M 186

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1978

Mathématiques 1re épreuve

MERCREDI 3 MAI 1978 DE 8 à 12 H

Durée : 4 heures

Dans ce problème, toutes les fonctions envisagées sont des fonctions d'une variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit F une telle fonction ; on note, si ces limites existent :

$$F(x+0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x+h)$$

$$F(x-0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x-h)$$

la notation $h \downarrow 0$ signifiant que h tend vers zéro par valeurs positives. On rappelle qu'une fonction F, définie au point x, est continue à gauche en x si et seulement si : $F(x) = F(x-0)$.

PARTIE I

On considère la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \leqslant a \\ F(x) = \dfrac{x}{8} & a < x \leqslant b \\ F(x) = \dfrac{x^2}{16} & b < x \leqslant c \\ F(x) = 1 & c < x \end{cases}$$

a, b, c étant trois nombres réels satisfaisant à : $a < b < c$.

1/ a) Montrer que, quels que soient a, b et c, F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

.../...

b) A quelles conditions doivent satisfaire a, b, c pour que F soit continue pour toutes valeurs de x ? Est-elle dérivable quel que soit x ?

2/ Déterminer les conditions sur a, b, c, pour que F soit non-décroissante ; montrer que, si ces conditions sont réalisées, F peut alors être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X : $$F(x) = P(X < x)$$

PARTIE II.

Dans cette seconde partie, on pose $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$.
On note X la variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition.

1/ Etudier la fonction F et tracer sa représentation graphique.

2/ Etudier la fonction F' dérivée de F par rapport à x.

3/ En désignant par F'_g la dérivée à gauche de F, définie quel que soit x, on note f la fonction telle que :

$$\begin{cases} f(x) = F'(x) \text{ en toute valeur } x \text{ où } F' \text{ est définie} \\ f(x) = F'_g(x) \text{ pour toute valeur } x_i \text{ où } F' \text{ n'est pas définie.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue à gauche, qu'elle est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$.

La fonction f apparaît ainsi, et on l'admettra, comme la fonction de densité de la variable aléatoire X.

4/ Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

5/ a) Etudier la variation de la fonction G de la variable u définie dans $\mathbb{R}$ par : $$G(u) = \int_0^u [1 - F(x)]\,dx$$

b) Montrer qu'il existe une valeur u_o, que l'on précisera, telle que $G(u) = E(X)$ pour $u \geq u_o$.

.../...

PARTIE III

On suppose dans cette troisième partie que a, b, c, satisfont aux conditions :

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 2 < b < c < 4 \end{cases}$$

On note $\{x_i\}$ l'ensemble des points x_i de discontinuité de la fonction F et $p_{x_i} = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ le saut de la fonction F au point de discontinuité x_i.

1/ a) Expliciter les éléments de l'ensemble $\{x_i\}$.

b) Calculer toutes les valeurs p_{x_i} .

2/ Soit Φ la fonction définie par $\Phi(x) = \sum_{x_i<x} p_{x_i}$,

la sommation étant étendue à tous les points de discontinuité de F strictement inférieurs à x.

Etudier la fonction Φ et tracer sa représentation graphique (on pourra, pour ce tracé seulement, choisir a = 1 , b = 2,5 , c = 3).

3/ On note Ψ la fonction $\Psi = F - \Phi$.

a) Montrer que la fonction Ψ est continue et non-décroissante.

b) Pour quelles valeurs de x, Ψ n'est-elle pas dérivable ?

4/ Soit $\alpha = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$ et $\beta = \lim_{x\to+\infty} \Psi(x)$.

a) Montrer que $\alpha \leqslant 1$ et $\beta \leqslant 1$.

b) Quelle relation existe-t-il entre α et β ?

5/ a) Montrer que l'on peut trouver deux fonctions de répartition l'une F_d en escalier, l'autre F_c continue, telles que F soit décomposable en :

$F = \lambda_1 F_d + \lambda_2 F_c$

où λ_1 et λ_2 sont deux réels, que l'on déterminera, satisfaisant aux conditions $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

b) Une telle décomposition de F est-elle unique ?

-FIN-

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1978

Mathématiques 2e épreuve

VENDREDI 5 MAI 1978 DE 8 à 11 H

Durée : 3 heures

Cette épreuve comporte un problème et deux exercices indépendants.

PROBLEME

Soit $A(\lambda)$ une matrice polynomiale carrée d'ordre n, c'est-à-dire une matrice de n lignes et n colonnes dont les éléments sont des polynômes en λ. Les coefficients de ces polynômes et la variable λ sont supposés réels.

La matrice $A(\lambda)$ peut être écrite sous la forme d'un polynôme en λ dont les coefficients sont des matrices carrées scalaires d'ordre n :

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_i \lambda^{m-i} + \dots + A_{m-1}\lambda + A_m$$

Un tel polynôme est appelé "polynôme matriciel" afin de le différencier d'un polynôme ordinaire à coefficients numériques, appelé polynôme scalaire. Il est nul si et seulement si tous ses coefficients sont des matrices nulles.

Le nombre m est le <u>degré</u> du polynôme $A(\lambda)$ à condition que la matrice A_o soit différente de la matrice nulle ; l'ordre n des matrices $A(\lambda)$ et A_i est <u>l'ordre</u> du polynôme ; le polynôme $A(\lambda)$ est dit <u>régulier</u> si et seulement si le déterminant de A_o (noté det A_o ou $|A_o|$) n'est pas nul.

Les opérations sur les matrices permettent d'étendre aux polynômes matriciels d'ordre n les opérations fondamentales connues sur les polynômes scalaires. Ainsi, étant donnés deux polynômes matriciels $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de même ordre n et de degrés respectifs m et p avec par exemple $m \geqslant p$,

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m \qquad A_o \neq 0$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^p + B_1 \lambda^{p-1} + \dots + B_p \qquad B_o \neq 0$$

nous définirons les opérations suivantes :

a) Addition ($\varepsilon = 1$) ou soustraction ($\varepsilon = -1$)

$$A(\lambda) + \varepsilon B(\lambda) = C_o \lambda^m + C_1 \lambda^{m-1} + \dots + C_i \lambda^{m-i} + \dots + C_m$$

où les coefficients C_i sont égaux à :

$$\begin{cases} C_i = A_i & \text{si } p < i \leqslant m \\ C_i = A_i + \varepsilon B_{p-i} & \text{si } i \leqslant p \end{cases}$$

b) Multiplication

$$A(\lambda).B(\lambda) = A_o B_o \lambda^{m+p} + (A_o B_1 + A_1 B_o) \lambda^{m+p-1} + \dots + A_m B_p$$

.../...

QUESTION I

a) Peut-on retrouver sur l'ensemble des polynômes matriciels en λ d'ordre n ainsi définis, une structure d'espace vectoriel sur R ?

b) Le produit de deux polynômes matriciels est-il commutatif ? Que peut-on dire du degré du produit de deux polynômes matriciels de degrés respectifs m et p ?

On suppose $n \leqslant 3$; à quelles conditions sur $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ le produit $A(\lambda).B(\lambda)$ est-il régulier ?

QUESTION II

Soit $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux polynômes matriciels de même ordre n et de degrés respectifs m et p, tels que $B(\lambda)$ soit régulier et $m \geqslant p$:

$$A(\lambda) = A_o \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m \qquad (A_o \neq 0)$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^p + B_1 \lambda^{p-1} + \dots + B_p \qquad |B_o| \neq 0$$

On appelle respectivement "quotient à droite" et "reste à droite" de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ les polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} A(\lambda) = Q(\lambda).B(\lambda) + R(\lambda) \\ \text{degré } R(\lambda) < \text{degré } B(\lambda) \end{cases}$$

On admettra que ces polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ existent et sont uniques lorsque le diviseur $B(\lambda)$ est un polynôme régulier. Lorsque $R(\lambda) = 0$, $A(\lambda)$ est <u>divisible</u> à droite par $B(\lambda)$.

a) En prenant m = 3 et p = 2 les polynômes $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ s'écrivent :

$$A(\lambda) = A_o \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3$$

$$B(\lambda) = B_o \lambda^2 + B_1 \lambda + B_2 \qquad \text{avec } |B_o| \neq 0$$

En appliquant le schéma habituel de la division suivant les puissances décroissantes des polynômes scalaires, exprimer le quotient à droite $Q(\lambda)$ et le reste à droite $R(\lambda)$ de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ en fonction des matrices A_o, A_1, A_2, A_3, B_o, B_1, B_2.

b) Appliquer les résultats ci-dessus pour expliciter le quotient et le reste à droite de la division de :

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 + 2\lambda + 1 & 2\lambda^3 + \lambda^2 \\ -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 & 3\lambda^3 + 4\lambda \end{pmatrix} \text{ par } B(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 3 & -\lambda^2 + 1 \\ -\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix}$$

.../...

QUESTION III

Soit $F(\lambda)$ un polynôme matriciel d'ordre n et de degré m. Il peut être écrit :

soit (1) $F(\lambda) = F_o \lambda^m + F_1 \lambda^{m-1} + \dots + F_i \lambda^{m-i} + \dots + F_{m-1}\lambda + F_m \quad (F_o \neq 0)$

soit (2) $F(\lambda) = \lambda^m F_o + \lambda^{m-1} F_1 + \dots + \lambda^{m-i} F_i + \dots + \lambda F_{m-1} + F_m$

compte tenu du fait que λ est un scalaire.

Une matrice A d'ordre n étant donnée, on appelle valeur à droite de $F(\lambda)$ pour A la matrice :

$$F(A) = F_o A^m + F_1 A^{m-1} + \dots + F_i A^{m-i} + \dots + F_{m-1} A + F_m$$

obtenue par substitution de A au scalaire λ dans la forme (1). De même la valeur à gauche de $F(\lambda)$ pour A s'obtiendrait en substituant A à λ dans (2).

On note E la matrice unité d'ordre n :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 1 \end{pmatrix}$$

a) En prenant successivement m = 2 puis m = 3, déterminer en fonction de A et des coefficients de $F(\lambda)$ le reste à droite de la division suivant les puissances décroissantes de $F(\lambda)$ par le polynôme matriciel $(\lambda E - A)$.

A quelle condition le polynôme matriciel $F(\lambda)$ est-il divisible à droite par $(\lambda E - A)$ dans chacun des cas m = 2 puis m = 3.

b) Le résultat trouvé peut-il être étendu à un degré m quelconque ?

QUESTION IV

Soit A une matrice carrée scalaire d'ordre 2, de terme général a_{ij} (l'indice de gauche désigne systématiquement la ligne, celui de droite la colonne) et $C = \lambda E - A$ la matrice dont le déterminant $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ est le polynôme caractéristique de A.

On note $B(\lambda)$ la matrice dont le terme général b_{ij} (ième ligne, jème colonne) est donné par :

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$$

où C_{ji} est la sous-matrice de C obtenue par suppression de la $j^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne.

Exprimer la matrice $B(\lambda)(\lambda E - A)$ en fonction du polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$. Que peut-on dire de la matrice $\Delta(A)$?

.../...

EXERCICE I

Dans une entreprise, on relève durant le mois de mai, sur un échantillon d'une centaine d'employés, la distribution statistique suivante du couple de variable (X, Y) défini par :

X = âge de l'employé

Y = nombre de journées d'absence en mai

Classe d'âge	X \ Y	0	1	2	3
20 - 30	25	2	10	6	2
30 - 40	35	15	10	5	0
40 - 50	45	2	18	15	5
50 - 60	55	0	2	4	4

Dans la suite nous ferons l'hypothèse suivante : les âges sont répartis en 4 classes $[20, 30[$, $[30, 40[$, $[40, 50[$, $[50, 60[$ et à tous les employés d'une même classe est attribué le même âge égal au centre de la classe (25, 35, 45, 55).

Question :

Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X en utilisant directement, sans les démontrer, les formules du cours. Tracer dans un repère orthonormé d'axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ la droite de régression de Y en X.

EXERCICE II

Soit f une fonction réelle de deux variables réelles indépendantes x et y définie par :

$$f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 - x + 2y$$

Question 1 :

Déterminer s'il existe ou s'ils existent, le ou les extrema de f (on précisera la nature du ou des extrema).

Question 2 :

Calculer $z(X, Y) = f(X + \frac{1}{2}, Y - 1) + \frac{5}{4}$

Démontrer l'inégalité $z(X, Y) > 0$ pour tout couple $(X, Y) \neq (0, 0)$.

Etudier les courbes $z(X, Y) = k$ suivant les valeurs réelles de k.

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1979

Mathématiques 1re épreuve

LUNDI 14 MAI DE 14 H A 18 H

Durée : 4 heures

Dans ce problème, on note :

* J l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

* M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, d'élément générique a_{ij}, i étant l'indice de ligne, j l'indice de colonne.

* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou confondues de M et $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$, $|\lambda_3|$ leurs modules.

* I la matrice unité de dimension 3 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* $Tr(M)$ le nombre : $\sum_{i \in J} a_{ii}$ appelé trace de la matrice M.

PARTIE I

1/ - Démontrer que $Tr(M) = \sum_{i \in J} \lambda_i$.

2/ - Démontrer que l'une, au moins, des valeurs propres de M est réelle.

3/ - Soit M^2 le carré de la matrice M. Démontrer que pour tout $i \in J$, λ_i^2 est valeur propre de M^2.

Réciproquement, si μ est une valeur propre de la matrice M^2, démontrer que l'une au moins des racines carrées (dans $\mathbb{C}$) de μ est valeur propre de M (on pourra poser $\mu = \omega^2$).

Quelle conclusion dégage-t-on de cette étude ?

PARTIE II

Dans cette partie on suppose que M satisfait à la condition (1) suivante :

(1) $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $Tr(M) = k$ et $Tr(M^2) = k^2$

1/ - Démontrer que M admet au moins une valeur propre λ_1 réelle non nulle.

2/ - On suppose $\lambda_1 \geqslant k$.

a) Démontrer que les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont non-réelles ou nulles.

b) Montrer que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.

PARTIE III

Dans cette partie on suppose que M satisfait à la condition (2) suivante :

(2) $\forall (i, j) \in J^2$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}}$

1/ - Pour cette question on suppose, de plus, M singulière (c'est-à-dire non-inversible).

a) Déterminer les valeurs propres de M.

b) Démontrer que les vecteurs colonnes de M sont vecteurs propres de M. A quelle(s) valeur(s) propre(s) sont associés ces vecteurs propres ?

.../...

196.

c) Démontrer que M satisfait à la condition (3) suivante :

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : M^n = 3^{n-1} M$

d) Soit $\Delta(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_o$ le déterminant de la matrice $M - \lambda I$, où λ est un complexe. Déduire de (3) que, si on note $\Delta(M)$ la matrice : $a_3 M^3 + a_2 M^2 + a_1 M + a_o I$, alors $\Delta(M)$ est la matrice nulle.

e) Peut-on trouver un polynôme φ à coefficients réels de degré strictement inférieur à trois tel que $\varphi(M)$ soit la matrice nulle ?

2/ - Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit singulière est : $\forall (i, j, k) \in J^3, \quad a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij}$.

3/ - a) Démontrer que si M est régulière (c'est-à-dire inversible) elle admet alors une seule valeur propre réelle λ_1 et que $\lambda_1 > 3$.

b) En déduire que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.

4/ - Démontrer que M est singulière si et seulement si elle admet la valeur propre 3.

PARTIE IV

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base canonique $\mathcal{B}_o$, soit f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_o$ est :

$$M_o = \begin{pmatrix} 1 & 1/x & 1/xz \\ x & 1 & 1/z \\ xz & z & 1 \end{pmatrix}, \ x > 0 \text{ et } z > 0.$$

1/ - Déterminer dans la base $\mathcal{B}_1$ définie par les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ xz \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}$$

la matrice T_o de l'endomorphisme f_1.

2/ - Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice T_α dans la base $\mathcal{B}_1$ est définie par :

$$T_\alpha = T_o + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que quel que soit α réel, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -3$, T_α est singulière et possède trois valeurs propres distinctes que l'on déterminera.

3/ - a) Déterminer la matrice M_α de l'endomorphisme f_α dans la base $\mathcal{B}_o$.

b) Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont, pour tout α réel $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -3$, vecteurs propres de f_α.

c) La matrice M_o est-elle diagonalisable ?

CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1979

Mathématiques 2e épreuve

MARDI 15 MAI 1979 DE 14 H A 17 H

Durée : 3 heures

PROBLEME N° 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$, $\overrightarrow{B}$ dont on donne les coordonnées dans la base canonique de E.

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 400 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 24 \\ 300 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 400 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Question 1 :

Soit E' le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$. Déterminer la dimension de E'. Que peut-on dire de l'existence et du nombre de solutions du système (écrit sous forme vectorielle) :

$$\overrightarrow{A_1}\, x_1 + \overrightarrow{A_2}\, x_2 + \overrightarrow{A_3}\, x_3 = \overrightarrow{B} \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Question 2 :

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 400\, x_1 + 24\, x_2 - 8\, x_3 = 30 \\ 9\, x_1 + 300\, x_2 - 15\, x_3 = 60 \\ 4\, x_1 - 8\, x_2 + 400\, x_3 = 50 \end{cases}$$

On donnera les résultats numériques à 10^{-4} près.

Question 3 :

On dit qu'une suite de matrices colonnes à trois lignes à coefficients réels de terme général $X_n = (x_i^{(n)})$, tend, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice colonne à trois lignes $X = (x_i)$ si quel que soit l'indice i la suite réelle $(x_i^{(n)})$ converge vers (x_i).

a) Résultats préliminaires :

On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \text{système (1)}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle $A\,X = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nous supposerons dans ce qui suit que les coefficients diagonaux de la matrice A ne sont pas nuls :

$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

En résolvant la première équation du système (1) par rapport à x_1, la deuxième équation par rapport à x_2 et la troisième équation par rapport à x_3, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \alpha_{13}\, x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{23}\, x_3 \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}\, x_1 + \alpha_{32}\, x_2 \end{cases} \qquad \text{système (2)}$$

Soit encore matriciellement :

$$X = \beta + \alpha\, X \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

.../...

198.

Posons $X_o = \beta$ et construisons la suite : $(X_o, X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots)$ définie par $X_n = \beta + \alpha X_{n-1}$

Montrer que si la suite $(X_o, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ possède une limite notée X, alors cette limite est une solution du système (2) et par conséquent du système (1).

Nous admettrons, pour la suite du problème, l'existence de la limite X.

b) Résolution d'un système d'équations linéaires par approximations successives :

En utilisant le résultat de la question 3 - a), déterminer une solution approchée du système d'équations :

$$\begin{cases} 400\, x_1 + 24\, x_2 - 8\, x_3 = 30 \\ 9\, x_1 + 300\, x_2 - 15\, x_3 = 60 \\ 4\, x_1 - 8\, x_2 + 400\, x_3 = 50 \end{cases}$$

On se contentera d'expliciter une solution approchée du système donnée par le 3ème terme X_2 de la suite (X_n) (on donnera les résultats avec quatre décimales).

PROBLEME N° 2

Désignons par P la population des français et notons p la proportion d'individus de P possédant une automobile. Désignons par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des échantillons de taille n , issus de la population P, que l'on peut obtenir par sondages aléatoires (nous supposerons que les n individus sont tirés au hasard l'un après l'autre, chaque individu étant remis dans la population avant le tirage de l'individu suivant) ; notons F_n la variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ qui à tout échantillon de taille n fait correspondre la proportion f_n d'individus de l'échantillon qui possèdent une automobile.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit X_i la variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ telle que, étant donné un échantillon $E_n \in \mathcal{E}_n$:

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si le ième individu de } E_n \text{ possède une automobile} \\ X_i = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Question 1 :

a) Exprimer la variable aléatoire F_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire nF_n (on justifiera avec précision le résultat).

c) Calculer $E(F_n)$ (espérance mathématique de F_n)

$V(F_n) = Var(F_n)$ (variance de F_n)

d) Dans le cas où n = 64 et où l'on sait que p est tel que : $40\% \leqslant p \leqslant 60\ \%$, par quelle loi de probabilité peut-on approximer la distribution de la variable aléatoire nF_n (on exprimera en fonction de n et p le ou les paramètres de cette loi).

Question 2 :

a) En se plaçant sous les hypothèses de la question 1-d), déterminer $t > 0$ tel que :

$$\text{Prob}\left(-t \leqslant \frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} \leqslant +t\right) = 0{,}95$$

b) Soit E_n un échantillon de taille n = 64 sur lequel on a mesuré $f_n = 0{,}45$; en tenant compte de cette observation, déterminer un intervalle $[p_1, p_2]$ tel que :

$$\text{Prob}\ (p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 0{,}95.$$

EXERCICE

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3\, x^4 - 5\, x^3 - 3\, x - 11}{x^3 - 1}\, dx$$

.../...

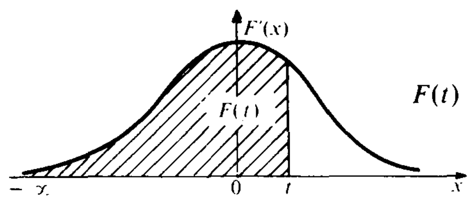
-5-

ANNEXE

Dans cette annexe, on donne :

- des extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite ;
- une précision concernant la question 2.b) du problème N° 2.

A/ - Extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite :



$F(t) = P(\{ T < t \})$.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0.591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0.606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0.719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962,5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 6	0,995 4	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

B/ - Dans le problème N° 2, question 2.b (page 4), on précise qu'il s'agit, en tenant compte de l'observation faite sur un échantillon ($f_n = 0,45$; $n = 64$) et du résultat de la question 2.a (on prendra la valeur de t calculée à 10^{-2} près) de déterminer deux nombres p_1 et p_2 tels qu'il y ait 95 chances sur 100 que la valeur p soit comprise entre p_1 et p_2. (La notation $\text{prob}(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 0,95$ étant une notation abusive couramment admise à ce propos).

FIN

-222-

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

Mathématiques 1re épreuve

Durée 4 heures

Dans tout le problème on désigne par :

- n *un entier naturel non-nul,*
- p *un nombre de l'intervalle* $]0,1[$,
- p_1, p_2, p_3 *des nombres réels strictement positifs,*
- $\mathbb{N}_n$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{N}$ *formé par les entiers naturels au plus égaux à* n.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète dont la distribution de probabilité est définie par :

$$P(X=x_i) = \alpha_i \quad , \quad (i \in \mathbb{N}_n) \ ,$$

et si k est un entier naturel non-nul, on appelle :

- *moment d'ordre k de X le nombre* $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i x_i^k$
- *moment centré d'ordre k de X le nombre* $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i (x_i - E(X))^k$

où E(X) désigne l'espérance mathématique de X.

PARTIE PRELIMINAIRE

1/ Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que $x+y \leqslant n$ on a les égalités :

$$C_n^x . C_{n-x}^y = C_n^y . C_{n-y}^x = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$$

.../...

2/ Soit Z une variable aléatoire dont la distibution de probabilité est binomiale de paramètres n,p. Pour tout entier naturel k non-nul , on désigne respectivement par μ_k et m_k les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire Z.

