du problème.*

Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.

*Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et de séries. Cette partie est aussi **indépendante** du reste du problème.*

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (X - a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a) P(t) dt & \text{si } x \neq a, \\ \frac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (X - a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3.
 - a. Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
 - b. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - c. Calculer, pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $\Psi_a(Q_k)$.
 - d. En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a .
4.
 - a. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $((X - a)^2 P(X))'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
 - b. En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.
 - c. En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
 - d. Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ .

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

a. Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x)$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0; x]$ tels que :

$$f(\alpha_x) \int_0^x t dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq f(\beta_x) \int_0^x t dt.$$

c. En déduire : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

d. Montrer que l'on a aussi : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 2\Phi(f)(x)).$$

7. a. Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

b. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On admet le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} (\Phi(f)) = 0.$$

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \mapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} (\Phi(f)) = \frac{\ell}{2}.$$

b. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \mapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{-\infty} (\Phi(f)) = \frac{\ell}{2}.$$

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\Phi(F)$; ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq G(x) \leq F(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, 0 \leq F(x) \leq G(x)$.
10. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de $x, F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V .

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

- a. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

- b. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $E(X_1)$, et que l'on a : $E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- c. On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

D'après la question 11., H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2 . Déterminer une densité h_2 de X_2 , puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge.

Pour toute fonction f de E , on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13. a. Justifier : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

b. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f, g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx.$$

15. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_2 .

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2 .

On note, comme dans la partie B., pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

a. Calculer les limites de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{(h(X))^2}{X^3} + \frac{2}{3} \int_0^X f(x) \Phi(f)(x) dx.$$

c. Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x) \Phi(f)(x) dx \leq \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

d. En déduire : $\forall X > 0, \quad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2}$.

e. Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3} \|f\|$.

f. En utilisant la relation de la question 16.b, justifier que la limite de $X \mapsto X (\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

g. En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3} \langle \Phi(f), f \rangle$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE E : Étude d'une suite

Dans cette partie, *indépendante des précédentes*, on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

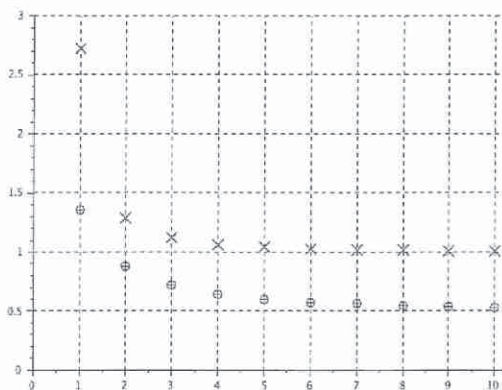
17. On suppose que l'on dispose d'une fonction Scilab d'en-tête fonction $u = \text{suite_u}(n)$ qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n .

En déduire une fonction Scilab d'en-tête fonction $v = \text{suite_v}(n)$ qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n .

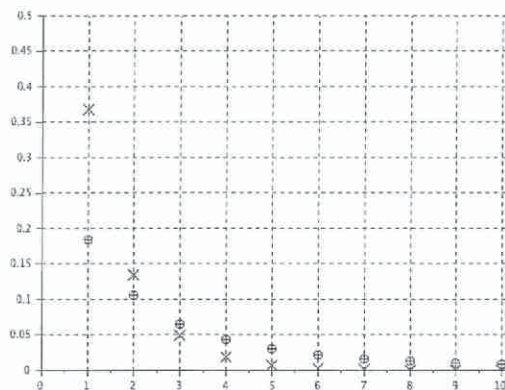
18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Pour différentes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec le symbole 'x' et ceux de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec le symbole '⊕'.

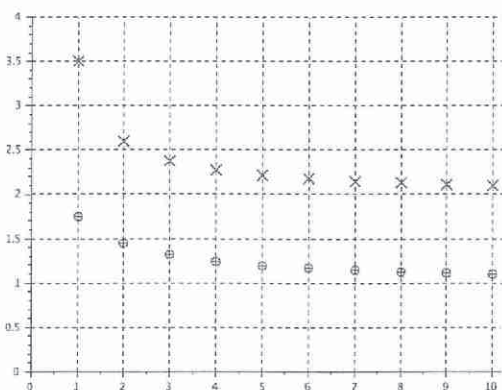
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?



