MATHEMATIQUES I
OPTION SCIENTIFIQUE

VENDREDI 9 MAI 1997 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

Problème I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Partie 1

1. Etudier les variations de f_n.

2. Construire les courbes représentatives de f_1 et de f_2 dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : $5\,cm$ sur l'axe des abscisses, $10\,cm$ sur l'axe des ordonnées).

3. On suppose dans cette question $n \geq 2$.

   a) Montrer que f_n'' s'annule en changeant de signe pour 2 racines u_n et v_n, telles que $0 < u_n < v_n$. Que peut-on en conclure pour la courbe représentative de f_n ?

   b) On pose : $a_n = f_n(u_n)$ et $b_n = f_n(v_n)$. Expliciter $\ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

   c) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)$.

   d) Déduire de ce qui précède la limite de la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 2}$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot e^{-x}$,

   où P_n est un polynône de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Partie 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}\, dx$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}\, dx$.

   a) Calculer I_0.
   b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = I_{n+1}$.
   c) En déduire la valeur de I_n.

Partie 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction d_n par :

$$\begin{cases} d_n(x) = \frac{1}{2} f_n(x) & \text{si } x \geq 0 \\ d_n(x) = \frac{1}{2} f_n(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement d_1 et d_2 (unités : $5\,cm$ sur l'axe des abscisses, $20\,cm$ sur l'axe des ordonnées)

2. Montrer que d_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue X_n.

3. Soit D_n la fonction de répartition de X_n. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) + D_n(-x) = 1$.

4. Pour $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X_n^r)$.

5. a) Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, que :
   $$\int_0^x f_n(t)\, dt = 1 - e^{-x} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$
   b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $D_n(x)$ sans signe intégrale.

Problème II

Partie 1

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} 4a-2b & a-2b & a+b \\ a-2b & 4a+b & a-2b \\ a+b & a-2b & 4a-2b \end{pmatrix} \Big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel ; en donner une base et la dimension.

2. Expliquer pourquoi tout élément de E est diagonalisable.

3. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

   On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que : $V \in E$. Calculer V^2 et en déduire les valeurs propres de v.

   b) Montrer que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,0,1)$ et $e_3 = (1,-2,1)$ sont vecteurs propres de u et v.

   c) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de u et v sont toutes les deux diagonales.

   d) Donner les valeurs propres d'un élément $M(a,b)$ de E.
   Expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :
   ${}^tP\, M(a,b)P = D$.

Partie 2

On considère une suite d'expériences aléatoires.
Chaque expérience n'admet que 3 résultats possibles : E_1, E_2, E_3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A la n$^{\text{ième}}$ expérience, on associe la matrice–colonne :

$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où a_n (respectivement b_n, c_n) est la probabilité d'obtenir le résultat E_1 (respectivement E_2, E_3).

En outre, on se donne $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, où a_0, b_0 et c_0 sont 3 réels tels que : $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Pour i et j éléments de $\{1,2,3\}$, on note p_{ij} la probabilité pour que E_j se réalise à une expérience, sachant que E_i s'est réalisé à l'expérience précédente.

La dépendance entre les réalisations successives est décrite par : $p_{ij} = \dfrac{2}{3}$ si $i = j$
$p_{ij} = \alpha$ sinon.

1. Calculer $(p_{11} + p_{12} + p_{13})$ de 2 façons. En déduire la valeur de α.

2. Déterminer la matrice L telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = LX_n$.

3. Vérifier que $L \in E$.

4. Calculer L^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0.
   Etudier le comportement de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.

EPREUVES ESC *MATHEMATIQUES*
OPTION SCIENTIFIQUE

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Exercice 1

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à coefficients réels.

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que : $A^3 + A = O$.

2. (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) A est-elle diagonalisable ?

3. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   On pose : $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
   (c) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer la matrice de u relativement à $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Première partie

1. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^1 e^{-u} u^{x-1}\, du$ est convergente.

   On définit alors sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction F par : $F(x) = \int_0^1 e^{-u} u^{x-1}\, du$.