Démontrer que :

$$\mu_{k+1} = np\mu_k + p(1-p).\frac{d\mu_k}{dp}$$

et pour $k \geqslant 2$:

$$m_{k+1} = p(1-p)\left[nkm_{k-1} + \frac{dm_k}{dp}\right] ,$$

où $\frac{d\mu_k}{dp}$ et $\frac{dm_k}{dp}$ sont les dérivées de μ_k et m_k par rapport à p.

PARTIE I

Soit T_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par :

$$T_n = \{(x,y)/x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}, x+y\leqslant n\}.$$

On considère la fonction f définie sur T_n par :

$$f(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\, p_1^x . p_2^y . p_3^{n-x-y} .$$

1/ A quelle condition doivent satisfaire p_1, p_2, p_3 pour que l'on ait :

$$\sum_{(x,y)\in T_n} f(x,y) = 1 \quad ?$$

On supposera cette condition réalisée dans toute la suite du problème.

2/ On considère la variable aléatoire discrète à deux dimensions, notée (X,Y), dont la distribution de probabilité conjointe est définie pour tout (x,y) élément de T_n par :

$$P(X=x, Y=y) = f(x,y).$$

a/ Déterminer les distributions de probabilité marginales des variables aléatoires X et Y.

b/ En déduire les espérances mathématiques E(X), E(Y) ainsi que les variances V(X) et V(Y) des variables aléatoires X et Y.

c/ Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes? Justifier votre réponse.

.../...

3/a/ Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire $S=X+Y$.

b/ Déduire de (I,3,a) la valeur de la covariance des variables aléatoires X et Y, puis celle de leur coefficient de corrélation linéaire.

PARTIE II

1/a/ Etant donné y élément de $\mathbb{N}_n$, déterminer la distribution de probabilité conditionnelle de X sachant $(Y=y)$.

Dans la suite du problème on notera X_y *la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité.*

b/ La distribution de probabilité de X_y est "*classique*", la reconnaître et en donner les paramètres.

2/ Déterminer en fonction de n,y,p_1,p_2 l'espérance mathématique $E(X_y)$ et la variance $V(X_y)$ de la variable aléatoire X_y.

3/ Pour tout entier naturel non-nul k, on désigne respectivement par $\mu_{y,k}$ et $m_{y,k}$ les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire X_y. Etablir les relations (1) et (2) suivantes :

$$(1)\quad \mu_{y,k+1} = (n-y)\frac{p_1}{1-p_2}\mu_{y,k} + \frac{p_1p_3}{(1-p_2)^2}\cdot\frac{d\mu_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$$

et pour $k \geqslant 2$:

$$(2)\quad m_{y,k+1} = \frac{p_1p_3}{(1-p_2)^2}\left[(n-y)k\,m_{y,k-1} + \frac{dm_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}\right],$$

où $\frac{d\mu_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$ et $\frac{dm_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$ représentent les dérivées par rapport à $\frac{p_1}{1-p_2}$ de $\mu_{y,k}$ et $m_{y,k}$.

.../...

4/ Que deviennent les résultats des questions II 1/,2/,3/, lorsque l'on considère la distribution de probabilité conditionnelle de Y sachant (X=x) ?

On notera dans la suite du problème Y_x *la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité.*

PARTIE III

Soient φ et ψ les applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(x) = E(Y_x) \quad \text{et} \quad \psi(y) = E(X_y) \ .$$

Le plan affine étant rapporté au repère $(O;\vec{x},\vec{y})$ on considère les représentations graphiques C et Γ des fonctions :

$$y = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(y) \ .$$

1/ Construire C et Γ dans le cas particulier :
$n = 12$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/6$.

2/ On appelle support φ^s et ψ^s des fonctions φ et ψ , les fonctions affines réelles dont les restrictions à $\mathbb{N}_n$ sont respectivement φ et ψ . On note C^s et Γ^s leur représentation graphique.

a/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C^s et Γ^s .

b/ A quelle(s) condition(s) C et Γ ont-elles un point commun ?

-226-

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

Mathématiques 2e épreuve

Durée 3 heures

PROBLEME 1

Soit E l'espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$ composé des fonctions polynômes à coefficients réels à une inconnue réelle de degré inférieur ou égal à deux et du polynôme nul. Pour tout élément p de E nous désignerons respectivement par p' et p'' les fonctions dérivée première et dérivée seconde de p.

Soit Φ l'application qui à tout polynôme $p \in E$ associe la fonction $\Phi(p)$ définie pour tout x réel par :

$$[\Phi(p)](x) = \int_0^1 \left[ap(t)+bxtp'(x-t)+cx^2t^2p''(x-t)\right]dt$$

où a,b,c sont des éléments du corps des réels $\mathbb{R}$.

Nous noterons $\beta=(p_0,p_1,p_2)$ la base canonique de E avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$p_0(x)=1 \ ; \ p_1(x)=x \ ; \ p_2(x)=x^2$$

Question 1 Montrer que Φ est un endomorphisme de E

Question 2 Déterminer la matrice A de l'endomorphisme Φ dans la base β

A quelle(s) condition(s) sur a,b,c l'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

.../...

Question 3 Considérons le cas particulier a=6, b=6, c=3

a - Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme Φ

b - Déterminer une base de chacun des sous espaces propres

c - Déterminer pour tout entier naturel n non nul la matrice B de l'endomorphisme Φ^n dans la base β

PROBLEME 2

Dans une banque on procède à une étude statistique sur un échantillon E de n clients. Pour chacun des clients on a relevé d'une part une estimation du revenu mensuel et d'autre part la valeur du solde moyen du compte courant (évalué sur une période donnée).

La variable statistique "revenu d'un client" est notée X ; la variable statistique "solde moyen du compte courant d'un client" est notée Y.

On donne ci-dessous le tableau des fréquences absolues correspondant à la distribution statistique du couple (X,Y) sur l'échantillon E observé (n=1000) (on a regroupé en classes les valeurs de X et de Y exprimées en francs).

classes de Y / classes de X	$0 \leq Y < 1000$	$1000 \leq Y < 2000$	$2000 \leq Y < 3000$	$3000 \leq Y < 4000$	$4000 \leq Y < 5000$
$3000 \leq X < 5000$	60	30	10	0	0
$5000 \leq X < 7000$	70	100	20	10	0
$7000 \leq X < 9000$	80	100	150	18	2
$9000 \leq X < 11000$	40	60	90	50	10
$11000 \leq X < 13000$	10	20	45	15	10

Nous noterons c_i $(i \in \{1,2,\dots 5\})$ les centres des classes des valeurs de X ($c_1=4000, c_2=6000, c_3=8000, c_4=10000, c_5=12000$)

.../...

Soit $\{E_1,E_2,\ldots E_5\}$ la partition de l'ensemble E, telle que E_i désigne le sous ensemble de E des clients dont le revenu appartient à la classe de centre c_i ; nous noterons n_i le nombre d'éléments de E_i.

La distribution de la variable statistique Y sur le sous ensemble E_i de E est dite distribution conditionnelle de Y pour $X=c_i$; la moyenne et l'écart type de cette distribution de Y sont respectivement appelés moyenne conditionnelle et écart type conditionnel de Y pour $X=c_i$ et notées m_{y/c_i} , σ_{y/c_i}.

Question 1

Dans un plan affine rapporté au repère orthogonal $(o,\vec{x},\vec{y})$ on considère un ensemble de k points M_i $(i=1,2,\ldots k)$ non alignés de coordonnées (x_i,y_i) ; on affecte à chaque point M_i un coefficient m_i (nombre réel strictement positif).
Dans les calculs on utilisera les notations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = M \ ; \ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \overline{X} \ ; \ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i = \overline{Y}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i y_i = \overline{XY} \ ; \ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 = \overline{X^2} \ ; \ \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i^2 = \overline{Y^2} \ .$$

Démontrer qu'il existe une droite D, et une seule, d'équation $y=ax+b$ pour laquelle la somme

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i-ax_i-b)^2 m_i \quad \text{est minimale}$$

Quelle est l'équation de cette droite que l'on appellera droite d'ajustement de l'ensemble des k points M_i affectés des coefficients m_i ? On remarquera que les écarts entre les points M_i et la droite D sont mesurés parallèlement à l'axe $(o,\vec{y})$.

Remarque :

Compte tenu du programme du concours les solutions se référant à la notion de dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ne peuvent être acceptées

.../...

Dans les questions suivantes les résultats numériques seront donnés avec deux décimales.

QUESTION 2

Calculer la moyenne et l'écart type de la variable X dans E.
Calculer les moyennes conditionnelles m_{y/c_i} ($i \in \{1,2,\dots,5\}$) de la variable Y sur les ensembles E_i.
Tracer dans le repère orthogonal $(o,\vec{x},\vec{y})$ la ligne polygonale (M_1,M_2,M_3,M_4,M_5) où M_i est le point de coordonnées $(c_i, m_{y/c_i})$
Interpréter le graphique ainsi obtenu (2 lignes maximum).

QUESTION 3

En utilisant le résultat de la question 1, déterminer l'équation de la droite d'ajustement de l'ensemble des points M_i ($i=1,2,\dots 5$) définis à la question 2, chacun d'eux étant affecté du coefficient $m_i = \frac{n_i}{n}$ (les écarts étant mesurés parallèlement à l'axe $(o,\vec{y})$).

Remarque :

Les candidats n'ayant pas résolu la question 1 pourront utiliser le résultat suivant : la droite considérée est la droite de régression de Y en X.

QUESTION 4

Calculer, sur l'échantillon E observé, la valeur du coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y).
Interpréter le résultat (2 lignes maximum).

o ———————— o

o ——— o

o

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS - CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

Mathématiques 1re épreuve

SAMEDI 9 MAI DE 8 H A 12 H

Durée 4 heures

PREAMBULE

Dans ce problème :

- on note N_n^* l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls ;
- on appelle "suite associée à une variable aléatoire réelle X" (X étant quelconque), une suite infinie $\{X_i\}$ de variables aléatoires réelles X_i ($i \in N^*$) de même loi de probabilité que X, telles que pour tout $n \in N^*$, les n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ soient indépendantes.

PARTIE PRELIMINAIRE

Soit $a > 0$ un réel donné.

Soit $L_1(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale :

$$\int_0^a f(x)dx \text{ converge ;}$$

et soit $L_2(a)$ l'ensemble des fonctions numériques f, continues sur $]0, a]$, à valeurs positives, telles que l'intégrale :

$$\int_0^a f^2(x)dx \text{ converge.}$$

1/ a/ Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments de $L_2(a)$, $\dfrac{(f_1^2 + f_2^2)}{2}$ et le produit $f_1 \cdot f_2$ sont éléments de $L_1(a)$.

b/ En déduire que $L_2(a)$ est inclus dans $L_1(a)$.

2/ p et q étant des entiers naturels donnés, on considère la fonction réelle $f_{p,q}$ de la variable réelle x définie pour x strictement positif par :

$$f_{p,q}(x) = x^{p-1}(\text{Log } x)^q$$

a/ A quelle condition nécessaire et suffisante notée "C_o" $f_{p,q}$ est-elle élément de $L_2(1)$?

b/ La condition "C_o" étant réalisée, calculer :

$$I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)\,dx.$$

PARTIE I

Soit X une variable aléatoire réelle, ayant une espérance mathématique $E(X) = \mu \neq 0$ et une variance $V(X) = \sigma^2 > 0$.

On considère la suite $\{X_i\}$ associée à X ainsi que la suite de variables aléatoires $\{T_n\}$ dont les éléments sont définis quel que soit $n \in N^*$ par :

$$T_n = \alpha_{1n} X_1 + \alpha_{2n} X_2 + \dots + \alpha_{in} X_i + \dots + \alpha_{nn} X_n$$

où les coefficients α_{in}, $(i \in N_n^*)$ sont des réels positifs ou nuls.

1/ A quelle condition nécessaire et suffisante notée "$C_1(\mu)$" a-t-on :

$$E(T_n) = \mu \ ?$$

2/ La condition "$C_1(\mu)$" étant réalisée, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante notée "$C_2(\sigma^2)$" pour que $\lim\limits_{n\to\infty} V(T_n) = 0$ est :

$$\text{"}C_2(\sigma^2)\text{"} : \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{in} \cdot \alpha_{jn} = 1/2$$

3/ Les conditions "$C_1(\mu)$" et "$C_2(\sigma^2)$" étant réalisées, vers quelle valeur t_0 la suite de variables aléatoires $\{T_n\}$ converge-t-elle en probabilité ?

Les indices p et q, définis dans le préliminaire, satisfaisant à la condition "C_o" sont maintenant fixés. On pose $f_{p,q} = f$ et $I_{p,q} = I$.

PARTIE II

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. On notera g sa fonction densité de probabilité.

On admettra qu'il existe une variable aléatoire réelle Y dont l'espérance mathématique et le moment d'ordre 2 sont donnés respectivement par :

$$E(Y) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \int_0^1 f^2(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit $\{Y_i\}$ la suite associée à Y, on pose :

$$\forall n \in N^*, \; Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

1/ a/ Montrer que, quels que soient les entiers i et n, Y_i et Z_n satisfont à la condition "$C_1(I)$".

b/ Montrer que Z_n satisfait à la condition "$C_2[V(Y)]$".

c/ Montrer que, quel que soit $i \in N_n^*$: $V(Z_n) = \frac{1}{n-1} E[(Y_i - Z_n)^2]$

2/ Montrer que l'inégalité :

$$|Z_n - I| \leqslant 10\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}$$

est satisfaite avec une probabilité au moins égale à 0,99.

3/ Lorsque n est suffisamment grand, on peut admettre que la variable aléatoire centrée réduite associée à Z_n a pour loi de probabilité la loi normale centrée réduite. Sous cette hypothèse, montrer que l'on peut améliorer l'inégalité précédente, c'est-à-dire trouver :

$a < 10$ et $P > 0{,}99$ tels que :

$$Pr\left(|Z_n - I| \leqslant a\sqrt{\frac{V(Y)}{n}}\right) \geqslant P$$

PARTIE III

Nota : dans cette partie la notation X^j signifie "X indice j" et NON "X puissance j".

On subdivise l'intervalle $]0, 1]$ en k sous-intervalles non vides $]a_j, a_{j+1}]$ disjoints tel que :

$$\bigcup_{j=1}^{k}]a_j, a_{j+1}] =]0, 1]$$

A chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}]$ on associe :

- le nombre $I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,dx$;
- la variable aléatoire X^j de loi de probabilité uniforme sur celui-ci (on notera g_j sa densité de probabilité) ;
- la suite $\{X_i^j\}$ associée à X^j ($i \in N^*$) ;
- la variable aléatoire Y^j, dont on admettra l'existence, ayant pour espérance mathématique et pour moment d'ordre 2 :

$$E(Y^j) = (a_{j+1} - a_j)\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,g_j(x)\,dx$$

$$E\left[(Y^j)^2\right] = (a_{j+1} - a_j)^2\int_{a_j}^{a_{j+1}} f^2(x)\,g_j(x)\,dx$$

- la suite $\{Y_i^j\}$ associée à Y^j ($i \in N^*$)
- la variable aléatoire $Z_{n_j}^j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Y_i^j$, ($n_j \in N^*$).

On pose $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ et on suppose que les variables aléatoires :

- X^j, $j \in N_k^*$ sont indépendantes ;
- Y_i^j, $i \in N_{n_j}^*$, $j \in N_k^*$ sont indépendantes ;
- $Z_{n_j}^j$, $j \in N_k^*$ sont indépendantes.

1/ Montrer que, quels que soient les entiers n_j, i, j : Y_i^j et $Z_{n_j}^j$ satisfont à la condition "$C_1(I_j)$" et que $Z_{n_j}^j$ satisfait à la condition "$C_2\,[V(Y^j)]$".

2/ On considère la variable aléatoire $Z_n^* = \sum_{j=1}^{k} Z_{n_j}^j$

Montrer que $E(Z_n^*) = I$.

3/ On suppose que pour tout $j \neq 1$ et $j \in N_k^*$: $\quad na_j \in N^*$

a/ démontrer que si $\forall j \in N_k^*$, $n_j = (a_{j+1} - a_j)n$ alors $V(Z_n) \geqslant V(Z_n^*)$.

b/ En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} V(Z_n^*) = 0$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS - CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

Mathématiques 2e épreuve

LUNDI 11 MAI DE 14 H A 17 H

Durée 3 heures

PROBLEME I

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées séparément.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de E et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice, dans la base $\mathcal{E}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PREMIERE PARTIE

Question 1/. :

a)- Montrer que f admet une valeur propre triple μ que l'on déterminera.

b)- Déterminer le rang de l'endomorphisme $(f - \mu i)$ où i désigne l'application identique de E ; en déduire la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre μ. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Question 2/. :

a)- Déterminer un vecteur propre $\vec{u_1}$ de f.

Soit E_1 le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{u_1}$.

Soit E'_1 le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

b)- Montrer que E_1 et E'_1 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Notons p_1 l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui associe à tout vecteur $\vec{x}$ de E sa projection sur E'_1 parallèlement à E_1 ; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la base $\mathcal{E}$;

c)- Déterminer les coordonnées de $p_1(\vec{x})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de E'_1.

d)- Déterminer la matrice P_1 représentant p_1 dans $\mathcal{E}$ puis la matrice M représentant $p_1 \circ f$ dans $\mathcal{E}$.

<u>Question 3/.</u> :

a)- Montrer que μ est valeur propre de $p_1 \circ f$.

b)- Quelle est la dimension du sous-espace propre de $p_1 \circ f$ associé à la valeur propre μ.

c)- Déterminer un vecteur propre $\vec{u_2}$ de $p_1 \circ f$ associé à la valeur propre μ.

d)- Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{e_1})$ est une base de E ; quelle est la matrice de f dans cette base.

DEUXIEME PARTIE

<u>Question 1/.</u> :

Notons ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

a)- Montrer que ${}^tA.A$ est la matrice dans la base $\mathcal{E}$ d'une forme quadratique définie positive φ.

On notera $\|\vec{x}\|$ la norme du vecteur $\vec{x}$ de E définie par la forme quadratique φ, et X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E sur la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

b)- Exprimer $\|\vec{x}\|$ en fonction de X et A.

c)- Application numérique : calculer $\|\vec{x}\|$ pour $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Question 2/. :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ une autre base de E ; soit Y la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la base $\mathcal{F}$, et soit Q la matrice de changement de base telle que $Y = QX$.

a)- Exprimer $\|\vec{x}\|$ en fonction de Y, Q, A.

b)- Montrer que l'on peut choisir $\mathcal{F}$ pour que $\|\vec{x}\|^2 = {}^tY.Y$; donner un exemple d'une telle base et préciser la matrice de changement de base Q correspondante.

Question 3/. :

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$, notons $S = \{\|h(\vec{x})\| / \vec{x} \in E,\ \|\vec{x}\| = 1\}$.

a)- Montrer que S est majoré.

Nous admettrons que le plus petit majorant de S appartient à S.

Pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$ notons $\phi(h) = \sup\limits_{\|\vec{x}\| = 1} \{\|h(\vec{x})\|\}$

b)- Montrer que $\forall (h, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$

$$\phi(h \circ g) \leqslant \phi(h).\phi(g)$$

c)- Montrer que pour tout élément h de $\mathcal{L}(E)$ les modules des valeurs propres de h sont inférieurs ou égaux à $\phi(h)$.

PROBLEME II

f désignant une fonction numérique définie et continue sur $I = [-1, +1]$, on définit l'application F de I dans R par :

$$\forall x \in I \qquad F(x) = \int_{-1}^{+1} |t(x - t)|\ f(t)\ dt$$

Question 1/. :

- Etudier la parité de F lorsque f est paire puis impaire.

Question 2/. :

a)- Donner pour $x \in [-1, 0]$ puis pour $x \in [0, 1]$ une expression de F ne contenant pas le symbole "valeur absolue".

b)- F est-elle continue sur I ?

c)- Etudier la dériviabilité de F sur $]-1, 0[$, sur $]0, 1[$, puis en 0.

d)- Etudier de même l'existence de la dérivée seconde F'' que l'on explicitera.

Question 3/. :

Soit $f(t) = \dfrac{1}{1 + t^6}$

- *Calculer* $\varphi_1(y) = \displaystyle\int_0^y t\, f(t)\, dt$

$$\varphi_2(y) = \int_0^y t^2\, f(t)\, dt$$

où y est un réel quelconque.

- *En déduire $F(x)$.*

Question 4/. :

Soit $f(t) = |t| \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{2 + t}\right)$

- *Déterminer le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ et $F'(0)$ que l'on ne calculera pas.*

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS 1982

Mathématiques 1re épreuve (4 h)

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels.

La matrice A à n lignes et p colonnes $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de rang égal à Inf (n,p) est donnée.

Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par I_k la matrice unité d'ordre k.

PARTIE I

1/ On suppose $p < n$ et on désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des matrices G carrées d'ordre n, dites invariantes à gauche de A, satisfaisant à la condition :

(1) $$GA = A$$

a) Montrer que $\Gamma(A)$ est non-vide et est stable pour la multiplication des matrices.

b) Montrer que le sous-ensemble $\Gamma'(A)$ de $\Gamma(A)$ formé par les matrices inversibles de $\Gamma(A)$ a une structure de groupe pour le produit matriciel.

c) Démontrer que toute matrice G élément de $\Gamma(A)$ admet la valeur propre + 1. Déterminer un minorant de la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

2/ On suppose $p > n$; déterminer l'ensemble $\Gamma(A)$ défini comme dans la question 1.

DANS TOUTE LA SUITE DU PROBLEME ON SUPPOSE $p < n$

PARTIE II

Dans cette partie la matrice G élément de $\Gamma(A)$, ainsi que la matrice A, sont décomposées en deux blocs de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} G_1 & \vdots & G_2 \end{pmatrix}$$

où A_1 est une matrice carrée d'ordre p, SUPPOSEE INVERSIBLE

A_2 est une matrice à $n - p$ lignes et p colonnes

G_1 est une matrice à n lignes et p colonnes

G_2 est une matrice à n lignes et $n - p$ colonnes.

1/ Exprimer le produit GA en fonction des matrices G_1, G_2, A_1 et A_2.

2/ Montrer que G est parfaitement déterminée par le choix de G_2 et donner une décomposition en deux blocs de G exprimée en fonction de A_1, A_2 et G_2.

3/ On désigne par $\Delta(A)$ l'ensemble des matrices D carrées dites invariantes à droite de A satisfaisant à la condition $AD = A$. On note ${}^tA$ la transposée de A.

a) Montrer que les ensembles $\Gamma(A)$ et $\Delta({}^tA)$ sont en bijection.

b) montrer que les ensembles $\Delta(A)$ et $\Gamma({}^tA)$ sont égaux.

.../...

PARTIE III

Dans cette partie la matrice A conserve sa décomposition en bloc définie en II, et la matrice A_1 est toujours supposée inversible. Quant à la matrice G, élément de $\Gamma(A)$, on considère sa décomposition en quatre blocs.

$$G = \begin{pmatrix} G'_1 & \vdots & G'_2 \\ \cdots & & \cdots \\ G'_3 & \vdots & G'_4 \end{pmatrix}$$

où G'_1 est une matrice carrée d'ordre p

G'_2 est une matrice à p lignes et n - p colonnes

G'_3 est une matrice à n - p lignes et p colonnes

G'_4 est une matrice carrée d'ordre n - p.