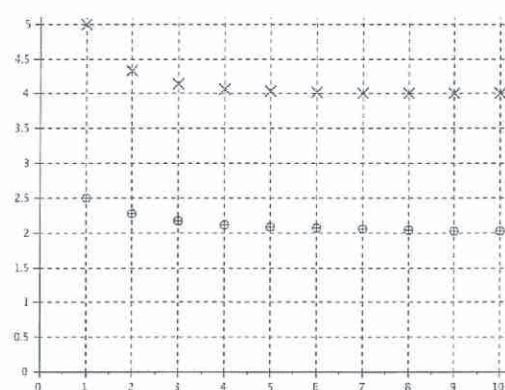
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 4 + 5(0.9)^n$

- c. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \geq \frac{u_n}{2}$ et $v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}$.
- d. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$ puis $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.
- e. Démontrer toutes les conjectures faites à la question 18.b.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- a. Montrer : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - Nv_N$.
- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.
- c. Montrer ensuite que Nv_N tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
- d. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- a. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(Y = k).$$

- b. On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$.

Montrer : $\mathbf{P}(Z = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mathbf{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

• FIN •

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2020, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

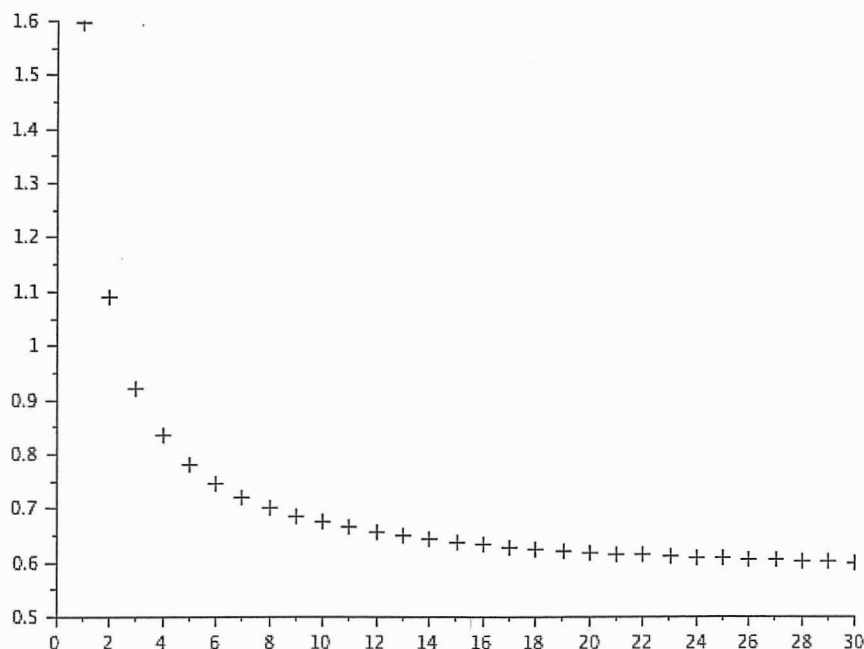
PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.
2. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P'_n(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.
3. a. Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.
b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.
4. a. Montrer les relations :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P''_{n+1}(x) = P_n(x). \end{cases}$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n .
5. a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x , et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` renvoie une valeur de $k!$.
b. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1 function u = suite(n)
2     a = .....
3     b = .....
4     c = (a+b)/2
5     while .....
6         if ..... then
7             a = c
8         else
9             b = c
10        end
11        c = .....
12    end
13    .....
14 endfunction
```

- c. On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



6. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$.
- b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ .
- a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^\ell |u_n - \ell|$.
- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(u_n) = e^{-\ell}$.
- c. Aboutir à une contradiction.
8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0; 1]$ par : $\forall t \in]0; 1], \quad f(t) = -\ln(t)$.
- a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge et préciser sa valeur.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$:
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire :
$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{\ln(n)}{n}.$$

c. En déduire la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Montrer finalement :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}.$$

10. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall t \in]0; +\infty[, \quad g(t) = t + \ln(t) + 1.$

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$e^{-2} < \alpha < e^{-1}.$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

11. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt.$

b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad P_n(x) \leq e^{-x} \leq P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

a. Montrer :
$$P_{n+1}(u_n) \leq e^{-u_n} \leq \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

b. En utilisant le résultat des questions 3.b et 6.a, obtenir :
$$\frac{2(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leq e^{-u_n} \leq \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},$$
 puis :

$$(2n)! \leq (u_n)^{2n} e^{u_n} \leq \frac{(2n+3)!}{2}.$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{u_n}{2n}.$

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leq w_n e^{w_n} \leq \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

b. En déduire que la suite $(g(w_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers α , la fonction g et le réel α étant définis dans la question 10..

14. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE A : Étude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ converge.
2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.
 - a. Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k .
 - b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k = k!$

Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$.

3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\| \cdot \|$ la norme associée.

4. Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j \rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

- pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \dots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

5.
 - a. Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.
 - b. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle.$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

6. Étude du cas $n = 2$:

- a. Expliciter la matrice H_2 .

Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

- b. Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^t A_2 A_2$. Que remarque-t-on ?

7. On note, pour tout (i, j) de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_n .

- a. Justifier que la matrice A_n est inversible.

- b. Justifier : $\forall j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j} Q_{k-1}$.

En déduire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i} a_{k,j}$.

- c. Montrer alors la relation : $H_n = {}^t A_n A_n$.
8. a. Montrer que la matrice H_n est inversible.
- b. Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.
- c. Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
(On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n , ${}^t Y H_n Y$.)

PARTIE B : Étude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1 \rangle \\ \langle P, X \rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

9. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}_n$.

- a. Montrer, pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$: $\langle R, X^i \rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle X^i, X^k \rangle$.
- b. Montrer : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \langle P, X^i \rangle = \langle R, X^i \rangle$.

En déduire : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff V = H_n^{-1} U$.