2. (a) Calculer $F(1)$ et $F(2)$.
   (b) Exprimer $F(\frac{1}{2})$ en fonction de $\Phi(\sqrt{2})$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. En étudiant, pour x et x' éléments de $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $F(x) - F(x')$, déterminer le sens de variation de F.

Deuxième partie

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x+1) = xF(x) - \frac{1}{e}$.

2. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{e\,x} \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$.

3. Déduire de ce qui précède :

   (a) les limites de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0,

   (b) un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$,

   (c) un équivalent de $F(x)$ en 0 (on pourra utiliser l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}_+, 1-u \leq e^{-u}$).

Troisième partie

On considère la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k!(k+x)}$ $(k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}_+^*)$.

1. (a) Etablir la convergence de cette série.

   Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+x)}$.

   (b) Calculer $g(1)$.

2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R}_+,\ \left| e^{-u} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \left| \int_0^1 e^{-u} u^{x-1}\,du - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

   (c) En conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = g(x)$.

Exercice 3

Soient N un entier naturel non nul et α un réel de $]0;1[$. On dispose de N boules numérotées de 1 à N, réparties dans deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

On considére l'expérience $\mathcal{E}$ suivante :

- on choisit au hasard un nombre entier entre 1 et N,
- si le nombre choisi est k, $1 \leq k \leq N$, la boule numérotée k est changée d'urne avec la probabilité α, maintenue dans l'urne qui la contient avec la probabilité $1-\alpha$.

On répete cette expérience $\mathcal{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne $\mathcal{U}$ après n réalisations de $\mathcal{E}$.

Première partie

Dans cette partie, $N = 3$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et on suppose qu'au départ, toutes les boules sont dans $\mathcal{U}$.

1. Donner les lois de X_0 et de X_1.

2. (a) Pour $r \in \{1,2,3\}$ et $s \in \{2,3\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X_2 = r/X_1 = s)$.
   (b) En déduire la loi de X_2.

3. Donner la loi du couple (X_1, X_2). Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Deuxième partie

Dans cette partie, $N = 2$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et on suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $\{0,1,2\}$.

1. Exprimer, pour $k \in \{0,1,2\}$, la probabilité $P(X_0 = k)$.

2. (a) Pour $i \in \{0,1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$, déterminer $P(X_{n+1} = i/X_n = j)$.
   (b) Vérifier que : $\forall j \in \{0,1,2\}$, $\sum_{i=0}^{2} P(X_{n+1} = i/X_n = j) = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer M, matrice carrée d'ordre 3, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = MU_n$.

   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{4} & b_n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ b_n & \frac{1}{4} & a_n \end{pmatrix}$,

   où a_n et b_n seront exprimés en fonction de n (on vérifiera que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ *et* $b_1 = 0$).

   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION SCIENTIFIQUE

LUNDI 10 MAI 1999 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document :

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

Exercice 1

Partie A

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Identifier : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous–espaces propres de u.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Partie B

E est un espace vectoriel réel de dimension n $(n \geq 1)$.
u est un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. On pose : $v = u - \mathrm{Id}_E$ et $w = u - 2\mathrm{Id}_E$.
   (a) Identifier $(v - w)$ et en déduire que : $E = \mathcal{I}m(v) + \mathcal{I}m(w)$.
   (b) Identifier $v \circ w$ et $w \circ v$; en déduire que : $\mathcal{I}m(w) \subset \mathcal{K}er(v)$ et $\mathcal{I}m(v) \subset \mathcal{K}er(w)$.
   (c) Montrer que : $E = \mathcal{K}er(v) \oplus \mathcal{K}er(w)$.
   (d) Prouver que u est diagonalisable.

2. (a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = a_n u + b_n \mathrm{Id}_E$ (avec la convention : $u^0 = \mathrm{Id}_E$).
   Donner les valeurs de $a_0,\ b_0,\ a_1$ et b_1.
   (b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.
   En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u^n en fonction de n, u et Id_E.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, les propriétés de la fonction Γ. définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$, seront utilisées sans démonstration.

Partie A

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction Γ.

2. Donner la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Ecrire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

4. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   En déduire $\Gamma(\frac{3}{2})$ et $\Gamma(\frac{5}{2})$.