1/ Etablir la relation $G'_1 = I_p - G'_2 A_2 A_1^{-1}$ et donner l'expression de G'_3 en fonction de G'_4, A_1 et A_2.

2/ Soit A^d la matrice à p lignes et n colonnes décomposée en deux blocs de la manière suivante :

$$A^d = \begin{pmatrix} A^d_1 & \vdots & A^d_2 \end{pmatrix}$$

où A^d_1 est une matrice carrée d'ordre p

A^d_2 est une matrice à p lignes et n - p colonnes.

Exprimer le produit AA^d en fonction de A_1, A_2, A^d_1 et A^d_2.

3/ On dit que la matrice A^d est une inverse à droite de A relative à l'élément invariant G de $\Gamma(A)$ si A, A^d et G satisfont à la relation (2)

(2) $\qquad AA^d = G$

a) Exprimer A^d_1 et A^d_2 en fonction des matrices A_1, A_2 et G'_2.

b) Déduire des résultats précédents que G'_2 et G'_4 sont liées par la relation de compatibilité (3) suivante :

(3) $\qquad A_2 A_1^{-1} G'_2 = G'_4$

4/ Soit $\Gamma''(A)$ le sous-ensemble de $\Gamma(A)$ formé des matrices G relativement auxquelles A a un inverse à droite A^d.

a) Démontrer que $\Gamma''(A)$ est inclus dans $\Delta(A^d)$ en déduire que G élément de $\Gamma''(A)$ est idempotent (c'est-à-dire : $G^2 = G$).

b) Montrer que G élément de $\Gamma''(A)$ est diagonalisable.

5/ Soit G appartenant à $\Gamma''(A)$; on suppose qu'il existe une matrice A^g, inverse à gauche de A relativement à un élément D de $\Delta(A)$, c'est-à-dire vérifiant $A^g A = D$.

Montrer que $A^g = A^d$.

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS 1982

Mathématiques 2e épreuve (3 h)

PROBLEME N° 1

Les parties I et II sont indépendantes.

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers prenant chacune un nombre fini de valeurs, respectivement

$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$.

On suppose que les x_i (resp. y_j) sont deux à deux distinctes.

et on pose, pour tout $(i,j) \in \{1,2,\dots,\ell\} \times \{1,2,\dots,m\}$

$p_i = P(X=x_i)$, $q_j = P(Y=y_j)$, $r_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$

$\delta_{ij} = r_{ij} - p_i q_j$

I

1°) Montrer que si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.

2°) Soit U une variable aléatoire réelle qui prend les valeurs -2, -1, 0, 1, 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$. On pose $V=U^2$

a) Déterminer la loi de probabilité conjointe de (U,V) et la loi de probabilité de V.

b) U et V sont-elles indépendantes ?

c) Calculer la covariance de U et de V. Qu'en concluez vous ?

II

Etant donnée une suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels, on considère, pour chaque entier naturel non nul p, le déterminant d'ordre p défini par $\Delta_1 = 1$ et pour $p \geqslant 2$,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \dots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

où α_i^n désigne la puissance $n^{\text{ième}}$ de α_i

1°) Donner l'expression de Δ_3 sous forme d'un produit de trois facteurs.

2°) Montrer que Δ_p, considéré comme polynôme de la variable α_p est divisible par le produit

$$\prod_{i=1}^{p-1} (\alpha_p - \alpha_i) .$$

3°) En déduire, en considérant le développement de Δ_p par rapport à sa dernière colonne, que Δ_p est nul ou de degré p-1 par rapport à α_p .

4°) Montrer que $\Delta_p = \Delta_{p-1} \times \prod_{i=1}^{p-1} (\alpha_p - \alpha_i)$ puis que Δ_p est non nul si et seulement si les α_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ sont deux à deux distincts.

On suppose que pour tous les entiers h et k tels que $0 \leqslant h \leqslant \ell-1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$, la covariance des variables aléatoires X^h et Y^k est nulle.

On rappelle que l'espérance du produit $X^h Y^k$ est donnée par :

$$E(X^h Y^k) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, x_i^h\, y_j^k .$$

1°) Montrer que pour $0 \leqslant h \leqslant \ell-1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\, x_i^h\, y_j^k = 0$.

2°) On pose, pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$, et $1 \leqslant i \leqslant \ell$ $\quad \displaystyle\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\, y_j^k$.

Déduire de la question précédente que $(\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \dots, \gamma_{\ell k})$ est solution du système formé par les équations :

$$\sum_{i=1}^{\ell} \beta_{ik}\, x_i^h = 0 \quad h \in \{0, 1, \dots, \ell-1\},$$

où les inconnues sont les β_{ik} , $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$
Montrer en utilisant le résultat du II 4° que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$

$$\gamma_{ik} = 0.$$

3°) Par une méthode analogue montrer que

$\forall (i,j) \in \{1, \dots, \ell\} \times \{1, 2 \dots, m\}$, $\delta_{ij} = 0$.

Quel est l'énoncé de la propriété ainsi établie ?

PROBLEME N° 2

1) Soit g la fonction définie pour $u \in \mathbb{R}^*$ par :

$$g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1}$$

Comment faut-il choisir $g(0)$ pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer la convergence de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} g(u)\, du$$

(on ne cherchera pas à calculer J).

3) Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + x^4 \int_0^{1/x^2} g(u)\, du$$

a) Montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer pour x non nul la dérivée $f'(x)$ de f.

c) Déterminez le développement limité de f à l'ordre 4, au voisinage de 0, puis le développement limité de f' à l'ordre 3, au voisinage de 0 (on donne $J = \pi^4/15$) .

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris 1983

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Pour tout entier naturel n on désigne par N_n l'ensemble des entiers naturels au plus égaux à n et, pour $n \geq 1$, par N_n^* l'ensemble des entiers naturels non nuls au plus égaux à n .

Dans ce problème on appelle fraction continue limitée toute fraction du type :

$$f = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

dans laquelle $a_0 \in N$ et pour tout $j \in N_n^*$, a_j et b_j sont des entiers naturels non nuls et sans diviseur commun.

Une telle fraction est notée :

$$f = \left[a_0 \; ; \; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^n ,$$

et pour tout $k \in N_n^*$ la fraction :

$$f_k = \left[a_0 \; ; \; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^k$$

est appelée kième fraction correspondante de f .

On rappelle que : si a et b sont des entiers naturels et si b est différent de zéro, le quotient et le reste dans la division de a par b sont les entiers naturels a_0 et r_1 définis par : $a = a_0 b + r_1$ et $r_1 < b$.

PARTIE 1

Soit $f = \left[a_0 \; ; \; \frac{b_j}{a_j} \right]_1^n$ une fraction continue limitée donnée.

On pose $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$ et pour tout $k \in N_n^*$ les entiers P_k et Q_k définis par la fraction irréductible $f_k = \frac{P_k}{Q_k}$.

1°/ Démontrer que les nombres P_k et Q_k satisfont pour tout $k \in N_n^*$ aux relations : $\left| \begin{array}{l} P_k = a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2} \end{array} \right.$

2°/ Soit, pour $k \in N_n$, le déterminant : $S_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}$

a) exprimer S_k en fonction de b_k et S_{k-1}

b) en déduire que : $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{A_k}{Q_k Q_{k-1}}$ pour $k \geq 1$ où A_k est un entier relatif que l'on exprimera en fonction de $k, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_k$.

3°/ Soit, pour $k \in N_n^*$, le déterminant : $T_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix}$

a) exprimer T_k en fonction de a_k et S_{k-1} ; en déduire que pour $k \geq 3$ $T_k = B_k T_{k-2}$ où B_k est un nombre rationnel dont on donnera la valeur.

b) calculer T_1 et T_2 ; quel est le signe de T_k ?

4°/ On considère la suite finie de terme général f_k avec $k \in N_n^*$

a) montrer que chacune des deux sous-suites (f_{2j}) et (f_{2j+1}) est monotone, que l'une est croissante et l'autre décroissante.

b) comparer f_{2j-1} et f_{2j} $(0 \leq 2j-1 \; , \; 2j \leq n)$; en déduire que, quels que soient les entiers non nuls 2i-1 et 2j , $f_{2j} < f_{2i-1}$; puis que :

$$f_{2j-2} < f_{2j} \leq f \leq f_{2j+1} < f_{2j-1} \quad \text{pour } (0 < 2j-2, 2j+1 \leq n).$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

c) montrer que, pour tout $k \in N_n^*$, $|f - f_k| \leq \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{Q_{k-1} Q_k}$

5°/ Toute fraction continue limitée f est un nombre rationnel strictement positif. Réciproquement, montrer que tout nombre rationnel non entier p/q, où p et q sont des entiers naturels strictement positifs sans diviseur commun, est égal à une fraction continue limitée du type :

$$\left[a_0 \; ; \; \frac{1}{a_j} \right]_1^n .$$

.../...

211

PARTIE II

On conserve pour les fractions continues limitées les notations de la partie I.

On considère deux suites infinies de termes généraux a_n et b_n telles que :

$a_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont deux entiers naturels non nuls et sans diviseur commun.

Soit la suite de terme général $f_n = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^n$; on dit que la fraction continue illimitée : $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente et que sa valeur est f si la suite de terme général f_n est convergente et de limite f.

On pose alors: $f = \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^n$

1°/ Montrer que la fraction continue illimitée $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente

si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{Q_{n-1} Q_n} = 0$

2°/ On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geqslant b_k$ et $a_k \geqslant d > 0$, où d est un nombre donné;

a) démontrer que $b_{k+1} \cdot \frac{Q_{k-1}}{Q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{1+d}$

b) en déduire que $\frac{b_1 b_2 \dots b_k}{Q_{k-1} Q_k} \leqslant \left(\frac{1}{1+d}\right)^{k-1}$

c) la fraction continue illimitée $\left[a_0 ; \frac{b_j}{a_j}\right]_1^\infty$ est-elle convergente ?

3°/ On pose $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\forall n$, $b_n = 1$;

a) démontrer que: $Q_n \geqslant Q_{n-1}$ et $Q_n \geqslant 2Q_{n-2}$

b) en déduire que, pour $n \geqslant 1$, $Q_n Q_{n-1} \geqslant 2^{n-1}$

c) montrer que toute fraction continue illimitée du type : $\left[a_0 ; \frac{1}{a_j}\right]_1^\infty$ est convergente et est égale à un nombre irrationnel; étudier la réciproque.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

Mercredi 18 Mai 1983, de 14h. à 17h.

EXERCICE I :

A/ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit :

si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$, $f(x) = 0$;

si $0 < x < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

1) Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a \leqslant b < 1$;

établir l'égalité :

$$\int_a^b f(t)dt = 2(\mathrm{Arcsin}\sqrt{b} - \mathrm{Arcsin}\sqrt{a})$$

2) En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$;

pouvait-on prévoir la convergence de cette intégrale ?

3) comment faut-il choisir la constante k réelle, pour que la fonction kf soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle?

B/ La constante k ayant la valeur trouvée à la question précédente, on pose : $g = kf$, et on désigne par X une variable aléatoire réelle de densité g

1) Construire, relativement à un repère orthonormé, la représentation graphique de g.

2) Déterminer G, fonction de répartition de X et construire de même sa représentation graphique.

Comment sont liés les deux nombres $G(x)$ et $G(1-x)$?

Que vaut $P(X < 0,5)$?

.../...

3) Déterminer le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}x$.

En déduire une valeur approchée de $G(0,1)$.

4) Soit t un réel quelconque. Déterminer suivant la valeur de t la probabilité de l'événement $(\text{Arcsin}\sqrt{X} \leqslant t)$, en distinguant les 3 cas :

$$t < 0$$

$$0 \leqslant t \leqslant \pi/2$$

$$\pi/2 < t$$

Soit $H(t)$ cette probabilité; montrer que H est la fonction de répar--tition d'une variable aléatoire réelle.

<u>EXERCICE II</u> :

Soit N un entier naturel strictement supérieur à 1. Toutes les matrices considérées sont des matrices carrées d'ordre N, à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 0 à $N-1$.

Soit $A = (a_{jk})$ une telle matrice: a_{jk} est l'élément appartenant à la ligne j et à la colonne k. $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})$ est la matrice ayant pour éléments les conjugués des éléments de A.

1°/ Soit $F = (f_{jk})$ la matrice définie par :

$$f_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi jk/N} \quad , (i^2 = -1 \ , \ 0 \leqslant j \leqslant N-1 \ , \ 0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

a) Montrer que, pour tous j et k, $0 \leqslant j \leqslant N-1$ et $0 \leqslant k \leqslant N-1$,

$$\sum_{q=0}^{N-1} f_{jq}\overline{f_{qk}} \quad \text{vaut 1 si } j=k \text{ et } 0 \text{ si } j \neq k \ .$$

b) En déduire la valeur de $F.\overline{F}$. F est-elle inversible ? quel est son inverse ?

c) Etablir la relation, valable pour $1 \leqslant j \leqslant N-2$ et $0 \leqslant k \leqslant N-1$:

$$f_{j-1,k} + f_{j+1,k} = 2f_{jk}.\cos(2k\pi/N) \ .$$

2°/ soient α et β deux complexes et $A = (a_{jk})$ la matrice définie par :

$$a_{jj} = \alpha \ , \ 0 \leqslant j \leqslant N-1$$

$$a_{j,j-1} = a_{j,j+1} = \beta \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant N-2$$

$$a_{0,1} = a_{0,N-1} = a_{N-1,0} = a_{N-1,N-2} = \beta$$

tous les autres coefficients sont nuls.

a) Montrer que les vecteurs colonnes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}$ de F sont des vecteurs-propres de A. Quelle est la valeur propre associée à C_k ?

b) Qu'en déduit-on pour la matrice $D = \overline{F}AF$?

3°/ Application : on pose $N=4$, $\alpha=1$, $\beta=2$

a) expliciter F.

b) A étant la matrice définie à la question 2 , déduire des résultats précédents la résolution de l'équation matricielle :

$$AX = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

où X désigne une matrice-colonne.

- - - - - - - - - - -

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 8 Mai 1984, de 14 heures à 18 heures

Dans ce problème, on dira qu'une fonction numérique f possède un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si :

1°) f est définie sur un intervalle du type $]\alpha, +\infty[\subset \mathbb{R}^+$

2°) il existe n+1 nombres réels : $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ et une fonction ε_n, avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_n(x) = 0$, tels que :

(1) $$f(x) = a_0 + a_1/x + \ldots + a_i/x^i + \ldots + a_n/x^n + (1/x^n)\,\varepsilon_n(x).$$

La formule (1) s'appelle développement asymptotique de f, à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$.

On pose $S_n(x) = a_0 + a_1/x + \ldots + a_i/x^i + \ldots + a_n/x^n$; on l'appellera partie régulière à l'ordre n du développement asymptotique de f

On définit de même un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $-\infty$

PARTIE I

1°) Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, celui-ci est unique.

2°) Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, il en est de même pour la fonction g définie par : $g(x) = f(x) + e^{-bx}$ (b>o donné),

3°) Soit α un réel fixé, et soit $E_{\alpha,n}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $]\alpha, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$

a) Montrer que pour les opérations usuelles $E_{\alpha,n}$ possède d'une part une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, d'autre part une structure d'anneau commutatif unitaire.

b) Comment obtient-on la partie régulière du développement asymptotique du produit de deux fonctions de $E_{\alpha,n}$?

4°) a) Montrer que pour tout x strictement positif on a :
$\text{Arctg}\, x = \pi/2 - \text{Arctg}\, 1/x$

b) Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2n+1, au voisinage de $+\infty$ de la fonction
$x \longrightarrow \text{Arctg}\, x$

c) Quel est le développement asymptotique à l'ordre 2n+1 au voisinage de $-\infty$ de la fonction
$x \longrightarrow \text{Arctg}\, x$?

PARTIE II

Soient θ et K les fonctions de la variable réelle x définies par :

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et } K(x) = 1 - \theta(x)$$

1°) a) montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

b) en déduire que pour x>0 :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du$$

2°) On considère l'intégrale :

$$I_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{(2n+1)/2}}\, du \qquad \text{où } n \in \mathbb{N} \qquad \text{et } x \in \mathbb{R}^*$$

a) Prouver que quel que soit n, $I_n(x)$ est convergente.

b) Etablir la relation de recurrence :

$$I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2} \cdot I_{n+1}(x)$$

c) démontrer que pour n>0 :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} I_n(x) = 0$$

3°) Déduire de ce qui précède le développement asymptotique à l'ordre 2n + 1 de : $e^{x^2} K(x)$, au voisinage de $+\infty$

4°) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace-Gauss centrée-réduite, et soit F sa fonction de répartition.

a) établir la relation :

$$2F(x) = 1 + \theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

b) en déduire que $F(x) = 1 - e^{-x^2/2} \cdot H(x)$ où H est une fonction dont on donnera le développement asymptotique à l'ordre 2n+1 au voisinage de $+\infty$.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

Mercredi 9 Mai 1984, de 14 heures à 17 heures

PROBLEME I

Les deux réels a et b, avec $a<b$, et l'entier naturel non nul n sont donnés ; soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réel de degré au plus égal à n.

On désigne par f l'application :

$$f : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$$

$$(P,Q) \to \int_a^b P(x)Q(x)dx$$

et par $M_{q,r}$ le polynôme défini pour q et r entiers naturels tels que :

$$M_{o,r}(X) = (X-a)^r(X-b)^r \text{ , } r>0 \text{ et,}$$

$$M_{o,o}(X) = 1 \text{ ,}$$

et si $q>0$, $M_{q,r}(X) = \dfrac{d^q}{dX^q}\left[(X-a)^r(X-b)^r\right]$.

Enfin, p et q étant deux entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b M_{q,q}(x).x^p dx$$

.../...

- P 231 -

2°) Quelle est la forme quadratique associée à f ? Est-elle définie positive ?

3°) Montrer que $M_{q,q}$ est un polynôme de degré q et que $(M_{o,o}, M_{1,1}, \ldots, M_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

4°) Pour $0 \leqslant p < q$, montrer que a et b sont racines d'ordre q-p de $M_{p,q}$

5°) Etablir la relation pour $q \geqslant 1$

$$I_{p,q} = -p \int_a^b x^{p-1} M_{q-1,q}(x)\, dx$$

En déduire que pour $q \geqslant p$, $I_{p,q} = K_p \cdot \int_a^b M_{q-p,q}(x)dx$, où K_p est un entier relatif, ne dépendant que de p, que l'on déterminera.

6°) Prouver que $I_{p,q} = 0$ si $p \not> q$

7°) Calculer, pour $0 \leqslant r < q$, $\int_a^b M_{q,q}(x).M_{r,r}(x)dx$

8°) On pose $A_q = \int_a^b M^2_{q,q}(x)dx$

Déterminer en fonction des A_q (que l'on ne calculera pas) la matrice de f dans la base $(M_{o,o}, \ldots, M_{n,n})$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

PROBLEME II (les questions 1 et 2 sont indépendantes)

L'entier naturel n>1 et le réel $p \in]0,1[$ sont donnés ; on pose q = 1-p.

On considère une suite de 2n épreuves de Bernoulli, indépendantes ; chacune d'elles conduit soit au succès , avec la probabilité p , soit à l'échec, avec la probabilité q.

1°) a - Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun succès n'est obtenu et la valeur i si le premier succès est enregistré à la i-ème épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer son espérance.

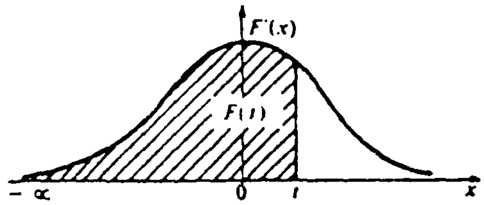
b - Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur j si, pour la première fois, on obtient 2 résultats identiques consécutifs aux épreuves de rangs j-1 et j et la valeur 0 si l'on n'a pas deux résultats consécutifs et identiques. Déterminer la loi de probabilité de Y. On pourra distinguer 2 cas, suivant que j est pair ou impair.

c - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2°) On prend n = 5000 p = 0,51. Evaluer la probabilité de l'événement "le nombre des succès est compris strictement entre 4950 et 5200".

Extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite

$$F(t) = P(\{T < t\}).$$



t	0,00	0,01	0.02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0.1	0.539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962,5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 6	0,995 4	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,8	4,0	4,5
F(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 99

Nota. — La table donne les valeurs de $F(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par la relation :

$$g_n(x) = x(x-1)\dots(x-n)\,a^{-x}.$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

I. Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1. a) Étudier la variation de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$. On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$.

b) Dresser le tableau de variation de g_1. Étudier la branche infinie du graphe de g_1.

2. Dans cette question, on prend $a = 2$.

a) Calculer des valeurs approchées à 10^{-5} près de u, v, $g_1(u)$ *et* $g_1(v)$.

b) Construire le graphe de g_1.

II. Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe C^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$. On désigne par M un nombre réel tel que, pour tout élément x de $[-1, 1]$, $|f''(x)| \leqslant M$.

Soit β un élément de $\mathbf{R}_+$. On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ par la somme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)$.

On suppose que $n \geqslant \beta$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à des fonctions convenables au point k/n, déterminer des nombres réels A et B tels que, quels que soient n et k,

$$|R_1(k,n)| \leqslant \frac{A}{n^2}$$

$$|R_2(k,n)| \leqslant \frac{B}{n^3}.$$

2. a) On pose :

$$R_3(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

Déduire de la question précédente un nombre réel C tel que, quels que soient n et k,

$$|R_3(k,n)| \leqslant \frac{C}{n^3}.$$

b) On pose :

$$\Delta_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}[f(1) - f(0)].$$

Prouver que :

$$|\Delta_n| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

III. On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. *a*) Pour tout nombre réel x strictement supérieur à n, calculer :

$$h_n(x) = \frac{g'_n(x)}{g_n(x)}.$$

Montrer que, sur l'intervalle $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n et un seul. Étudier le signe de g'_n sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$.

2. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction f_α définie par la relation :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha - x}.$$

a) Déterminer en fonction de *a* la valeur de α pour laquelle :

$$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt.$$

Dans toute la suite du problème, on donne à α la valeur ainsi déterminée. (On contrôlera que si $a = 2$, alors $\alpha = 2$.)

b) Vérifier que :

$$h_n(n\alpha + \beta) = \frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{n}[f_\alpha(1) - f_\alpha(0)] - \Delta_n,$$

où Δ_n a été défini dans la question II 2 (avec ici $f = f_\alpha$).
Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n\,h_n(n\alpha + \beta)$.

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha.$$

À cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$.

4. *a*) On se propose de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$y_n = \frac{1}{n}\ln \prod_{k=0}^{n} \frac{x_n - k}{n}.$$

On encadrera y_n à l'aide de l'encadrement de x_n obtenu précédemment. On utilisera le résultat de la question II.2.*b*) avec une fonction f convenable et $\beta = 0$, puis $\beta = \alpha$.

En conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \int_0^1 \ln(\alpha - x)\,dx.$$

b) Calculer cette intégrale.

c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n}(M_n)^{1/n}$ converge et déterminer sa limite.
On contrôlera que pour $a = 2$ cette limite est égale à $1/e$.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

Mathématiques I — 4 heures

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Pour tout nombre entier naturel p, on considère la fonction A_p définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$A_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^k}{k!}.$$

Dans ce problème, on étudie la suite des nombres réels positifs x_n tels que $A_{2n-1}(x_n) = 0$, où $n \geqslant 1$, ce qui fait l'objet de la partie III. Dans les parties I et II, on établit des résultats auxiliaires.

I. Dans cette partie, on étudie un algorithme d'approximation de l'unique solution de l'équation $f(t) = t$, où, pour tout nombre réel positif t :

$$f(t) = e^{-1-t}.$$

1. *a)* Construire sur une même figure les représentations graphiques de la fonction f et de la fonction $t \mapsto t$.

b) Montrer que l'équation $f(t) = t$ admet une solution a et une seule.

c) Montrer que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{e}|x - y|.$$

d) Prouver que l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ est stable par f et que a appartient à cet intervalle.

2. Soit u la suite numérique définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et la condition initiale $u_0 = 0$.

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{e} \qquad \text{et} \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}.$$

En déduire que la suite u converge vers a.

b) Déterminer un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$|u_{n_0} - a| \leqslant 10^{-6}.$$

Écrire des valeurs décimales approchées à la précision 10^{-6} des termes u_n, où $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

II. On se propose d'étudier les suites v et w définies par les relations :

$$v_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n\,!} \qquad w_n=\frac{n^n}{n\,!} \qquad \text{où} \quad n\geqslant 1.$$

1. Trouver une relation simple entre $\ln v_n$ et $\ln w_n$.

2. *Minoration de* w

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

c) En déduire que, si $n\geqslant 6$, alors $w_n\geqslant 2^n$.

d) Déterminer un majorant de la suite $(v_n)_{n\geqslant 6}$.

3. *Convergence de la suite* v

a) Déterminer la limite de la suite : $(\ln w_{n+1}-\ln w_n)$.

b) Établir que, pour tout nombre réel $x\geqslant 0$:

$$0\leqslant x-\ln(1+x)\leqslant\frac{x^2}{2}.$$

En déduire que :

$$0\leqslant 1+\ln w_n-\ln w_{n+1}\leqslant\frac{1}{2n}.$$

c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1[$:

$$x\leqslant -\ln(1-x).$$

En déduire que :

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n.$$

d) Prouver finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln w_n=1.$

En déduire la limite de la suite v.

Peut-on retrouver ainsi la majoration obtenue dans la question II. 2. *d*) ?

III. *Étude de la suite* (x_n)

1. *a*) Prouver que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel positif x :

$$e^{-x}=A_p(x)+(-1)^{p+1}I_p(x), \qquad \text{où} \quad I_p(x)=\int_0^x e^{-t}\frac{(x-t)^p}{p\,!}\,dt.$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel positif x :

(1) $$A_{2n+1}(x)\leqslant e^{-x}\leqslant A_{2n}(x).$$

c) Exprimer la dérivée A'_{p+1} en fonction de A_p.

d) Prouver que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la fonction A_{2n-1} est strictement décroissante et que, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, l'équation $A_{2n-1}(x)=0$ admet une solution x_n et une seule.

Calculer $A'_{2n}(x_n)$ et dresser le tableau de variation de A_{2n-1} et de A_{2n}.

2. Soit n un nombre entier naturel non nul.

a) Montrer que :

$$A_{2n}(x_n)=\frac{x_n^{2n}}{(2n)\,!} \qquad \text{et} \qquad A_{2n+1}(x_n)=\frac{x_n^{2n}}{(2n)\,!}\left(1-\frac{x_n}{2n+1}\right).$$

b) En déduire que $\dfrac{x_n^{2n}}{(2n)\,!}\leqslant 1$. À l'aide de la majoration établie au II. 2. *d*), montrer que si $n\geqslant 3$, $x_n\leqslant n$. Vérifier directement que ce dernier résultat est encore valable si $n=1$ et $n=2$.

c) Montrer que $A_{2n}(x_n)>0$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.

3. Soit n un nombre entier naturel non nul.

a) À l'aide de (1) et de la majoration $x_n\leqslant n$, établir l'encadrement :

$$1\leqslant\frac{x_n^{2n}}{(2n)\,!}e^{x_n}\leqslant 2.$$

b) On pose $y_n=\dfrac{x_n}{2n}$. Montrer que :

$$v_{2n}\leqslant y_n e^{y_n}\leqslant 2^{1/2n}\,.\,v_{2n}.$$

c) En déduire que la suite de terme général $z_n=y_n e^{y_n}$ converge vers $\dfrac{1}{e}$.

4. En conclure que la suite (y_n) converge vers a. (On étudiera à cet effet la fonction $y\mapsto y\,e^y$.)

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

Mathématiques I

OPTION : Générale

Mercredi 6 Mai 1987, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.,

Dans la première partie du problème, on approche le nombre réel $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ à l'aide d'une suite numérique. Dans la seconde partie, grâce à cette méthode, on approche sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ à l'aide d'une suite de fonctions polynomiales et on évalue la rapidité de la convergence.

On notera qu'une valeur approchée de α à la précision 10^{-9} est 0,793 700 526.

I. Approximation de α

Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère la fonction numérique f_λ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par la relation :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right).$$

1) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f_\lambda(x) = x$.

2) *a*) Calculer la dérivée de f_λ. Montrer que f_λ est croissante sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$. On suppose désormais que cette condition est satisfaite.

b) Prouver que l'intervalle $]\alpha, 1]$ est stable par f_λ, c'est-à-dire que :

$$f_\lambda(]\alpha, 1]) \subset]\alpha, 1].$$

c) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, 1]$:

$$0 \leqslant f_\lambda(x) - \alpha \leqslant (x - \alpha) f'_\lambda(\alpha).$$

3) Soient c un élément de $]\alpha, 1]$ et v la suite définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = v_n + \lambda\left(\frac{1}{2} - v_n^3\right)$$

et la condition initiale $v_0 = c$.

a) Montrer que la suite v est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$0 < v_n - \alpha \leqslant (c - \alpha)[f'_\lambda(\alpha)]^n.$$

c) Montrer que $f'_\lambda(\alpha)$ est minimal si et seulement si $\lambda = \frac{1}{3}$.

4) On suppose que $\lambda = \frac{1}{3}$ et on prend $v_0 = c = 0{,}8$. Calculer v_n pour $n \leqslant 8$.

Montrer que $0 < c - \alpha < 7 \cdot 10^{-3}$ et majorer $v_8 - \alpha$. (Dans cette question, on n'utilisera pas la valeur approchée de α donnée en tête de l'énoncé.)

II. Approximation polynomiale de $t \mapsto t^{1/3}$

Pour tout élément t de l'intervalle $[0, 1]$, on considère la suite $(u_n(t))$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}[t - u_n(t)^3]$$

et la condition initiale $u_0(t) = 0$.

1) *a*) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est une fonction polynomiale et calculer son degré.

2) *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = [t^{1/3} - u_n(t)]\left(1 - \frac{1}{3}[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n(t)^2]\right).$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(t) \leqslant t^{1/3}$.

c) En déduire que la suite de terme général $u_n(t)$ est croissante et positive.

d) Montrer que la suite $(u_n(t))$ converge vers $t^{1/3}$.

3) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3}(1 - t^{2/3})^n \leqslant t^{1/3} - u_n(t) \leqslant t^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)^n.$$

4) Pour tout nombre entier naturel non nul n, soit φ_n l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par la relation :

$$\varphi_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^n.$$

a) Étudier la variation de φ_n et déterminer son maximum.

b) On pose $\beta_n = \sup\limits_{t \in [0,1]} [t^{1/3} - u_n(t)]$.

Montrer que $\beta_n \leqslant \sqrt{\frac{3}{2n}}$.

c) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout nombre entier naturel non nul n, $\beta_n \geqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$.

d) Plus précisément, soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant p$, on a :

$$e^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \beta_n \leqslant \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^p \sqrt{\frac{3}{2n+1}}.$$

• • •
•

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

Jeudi 5 mai 1988, de 8 h. à 12 h.

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

Le but du problème est d'étudier les fonctions polynômes P à coefficients réels telles que, pour tout nombre réel x :

$$(1) \qquad (x^2 - 1)\, P''(x) + 4xP'(x) = \lambda P(x)$$

où λ est un nombre réel donné et où P' et P" désignent les dérivées première et seconde de P.

Dans la partie I, on détermine à partir d'une suite $(P_0, P_1, ..., P_n, ...)$ de solutions particulières toutes les solutions de cette équation et on établit une relation de récurrence satisfaite par les polynômes P_n.

Dans la partie II, on utilise cette relation pour obtenir le comportement de la suite des valeurs $(P_n(x))$ en un point x donné, en commençant par le cas particulier où $x = 5/3$.

I - ETUDE DE L'EQUATION (1).

1°) Soit P une solution non nulle de (1), de degré $n \geq 0$.

a) Montrer, en identifiant dans (1) les termes de plus haut degré, que λ est nécessairement égal à $n(n+3)$.

b) Soit $Q(x) = (-1)^n P(-x)$. Montrer que Q est solution de (1). En étudiant le degré du polynôme P - Q, prouver que P = Q et en déduire la parité de P en fonction de n.

2°) Inversement, on se propose de prouver qu'étant donné un entier $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels et un seul dont le terme de plus haut degré est x^n et tel que, pour tout nombre réel x :

$$(2) \qquad (x^2 - 1)\, P''_n(x) + 4xP'_n(x) = n(n + 3)\, P_n(x)$$

a) Déterminer P_0, P_1, P_2.

b) Dans le cas général, on pose :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k}x^{n-2k} = a_0x^n + a_2x^{n-2} + ... + a_{2k}x^{n-2k} + ... \qquad \text{avec } a_0 = 1$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à n/2.

Expliciter un système linéaire satisfait par les nombres a_{2k}, où $0 \leq 2k \leq n$, et montrer que ce système admet une solution et une seule (que l'on ne demande pas d'expliciter). Donner l'expression du coefficient a_2.

3°) A partir de la suite (P_n), déterminer, selon les valeurs de λ, l'ensemble E_λ des solutions de (1).

4°) On se propose d'établir que, pour tout nombre réel x et tout entier $n \geq 2$:

$$(3) \qquad P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{n^2-1}{4n^2-1} P_{n-2}(x) = 0$$

a) On considère, pour $n \geq 2$, la fonction polynôme : $Q_n(x) = (x^2 - 1)\, P'_n(x) - nxP_n(x)$.

Déterminer le monôme de plus haut degré de Q_n.

Montrer que $Q'_n(x) = (n+2)[nP_n(x) - xP'_n(x)]$, et calculer $(x^2 - 1)\, Q''_n(x) + 4xQ'_n(x)$ en fonction de Q_n seulement.

TSVP

En déduire que :

$$(4) \qquad (x^2-1)\,P'_n(x) - nxP_n(x) + \frac{n(n+2)}{2n+1}P_{n-1}(x) = 0$$

b) En dérivant la relation (4), et en recourant par exemple à l'expression de la dérivée de Q_n obtenue précédemment, donner une relation entre P_n, P'_n et P'_{n-1}.
En utilisant à nouveau la relation (4), en déduire la relation (3).

II - ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(P_n(x))$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

$$(5) \qquad u_n = u_{n-1} + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1}-u_{n-2}) + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}\right]$$

avec $n \geq 2$, et les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 + 1/9$.

1°) En remarquant que : $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right]$;

calculer pour tout entier $n \geq 2$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

2°) On se propose, dans cette question, d'étudier la suite (u_n) définie ci-dessus.
a) Montrer, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq u_{n-1} \geq 1$.

b) Prouver que l'on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$(6) \qquad u_n = u_1 + \frac{1}{9}\left[(u_{n-1}-u_0) + \sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4k^2-1}u_{k-2}\right]$$

et en déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n \leq 6/5$.
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et, à l'aide de (6), donner un encadrement de sa limite L permettant d'en obtenir une valeur décimale approchée à 0,01 près.

3°) On reprend dans cette question les notations de la première partie et, pour tout entier naturel n et tout nombre réel $t > 0$, on pose :

$$u_n(t) = \frac{2^n}{e^{nt}}P_n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel x strictement supérieur à 1, il existe un nombre réel $t > 0$ et un seul tel que :

$$x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

b) Calculer $u_0(t)$ et $u_1(t)$, et montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$(7) \qquad u_n(t) - u_{n-1}(t) = e^{-2t}\left[(u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)) + \frac{3}{4n^2-1}u_{n-2}(t)\right]$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, les fonctions u_n et $u_n - u_{n-1}$ sont strictement positives et décroissantes sur $]0, +\infty[$.
d) Expliciter le réel e^t lorsque $x = 5/3$, et montrer que, dans ce cas, les suites (u_n) et $(u_n(t))$ définies respectivement par les relations (5) et (7) sont les mêmes.
On suppose que $x \geq 5/3$. Déduire des résultats précédents que la suite $(u_n(t))$ converge vers une limite strictement positive $L(x)$ que l'on ne demande pas d'expliciter, et en déduire un équivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 3 mai 1989, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

Le but du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,\ 1)$, ce qui fait l'objet des trois premières parties. Une application probabiliste est proposée en quatrième partie.

PARTIE I On étudie dans cette partie une méthode de calcul de l'intégrale (convergente) :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\, du.$$

À cet effet, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par les relations :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2}\, dt \qquad g(x) = \int_0^1 \exp(-(1+t^2)x)\, dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer ces deux intégrales.)

1. *a*) Calculer $f(0)$.

b) Pour tout nombre réel positif x, établir l'encadrement suivant :

$$\frac{\pi}{4}\exp(-2x) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}\exp(-x).$$

c) Établir un encadrement analogue pour x négatif.

d) En déduire les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

2. On se propose de montrer que la fonction f est dérivable et de calculer sa dérivée.

a) Soit a un nombre réel positif. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout nombre réel h appartenant à $[-1,\ 1]$:

$$|\exp(-ah) - 1 + ah| \leq \frac{a^2 h^2}{2}\exp(a).$$

b) En déduire que, pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel h appartenant à $[-1,\ 1]$:

$$|f(x+h) - f(x) + h\, g(x)| \leq \frac{2h^2}{3}\exp(2|1-x|).$$

c) Montrer que f est dérivable et exprimer sa dérivée à l'aide de g.

3. On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$\varphi(x) = 2f\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du\right)^2.$$

a) Prouver que φ' est nulle et déterminer l'unique valeur prise par φ.

b) En déduire la valeur de l'intégrale I.

T.S.V.P.

PARTIE II

On étudie dans cette partie un algorithme de calcul des valeurs prises par la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite. On rappelle que :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

1. Soit x un nombre réel.

a) À l'aide d'une intégration par parties, prouver que :

$$\sqrt{2\pi}\left(F(x)-\frac{1}{2}\right) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \int_0^x u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\sqrt{2\pi}\left(F(x)-\frac{1}{2}\right) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left[1+\frac{x^2}{1\times 3}+\frac{x^4}{1\times 3\times 5}+\cdots+\frac{x^{2n}}{1\times 3\times 5\cdots(2n+1)}\right]+R_n(x),$$

avec :

$$R_n(x) = \frac{1}{1\times 3\times 5\cdots(2n+1)}\int_0^x u^{2n+2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x :

$$|R_n(x)| \leq |x| \frac{x^2}{3}\,\frac{x^2}{5}\,\frac{x^2}{7}\cdots\frac{x^2}{2n+3}.$$

Trouver une valeur de n telle que, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2,\ 2]$:

$$|R_n(x)| \leq 10^{-6}.$$

3. On considère l'algorithme suivant, dans lequel S et x représentent des variables à valeurs réelles, n et k des variables à valeurs entières, les valeurs de x et n étant données par ailleurs (l'instruction $A \leftarrow B$ signifiant que la valeur de la variable B est affectée à la variable A) :

$S \leftarrow 1$;

Pour k décroissant de n à 1 faire : $S \leftarrow 1 + \dfrac{x^2}{2k+1} S$;

Écrire S ;

a) Indiquer en fonction de x et de n l'expression finale de S.

b) En déduire, à l'aide des résultats obtenus dans cette partie, des valeurs approchées à 10^{-6} près de :

$F(0,5)$ $F(0,783)$ $F(0,784)$ $F(1)$ $F(1,5)$ $F(2)$

(On donnera toutes les décimales fournies par la calculatrice.)

PARTIE III

On étudie dans cette partie le comportement asymptotique de la fonction F et de sa réciproque.

1. Montrer que la fonction F admet une fonction réciproque G, laquelle est définie sur $]0,\ 1[$.

2. Représenter sur une même figure les courbes représentatives de F et de G (unité graphique : 4 cm).
On précisera notamment les valeurs de $F(0)$ et de $G(0,5)$, les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$, les limites de G en 0 et en 1.

3. *a*) Exprimer $F(-x)$ en fonction de $F(x)$. En déduire l'expression de $G(1-y)$ en fonction de $G(y)$ pour $0 < y < 1$.

T.S.V.P.

b) Pour tout nombre réel strictement négatif x, établir l'encadrement suivant :

$$-\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq F(x) \leq -\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x\sqrt{2\pi}}.$$

En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $-\infty$, puis de $1 - F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) On pose $x = G(y)$, où $x < 0$ et $0 < y < \frac{1}{2}$. Montrer que :

$$-\frac{G^2(y)}{2} - \ln|G(y)| - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{G^2(y)}\right) \leq \ln y \leq -\frac{G^2(y)}{2} - \ln|G(y)| - \frac{\ln(2\pi)}{2}.$$

En déduire un équivalent de $G(y)$ quand y tend vers 0, puis quand y tend vers 1.

PARTIE IV

À l'issue d'un scrutin uninominal permettant à plusieurs centaines de milliers d'électeurs de départager deux candidats A et B d'importances comparables, on se propose, avant le dépouillement, de procéder à une estimation de la proportion p des voix obtenues par le candidat A.

À cet effet, on répète n fois ($n \geq 1$) l'expérience suivante : on retire "au hasard" un bulletin des urnes ; on note s'il est ou non en faveur de A et on le remet dans les urnes. On note X_n la variable aléatoire indiquant le nombre des suffrages favorables à A parmi les n bulletins dépouillés ; le quotient :

$$Y_n = \frac{X_n}{n}$$

indique donc la proportion des suffrages favorables à A parmi ces n bulletins. On pose enfin :

$$u_n = P(|Y_n - p| > 0,01).$$

Soit ε un nombre réel appartenant à $]0,\ 1[$. L'objectif est de déterminer le nombre n de bulletins qu'il suffit de dépouiller ainsi pour que $u_n \leq \varepsilon$, c'est-à-dire pour connaître p à 0,01 près avec un risque d'erreur inférieur à ε.

1. On étudie dans cette question les lois de X_n et de Y_n.

a) Déterminer la loi de X_n. Calculer les espérances et les variances de X_n et de Y_n.

b) Montrer que :

$$V(X_n) \leq \frac{n}{4}.$$

2. *Première majoration de u_n*

a) En appliquant à X_n l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et en utilisant le résultat de la question 1. *b*), donner un majorant M_n de u_n ne dépendant que de n

b) Comment suffit-il de choisir n pour que $M_n \leq \varepsilon$?

Examiner les cas où $\varepsilon = 0,10$ et $\varepsilon = 0,05$.

3. *Seconde majoration de u_n*

a) En approchant X_n par la loi normale (on justifiera la mise en œuvre d'une telle approximation), exprimer u_n en fonction de n et de p à l'aide de F. En utilisant le résultat de la question 1. *b*), donner un majorant m_n de u_n ne dépendant que de n.

b) En déduire que $m_n \leq \varepsilon$ dès que $n \geq 2\,500\, G^2(\varepsilon/2)$.

Examiner les cas où $\varepsilon = 0,10$ et $\varepsilon = 0,05$.

(On rappelle les valeurs approchées suivantes : $F(1,96) \approx 0,975$ et $F(1,64) \approx 0,950$.)

c) Soit $n(\varepsilon)$ le plus petit des nombres entiers naturels n tels que $m_n \leq \varepsilon$. Déterminer un équivalent de $n(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 7 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire**, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

Soit f une application continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. L'objet du problème est l'étude d'approximations de l'intégrale :

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

par la méthode des rectangles, c'est-à-dire par la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \text{avec :} \quad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

puis, de façon plus performante, par les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$v_n = 2\,u_{2n} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{4\,v_{2n} - v_n}{3}.$$

PARTIE I : Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on suppose que $[a,\ b] = [0,\ 1]$ et que : $\quad f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.

1. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de u_n lorsque l'entier naturel non nul n est donné.
À l'aide de cet algorithme, remplir le tableau suivant :

u_1	v_1	w_1
u_2	v_2	w_2
u_4	v_4	w_4
u_8	v_8	
u_{16}		

(On donnera les résultats numériques de ce tableau avec six décimales.)

2. Calculer l'intégrale J. (On pourra poser $x = \tan t$.)
Évaluer la précision des résultats numériques obtenus ci-dessus.

PARTIE II : Étude d'un second exemple

Dans cette partie, on considère un réel λ strictement positif et différent de 1.
On suppose que $[a,\ b] = [0,\ \pi]$ et que : $\quad f(x) = \ln\,(\lambda^2 - 2\,\lambda\cos x + 1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\quad y^{2n} - 1 = 0$.

b) En déduire, en comparant leurs coefficients dominants et leurs racines, l'égalité suivante entre fonctions polynômes :

$$y^{2n} - 1 = (y^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(y^2 - 2\,y\cos\frac{k\,\pi}{n} + 1\right).$$

.../...

2. a) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de u_n et de v_n.

b) En distinguant les cas $\lambda < 1$ et $\lambda > 1$, calculer l'intégrale J en déterminant la limite de la suite (u_n), puis donner des équivalents de $u_n - J$ et de $v_n - J$.

PARTIE III : Étude du cas général

On suppose désormais que la fonction f est de classe C^4 sur $[a,\ b]$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 4$, on pose :

$$M_k = \sup_{a \leq x \leq b} \left| f^{(k)}(x) \right|.$$

(On rappelle que la notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction f.)

1. Soit $[\alpha,\ \beta]$ un segment inclus dans $[a,\ b]$. On considère la fonction auxiliaire p définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$p(x) = \int_\alpha^x f(t)\ \mathrm{d}t - (x-\alpha)\ f(\alpha).$$

a) Calculer les deux premières dérivées de p.

b) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha,\ \beta]$, on a : $\qquad -M_1 \leq p''(x) \leq M_1.$

En déduire par intégration un encadrement de $p(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - (\beta-\alpha)\ f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\ M_1.$$

c) En appliquant cette inégalité aux segments $[x_k,\ x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$, prouver enfin que :

$$|J - u_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2\ n}\ M_1.$$

2. Soit $[\alpha,\ \beta]$ un segment inclus dans $[a,\ b]$. On considère la fonction auxiliaire q définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$q(x) = p(x) - \frac{(x-\alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{2}.$$

a) Calculer les deux premières dérivées de q.

b) Établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t - (\beta-\alpha)\ f(\alpha) - \frac{(\beta-\alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]}{2} \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\ M_2.$$

(On pourra encadrer $q''(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis, par intégration, en déduire un encadrement de $q(x)$.)

c) Prouver enfin que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2\ n} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12\ n^2}\ M_2.$$

3. On considère cette fois la fonction auxiliaire r définie sur $[\alpha,\ \beta]$ par la relation :

$$r(x) = q(x) + \frac{(x-\alpha)^2[f'(x) - f'(\alpha)]}{12}.$$

En procédant encore de la même manière, établir que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{2\ n} + \frac{(b-a)^2[f'(b) - f'(a)]}{12\ n^2} \right| \leq \frac{(b-a)^5}{720\ n^4}\ M_4.$$

4. Déterminer à l'aidee des résultats précédents le développement limité à l'ordre 3 de u_n, c'est-à-dire des nombres réels A, B, C et D tels que :

$$u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3} \qquad \text{avec :} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En déduire les développements limités à l'ordre de 3 de v_n et de w_n. Conclure.