10. **Retour au cas $n = 2$:** Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

11. On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3)^2 e^{-t} dt.$$

- a. Vérifier :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, f(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c + 720.$$

- b. Montrer que f admet un unique point critique (a_0, b_0, c_0) vérifiant : $H_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$.

- c. Montrer que la matrice hessienne de f au point (a_0, b_0, c_0) est la matrice $2H_2$.

- d. En déduire que la fonction f admet au point (a_0, b_0, c_0) un minimum local.

- e. Justifier : $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} f(a, b, c) = \inf_{R \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - R\|^2$.

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et que ce minimum est atteint en un unique point.

- f. Retrouver alors l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

• FIN •

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 27 avril 2021, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

PARTIE A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. a. Montrer : $\forall t \in]0; +\infty[, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$
b. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ .
2. Montrer alors : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$
3. a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \gamma \leq v_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n).$
b. En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function gamma = approx()` qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$ converge.

On pose alors, pour tout x de $[0; +\infty[$: $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$

5. a. Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1.$
b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.$
En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right).$

6. a. Montrer : $\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$

b. En déduire que S est une fonction croissante sur $[0; +\infty[.$

c. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad \forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } x+h \in [0; +\infty[,$

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$

On admet que S' est également continue sur $[0; +\infty[.$

7. a. Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}$.
- b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- c. En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0; +\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.
8. a. Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx$, le réel u_n étant défini dans la partie A.
- b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 S(x) dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
- c. Conclure : $\int_0^1 S(x) dx = \gamma$.

PARTIE C : Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

9. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de densité f .

10. a. Déterminer la fonction de répartition de X .
- b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

11. a. Montrer, pour tout x de $[0; 1[$:

$$\mathbf{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(k \leq X \leq k+x) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}(Y \leq x) = S(x).$$

- b. En déduire la fonction de répartition de Y .
- c. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y .
12. Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\mathbf{E}(Y) = 1 - \gamma$.

PROBLÈME 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers T lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout k de $\mathbb{N}$, $T_k = \sum_{i=0}^n a_{k,i} X^i$ avec $(a_{k,0}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{et si } T = \sum_{i=0}^n b_i X^i \text{ avec } (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

alors : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k,i} = b_i$.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2} ((2n-1)X+1)(X-1)P' + \frac{1}{n^2} X(X-1)^2 P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

b. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

2. Cas $n = 2$:

a. Vérifier :
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que le spectre de A_2 est $\left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$.

Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2 .

c. En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2 .

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(X-1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\frac{-1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier : $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad (\varphi_n(X^i))(1) = 1.$

b. En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

c. Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (n+1)^2 \varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)(n^2 \varphi_n(P) - P)$.
- b. En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ , alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ .

6. a. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\text{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} ; j \in \llbracket 0 ; n \rrbracket \right\}.$$

- b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\Pi_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 X^i$.

- a. À l'aide de la question 1.a., montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.
- b. En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout j de $\llbracket 0 ; n \rrbracket$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \frac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

- a. Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^n \alpha_j (\lambda_j)^k R_j, \quad \text{où } \varphi_n^k \text{ désigne l'endomorphisme } \underbrace{\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}.$$

- b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$.

PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher.

Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k -ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

9. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 .

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i-1) + 2 \frac{i}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbf{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i+1).$$

11. a. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k .