École Supérieure de Commerce de Paris — Mathématiques I

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0,\ 1]$ d'une suite de fonctions.

I. ÉTUDE DU MAXIMUM D'UNE FONCTION

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.

Indication. On étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\, e^x + 1$$

c) Prouver que $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < e^{-1}$.

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geq 1$$

et que :

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq e^{-1}|x - \alpha|$$

A SUIVRE

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $[1, +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, expliciter, à l'aide d'une calculatrice, une valeur décimale approchée $\bar{\alpha}$ de α telle que :

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \leq 10^{-6}$$

II. ÉTUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Excepté la question II. 8, la partie II est indépendante de la partie I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions numériques définies sur $[0, 1]$ par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = \left[1 - x + \frac{x}{2}\,u_n(x)\right]\,u_n(x)$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, la fonction u_n est polynomiale ; déterminer son degré et son coefficient dominant.

2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0, 1]$:

$$0 < u_n(x) \leq 1$$

En déduire, toujours par récurrence sur n, que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0, 1]$:

$$u'_n(x) \leq 0$$

3. a) Soit x un élément de $[0, 1]$ et n un nombre entier naturel non nul. Établir les inégalités :

$$(1-x)^n \leq u_n(x) \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$$

b) En déduire que, lorsque x est fixé dans $[0, 1]$, la suite de terme général $u_n(x)$ converge ; exprimer sa limite en fonction de x.

c) Montrer que cette suite est décroissante.

Dans toute la suite du problème, on note h la fonction définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$h(t) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

4. a) Montrer que, pour tout couple (a, b) d'éléments de $[0, 1]$:

$$|h(b) - h(a)| \leq |b - a|$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0, 1]$:

$$|[u_k(x) - u_{k+1}(x)] - [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)]| \leq x\,|u_k(x) - u_{k+1}(x)|$$

c) Montrer enfin que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0, 1[$:

$$0 \leq u_k(x) - u_{k+1}(x) \leq \frac{u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)}{1 - x}$$

Tournez la page S.V.P.

5. Dans cette question, on fixe k dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,\ 1[$.

a) En utilisant le dernier encadrement et le sens de variation de h, montrer que :

$$x \leq \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{x}{1-x}$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$nx \leq \int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{nx}{1-x}$$

6. a) Trouver un couple $(A,\ B)$ de nombres réels tel que, pour tout élément t de $]0,\ 1]$:

$$\frac{1}{h(t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-\frac{t}{2}}$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}$$

en fonction de $u_n(x)$.

En conclure que :

$$\frac{2}{1+\exp\left(\frac{nx}{1-x}\right)} \leq u_n(x) \leq \frac{2}{\mathrm{e}^{nx}+1}$$

7. Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n\left(\frac{y}{n}\right)$.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\ 1]$ par :

$$v_n(x) = xu_n(x)$$

On note M_n le maximum de la fonction v_n sur $[0,\ 1]$.

a) Montrer que :

$$v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$$

b) Établir l'encadrement :

$$\frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}$$

En déduire un équivalent simple de M_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

FIN

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 11 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

OBJECTIF DU PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle $[a,\ b]$ où $a < b$. On rappelle qu'une fonction affine sur un intervalle J est une fonction f définie sur J par une relation de la forme : $f(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des nombres réels.

Étant donné un nombre entier $n \geq 2$ et une subdivision de $[a,\ b]$, c'est-à-dire une suite strictement croissante $\sigma_n = (x_0,\ x_1, \dots,\ x_n)$ de $n+1$ éléments de $[a,\ b]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, on note $E(\sigma_n)$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[a,\ b]$ telles que chacune des restrictions de f aux intervalles $[x_k,\ x_{k+1}]$, où k prend les valeurs $0,\ 1, \dots,\ n-1$, soit une fonction affine.

L'objet du problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe C^2 sur $[a,\ b]$ par des éléments de $E(\sigma_n)$.

PARTIE I : *étude de* $E(\sigma_2)$

Dans cette partie, on prend $n = 2$. Ainsi $x_0 = a$ et $x_2 = b$. On pose $c = x_1$.

1. Montrer que $E(\sigma_2)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit f un élément de $E(\sigma_2)$. Calculer $f(t)$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ pour $a \leq t \leq c$, puis pour $c \leq t \leq b$.

3. Soit Φ l'application de $E(\sigma_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $\Phi(f) = (f(a),\ f(c),\ f(b))$
Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $E(\sigma_2)$.

4. On définit trois éléments f_0, f_1 et f_2 de $E(\sigma_2)$ par les conditions :

$$\Phi(f_0) = (1,\ 0,\ 0)\ ; \quad \Phi(f_1) = (0,\ 1,\ 0)\ ; \quad \Phi(f_2) = (0,\ 0,\ 1)$$

a) Représenter graphiquement les fonctions f_0, f_1 et f_2.
b) Montrer que $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ est une base de $E(\sigma_2)$.

5. On considère les fonctions g_0, g_1 et g_2 définies sur $[a,\ b]$ par les relations :

$$g_0(t) = |t-a| \qquad g_1(t) = |t-c| \qquad g_2(t) = |t-b|$$

a) Montrer que $(g_0,\ g_1,\ g_2)$ est une base de $E(\sigma_2)$. Calculer les coordonnées de chacune des fonctions g_0, g_1 et g_2 sur la base $(f_0,\ f_1,\ f_2)$.
b) Soient α, β et γ des nombres réels non nuls. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
c) En déduire les coordonnées de chacune des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur la base $(g_0,\ g_1,\ g_2)$.

PARTIE II : *étude de* $E(\sigma_n)$

Dans cette partie, on prend $a = 0$, $b = 1$ et $x_k = \dfrac{k}{n}$ pour tout nombre entier naturel $k \leq n$. L'espace vectoriel $E(\sigma_n)$ sera noté plus simplement E_n

1. Prouver que E_n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0,\ 1]$.

2. Soit Φ l'application de E_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\Phi(f) = (f(x_0),\ f(x_1),\ldots,\ f(x_n))$
Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de E_n.

3. On définit une famille $(f_0,\ f_1,\ldots,\ f_n)$ de $n+1$ éléments de E_n par les conditions :

$$\Phi(f_k) = (0,\ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ldots,\ 0)$$

le nombre 1 étant à la $(k+1)^{\text{ième}}$ place. Autrement dit, $f_k(x_k) = 1$ et $f_k(x_j) = 0$ pour $j \neq k$.
a) Montrer que $(f_0,\ f_1,\ldots,\ f_n)$ est une base de E_n.
b) Montrer que, pour tout élément g de E_n, on a l'égalité :

$$g = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\ f_k$$

4. Pour tout nombre entier naturel $k \leq n$, on considère la fonction g_k définie sur $[0,\ 1]$ par la relation :

$$g_k(t) = |t - x_k|$$

a) Montrer que les fonctions g_k appartiennent à E_n.

b) Soit $(\lambda_0,\ \lambda_1, \ldots,\ \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose :

$$g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ g_k$$

Soit j un nombre entier compris entre 1 et $n-1$. Si on suppose que $\lambda_j \neq 0$, montrer que la fonction g n'est pas dérivable en x_j.

5. a) En déduire que la famille $(g_0,\ g_1, \ldots,\ g_n)$ est libre. Est-ce une base de E_n ?

b) En déduire aussi que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f_0 &= \lambda_0 g_0 + \mu_0 g_1 + \nu_0 g_n \\ f_k &= \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} \qquad \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ f_n &= \lambda_n g_0 + \mu_n g_{n-1} + \nu_n g_n \end{aligned}$$

(Pour les entiers k compris entre 1 et $n-1$, on commencera par montrer que f_k est de la forme :

$$f_k = \alpha_k g_0 + \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} + \beta_k g_n$$

puis que $\alpha_k = \beta_k = 0$ en considérant les restrictions de f_k aux deux intervalles $[x_0,\ x_1]$ et $[x_{n-1},\ x_n]$.)

c) Calculer, à l'aide des résultats de la partie I, les nombres λ_k, μ_k et ν_k.

6. *Application.* On considère la matrice carrée A_n d'ordre $n+1$ dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $|i-j|$. Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les coordonnées de g_k sur la base $(f_0,\ f_1, \ldots,\ f_n)$. Interpréter la matrice :

$$P_n = \frac{1}{n}\ A_n$$

b) Prouver que la matrice A_n est inversible et calculer son inverse.

PARTIE III

Dans cette partie, on approche une fonction de classe C^2 sur $[0,\ 1]$ par des éléments de E_n.

1. On considère une fonction f de classe C^2 sur un intervalle $[a,\ b]$ (où $a < b$) telle que $f(a) = f(b)$. Soit c un élément de $]a,\ b[$ et $\sigma_2 = (a,\ c,\ b)$.

a) Soit φ un élément de $E(\sigma_2)$ tel que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Établir l'égalité :

$$\int_a^b \varphi(t)\ f''(t)\ \mathrm{d}t = [f(c) - f(a)][\varphi'(b) - \varphi'(a)]$$

b) Déterminer un élément φ_c de $E(\sigma_2)$ tel que, quelle que soit f :

$$\int_a^b \varphi_c(t)\ f''(t)\ \mathrm{d}t = f(c) - f(a)$$

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

mardi 18 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

—. Règles graduées.
—. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Étant donné un nombre entier naturel non nul n et un ensemble E à n éléments, on appelle *involution* de E toute bijection f de E sur lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identique de E.

L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de E et, en particulier, la recherche d'un équivalent du nombre T_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I : *étude du nombre T_n d'involutions de E*

1. Calculer T_1, T_2 et T_3.

2. On suppose désormais $n \geq 3$.

a) Déterminer en fonction de T_i, où $1 \leq i < n$:

— le nombre des involutions s de $[1, n]$ telles que $s(n) = n$;

— le nombre des involutions s de $[1, n]$ telles que $s(n) = k$, où k est un nombre entier donné de $[1, n-1]$.

b) En déduire la relation suivante :

(1) $$T_n = T_{n-1} + (n-1)\,T_{n-2}$$

3. Rédiger en PASCAL un algorithme permettant le calcul des p premiers termes de la suite (T_n) pour un nombre entier donné $p \geq 3$.
En programmant cet algorithme, expliciter les valeurs de T_n pour $n \leq 10$.

Partie II : *interprétation de T_n à l'aide d'une suite de polynômes*

On considère la fonction numérique u définie sur **R** par la relation :

$$u(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de u. On note H_n la fonction numérique définie sur **R** par la relation :

(2) $$u^{(n)}(x) = H_n(x)\, u(x)$$

1. a) Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et x.
En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geq 2$:

(3) $$u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)\, u^{(n-2)}(x)$$

b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.
c) Prouver que H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur $[0, +\infty[$.
d) Comparer T_n et $H_n(1)$.

2. a) En dérivant la relation (2) et en utilisant la relation entre $H_{n+1}(x)$, $H_n(x)$, $H_{n-1}(x)$ et x, établir la relation suivante, pour tout nombre entier naturel non nul n :

(4) $$H'_n(x) = n\, H_{n-1}(x)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H'_n(0)$ en fonction de n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

3. a) Établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$H''_n(x) + x H'_n(x) - n\, H_n(x) = 0$$

(On pourra dériver deux fois la relation (2).)

b) Dans toute la suite du problème, pour tout nombre entier naturel n, on note v_n la fonction numérique définie sur **R** par la relation :

$$v_n(x) = H_n(x)\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

Étudier le signe de v_n et de v_n' sur $[0, +\infty[$. Calculer $v_n(0)$ et $v_n'(0)$.

c) Exprimer $v_n''(x)$ en fonction de $v_n(x)$ et x.

d) En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

(5) $$\left(n+\frac{1}{2}\right)v_n(x) \leq v_n''(x) \leq \left(n+\frac{3}{4}\right)v_n(x)$$

Dans toute la suite du problème, on posera :

$$\alpha_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} \qquad \beta_n = \sqrt{n+\frac{3}{4}}$$

Partie III : ***recherche d'un équivalent de T_n***

On étudie tout d'abord un équivalent de T_n lorsque l'entier $n = 2p$ est pair.

1. On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction numérique définie sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives, de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

(6) $$\alpha^2 f(x) \leq f''(x) \leq \beta^2 f(x) \qquad f(0) = a \qquad f'(0) = 0$$

où a, α, et β sont des nombres réels strictement positifs donnés.

a) Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique φ définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$\varphi(x) = \lambda\exp(\beta x) + \mu\exp(-\beta x)$$

vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
Indiquer alors le signe de φ sur $[0, 1]$ et exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) Soit w la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$w = f\varphi' - \varphi f'$$

Calculer $w(0)$. Étudier le signe de w', puis celui de w

c) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq \varphi(x)$.

d) Établir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité suivante :

(7) $$f(x) \leq \frac{a}{2}\left[\exp(\beta x) + 1\right]$$

e) Établir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

(8) $$\frac{a}{2}\exp(\alpha x) \leq f(x)$$

2.*a*) À l'aide de la relation (5), établir que, pour tout nombre entier naturel p :

$$H_{2p}(0)\,\frac{\exp(\alpha_{2p})}{2} \leq \exp\left(\frac{1}{4}\right)H_{2p}(1) \leq H_{2p}(0)\,\frac{\exp(\beta_{2p}) + 1}{2}$$

b) On admet la formule de Stirling : $n\,! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}$

D'après la partie II : $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$

En déduire que, pour $n = 2p$, on a :

(9) $$T_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\exp\left(\sqrt{n}\right)\left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}$$

c) Donner une valeur approchée du quotient des deux membres de cette expression pour $n = 10$.

On étudie enfin un équivalent de T_n lorsque l'entier n est impair ($n = 2p + 1$)

3. On établit par des méthodes analogues à celles de la question III.1 que, si g est une fonction numérique définie sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives sur $]0, 1]$ de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

(10) $$\alpha^2 g(x) \leq g''(x) \leq \beta^2 g(x) \qquad g(0) = 0 \qquad g'(0) = a$$

où a, α, et β sont des nombres réels strictement positifs donnés, alors, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$\frac{a}{2\alpha}\left[\exp(\alpha x) - 1\right] \leq g(x) \leq \frac{a}{2\beta}\exp(\beta x)$$

(On ne demande pas de justifier cet encadrement.)

a) En déduire que, pour $n = 2p + 1$:

$$H_n(1) \sim \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{n}\,\exp\sqrt{n}\;H_{n-1}(0)$$

b) En conclure que la relation (9) est encore valable lorsque le nombre entier n est impair.

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t \, dt$

L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire quelques applications.

PARTIE I. Étude d'une intégrale impropre

On désigne par f la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par la relation :

$$f(x) = -\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0, \pi/2]$:

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction : $t \mapsto \ln \frac{2t}{\pi}$

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale : $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2t}{\pi} \, dt$

3. Établir que la fonction f est monotone et bornée sur $]0, \pi/2]$; en déduire la convergence de l'intégrale suivante :

$$L = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt$$

4. On se propose enfin de calculer L à l'aide des deux intégrales suivantes (dont la convergence résultera de la question a) ci-dessous) :

$$J = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t) \, dt \qquad K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) \, dt$$

a) Obtenir des relations entre les intégrales J, K et L en effectuant dans cette dernière les changements de variables $u = \pi - t$ et $u = \pi/2 - t$.

b) Exprimer $K + L$ en fonction de $L + J$ (on rappelle que $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$).

c) En déduire les valeurs des intégrales J, K et L.

PARTIE II. Étude de la fonction W

1. Soient x et y des nombres réels positifs tels que $x \leq y$. Comparer $W(x)$ et $W(y)$ et en déduire le sens de variation de la fonction W sur $[0, +\infty[$.

2. On considère des nombres réels positifs x et x_0.

a) Montrer que, pour tout nombre réel positif a :

$$|e^{-ax} - e^{-ax_0}| \leq a|x - x_0|$$

b) En déduire l'inégalité suivante : $|W(x) - W(x_0)| \leq \frac{\pi \ln 2}{2} |x - x_0|$

c) Établir la continuité de W sur $[0, +\infty[$.

3. Pour tout nombre réel positif x, exprimer $W(x+2)$ en fonction de $W(x)$ à l'aide d'une intégration par parties (on écrira à cet effet : $\sin^{x+2} t = \sin t \sin^{x+1} t$).

4. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction auxiliaire g définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = (x+1)\, W(x+1)\, W(x)$.

a) Établir que, pour tout nombre réel positif ou nul x, $g(x+1) = g(x)$.
En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leq \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \frac{g(n)}{n+1}$$

En déduire en fonction de n un encadrement de $g(x)$. En conclure que g est constante sur $[0, +\infty[$ (on explicitera son unique valeur).

c) En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$, montrer que $W(x+1)$ est équivalent à $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) Déduire de ces résultats que, lorsque x tend vers $+\infty$: $W(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$

PARTIE III. Applications

A) Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$G = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel $u > -x$:

$$\left(1 + \frac{u}{x}\right)^x \leq \exp u$$

On pourra étudier pour $u > -x$ le signe de la fonction $u \mapsto u - x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right)$.

b) En intégrant l'inégalité précédente avec des valeurs convenables de u, établir que, pour $x \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t$$

c) En posant respectivement $t = \sqrt{x} \cos u$ et $t = \sqrt{x}\, \dfrac{\cos u}{\sin u}$ dans la première et la dernière de ces intégrales, établir que, pour $x \geq 1$:

$$\sqrt{x}\, W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t \leq \sqrt{x}\, W(2x-2)$$

d) À l'aide de l'équivalent de W obtenu à la fin de la partie II, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale G, et retrouver la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-t^2}{2} \mathrm{d}t$$

B) Calcul de valeurs approchées du nombre π

1. On pose, pour tout nombre réel positif x :

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)}$$

a) En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$ et en utilisant la relation établie à la question II.3, établir que :

$$0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{1}{x+2}$$

b) Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geq 2$, et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \quad \text{avec} \quad r_n = 2 \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

En déduire la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$ et un encadrement de $\pi - r_n$.

c) Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de r_n.
Donner des valeurs approchées de r_n (avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.

2. On se propose d'accélérer la convergence de la suite (r_n).

a) On pose pour tout nombre entier $k \geq 2$: $u_k = \ln r_k - \ln r_{k-1}$.
En calculant $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}$ et en faisant tendre m vers $+\infty$, établir que :

$$\ln \frac{\pi}{r_n} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

b) En comparant une série à une intégrale, établir l'inégalité:

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

c) Étudier la variation sur $]0, 1[$ de la fonction $\varepsilon : x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$.

En déduire que, pour tout entier naturel $k \geq n$:

$$\frac{1}{4k^2} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \leq (1+\varepsilon_n)\frac{1}{4k^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = \varepsilon\left(\frac{1}{4n^2}\right)$$

d) Déduire des résultats précédents un équivalent de $\ln \frac{\pi}{r_n}$ et prouver que :

$$\pi - r_n \sim \frac{r_n}{4n}$$

Déduire enfin des valeurs approchées de r_n obtenues précédemment des valeurs approchées de :

$$\left(1 + \frac{1}{4n}\right) r_n$$

(avec 4 décimales) pour $n = 25$ et $n = 75$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

samedi 20 mai 1995, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Sont autorisées: – Règles graduées.
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par les relations :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1} \quad \text{si} \quad x>0\,,\quad f(0)=1\,.$$

Dans la partie II, on établit l'existence des *moments* $I_p=\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p f(x)dx$ où p est un entier naturel, puis on exprime ces moments en fonction des séries $A_p=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{p+2}}$.

Dans la partie III, on établit un procédé d'approximation des nombres A_p.

PARTIE I.

1. a) Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
   b) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2. a) Calculer la dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$.
   b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   c) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,+\infty[$?

3. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 - x - e^{-x}$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

4. Étudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\psi(x) = (x + 2) + (x - 2)\, e^{x}$$

En déduire le signe de $f''(x)$ pour $x > 0$.

5. Donner une représentation graphique de f.

PARTIE II.

Dans cette partie et jusqu'à la fin du problème, p désigne un entier naturel.

1. Dans cette question, λ est un réel strictement positif.

   a) Établir la convergence de l'intégrale :

$$K(p,\lambda) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-\lambda x} dx$$

et calculer $K(0,\lambda)$.

   b) Établir une relation simple entre $K(p, \lambda)$ et $K(p + 1, \lambda)$

[On utilisera une intégration par parties].

   c) En déduire par récurrence la valeur de $K(p, \lambda)$.

2. a) Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$$

   b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p f(x) dx$ converge.

Dans toute la suite du problème, on pose :

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} dx$$

3. Calcul de I_p.

   a) Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$. On note

$$A_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

b) Pour $x \in]0, +\infty[$ et n entier supérieur ou égal à 1, établir que

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

c) En déduire que :

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$$

d) Exprimer I_o à l'aide de A_o.

e) En adaptant la méthode précédente, exprimer I_p en fonction de A_p.

PARTIE III.

On étudie une méthode de calcul approché de A_p.

1. *Première approximation*

a) Soit x un nombre réel et g une fonction de classe C^2 définie sur $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$ à valeurs réelles. Établir la relation :

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t - x - \frac{1}{2})^2 g''(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t - x + \frac{1}{2})^2 g''(t)dt$$

[On pourra intégrer par parties les deux dernières intégrales apparaissant dans la formule].

b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1 on a :

$$\left| \frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} \right| \leq \frac{(p+2)(p+3)}{24\,(k - \frac{1}{2})^{p+4}}$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 ; montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^{p+4}} \leq \frac{1}{(p+3)\,(n - \frac{1}{2})^{p+3}}$$

et en déduire, à l'aide de (b), que :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)\,(n + \frac{1}{2})^{p+1}} \right| \leq \frac{p+2}{24\,(n - \frac{1}{2})^{p+3}}$$

d) Exemple. On pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{3(n+\frac{1}{2})^3}$$

Proposer un majorant de $|A_2 - u_n|$.

Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que : $|A_2 - u_n| \leq 10^{-6}$?