```

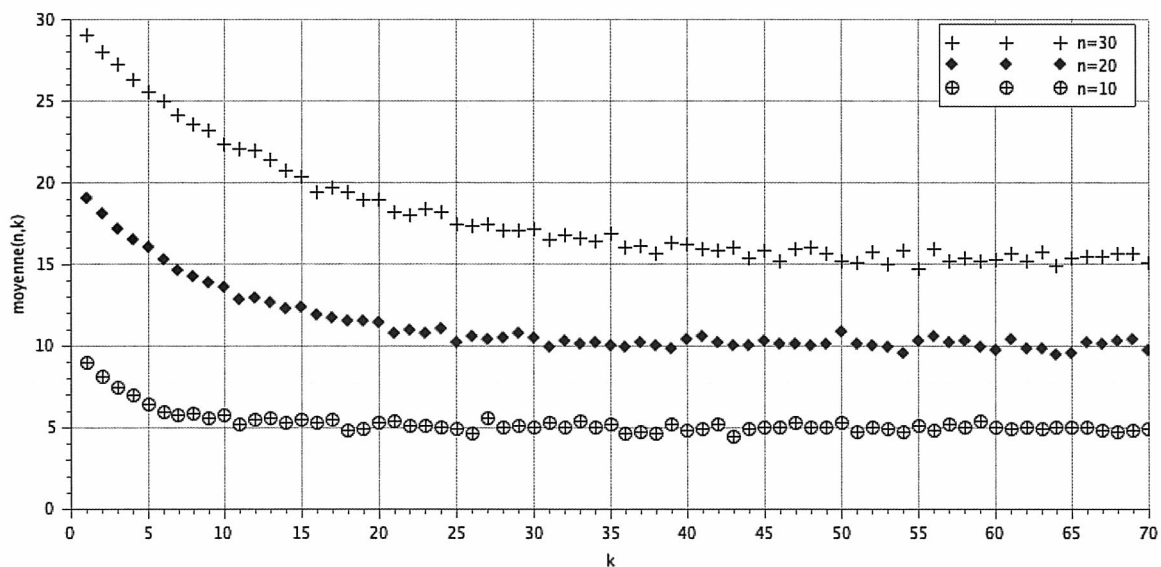
1 function Z = simule(n,k)
2     R = n // R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
3     for j = 1:k
4         aleaR = rand()
5         aleaB = rand()
6         if aleaR <= (R/n) & aleaB <= (R/n) then
7             R = .....
8         elseif ..... then
9             R = R+1
10        end
11    end
12    Z = .....
13 endfunction

```

b. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function E = esperance(n,k)` qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k .

On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

c. On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n . On obtient le graphe ci-dessous.



Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

a. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

b. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbf{P}(Z_k = i).$$

c. Montrer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n} \mathbf{E}(Z_k) \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \mathbf{E}(Z_k) + 1.$$

d. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, une expression de $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de k et de n .

Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

13. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $Q_k = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(Z_k = i) X^i$.

a. À l'aide de la question 1.a., démontrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}, \quad \text{où } \varphi_n \text{ est l'endomorphisme étudié dans la partie A.}$$

b. En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question 7..

14. a. Déduire de la question précédente : pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2$.

b. On **admet** la formule suivante : $\forall (a, b, m) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^m \binom{a}{i} \binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}$.

Montrer :
$$\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

c. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.

• FIN •

Conception : emlyon business school

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 4 Mai 2022, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par :

$$\text{pour tous } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

On confond les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\text{on a, en notant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : \quad \langle x, y \rangle = {}^t X Y.$$

Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on note $\text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Enfin, on rappelle qu'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque P est inversible et que $P^{-1} = {}^t P$.

PARTIE A : Mise en place d'un exemple

On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = {}^t A A.$$

1.
 - a. La matrice A est-elle inversible ? Déterminer le rang de A .
 - b. Calculer les matrices A^2 et A^3 et vérifier : $A^3 - A^2 + A = 0$.
 - c. En déduire les valeurs propres réelles de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2.
 - a. Justifier que la matrice B est diagonalisable.
 - b. On pose : $R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
 - i. Vérifier que la matrice R est orthogonale.
 - ii. Montrer que la matrice ${}^t R B R$ est diagonale.

Dans toute la suite du problème, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \text{rg}(M)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

PARTIE B : Valeurs singulières d'une matrice

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice tM et $h = g \circ f$.

3. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$.
4. a. Soit x appartenant à $\text{Ker}(h)$. En calculant $\langle x, h(x) \rangle$, montrer que x appartient à $\text{Ker}(f)$.
b. En déduire : $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$ puis $\text{rg}(h) = r$.
5. a. Justifier que l'endomorphisme h est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h .
b. Montrer que les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

6. Justifier que la matrice P est orthogonale et montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positifs ou nuls tels que : ${}^tM M = P D {}^tP$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant positifs ou nuls, on pose, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sont appelés **les valeurs singulières de la matrice M** .

7. Dans cette question uniquement, on suppose que la matrice M est symétrique.
Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de M en fonction de ses valeurs propres.

8. Justifier que la matrice D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont non nuls et donc que les réels $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ sont nuls.

9. a. Pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, justifier que $f(\varepsilon_i)$ est non nul et calculer $\|f(\varepsilon_i)\|$.
b. On pose, pour tout i de $\llbracket 1; r \rrbracket$, $u_i = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i)$.
Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.
c. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée) est :

$$\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Δ la matrice $\text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$.

10. Justifier que la matrice Q est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (au départ) et la base $\mathcal{B}_2$ (à l'arrivée), montrer : $M = Q \Delta {}^tP$.

11. Retour sur l'exemple :

Déterminer deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ_1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $A = Q_1 \Delta_1 {}^tP_1$.

PARTIE C : Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B.

Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tels que :

$$M = Q \Delta {}^tP \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

On définit la matrice M^+ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $M^+ = P \text{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right) {}^tQ$.

La matrice M^+ est appelée **la matrice pseudo-inverse de M** .

On note f^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M^+ et $p = f \circ f^+$.

12. Justifier que, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^+$.

13. a. Simplifier le produit $M M^+$.

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

c. Montrer : $\text{rg}(M M^+) = r$ puis en déduire : $\text{Im}(p) = \text{Im}(f)$.

14. **Application :** Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Im}(f)$.

Il n'existe donc pas de vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.

On cherche alors à déterminer un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\|y - f(x^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|$.

a. Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|$.

b. Proposer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

Montrer que, lorsque $r < n$, il existe au moins deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

15. **Retour sur l'exemple :** On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A et on considère $y = (1, 1, 1)$.

a. Déterminer $\text{Im}(f_1)$ et vérifier que y n'appartient pas à $\text{Im}(f_1)$.

b. Montrer : $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1$.

c. En déduire deux vecteurs distincts x^* et z^* de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\|y - f_1(x^*)\| = \|y - f_1(z^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

PROBLÈME 2

Ce problème est constitué de trois parties. Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé **le nombre de Catalan d'ordre n** , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .
2.
 - a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$
 - b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$
4. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function c = catalan(n)` qui, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de c_n .
5.
 - a. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - b. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
6.
 - a. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}.$
 - b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$
7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}.$$
 - a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$
(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).
 - b. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3. : $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4 T_n + 2 S_n.$
 - c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}.$

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$

8. a. Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et $g(x) = 2xf(x)$.

On **admet** que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- b. Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$, $\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n$,

montrer : $(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$.

- c. En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], (g(x))^2 = 2g(x) - 4x$.

- d. Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

- e. En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 - \sqrt{1-4x}$.

PARTIE B : Loi du demi-cercle

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. a. Montrer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

- b. En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de $\int_{-2}^2 \varphi(x) dx$.

10. Montrer que φ est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

11. a. Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X^{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx.$$

- b. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \mathbf{E}(X^{2n})$.

i. Calculer u_0 .

ii. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{3}(4u_n - u_{n+1})$.

iii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c_n$.

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement P-P-F-P-F-F-P-F-... (où P désigne Pile et F désigne Face), alors la variable aléatoire T est égale à 6.

12. a. Écrire une fonction Scilab, d'en-tête `function T = simule(p)` qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

b. On exécute le script Scilab suivant :