2. *Deuxième approximation*

a) On reprend les notations et les hypothèses de la question (III-1.a) et on suppose de plus que g est de classe C^4. Montrer que :

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)dt - \frac{g''(x)}{24} - \frac{1}{24}\left(\int_{x}^{x+\frac{1}{2}} (t-x-\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)dt + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x} (t-x+\frac{1}{2})^4 g^{(4)}(t)dt\right)$$

b) En déduire que pour k entier supérieur ou égal à 1 :

$$\left|\frac{1}{k^{p+2}} - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{p+2}} + \frac{(p+2)\,(p+3)}{24\,k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)\,(p+3)\,(p+4)\,(p+5)}{1.920\left(k-\frac{1}{2}\right)^{p+6}}$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} - \frac{1}{(p+1)\,(n+\frac{1}{2})^{p+1}} + \frac{(p+2)\,(p+3)}{24} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+4}}\right| \leq \frac{(p+2)\,(p+3)\,(p+4)}{1.920\,(n-\frac{1}{2})^{p+5}}$$

d) Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)\,(n+\frac{1}{2})^{p+1}} - \frac{p+2}{24(n+\frac{1}{2})^{p+3}}$$

En utilisant les résultats des questions III.1.c) et III.2.c) proposer un majorant de $|A_p - v_n|$.

e) Exemple. On fait $p = 0$. Pour quelle valeur minimale de n peut-on affirmer que :

$$|A_o - v_n| \leq 10^{-6} \text{ ?}$$

FIN

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I
OPTION SCIENTIFIQUE

Mercredi 15 mai 1996, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées : *Règles graduées.*
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. On note $M_p(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité. Pour tout élément M de $M_p(\mathbf{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $a_{i,j}(M)$ le coefficient de M situé sur la ième ligne et la jème colonne.

Une matrice M appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ est dite *stochastique* si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

(i) Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, $a_{i,j}(M) \geq 0$.
(ii) Pour tout entier i compris entre 1 et p, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(M) = 1$.

On dit qu'une suite indexée par n, $(M_n) = (M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots)$ de matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ converge vers un élément M de $M_p(\mathbf{R})$ si, pour tout couple (i,j), la suite des coefficients $a_{i,j}(M_n)$ converge vers $a_{i,j}(M)$; on dit alors que M est la limite de la suite (M_n).

Etant donnée une matrice A appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n la matrice définie par la relation:

$$C_n = \frac{1}{n+1}[I_p + A + A^2 + \cdots + A^n] \tag{1}$$

On dit enfin qu'une matrice A de $M_p(\mathbf{R})$ est r-périodique où r est un entier strictement positif, si $A^r = I_p$.

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite (C_n) lorsque A est stochastique et r-périodique.

I. Etude d'exemples.

1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[1 + \alpha + \alpha^2 \cdots + \alpha^n]$$

a). Calculer γ_n, en distinguant deux cas: $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.
b). Etudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser sa limite.

2. Premier exemple d'étude de (C_n).
On prend $p = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a). Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier k. On distinguera trois cas selon que $k = 3h$, $k = 3h+1$, et $k = 3h+2$.
b). Pour tout entier q, calculer C_{3q}, C_{3q+1} et C_{3q+2}. En déduire que la suite (C_n) converge et préciser sa limite C.
c). Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer le noyau F de v et prouver que son image G est la droite vectorielle $\mathbf{R}e$ de vecteur directeur $e = \frac{1}{3}[e_1 + e_2 + e_3]$. Prouver que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires et que v est le projecteur de $\mathbf{R}^3$ sur G parallèlement à F.

3. Deuxième exemple d'étude de (C_n).

On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On note w l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A.
a). Déterminer les valeurs propres de w et une base (f_1, f_2) de vecteurs propres de w.
b). Déterminer une matrice inversible P telle que:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En déduire une expression de A^k, pour tout entier $k \geq 0$.

c). Déterminer deux matrices U et V appartenant à $M_2(\mathbf{R})$, telles que, pour tout $k \geq 0$,

$$A^k = U + (-\frac{1}{6})^k V$$

d). Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite (C_n).

e). Prouver que l'endomorphisme v de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera le noyau F et l'image G.

II. Etude de (C_n) lorsque A est r−périodique.

On désigne par r un entier strictement positif.

1. Soit (α_k) une suite r−périodique de nombres réels, c'est-à-dire telle que, pour tout entier naturel $k \geq 0$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose:

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}]$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose:

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n] \tag{2}$$

a). Prouver que pour tout entier $k \geq 0$,

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}]$$

b). Montrer que la suite de terme général

$$\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$$

est r−périodique. En déduire que (β_n) est bornée.

c). Etablir que (γ_n) converge et préciser sa limite.

2. Soit A une matrice r−périodique appartenant à $M_p(\mathbf{R})$.

a). Montrer que, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, la suite de terme général $\alpha_k = a_{i,j}(A^k)$ est r−périodique. En déduire que la suite (C_n) converge vers:

$$C = \frac{1}{r}[I_p + A + \cdots + A^{r-1}]$$

b). Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$, u et v les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C. Prouver que $u^r = I$, où I est l'endomorphisme identique de $\mathbf{R}^p$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ et que $u \circ v = v$.

c). Soit x un élément de $\mathbf{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que x appartient à $\operatorname{Im} v$ si et seulement si $u(x) = x$. En déduire que $\operatorname{Im} v = \ker(u - I)$.

d). Montrer que v est le projecteur sur $G = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $F = \ker v$.

e). Etablir enfin que $\ker v = \operatorname{Im}(u - I)$: on pourra d'abord prouver que $\operatorname{Im}(u - I) \subset \ker v$.

3 a). Soit (α_k) une suite de nombres réels r−périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que pour tout $k \geq m$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit (γ_n) par la relation (2). Prouver que γ_n admet une limite que l'on précisera. Pour cela, on pourra considérer la suite $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$,

observer que (α'_k) est r−périodique, et prouver que, γ'_n étant associée à (α'_k) par la relation (2), $\gamma'_n - \gamma_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b). Soit A une matrice de $M_p(\mathbf{R})$ r−périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que, pour tout entier $k \geq m$, $A^{k+r} = A^k$. Prouver que la suite (C_n) admet une limite C que l'on précisera.

III. Etude de matrices stochastiques.

On note S_p l'ensemble des matrices *stochastiques* de $M_p(\mathbf{R})$ et D_p l'ensemble des matrices *déterministes*, c'est-à-dire stochastiques et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

1. Matrices stochastiques.

a) Prouver que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels tels que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.

b). Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.

c). Soit A un élément de S_p. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, C_n (définie par (1)) appartient à S_p. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe?

2. Matrices déterministes.

a). Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou à 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

b). En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

c). Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.

d). Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geq 1$ et un entier $m \geq 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est r−périodique *à partir de ce rang* m et que si de plus A est inversible, A est r−périodique.

e). Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que A^{-1} l'est aussi.

3. Etude de la suite (C_n) associée à une matrice A déterministe.

a). En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant: soit A une matrice déterministe *inversible*, alors (C_n) converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

b). Etendre ce résultat au cas où A est déterministe *non inversible*.

4. Matrices stochastiques inversibles.

Soient X et Y des éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

a). Prouver que Y est une matrice inversible et que X l'est aussi.

b). On pose $X = (\alpha_{i,j})$, $Y = (\beta_{i,j})$ et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\mu_j = \max\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{p,j}\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $a_{j,j}(XY)$.

c). Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou à 1.

d). Prouver que Y et X appartiennent à Δ_p.

e). Plus généralement, soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartient à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. (On pourra utiliser le résultat de la question **III.2.e)**.)

FIN.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

mardi 29 avril 1997, de 8 h à 12 h

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème .
On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynomes de degré inférieur ou égal à n) y compris le polynôme nul.
Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.
On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.
Enfin on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie I

Trois résultats utiles par la suite.

1) a) Pour tout entier naturel n, justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)\, I_{n-2}$.

c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

d) Pour toute fonction polynomiale P, justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

2) On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel l alors la suite (v_n) est elle-même convergente de limite l.

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \dfrac{C^n}{[\frac{n}{2}]!}$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbf{N}$) converge et donner sa somme.

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3) Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\underset{t \in [-a,a]}{Max} |g^{(n)}(t)| \leqslant \frac{K^n n!}{[\frac{n}{2}]!}$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$$

b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a,a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

PARTIE II

Les polynômes de Hermite.

1) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|.\|$ la norme associée.

Ainsi si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X],\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien.

2) A l'aide de la base $(1,X,X^2,X^3)$ construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X],\langle .,.\rangle)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

Pour tout entier naturel n on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$$

où selon l'usage $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f (en particulier $f^{(0)}(x)=f(x)$).

3) a) Pour tout réel x calculer $H_0(x),H_1(x),H_2(x),H_3(x)$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Etablir les relations

$$H_{n+1}=XH_n-nH_{n-1}\tag{1}$$

et

$$H'_n=nH_{n-1}\tag{2}$$

Pour établir (1)*on pourra remarquer que* $(e^{\frac{-x^2}{2}})^{(n+1)}=(-xe^{\frac{-x^2}{2}})^{(n)}$.

c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

4) On disposé du

Type

Poly = **array**[0..20] **of integer** ;

On nommera de la même façon un polynôme de degré au plus 20 et la variable de type Poly obtenue en stockant dans la case numéro k, $0\leqslant k\leqslant 20$, le coefficient de X^k dudit polynôme.

a) Ecrire la partie instruction (i.e. sans les déclarations) d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est

Procedure MULTIX (P, **Var** Q :Poly) ;

qui stocke dans Q les coefficients du polynôme XP, P étant un polynôme de degré au plus 19.

b) A l'aide de (1) écrire la partie instruction d'une procédure PASCAL dont l'en-tête est

Procedure HERMITE (n :**integer** ;**Var** H :Poly) ;

qui, étant donné un entier $n, 2\leqslant n\leqslant 20$, stocke les coefficients de H_n dans une variable de **Type** Poly.

PARTIE III

$(H_n)_{n\geqslant 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux.

1) a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul alors $\lim_{x\to+\infty}P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)}=0$. De même on montrerait et **on admet** que $\lim_{x\to-\infty}P(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n-1)}=0$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ calculer

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Pour n non nul on utilisera la définition de H_n.

c) Soit $(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. En remarquant que $\langle H_n, H_m\rangle = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(n)}dx$ et à l'aide d'une intégration par parties qu'on effectuera avec soin montrer que

$$\langle H_n, H_m\rangle = m\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle$$

En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbf{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n\rangle$?

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k ; Que vaut $\langle H_{k+1}, R\rangle$?

b) Soit n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$ et P un polynôme de degré au plus k. Etablir l'égalité

$$\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. *On pourra calculer $\langle H_{k+1}, Q - P\rangle$.*

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

c) On note $(G_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle .,.\rangle)$ obtenue par le procédé de SCHMIDT à partir de la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$. Pour tout $k, 0 \leqslant k \leqslant n+1$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \ldots, H_{n+1}$.

PARTIE IV

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit P un polynôme de degré au plus n. Justifier l'égalité suivante : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle P, H_k\rangle \frac{H_k}{k!}$

2) Pour tout couple (b,c) de réels vérifiant $b \leqslant c$ on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier n et tout $x \in [b,c]$: $\left|\dfrac{H_n(x)}{n!}\right| \leqslant \dfrac{K^n}{[\frac{n}{2}]!}$

a) Soit x un réel donné. A l'aide du 2) de la partie I établir, pour tout réel λ, la convergence de la série de terme général $\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$.

b) Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$.

Pour tout réel λ et tout entier naturel n calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$(c'est-à-dire $\dfrac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n.

Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3) de la partie I et en déduire que pour tout $(x,\lambda) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$$

c) On note exp la fonction $x \mapsto e^x$. Pour tout entier naturel n justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n\rangle$ la valeur. Calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ puis,pour tout réel x, conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle \exp, H_n\rangle\ \frac{H_n(x)}{n!}$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n\rangle$ on pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n\rangle = \langle \exp, H_{n-1}\rangle$.

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS OPTION SCIENTIFIQUE

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

Partie I. Algorithme de Newton dans $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement positif.

1) a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour x élément de $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout entier naturel n, établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \qquad et \qquad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}}(a - x_{n+1}^2)$$

d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$$

b) Soit b un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant b u_n^2$ pour tout entier naturel n non nul.
Pour tout entier naturel n non nul, donner une majoration de u_n en fonction de n, b, u_1.

c) En déduire, pour tout entier n non nul, une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, x_1 et a.

3) a) En décrivant pas à pas les premières étapes de l'algorithme, que dire du résultat rendu par le programme suivant quand on l'exécute?

```
program racine_carree ;
function rc(a,x,eps :real) :real ;
begin
if abs(x*x-a)<eps then rc :=x else begin x :=1/2*(x+a/x) ;
                                          rc :=rc(a,x,eps) ;
                                    end ;
end ;
begin
writeln(rc(2,2,1e-16)) ;
end.
```

b) On rappelle les inégalités : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.
Montrer que, lors de l'exécution du programme précédent, le nombre de comparaisons effectuées est inférieur ou égal à six. *On supposera le type real suffisamment étendu pour pouvoir manipuler des nombres à une précision d'au moins vingt décimales.*

Partie II. Algorithme de Newton dans $\mathbb{C}$

On se propose dans cette partie d'adapter la méthode de Newton à la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe a, c'est-à-dire d'approcher un nombre complexe dont le carré vaut a. Dans toute cette partie a désigne un nombre complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul.
On note $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z.

1) a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b de partie réelle strictement positive tel que $b^2 = a$.
On note $\mathcal{P}_+ = \left\{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e\left(\frac{z}{b}\right) > 0\right\}$.

b) Dans cette sous-question (et uniquement ici) on suppose que $a = 2i$. Déterminer le nombre b dans ce cas particulier et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est élément de $\mathcal{P}_+$.

2) On revient au cas général (où le complexe a n'est pas un réel négatif ou nul) et on considère l'application f définie pour tout nombre complexe z non nul par : $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right)$.
Établir l'inclusion : $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$.

3) On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 = a$ et par la relation de récurrence : $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout entier naturel n.
On pose également : $w_n = \dfrac{z_n - b}{z_n + b}$ pour tout entier naturel n.
   a) Justifier l'existence des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, w_n en fonction de w_{n-1}, puis, pour tout entier naturel n, w_n en fonction de w_0 et n.
4) Prouver la majoration : $|w_0| < 1$. En déduire la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III. Racine carrée d'une matrice.

Dans cette partie n désigne un entier naturel au moins égal à 2.
- On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant n lignes et n colonnes.
- On note $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont on note $\|.\|$ la norme.
- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux éléments de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on écrira Mx pour $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
2) On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente.
On considère l'élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est nul sauf si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $j = i+1$ auquel cas il vaut 1.
On suppose qu'il existe une matrice B racine carrée de A et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant, dans la base canonique, B pour matrice.
   a) L'endomorphisme g est-il bijectif?
   b) Prouver que $\operatorname{Im} g$ est stable par g (c'est-à-dire que $g(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g$), puis que la restriction de g à $\operatorname{Im} g$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} g$.
   c) Que vaut g^{2n} ? En déduire que la matrice A n'a pas de racine carrée.
3) Donner un exemple d'élément de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une infinité de racines carrées.

B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de $\mathcal{S}_n$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que A est un élément de $\mathcal{S}_n^+$.

1) Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive. *On pourra commencer par le cas où A est diagonale.*
2) Soit B et C deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de A.
   a) Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que : $A = P D^2\, {}^tP = Q \Delta^2\, {}^tQ$.
   b) En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2 R$.
   Établir l'égalité : $RD = \Delta R$. *On comparera les coefficients de ligne i et de colonne j ($1 \leqslant i, j \leqslant n$) de ces deux matrices.*
   c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A symétrique réelle strictement positive, qu'on notera $A^{1/2}$.

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_j.

3) Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant p$ et pour tout réel x, on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

a) Montrer que la famille $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à p.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré strictement inférieur à p tel que, pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, p\}$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) i) Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, et pour tout vecteur x_j de E_j, calculer $P(A)(x_j)$ et en déduire l'égalité : $P(A)^2 = A$.

ii) Montrer que les valeurs propres de $P(A)$ sont toutes strictement positives.

iii) Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i}\ L_i(A)$$

4) **Un exemple**

On considère les éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A = \begin{pmatrix} n & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & n & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \ldots & \ldots & -1 & n \end{pmatrix}$$

U est donc la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et A celle dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut n si $i = j$ et -1 sinon.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de U et A.

b) Exprimer $A^{1/2}$ en fonction de A et I_n (matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$).

Partie IV. Algorithme de Newton dans $\mathcal{S}_n^+$.

Dans toute cette partie on considère un élément A de $\mathcal{S}_n^+$ et une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, le vecteur propre e_i étant, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, associé à la valeur propre λ_i (les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).

1) Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+$ dont $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres. On note $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres correspondantes (i.e. $Me_i = \mu_i e_i$, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de la matrice $M' = \dfrac{1}{2}(M + M^{-1}A)$.

Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle relation existe-t-il entre la valeur propre μ_i' de M' associée à e_i et μ_i ?

2) a) Déduire de la question précédente qu'il est possible de définir une suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ telle que : $A_0 = A$ et, pour tout entier naturel k, $A_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(A_k + A_k^{-1}A\right)$.

b) Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $\lambda_{i,k}$ la valeur propre de A_k associée à e_i.

Étudier, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la convergence de la suite $(\lambda_{i,k})_{k \in \mathbf{N}}$.

3) On dit qu'une suite $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ converge vers la matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ s'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \|M_k \varepsilon_i - M\varepsilon_i\| = 0$.

Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $A^{1/2}$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 20 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l''utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème l'espérance d'une variable aléatoire Y sera notée $\mathbb{E}(Y)$.
Tous les polynômes de ce problème sont à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k, on note E_k l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k.
À tout entier naturel n non nul et à toute suite $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de $2n+1$ réels, on associe les applications Φ_n et S_n définies de la manière suivante :
pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$ avec $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, on pose

$$\Phi_n(A, B) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j s_{i+j} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_i b_j s_{i+j}$$

et, pour tout polynôme C élément de E_{2n}, avec $C = \sum_{i=0}^{2n} c_i X^i$, on pose $S_n(C) = \sum_{i=0}^{2n} c_i s_i$.

1) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, Φ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$.
   b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, S_n est une forme linéaire sur E_{2n} et, pour tout élément (A, B) de $E_n \times E_n$, prouver l'égalité : $\Phi_n(A, B) = S_n(AB)$ (*on commencera par considérer le cas où* $A = X^i$ *et* $B = X^j$ avec $0 \leqslant i, j \leqslant n$.)

2) Deux cas particuliers

a) Dans cette sous-question on suppose que $n = 1$ et $s_0 = 1$, s_1 et s_2 étant quelconques. Pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_1(aX + b, aX + b) = (b + as_1)^2 + a^2(s_2 - s_1^2)$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels s_1 et s_2, pour que l'application Φ_1 soit un produit scalaire sur $E_1 \times E_1$.

b) Dans cette sous-question on suppose que $n = 2$, $s_0 = 1$ et $s_1 = s_3 = 0$, s_2 et s_4 étant quelconques. Prouver que l'application Φ_2, associée à un tel choix de $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$, est un produit scalaire sur $E_2 \times E_2$ si et seulement si les réels s_2 et s_4 vérifient les conditions suivantes : $s_2 > 0$ et $s_4 - s_2^2 > 0$.

3) Deux exemples

Dans cette question on considère un entier naturel n non nul.

a) Dans cette sous-question, on se donne un entier naturel d non nul et une variable aléatoire discrète Y, prenant d valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, avec les probabilités, strictement positives, respectives $p_1, p_2, \ldots, p_d$, et on pose, pour tout entier naturel k :

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k p_i$$

On considère les applications Φ_n et S_n associées à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$.

i) Pour tout polynôme Q de E_{2n}, vérifier l'égalité : $S_n(Q) = \sum_{i=1}^{d} Q(\alpha_i)p_i$.

ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et d, pour que l'application Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

b) i) Dans cette sous-question, on considère une variable aléatoire Y dont une densité f est continue sur le segment $[0, 1]$ et nulle en dehors de $[0, 1]$. On pose, pour tout entier naturel k,

$$s_k = \mathbb{E}(Y^k) = \int_0^1 t^k f(t)\, dt$$

Vérifier que l'application Φ_n, associée à ce choix de $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

ii) Montrer que, dans le cas où $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{2n+1}\right)$, l'application Φ_n, associée à ce choix, est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

4) Dans cette question on revient au cas général où on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$ de $2n + 1$ réels et les applications Φ_n et S_n associées à cette suite.

On admet le résultat suivant : tout polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \zeta_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{l} (X^2 + b_j X + c_j)$$

où r et l sont des entiers naturels (avec la convention que si r ou l est nul, le produit correspondant vaut 1), où λ est un réel, où, si r est non nul, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ sont les racines réelles distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, et où, si l est non nul, $b_1, b_2, \ldots, b_l, c_1, c_2, \ldots, c_l$ sont des réels vérifiant $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant l$.

Un polynôme **non nul** P, à coefficients réels, est dit **positif** si, pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.

a) Montrer que la multiplicité d'une racine réelle d'un polynôme positif est paire.

b) Montrer que tout polynôme P positif de degré 2 est somme de deux carrés de polynômes, c'est-à-dire qu'il existe un couple (A, B) de polynômes, tel que $P = A^2 + B^2$.

c) En remarquant que, si A, B, C, D sont quatre polynômes, on a :

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2$$

montrer que tout polynôme positif est somme de deux carrés de polynômes.

d) Montrer que Φ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si, pour tout polynôme P positif, élément de E_n, on a : $S_n(P) > 0$.

5) Dans cette question on suppose que $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

a) À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, construire, à partir de la base $(1, X, X^2)$, une base orthonormale de E_2 pour le produit scalaire Φ_2.

b) Pour tous (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2), éléments de $\mathbb{R}^3$, vérifier l'égalité :

$$\Phi_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = {}^tA\,MB$$

où $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une matrice T triangulaire telle que : ${}^tTMT = I_3$ (I_3 désignant la matrice identité d'ordre 3).

6) Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier naturel n non nul, une suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{2n})$, de premier terme $s_0 = 1$, telle que Φ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$, et on note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormale de E_n pour le produit scalaire Φ_n obtenue, par le procédé de Schmidt, à partir de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, le polynôme P_i étant de degré i pour tout entier i compris entre 0 et n.

a) En considérant le nombre $\Phi_n(P_n, 1)$, prouver que le polynôme P_n ne peut pas garder un signe fixe sur $\mathbb{R}$. En déduire que P_n possède au moins une racine réelle de multiplicité impaire.

b) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaire. Montrer que P_n s'écrit sous la forme, $P_n = \varepsilon Q \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)$, où ε est élément de $\{-1, 1\}$ et Q est un polynôme positif de E_n.

En considérant le nombre $\Phi_n\left(P_n, \varepsilon \prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)\right)$, montrer que $k = n$.

7) On note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines du polynôme P_n, réelles et distinctes deux à deux selon la question précédente.

Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_k le polynôme $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.

a) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E_{n-1} et, pour tout polynôme R de E_{n-1}, justifier l'égalité : $R = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i) L_i$. En déduire $\sum_{i=1}^{n} L_i$.

b) Soit A un polynôme, élément de E_{2n-1}.

i) Justifier l'existence d'un couple (Q, R) élément de $E_{n-1} \times E_{n-1}$ tel que $A = P_nQ + R$.

ii) Vérifier que $S_n(A) = S_n(R)$, puis que $S_n(A) = \sum_{i=1}^{n} A(\alpha_i) S_n(L_i)$.

c) Pour tout élément k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $p_k = S_n(L_k)$.

Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et, en considérant $S_n(L_k^2)$, montrer que $p_k > 0$.

d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une variable aléatoire discrète Y vérifiant, pour tout élément k de $\{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, $s_k = \mathbb{E}(Y^k)$.

e) Déterminer la loi d'une telle variable aléatoire, dans le cas où $n = 2$ et $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 17 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les parties **III** et **IV** sont indépendantes des parties **I** et **II**.

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1) Pour tout réel x de $[0,1[$ et tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\,(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

où $\varphi^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ (avec, en particulier, $\varphi^{(0)} = \varphi$).

2) Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$, justifier l'égalité suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{C}_{2k}^{k}}{4^k}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

3) a) Pour tout entier naturel n, prouver l'inégalité : $\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.

b) Pour tout couple (t,x) de réels tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, vérifier les inégalités : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

c) En déduire que, pour tout réel x de $[0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

4) Pour tout réel x de $[0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{C}_{2k}^{k}}{4^k}\, x^k$$

Partie II

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_1, cette loi étant définie par

$$\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \mathbf{P}([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Par exemple, S_n pourrait représenter l'abscisse (aléatoire) au temps n d'une particule se déplaçant sur un axe et partie de l'origine au temps 0, qui saute à chaque instant d'une unité à gauche ou d'une unité à droite avec une égale probabilité.

On note $\operatorname{Min} R$ le plus petit élément d'une partie non vide R de $\mathbf{N}$.

On pose aussi, pour tout élément ω de Ω, $R_\omega = \left\{n \in \mathbf{N}^*; S_n(\omega) = 0\right\}$ et $T(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Min} R_\omega & \text{si } R_\omega \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } R_\omega = \emptyset. \end{cases}$

On **admet** que T est une variable aléatoire.

Ainsi T pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du premier retour à l'origine de la particule évoquée plus haut.

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'événement $E_n = [T > n] \cup [T = 0]$.

1) Soit n un entier naturel non nul. On pose $A_n = [S_n = 0]$ et, pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$A_k = \Big([S_k = 0] \cap [S_{k+1} \neq 0] \cap [S_{k+2} \neq 0] \ldots \cap [S_n \neq 0]\Big) = \Big([S_k = 0] \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n} [S_i \neq 0]\Big)\Big)$$

Ainsi, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, A_k serait l'événement :
« Pour la dernière fois avant l'instant n la particule est à l'origine à l'instant k ».

a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}([S_k = 0])\ \mathbf{P}(E_{n-k})$$

b) En déduire l'égalité :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([S_k = 0])\ \mathbf{P}(E_{n-k})$$

On admet que, si deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, à termes **positifs ou nuls**, sont telles que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent, alors en posant, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, la série de terme général c_n converge et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

2) Pour tout réel x de $[0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([S_n = 0])\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n\right)$$

3) a) Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbf{P}([S_n = 0])$.

b) À l'aide de la partie I, en déduire que, pour tout réel x de $[0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

c) En remarquant que l'événement $[T = 0]$ est inclus dans E_n pour tout entier naturel n, montrer qu'on a : $\mathbf{P}([T = 0]) = 0$.

Ainsi, presque sûrement, la particule citée en exemple, revient à l'origine.

Partie III

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x de $[0,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge. Pour tout réel x de $[0,1[$, on note $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\, f(x)\right) = \sqrt{\pi}$$

1) a) Pour tout entier naturel p, déterminer : $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right)$.

b) Pour tout entier naturel p, justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,

et, en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{2(p+1)t}$, calculer sa valeur.

c) En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

2) Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k Q(x^k)\right)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, Q(e^{-t})\,\mathrm{d}t$$

3) Soit h la fonction définie, pour tout réel x de $[0,1[$, par :

$$h(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{e}\right[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{e},1\right[\end{cases}$$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, h(e^{-t})\,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

b) Soit x un réel de $[0,1[$. En déterminant la valeur de $h(x^k)$ pour k assez grand, justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

4) **On admet** l'égalité :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \left(\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k x^k h(x^k)\right)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, h(e^{-t})\,\mathrm{d}t$$

En utilisant ce résultat pour $x=e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est équivalent à $2\sqrt{n}$.

Partie IV

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **décroissante** de réels **positifs ou nuls** et, pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$$

On fait l'hypothèse que, lorsque n tend vers $+\infty$, S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$. On va montrer qu'alors a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

On notera $\lfloor x\rfloor$ la partie entière d'un réel x.

1) Soit (α,β) un couple de nombres réels vérifiant : $0<\alpha<1<\beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n\neq\lfloor\alpha n\rfloor$ et $n\neq\lfloor\beta n\rfloor$, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{\lfloor\beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor\beta n\rfloor-n}\leqslant a_n\leqslant\frac{S_n-S_{\lfloor\alpha n\rfloor}}{n-\lfloor\alpha n\rfloor}$$

2) a) Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\dfrac{n}{\lfloor \gamma n \rfloor}$ et $\dfrac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$$

3) En déduire qu'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, a_n = 1$.

Partie V

1) a) À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(T > k)$.

b) En déduire un équivalent de $\mathbf{P}(T > n)$.

2) La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance ?

3) Pour tout réel x de $[0,1]$, prouver l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n])\, x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

4) Soit n un entier naturel.

a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n de la fonction $u \to \sqrt{1+u}$.

b) En déduire le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ de la fonction $x \to 1 - \sqrt{1-x^2}$.

c) Montrer que, au voisinage de 0 on a aussi :

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}([T=k])\, x^k + o(x^{2n})$$

d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbf{P}([T=2n]) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{4^n}$$

On rappelle qu'il y a unicité du développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ d'une fonction.

Pour tout élément ω de Ω, on pose :

$R'_\omega = \left\{ n \in \mathbf{N}^* ; n > T(\omega) \quad \text{et} \quad S_n(\omega) = 0 \right\}$ et $T_2(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Min} R'_\omega & \text{si } R'_\omega \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } R'_\omega = \emptyset. \end{cases}$

On **admet** que T_2 est une variable aléatoire.

Ainsi T_2 pourrait être le temps d'attente (aléatoire) du deuxième retour à l'origine de la particule.

5) a) Pour tout entier naturel n non nul, démontrer l'égalité :

$$\mathbf{P}([T_2=2n]) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([T=2k])\ \mathbf{P}([T=2n-2k])$$

b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T_2=0])$ puis, pour tout réel x de $[0,1]$, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2=n])\, x^n = (1-\sqrt{1-x^2})^2$$

6) Déterminer la loi de T_2.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 10 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.
On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{0_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.
Si f est un endomorphisme de E on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.
Si f est un endomorphisme de E et si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Partie I Préliminaires

Soit f un endomorphisme de E.

1) Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} P(f)$ est stable par f.

2) a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

3) Soit p un entier naturel non nul.

   a) Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

   b) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \dots, n_p$ sont p entiers naturels montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{n_k}$ est stable par f.

4) a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \operatorname{Id}_E$.

   b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

   c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

   d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

   e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.

5) a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
   Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E. *On pourra compléter une base d'un hyperplan en une base de E.*

   b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

      i) Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément λ de $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

      ii) On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.
      Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité : ${}^tA\,{}^tL = \lambda\,{}^tL$.

   c) Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

Partie II Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

1) Que dire des sous-espaces vectoriels de E stables par f si $p = 1$?

2) On suppose l'entier p au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.

   a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de $\prod_{k=1}^{p} E_k$ vérifiant l'égalité : $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$.

   b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)\, x_k$ est élément de F.

   c) Montrer que les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont tous dans F.

3) Déduire de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ où, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant p$, F_k est un sous-espace vectoriel de E_k.

4) Montrer que l'endomorphisme induit par f sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables F est un endomorphisme diagonalisable de F.

5) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f. Quel est alors ce nombre ?

Partie III Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

1) On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.
   a) Vérifier que D^n est l'endomorphisme nul et que D^{n-1} ne l'est pas.
   b) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels suivants : $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X] \ldots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2) On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre n c'est-à-dire vérifiant les conditions : $f^n = \mathbf{0}$ et $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$.
   a) Établir qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ vaut 1 si $j = i+1$ et 0 sinon.
   b) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice B suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   B est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ vaut i si $j = i+1$ et 0 sinon.
   c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Partie IV Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie on considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2 c'est à dire un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.

1) On considère un sous-espace vectoriel F_2 de E vérifiant $F_2 \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
   a) Justifier l'inclusion : $f(F_2) \subset \operatorname{Ker} f$.
   b) On considère de plus un sous-espace vectoriel F_1 de $\operatorname{Ker} f$ contenant $f(F_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
   c) Étant donné A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, établir l'inclusion : $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A+B) \cap C$. A-t-on nécessairement l'égalité ?
   d) Déterminer l'intersection $(F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$.
2) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \operatorname{Ker} f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F.

   Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \operatorname{Ker} f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \operatorname{Ker} f$ est réduite au vecteur nul.
3) **Dans cette question**, on suppose que l'entier n est égal à 4 (i.e. $E = \mathbb{R}^4$) et on considère l'endomorphisme h de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est la matrice M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que les sous-espaces vectoriels $G_1 = \operatorname{Ker}(h - \operatorname{Id})^2$ et $G_2 = \operatorname{Ker}(h - 2\operatorname{Id})^2$ sont supplémentaires.
   b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par h sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2) stable par h.
   c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de E stables par h.

Partie V Existence d'un plan stable par un endomorphisme

Soit f un endomorphisme non nul de E.

1) Justifier l'existence d'un polynôme non nul à coefficients réels annulant f.

   On note M un polynôme non nul à coefficients réels de plus bas degré annulant f.
   On observera que M n'est pas constant.

2) **Dans cette question**, on suppose que le polynôme M n'a pas de racine réelle et on note z l'une de ses racines complexes.

   a) Vérifier que le conjugué de z est aussi racine de M et en déduire qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels noté $X^2 + bX + c$ qui divise M.

   b) Montrer que l'endomorphisme $f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

   c) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

3) **Dans cette question**, on suppose qu'il existe un réel λ, un réel α non nul et un entier p au moins égal à 2 vérifiant l'égalité : $M = \alpha(X - \lambda)^p$. On pose $g = f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

   a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, g(x), \ldots, g^{(p-1)}(x))$ est libre.

   b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.

4) Montrer que, dans tous les cas, il existe un plan de E stable par f.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une fonction réelle f de classe C^∞ sur $[-1,1]$, et on note $I(f)$ l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout entier naturel k non nul , on pose :

$$M_k(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(x)\right|, \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée d'ordre } k \text{ de } f.$$

Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et on confond polynôme et fonction polynomiale associée. Pour tout entier naturel m, on note $\mathbb{R}_m[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle que si $r_1, r_2, \dots, r_p$ sont des racines réelles distinctes d'un polynôme P, avec des multiplicités respectives $k_1, k_2, \dots, k_p$, alors il existe un polynôme Q tel que $P = Q\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-r_i)^{k_i}$.

Enfin, $a_1, a_2, \dots, a_n$ désignent n réels deux à deux distincts de $[-1,1]$, et on note A_n le polynôme :

$$A_n = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$$

L'objet de ce problème est l'approximation de $I(f)$ par des intégrales de fonctions polynomiales.

Préliminaire

1) Énoncer le théorème de Rolle.
2) Soit g une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[-1,1]$.
   a) Montrer que la dérivée de g s'annule en au moins n points distincts de $]-1,1[$.
   b) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1,1[$ tel que $g^{(n)}(c) = 0$.

Partie I

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$, introduite ci-dessous, qui coïncide avec f sur chacun des points a_i.

Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_i le polynôme : $L_i = \prod_{\substack{k \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k \neq i}} (X - a_k)$. $X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$ $a_i \neq a_k$

Par exemple, si $n = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, et $a_3 = 1$, alors : $L_1 = X(X-1)$, $L_2 = (X-1)(X+1)$, $L_3 = X(X+1)$.

1) a) Vérifier que, pour tous entiers i et j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, le réel $L_i(a_j)$ est nul lorsque i est différent de j, et est non nul lorsque i est égal à j.

b) Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note P_f, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a l'égalité $P_f(a_j) = f(a_j)$, et que ce polynôme est donné par la formule :

$$P_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$$

2) Pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose : $\delta_i = \frac{1}{L_i(a_i)} \int_{-1}^{1} L_i(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que : $\int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.

Dans toute la suite, on note : $J_n(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(a_i)$.

3) Que peut-on dire de $I(f)$ et $J_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$?

4) Soit x un élément fixé de $[-1, 1]$, distinct de chacun des réels a_i.

a) Justifier l'existence d'un réel λ vérifiant l'égalité : $f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0$.

On note maintenant g_λ l'application qui à tout réel t de $[-1, 1]$ associe :

$$g_\lambda(t) = f(t) - P_f(t) - \lambda A_n(t)$$

b) Calculer $g_\lambda(a_i)$ pour chaque entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

c) Montrer qu'il existe un réel c de $]-1, 1[$ tel que $g_\lambda^{(n)}(c) = 0$, puis établir l'égalité :

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

5) En déduire que, pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\left|f(x) - P_f(x)\right| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} |A_n(x)|$

puis établir l'inégalité :

$$\left|I(f) - J_n(f)\right| \leqslant \frac{M_n(f)}{n!} \int_{-1}^{1} |A_n(x)|\,\mathrm{d}x$$

6) *Étude d'un cas particulier*

Dans cette question, on suppose que $a_1 = -1$, $a_n = 1$ et que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont répartis régulièrement, c'est-à-dire que, pour tout entier i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $a_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n-1}$.

a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et soit x un réel de $[a_k, a_{k+1}]$. Justifier l'inégalité :

$$\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!\,(n-k)!$$

b) En déduire que, pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a : $\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$.

c) **On admet** que, quand l'entier naturel p tend vers l'infini, on a l'équivalence suivante : $p! \sim \left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p \sqrt{2\pi p}$.

Montrer que, si l'entier n est assez grand, on a, pour tout réel x de $[-1, 1]$, la majoration :

$$\left|A_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Partie II

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de $I(f)$ la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction f par une certaine fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$ qui réalise une approximation de f plus fine que la fonction polynomiale de la partie précédente.

Pour tout polynôme Q, on note Q' le polynôme dérivé de Q.

1) On considère l'application T de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ T(Q) = \Big(Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n), Q'(a_1), Q'(a_2), \dots, Q'(a_n)\Big)$$

   a) Montrer que T est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
   b) Montrer que T est injective (*on rappelle qu'un réel a est racine au moins double d'un polynôme Q si et seulement si* $Q(a) = Q'(a) = 0$). En déduire que T est bijective.
   c) Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme, noté Q_f, de degré inférieur ou égal à $2n-1$, tel que, pour tout entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$Q_f(a_j) = f(a_j) \text{ et } Q'_f(a_j) = f'(a_j)$$

   (on ne demande pas d'expliciter Q_f)

   Dans toute la suite, on note : $K_n(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Que peut-on dire de $I(f)$ et $K_n(f)$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n-1$?

3) Par une méthode analogue à celle de la partie précédente, on pourrait démontrer, et **on admettra**, la majoration :

$$\big|I(f) - K_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

   Que vaut le polynôme Q_f lorsque f est la fonction polynomiale $x \longmapsto A_n^2(x)$?
   Montrer que, dans ce cas, l'inégalité précédente est une égalité.

4) Soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

   Montrer que Φ est un produit scalaire.

5) L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est maintenant muni de ce produit scalaire.
   a) Justifier l'existence d'un polynôme V de degré au plus $n-1$ vérifiant : $Q_f - P_f = A_n V$.
   En déduire que si le polynôme A_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $K_n(f) = J_n(f)$.
   b) Inversement, si le polynôme A_n n'est pas orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une fonction f telle que $K_n(f) \neq J_n(f)$.

Partie III

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est toujours muni du produit scalaire Φ introduit dans II.4).

On note R_n l'image du polynôme X^n par la projection orthogonale sur le sous espace-vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on pose : $S_n = X^n - R_n$. Ainsi, S_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $X^n = R_n + S_n$.

1) En se plaçant dans le cas particulier où $n = 3$, déterminer S_3.

2) On revient désormais au cas général.
   a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de S_n.
   b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} S_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   En déduire que le polynôme S_n admet au moins une racine dans $]-1, 1[$.

3) On se propose de montrer que S_n admet exactement n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

a) On suppose qu'il existe un réel α et un polynôme Q tels que $S_n = (X-\alpha)^2 Q$.
Aboutir à une contradiction en considérant le signe de $S_n Q$ et la valeur de $\Phi(S_n, Q)$.
En déduire que toutes les racines réelles de S_n sont simples.

b) Soit p le nombre de racines distinctes de S_n qui appartiennent à $]-1,1[$, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ ces racines.
On définit le polynôme :

$$U = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$$

Montrer que le polynôme $S_n U$ est de signe constant sur $[-1,1]$, et en déduire, en considérant $\Phi(S_n, U)$, que p n'est pas inférieur ou égal à $n-1$.
Conclure que S_n admet exactement n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dans $]-1,1[$, et que :

$$S_n = \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, *et on conserve toutes les notations précédentes. En particulier, on a maintenant* $A_n = S_n$, *et, avec les réels* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ *introduits dans la partie I, (et qui sont indépendants de* f*), on note toujours* $J_n(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(\alpha_i)$.

4) En utilisant les résultats de la partie II, montrer que :

$$|I(f) - J_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

5) En se plaçant à nouveau dans le cas particulier où $n=3$, montrer que :

$$J_3(f) = \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$

6) *Étude des réels* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *et* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$

a) En considérant $J_n(f)$ lorsque f est constante égale à 1, donner la valeur de $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$.

b) Pour chaque entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$, montrer, en considérant la valeur de $J_n(f)$ lorsque f est la fonction polynomiale $x \longmapsto L_j^2(x)$, que δ_j est positif.

c) On suppose dans cette question que les racines de S_n sont numérotées par ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

Justifier que $S_n(-X) = (-1)^n S_n(X)$.
En déduire que les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont répartis symétriquement par rapport à 0, autrement dit que pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a l'égalité : $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$.
En conclure que, pour tout entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a l'égalité : $\delta_{n+1-j} = \delta_j$.

7) *Majoration de* $\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x$

a) Montrer que pour tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant 1, on a l'inégalité :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} P^2(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 1 tel que, pour tout réel θ : $\cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos\theta)$.
En déduire la majoration :

$$\int_{-1}^{1} S_n^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2^{2n-2}}$$

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 15 Mai 2003, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel p supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel q, on note $\mathbb{R}_q[X]$ (resp. $\mathbb{C}_q[X]$) l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des polynômes à coefficients réels (resp. complexes) de degré au plus égal à q. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
On note $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$) l'espace vectoriel réel (resp. complexe) des suites réelles (resp. complexes).

Préliminaire

On considère la fonction réelle f qui à tout réel x positif ou nul associe $f(x) = x^p - x^{p-1} - 1$.

1) a) Donner le tableau de variation de la fonction f.

   b) En déduire les résultats suivants :
   - la fonction f s'annule une seule fois en un réel noté C qui est strictement supérieur à 1.
   - pour tout réel x positif ou nul, le réel $f(x)$ est strictement positif si et seulement si x est strictement supérieur à C.

2) Dans le cas particulier où l'entier p est égal à 4, comparer C et $\dfrac{3}{2}$.

Partie I

On rappelle que si a est un nombre complexe et $Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes alors le polynôme $Q(X)$ est divisible par $X - a$ si et seulement si le complexe $Q(a)$ est nul.

1) Soit a un nombre complexe, n un entier naturel au moins égal à 2 et $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$.

   a) Établir l'égalité : $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$ où $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i \Big)$.

   b) En déduire que le polynôme $P(X) - P(a)$ est divisible par $(X - a)^2$ si et seulement si le nombre complexe $\sum_{k=1}^{n} k\, \alpha_k\, a^{k-1}$ est nul.

   c) À quelle condition nécessaire et suffisante le nombre complexe a est-il racine au moins double du polynôme $P(X)$?

2) Montrer que le polynôme $X^p - X^{p-1} - 1$ a p racines simples dans $\mathbb{C}$ et qu'elles sont toutes non nulles. Ces racines seront notées $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ avec la convention que Z_p est égal à C.

3) a) Établir, pour tout couple (x,y) de nombres complexes, l'inégalité : $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. Quand a-t-on l'égalité ?

b) Établir, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, l'inégalité : $|Z_k| \leqslant C$.

c) Montrer que si k est un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, l'égalité $|Z_k| = C$ n'a lieu que si k est égal à p.

4) Soit θ l'application de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{C}^p$ qui à tout polynôme complexe $P(X)$ de degré au plus égal à $p-1$ associe l'élément $\Big(Z_1P(Z_1), Z_2P(Z_2), \dots, Z_pP(Z_p)\Big)$ de $\mathbb{C}^p$.

a) Montrer que l'application θ est un isomorphisme.

b) En déduire que, pour tout élément $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de $\mathbb{C}^p$, il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de $\mathbb{C}^p$ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \dots + \lambda_p Z_p = u_1 \\ \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \dots + \lambda_p Z_p^2 = u_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_1 Z_1^p + \lambda_2 Z_2^p + \dots + \lambda_p Z_p^p = u_p \end{cases}$$

5) On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'égalité $u_n = u_{n-1} + u_{n-p}$. Autrement dit, on a :

$$F = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \, ; \quad \forall n > p \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-p} \Big\}$$

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des suites complexes.

b) Montrer que, pour tout entier k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant p$, la suite géométrique $\big(Z_k^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de F.

c) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite élément de F et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \dots + \lambda_p Z_p = u_1 \\ \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \dots + \lambda_p Z_p^2 = u_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_1 Z_1^p + \lambda_2 Z_2^p + \dots + \lambda_p Z_p^p = u_p \end{cases}$$

On note $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite complexe de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k Z_k^n$.

Montrer que les suites u et v sont égales.

d) Montrer que $\Big((Z_1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (Z_2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \dots, (Z_p^n)_{n\in\mathbb{N}^*}\Big)$ est une base de F.

Partie II

1) Pour tout entier naturel q, on considère l'application Φ_q de $\mathbb{R}_q[X]$ dans lui-même qui à tout polynôme $A(X)$ de $\mathbb{R}_q[X]$ associe le polynôme : $\Phi_q\big(A(X)\big) = A(X) - A(X-1) - A(X-p)$.

Montrer que l'application Φ_q est un automorphisme de $\mathbb{R}_q[X]$.

2) Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients réels. On note E_Q l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'égalité $u_n = u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n)$. Autrement dit, on a :

$$E_Q = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \, ; \quad \forall n > p \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n) \Big\}$$

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels, noté $A_0(X)$, tel que la suite $\big(A_0(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de E_Q.

b) Prouver qu'une suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est élément de E_Q si et seulement si la suite $\big(u_n - A_0(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à l'espace vectoriel F défini dans la question **I**-5).

p p

c) En déduire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de E_Q, il existe un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $u_n = \alpha_1 Z_1^n + \alpha_2 Z_2^n + \dots + \alpha_{p-1} Z_{p-1}^n + \alpha_p C^n + A_0(n)$.