```
1 for i = 1 : 3
2     L = zeros(1,3)
3     for j = 1 : 3
4         m = 0
5         for k = 1 : 1000
6             m = m + simule(i/4)
7         end
8         L(j) = m/1000
9     end
10    disp(L)
11 end
```

et on obtient les résultats suivants :

1.392	1.478	1.41
100.572	71.172	125.28
1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

13. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T = 2n + 1) = 0$.

14. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours **strictement supérieur** au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $d_n = \text{Card}(D_n)$.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours **supérieur ou égal** au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $e_n = \text{Card}(E_n)$.

Par exemple, $D_3 = \{P-P-P-F-F-F, P-P-F-P-F-F\}$

et $E_3 = \{P-F-P-F-P-F, P-F-P-P-F-F, P-P-F-F-P-F, P-P-F-P-F-F, P-P-P-F-F-F\}$;

ainsi $d_3 = 3$ et $e_3 = 5$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier : $d_n = e_{n-1}$.
- b. i. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}$.
- ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}$.
- iii. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = c_n$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .
- c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = 2n) = 2 c_{n-1} p^n (1-p)^n$.
15. a. Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(T = n) x^n$ converge.
- On pose, pour tout x de $[-1; 1]$: $G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) x^n$.
- b. Montrer : $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et $\left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\right)$.
- c. Montrer : $\forall x \in [-1; 1], G_T(x) = \mathbf{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2)$,
où g est la fonction définie dans la question A.8.
- d. En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer : $\mathbf{P}(T = 0) = |2p - 1|$.
Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.
16. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :
- a. si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.
- b. si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

• FIN •

Conception : emLyon business school

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Mercredi 26 Avril 2023, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidates et candidats sont invité.es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, une candidate ou un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il ou elle la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il ou elle sera amené à prendre.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Exercice 1

Somme d'une série

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
- b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.
- c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n .
- d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Informatique.

- a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def rang(a):  
    k=1  
    s=1  
    while s<a:  
        k=k+1  
        s=s+1/k  
    return k
```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

- b) Le code suivant

```
from numpy import exp  
exp(49)
```

renvoie : `1.9073465724950998e+21`.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
- c) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
- d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2

Des variables aléatoires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0, 1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose : $Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet que Z_n est bien une variable aléatoire.

1. Soit $n \geq 2$ entier.

a) Démontrer que la fonction de répartition F_n de Z_n est définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

b) Justifier que la variable aléatoire Z_n est à densité.

c) Démontrer qu'une densité f_n de Z_n est donnée, pour x réel, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - x)^{n-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. **Informatique.** Compléter la fonction suivante en langage Python de manière que l'appel `VarZ(10)` simule la variable aléatoire Z_{10} . On rappelle que, la fonction `random()` ayant été importée, l'appel `random(3)` renvoie un vecteur de trois coordonnées qui simulent des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$.