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite **réelle** élément de E_Q. Déduire des questions précédentes que, soit il existe un réel α non nul tel que $u_n \sim \alpha C^n$, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est négligeable devant la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire $u_n = o(C^n)$.

3) Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients réels. On note I_Q l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout entier n strictement supérieur à p, l'inégalité $u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n)$. Autrement dit, on a :

$$I_Q = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\ ; \quad \forall n > p \quad u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-p} + Q(n) \right\}$$

a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle élément de F et à termes **strictement positifs**. Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on pose $v_{a,n} = a\,w_n + A_0(n)$ et on note v_a la suite $(v_{a,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Montrer que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de I_Q, il existe un réel a tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité : $u_n \leqslant v_{a,n}$.

b) Justifier l'existence d'une suite réelle élément de F et à termes **strictement positifs**. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle élément de I_Q et à termes **positifs ou nuls** alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire $u_n = O(C^n)$.

Partie III

Pour tout entier naturel n au moins égal à 2, on note T_n, ou plus simplement T, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ des entiers compris entre 1 et n. Pour toute partie A de T on note $\operatorname{card} A$ le nombre d'éléments de A.
On considère une matrice $M = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ carrée d'ordre n, **symétrique**, dont les coefficients valent 0 ou 1, les coefficients diagonaux étant nuls (on dit que M est une matrice **d'incidence** d'ordre n). On a donc :

$$\Big(\forall (i,j) \in T^2 \quad (\alpha_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{ij} = 1)\Big) \qquad \text{et} \qquad \Big(\forall i \in T \quad \alpha_{ii} = 0\Big)$$

Pour tout couple (i,j) d'éléments de T on dit que i et j sont voisins si $\alpha_{ij} = 1$. Pour toute partie non vide A de T et tout élément i de A on note $A(i)$ l'ensemble des éléments de A voisins de i et on dit que $A(i)$ est l'ensemble des voisins de i dans A ; autrement dit, on a : $A(i) = \{j \in A\ ;\ \alpha_{ij} = 1\}$.
Une partie non vide S de T est dite stable si, pour tout élément i de S, $S(i)$ est vide. *On remarquera que les singletons de T sont stables.*
Pour toute partie non vide A de T, on appelle nombre de stabilité de A relativement à M et on note $\omega(A, M)$, le maximum des cardinaux des parties stables incluses dans A, et on pose $\omega(\emptyset, M) = 0$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 4$ et que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $A(1)$ et $\omega(A, M)$ pour $A = \{1, 3, 4\}$.

b) Déterminer le nombre $\omega(T, M)$.

2) Dans le cas particulier où $M = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice dont les coefficients vérifient les conditions :

$$\alpha_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad |i - j| = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{sinon},$$

déterminer le nombre $\omega(T, M)$.

L'objet des questions suivantes est l'étude de la complexité de deux algorithmes de calcul du nombre de stabilité de T relativement à M, la complexité d'un tel algorithme étant définie comme étant le nombre maximum de «lectures» de coefficients de la matrice M que nécessite, dans le pire des cas (suivant les valeurs de M), l'exécution de cet algorithme.

3) Un algorithme «naïf» consiste à examiner, une à une, les parties à au moins deux éléments de T, supposées rangées selon un ordre décroissant de leur cardinal (ce rangement étant indépendant de M), jusqu'à rencontrer une partie stable (et c'est ce test qui nécessite des lectures dans M) ; bien entendu, si aucune partie stable n'a été rencontrée, $\omega(T, M)$ vaut 1.

a) Calculer la somme $\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^2$.

b) Montrer que, pour tout entier n au moins égal à 2, la complexité de l'algorithme «naïf» est supérieure ou égale à $2^n - (n+1)$ et inférieure ou égale à $\mathrm{C}_n^2\, 2^{n-2}$.

4) Soit A une partie non vide de T.
Montrer que, pour tout élément i de A, on a l'égalité :

$$\omega(A, M) = \max\Big(\omega(A \setminus \{i\}, M), 1 + \omega\big(A \setminus (\{i\} \cup A(i)), M\big)\Big)$$

5) On suppose données, en langage Pascal,
- une déclaration de constante permettant de stocker la valeur de l'entier n, la déclaration du type **tab** permettant de stocker les parties de T, et la déclaration du type **matrice** permettant de stocker les matrices d'incidence d'ordre n ;
- une fonction d'en-tête :

function *Appartient* (i : **integer** ; A : **tab**) : **boolean**;

qui renvoie la valeur **true** si l'élément i est dans la partie A et la valeur **false** sinon.

a) Écrire, en langage Pascal, une fonction d'en-tête :

function *Recherche* (A : **tab**; M : **matrice**): **integer**;

qui renvoie le plus petit des éléments i de A pour lequel card $A(i)$ est supérieur ou égal à 3 si un tel plus petit élément existe et qui renvoie 0 sinon.

b) Évaluer le nombre maximum de «lectures» de coefficients de la matrice M que nécessite cette fonction quand elle est appliquée à la partie A.

6) On **admet** qu'il est possible de concevoir une fonction, notée $Deux(A, M)$ renvoyant, lorsque, pour tout élément i de A, card $A(i)$ est inférieur ou égal à 2, le nombre $\omega(A, M)$ avec une complexité inférieure ou égale à $(\mathrm{card}\, A)^2$.

On considère maintenant la suite d'instructions *Omega* dont on **admet** qu'elle permet récursivement, quand elle est appliquée à la partie A de T, d'obtenir la valeur de $\omega(A, M)$:

DÉBUT
- Exécuter $Recherche(A, M)$;
- Si on a obtenu un élément i de A tel que $\mathrm{card}(A(i)) \geqslant 3$ alors

  Exécuter *Omega* pour la partie $A \setminus \{i\}$ afin d'obtenir $a = \omega\big(A \setminus \{i\}, M\big)$;

  Exécuter *Omega* pour la partie $A \setminus (\{i\} \cup A(i))$ afin d'obtenir $b = \omega\big(A \setminus (\{i\} \cup A(i)), M\big)$;

  Calculer $\max(a, 1+b)$ (qui est la valeur de $\omega(A, M)$ cherchée)

  Sinon exécuter $Deux(A, M)$ pour obtenir $\omega(A, M)$;

FIN

On note u_n la complexité de cet algorithme lorsqu'il est appliqué à $A = T$.
Justifier, pour tout entier n au moins égal à 6, l'inégalité : $u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n-4} + 2n^2$.

7) Comparer, pour de grandes valeurs de l'entier n, les complexités de l'algorithme «naïf» et de l'algorithme récursif.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL

Concepteur : E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Vendredi 7 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite *adaptée* à f, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}) = s_n f(nx) \qquad (1)$$

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et tout polynôme P sera confondu avec la fonction polynomiale, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui lui est naturellement associée.
Pour tout entier naturel p non nul, et toute fonction p fois dérivable f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée p-ième de la fonction f est notée $f^{(p)}$ (la dérivée première de f est aussi notée f').
On rappelle que, T étant un réel non nul, une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

L'objet du problème est de déterminer certaines des fonctions f satisfaisant l'équation (1).

Partie I Résultats généraux et exemples d'éléments de E

1) Soit f une fonction appartenant à $\mathbf{E}$, autre que la fonction nulle. Montrer qu'il existe une *unique* suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ adaptée à f, et que $s_1 = 1$.

2) Montrer que si f est une fonction dérivable appartenant à $\mathbf{E}$, alors la dérivée f' de f appartient à $\mathbf{E}$.

3) Montrer que les fonctions constantes appartiennent à $\mathbf{E}$.

4) Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \dfrac{1}{2}\cdot$ Établir que A est élément de $\mathbf{E}$.

5) $\mathbf{E}$ constitue-t-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

6) Soit χ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, déterminer, en distinguant les cas $nx \in \mathbb{Z}$ et $nx \notin \mathbb{Z}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi(x+\frac{k}{n})$.

En déduire que χ appartient à $\mathbf{E}$, la suite adaptée étant constante, égale à 1.

7) a) Pour tout réel x et tous entiers naturels non nuls p et n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}p\pi(x+\frac{k}{n})}$, et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2p\pi(x+\frac{k}{n})\right) = \begin{cases} n\cos(2p\pi x) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Soit u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\cos(2\pi x)$. Montrer que u appartient à $\mathbf{E}$, et préciser la suite adaptée à u.

c) Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$.

Soit alors v la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q}\cos(2^{q+1}\pi x)$. Montrer que v appartient à $\mathbf{E}$, et préciser la suite adaptée à v.

Partie II Recherche des polynômes éléments de E

1) a) Montrer que si P est un polynôme de degré 1 élément de $\mathbf{E}$, alors la suite adaptée au polynôme P est constante, égale à 1.

b) Quels sont les polynômes de degré 1 appartenant à $\mathbf{E}$?

2) On suppose dans cette question que P est un polynôme non nul élément de $\mathbf{E}$, et on note p le degré de P.

a) Montrer que la suite adaptée à P est la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \dfrac{1}{n^{p-1}}$.

b) Montrer que, si p est au moins égal à 1, on a l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

3) Établir que, pour tout polynôme Q, il existe un unique polynôme P tel que $P' = Q$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On peut donc définir une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de la manière suivante :

$$B_0 = 1$$
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad B_p' = pB_{p-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

4) a) Déterminer, pour chaque entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

b) Vérifier, pour tout réel x, l'égalité : $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, puis calculer $B_2(x)$ pour tout réel x.

5) On a déjà vu dans la partie I que B_0 et B_1 sont des éléments de $\mathbf{E}$. Vérifier que B_2 est élément de $\mathbf{E}$.

6) Soit p un entier naturel non nul. On suppose que B_{p-1} est élément de $\mathbf{E}$ et on veut montrer que B_p est élément de $\mathbf{E}$.

Pour cela, on fixe un entier naturel non nul n et on pose, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p(x+\frac{k}{n}) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx)$$

a) Montrer que la fonction $\varphi - \psi$ est constante.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{1/n} \psi(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Établir que $\varphi - \psi = 0$ et conclure.

7) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel p, les polynômes de degré p qui appartiennent à $\mathbf{E}$ sont exactement les polynômes λB_p obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.

Partie III Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

1) Soit δ la fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, associe la fonction $\delta(\varphi)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \delta(\varphi)(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

a) Montrer que δ est linéaire. Quelle propriété caractérise les éléments de son noyau ?

b) Vérifier que, lorsque P est une fonction polynomiale, il en est de même de $\delta(P)$, puis préciser le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ lorsque P est de degré p supérieur ou égal à 1.

2) Montrer que, si f est une fonction élément de $\mathbf{E}$, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ s_n\delta(f)(nx) = \delta(f)(x) \qquad (2)$$

3) Soit g une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \alpha g(2x) = g(x) \qquad (3)$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \alpha^k g(x) = g\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad (4)$$

b) Montrer que si $\alpha = 0$, alors g est nulle.

c) Montrer que si $|\alpha| > 1$, alors g est nulle.

d) On suppose $0 < |\alpha| \leqslant 1$. Justifier l'existence d'un entier naturel p et d'un réel β tels que :

$$|\beta| > 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x)$$

e) En déduire que, dans tous les cas, g est polynomiale.

4) Dans cette question, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ élément de **E**, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et que $\delta(f)$ n'est pas la fonction nulle.

a) Montrer que $\delta(f)$ est une fonction polynomiale non nulle; on note q son degré.

b) À l'aide de (2), montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$s_n = \frac{1}{n^q}$$

puis montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \delta(f)(x) = ax^q$$

c) Pour chaque entier naturel non nul p, montrer, en appliquant ce dernier résultat à la fonction polynomiale B_p introduite dans la partie II, qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \delta(B_p)(x) = px^{p-1}$$

d) Montrer qu'il existe un réel λ non nul et un entier p non nul tels que la fonction $\delta(f - \lambda B_p)$ soit nulle. Établir alors que la fonction $h = f - \lambda B_p$ est une fonction 1-périodique, de classe C^∞ et élément de **E**, et en préciser une suite adaptée.

Partie IV Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1-périodiques de E

1) Dans cette question préliminaire, on suppose que g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 1-périodique, telle que, pour tout réel x, $g(nx)$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $g(k) = 0$.

b) Montrer que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Plus généralement, montrer que, pour tout entier relatif p et tout entier naturel non nul q, on a l'égalité : $g\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

c) En déduire que g est la fonction nulle.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ et 1-périodique, élément de **E**, de suite adaptée $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) a) Montrer que l'application qui à tout réel x associe $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ est constante.

b) Pour tout réel x, montrer que $\dfrac{s_n}{n} f(nx)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

3) On suppose dans cette question que $\dfrac{|s_n|}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
Montrer, à l'aide de la question 1), que f est la fonction nulle.

4) Dans cette question, on suppose plus généralement qu'il existe un entier naturel k tel que $n^k|s_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

a) Montrer, en considérant une dérivée d'ordre suffisant de f, que f est polynomiale.

b) Montrer que f est constante.

5) À l'aide du résultat final de la partie III, montrer que les fonctions de classe C^∞ appartenant à **E** et qui ne sont pas 1-périodiques sont exactement les fonctions polynomiales du type λB_p, obtenues lorsque p décrit $\mathbb{N}^*$ et λ décrit $\mathbb{R}^*$.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

282
ESCP_M1_S

Concepteur : E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Samedi 21 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème se compose de trois parties largement indépendantes, même si certains objets introduits dans la partie II se retrouvent dans la partie III. La partie I étudie un exemple de couple aléatoire suivant une loi trinomiale. La partie II étudie les lois marginales d'un tel couple. La partie III propose une caractérisation de la loi de Poisson.

Partie I.

On considère, dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t et b, vérifiant $u + d + t = b$.
Une urne $\mathcal{U}$ contient b boules, parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathcal{U}$ *avec* remise.
À chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathcal{U}$ ont même probabilité d'être tirées.
Le modèle choisi pour cette expérience est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dans lequel l'univers Ω est l'ensemble $\{1, 2, 3\}^n$ des n-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, et la tribu $\mathcal{T}$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω, la probabilité P se déduisant naturellement des hypothèses qui ont été ou seront formulées.
Aucun tirage n'influe sur les autres en cela que, si une suite quelconque $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la valeur de V_k ne dépend que du résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage, alors les variables $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont mutuellement indépendantes.

On note U (respectivement D, T) la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$; dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (respectivement 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser), donner son espérance et sa variance. Donner, de même, les lois des variables aléatoires D et T, respectivement.

2. Les variables aléatoires U et D sont-elles indépendantes ? *Justifiez votre réponse.*

3. Déterminer, sans calcul, la loi de la variable aléatoire $U + D$, son espérance et sa variance.

4. En déduire que la covariance du couple (U, D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

5. *Simulation informatique.*
En Pascal, si `i` est un entier naturel non nul, l'instruction `random(i)` retourne aléatoirement un entier choisi équiprobablement parmi les entiers `0,1,...,i-1`.
On considère la procédure Pascal nommée `simulation` déclarée comme suit :

```
procedure simulation(var x, y, z : integer ; n : integer) ;
var k, r : integer ;
begin
  x := 0 ; y := x ; z := x ;
  for k := 1 to n do
    begin
      r := random(6) ;
      if r = 0 then x := x + 1 else if r <= 2 then y := y + 1 else z := z + 1
    end
end ;
```

Que réalise l'instruction `simulation(a, b, c, 12)`, les variables Pascal a, b et c étant toutes trois de type `integer` ? *On demande une réponse en rapport avec l'expérience précédemment étudiée et, en particulier, que soient précisées les valeurs des paramètres u, d, t et n dans la simulation proposée.*

Dans toute la suite, m, i et j étant des entiers naturels, on note :

$$\binom{m}{i\,,j} = \begin{cases} \dfrac{m!}{i!j!(m-i-j)!} & \text{si} \quad i+j \leqslant m \\ 0 & \text{si} \quad i+j > m \end{cases}$$

6. On considère deux entiers naturels k et ℓ vérifiant $k+\ell \leqslant n$.
Soit $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément donné de Ω comportant exactement k '1' et ℓ '2'.
Quelle est la probabilité $P(\{\omega\})$ de l'événement élémentaire $\{\omega\}$?
Dénombrer les n-uplets appartenant à l'ensemble Ω et comportant exactement k '1' et ℓ '2'.
En déduire que la probabilité de l'événement $[U = k] \cap [D = \ell]$ est égale à :

$$\binom{n}{k\,,\ell} \frac{u^k\, d^\ell\, t^{n-k-\ell}}{b^n}$$

Ce résultat reste-t-il vrai si $k+\ell > n$?

Partie II. Lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale.

On considère, dans cette partie, un entier naturel n et l'ensemble I_n défini par :

$$I_n = \{(k,\ell) \mid k \in [\![0,n]\!] \text{ et } \ell \in [\![0,n]\!] \text{ et } k+\ell \leqslant n\}$$

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ étant donné, ainsi que trois réels strictement positifs p, q et r vérifiant $p+q+r=1$, on considère un couple aléatoire (X_n, Y_n) défini sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans I_n et tel que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$:

$$P\big((X_n, Y_n) = (k,\ell)\big) = \binom{n}{k\,,\ell} p^k\, q^\ell\, r^{n-k-\ell}$$

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in I_n} \binom{n}{k\,,\ell} p^k\, q^\ell\, r^{n-k-\ell} = 1$.

2. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n suivent toutes deux une loi binomiale (en préciser les paramètres respectifs).

3. On se propose de calculer la covariance du couple (X_n, Y_n).

   a) On suppose que $n \geqslant 2$. Prouver que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$ vérifiant $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$, on a :

$$k\,\ell \binom{n}{k\,,\ell} = n\,(n-1) \binom{n-2}{k-1\,,\ell-1}$$

En déduire que $E(X_n Y_n) = n\,(n-1)\,pq$.

   b) Cette relation est-elle encore vraie si $n = 0$? si $n = 1$?

   c) En déduire la valeur de la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$ du couple (X_n, Y_n).

4. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

:tie III. Une caractérisation de la loi de Poisson.

ns cette partie, la lettre n ne désigne plus un entier naturel fixé et on considère les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires définies, dans la partie précédente, pour chaque entier naturel n sur l'espace ıbabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
rappelle que, pour tout entier naturel n, les variables aléatoires X_n et Y_n suivent des lois binomiales dont paramètres ont été calculés en **II)** 2.

considère par ailleurs, une variable aléatoire N *non presque sûrement constante* définie sur le même ıace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et indépendante de tous les ıples (X_n, Y_n), ce qui signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$,

$$P([(X_n, Y_n) = (i, j)] \cap [N = k]) = P((X_n, Y_n) = (i, j))P(N = k)$$

ı définit les fonctions $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante : si N prend la valeur n, alors X spectivement Y) prend la même valeur que X_n (respectivement Y_n).

ırtie III A. Remarques générales.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[X = k] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ([X_n = k] \cap [N = n]) = \bigcup_{n=k}^{+\infty} ([X_n = k] \cap [N = n])$$

ı déduire que X est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
ı prouverait de même que Y est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires N et X_n sont indépendantes.
n prouverait de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables N et Y_n sont indépendantes.

Déduire des résultats précédents que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n)$$

xprimer de même, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y = \ell)$ sous forme de somme d'une série.

. Les variables aléatoires N et X sont-elles indépendantes ?
'n considèrera deux entiers a et b vérifiant $0 \leqslant a < b$, $P(N = a) \neq 0$ et $P(N = b) \neq 0$, et on se réoccupera de l'événement $[N = a] \cap [X = b]$.

'artie III B. Si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

)n considère un réel strictement positif λ. On suppose que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de aramètre λ.

. Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λp et que Y suit la loi de Poisson de paramètre λq.

.. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
)n commencera par justifier que, pour tout couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell])P(N = n)$$

'artie III C. Si X et Y sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson.

)n ne suppose plus a priori *que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson.* On suppose maintenant que es variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

l. Montrer que, pour tout réel z appartenant à $[0, 1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n P(N = n)$ converge.
Dans toute la suite, si $z \in [0, 1]$, la somme de cette série est notée $\Phi(z)$.

Un lemme de Fubini.

On **admet** le résultat suivant : soit $(r_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de réels *positifs* ou nuls.

On suppose que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} r_{i,j}$ converge ; on note $C_j = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}$ sa somme. On suppose de plus que la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} C_j$ converge.

Alors :

i) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} r_{i,j}$ converge ; on note $L_i = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}$ sa somme ;

ii) La série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} L_i$ converge et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} L_i = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} C_j$.

On définit en ce cas la somme $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} r_{i,j}$ *comme étant le nombre* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}\Big)$.

2. On considère deux réels α et β appartenant tous deux à $[0,1]$. On définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ les variables aléatoires $A = \alpha^X$ et $B = \beta^Y$.

a) Montrer que les variables aléatoires A et B admettent une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).

b) Montrer que $0 \leqslant p\alpha + 1 - p \leqslant 1$ puis, en utilisant le lemme de Fubini, que

$$E(A) = \Phi(p\alpha + 1 - p)$$

On montrerait de même que $0 \leqslant q\beta + 1 - q \leqslant 1$ *et que* $E(B) = \Phi(q\beta + 1 - q)$.

3. On définit la variable aléatoire $C = AB = \alpha^X\beta^Y$.

a) Justifier que la variable aléatoire C admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).

b) Établir que $0 \leqslant p\alpha + q\beta + r \leqslant 1$, puis, en utilisant le théorème de transfert et le lemme de Fubini, que $E(C) = \Phi(p\alpha + q\beta + r)$.

4. Pour quelle raison peut-on affirmer que $E(AB) = E(A)E(B)$?
En déduire que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$,

$$\Phi\big(1 - p(1-\alpha) - q(1-\beta)\big) = \Phi\big(1 - p(1-\alpha)\big)\Phi\big(1 - q(1-\beta)\big)$$

5. Montrer que, pour tout réel $z \in]0,1]$, $\Phi(z) > 0$. Que vaut $\Phi(1)$?

6. On définit l'application $\varphi : [0,1[\to \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(z) = \ln\big(\Phi(1-z)\big)$.

a) Montrer que, pour tous réels $a \in [0,p]$ et $b \in [0,q]$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

On pose dans toute la suite $\mu = \min(p,q)$ et $I = [0,\mu]$.

b) Calculer $\varphi(0)$.

Montrer que, pour tout couple $(n,a) \in \mathbb{N} \times I$ vérifiant $0 \leqslant na \leqslant \mu$, on a : $\varphi(na) = n\varphi(a)$.

c) Montrer que, pour tout triplet $(n,m,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times I$ tel que $0 \leqslant \frac{n}{m} a \leqslant \mu$,

$$\varphi\Big(\frac{n}{m} a\Big) = \frac{n}{m}\varphi(a)$$

d) Soit un couple $(x,a) \in \mathbb{R} \times I$ vérifiant $0 < xa < \mu$.

Si r est un réel, on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière de r.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

Montrer que la fonction φ décroît sur $[0,1[$. En déduire que $\varphi(xa) = x\varphi(a)$.

e) Montrer enfin qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = -\lambda x$.

7. On admet le résultat suivant :
si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que, pour tout $z \in [1-\mu, 1]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n z^n$ converge et est de somme nulle, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Montrer que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre λ.