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return .....
```

3. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 2}$.

4. Soit $n \geq 2$ entier. Lorsque U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, indépendante des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on admet que $Z_n - U$ est une variable aléatoire à densité g_n donnée par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - (-x)^n & \text{pour } x \in [-1, 0[\\ (1 - x)^n & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}.$$

On pose : $T_n = Z_n - X_n$.

a) Démontrer que $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$.

On pourra considérer la variable aléatoire $Z_{n-1} = \inf(X_1, \dots, X_{n-1})$.

b) La variable aléatoire T_n est-elle à densité ?

c) **Informatique.** Écrire une fonction `VarT` en langage Python, d'argument `n`, qui simule la variable aléatoire T_n .

5. La figure 1 présente un histogramme de 2000 rectangles donnant la répartition de 20000 valeurs d'une simulation de la variable aléatoire T_{500} de la question 4. La figure 2 est un zoom de la partie de droite de la figure 1.

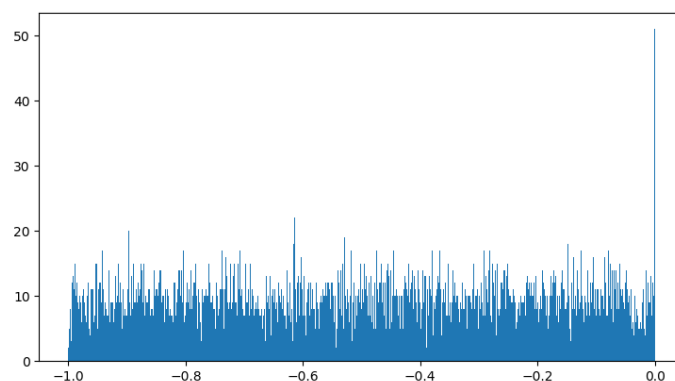


FIGURE 1 – Répartition de 20000 valeurs prises par T_{500}

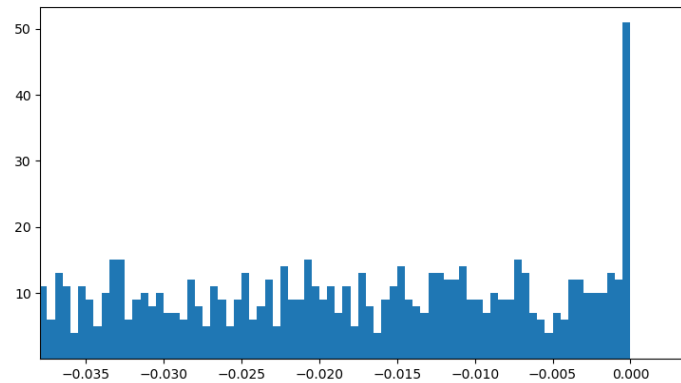


FIGURE 2 – Zoom de la partie droite de la figure 1

- La variable aléatoire T_{500} vous semble-t-elle discrète? Justifiez votre avis en une phrase.
- Le rectangle le plus à droite de la figure 2 est-il cohérent avec le résultat de la question 4a?

Problème

Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n .

Notations et définition

- On note 0_E le vecteur nul de E .
- Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .
- Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .
- Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ de l'espace vectoriel E .

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

On admettra aussi qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .

Enfin, on rappelle le **théorème de la base incomplète** : *toute famille libre de E peut se compléter en une base de E .*

Préliminaire

- Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.
- Soit φ un élément de E^* .
 - Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\text{Im } \varphi$ de φ ?
 - En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.
 - On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E .

Partie I - Des exemples

3. Premier exemple

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On considère l'application $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

- a) Démontrer que g est un élément de E^* .
- b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
- c) Pour $k \in \{1, \dots, p\}$ on considère la fonction polynôme $Q_k : x \mapsto x^k - \frac{1}{k+1}$.
Démontrer que la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base du noyau de g .

4. Second exemple

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.

- a) Démontrer que f est un élément de E^* .
 - b) Déterminer le noyau de f .
5. Dans cette question, on revient au cadre général.
Soient f et g deux éléments de E^* , non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.
- a) Démontrer que $\ker f = \ker g$.
 - b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f .
 - c) Démontrer que $E = \ker f \oplus \text{vect}(x_0)$, où $\text{vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0 .
 - d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
 - e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que ***tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle***. Soit H un hyperplan de E .

- a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H . Justifier de l'existence d'un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E .
- b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\ker \varphi = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geq 2$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E , ainsi que l'application :

$$f = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right).$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{i=1}^p \ker f_i$.
8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.
- a) On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f .
 - b) Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^* .
9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.

- a) Que peut-on dire de la dimension m de $\text{Im } f$?
 - b) En complétant une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\text{Im } f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
 - c) En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).
10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^* .
- a) Justifier que f est surjective.
 - b) Démontrer que : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \ker f_i \right) = n - p$.

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour $a \in E$ on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x \rangle$.

11. Soit $a \in E$.
- a) Démontrer que f_a est un élément de E^* .
 - b) Déterminer le noyau de f_a .
 - c) Démontrer que si f_a est l'application nulle alors $a = 0_E$.
12. **Théorème de représentation des formes linéaires**
On considère maintenant l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.
- a) Démontrer que Φ est linéaire.
 - b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^* .
 - c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle.$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**

Dans cette question, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p .

- a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- b) Démontrer que si $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \text{tr}(AM).$$

FIN DE L'ÉNONCÉ