Partie B

1. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \cos(tx)\,dt$ est absolument convergente.

   On note alors f la fonction définie sur $I\!R$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \cos(tx)\,dt$.

2. Montrer que : $\forall x \in I\!R,\ |f(x)| \leq \sqrt{\pi}$.

3. (a) Etablir l'inégalité : $\forall (a,b) \in I\!R^2,\ |\cos a - \cos b| \leq |a - b|$.
   (b) En déduire que : $\forall (x, x_0) \in I\!R^2,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}|x - x_0|$.
   (c) Etudier la continuité de f sur $I\!R$.

4. (a) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(tx)\,dt$ est convergente.

   On pose alors. pour tout réel x : $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(tx)\,dt$.
   (b) Etablir successivement que :

   $\forall (a,b) \in I\!R^2,\ |\cos a - \cos b + (a-b) \cdot \sin b| \leq \frac{(a-b)^2}{2}$,

   $\forall x_0 \in I\!R,\ \forall h \in I\!R^*,\ \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + g(x_0) \right| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cdot |h|$.
   (c) En déduire que f est dérivable sur $I\!R$ et exprimer f' en fonction de g.

Partie C

On définit la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ par : $\forall n \in I\!N,\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \cos(t)\,dt$.

1. Prouver que : $\forall n \in I\!N^*,\ |u_n| \leq e^{-n\pi}$.

2. Etablir que la série de terme général u_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = f(1)$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

Partie A

1. Donner la loi de X_1, la loi de X_2 et leurs espérances.

2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.

3. Déterminer la loi de X_4 et calculer $E(X_4)$.

Partie B

On étudie désormais le cas général.

1. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

2. Soit N_1 la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.

   (a) Reconnaître la loi de N_1.

   (b) Vérifier que :

$$\forall i \in [\![2;n]\!],\ \forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k | N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k-1, \\ P(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

   (c) Montrer que : $\forall k \in [\![2;n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$.

   On pourra admettre les résultats (b) et (c) pour résoudre les questions suivantes.

3. Calculer $P(X_n = 2)$.

4. Pour $n \geq 2$, on pose : $v_n = n!P(X_n = n-1)$.

   (a) Etablir que : $\forall n \geq 2,\ v_{n+1} = v_n + n$.

   (b) En déduire $P(X_n = n-1)$.

Partie C

1. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ E(X_n) = \dfrac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$.

2. En déduire que : $\forall n \geq 2,\ E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$ ·

3. Montrer enfin que : $\forall n \geq 1,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ ·

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

JEUDI 4 MAI 2000, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

Exercice 1

Partie A

1. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\phi(x) = \ln x$.

   Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^k}$.

2. Montrer alors que : $\forall t \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k} t^k\right| \leq \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (avec $n \geq 1$) converge et donner sa somme.

Partie B

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique réelle f par : $\begin{cases} f \text{ est périodique de période 2,} \\ \text{pour tout } x \in]-1;1],\ f(x) = x \cdot (1 - |x|) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $[-1;1]$.

2. Donner les variations de f sur $[-1;1]$.

3. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1],\ f(x+n) = (-1)^n \cdot f(x)$.

4. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Représenter les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse comprise entre -2 et 3.

Partie C

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 . \end{cases}$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,dx$.

   En utilisant le changement de variable $t = x - n$ et la question 3. de la **partie B**, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n \cdot \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(t)}{t+n}\,dt$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{6(n+1)} \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{6n}$.

   La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?

4. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x \cdot (1-x)}{x+n} = -x + (n+1) - \dfrac{n^2+n}{x+n}$.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5. En utilisant un développement limité de u_n en $\dfrac{1}{n}$, donner la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré au plus n. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X+1) + X \cdot P'(X) .$$

Partie A

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Partie B

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. (a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n non nul de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P_n) = (n+1) \cdot P_n$.
   (b) Vérifier que P_n est de degré n .

3. (a) Montrer que : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $f(P_n^{(k)}) = (n+1-k) \cdot P_n^{(k)}$.
   (b) En déduire que $\left(P_n^{(k)}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de f .
   (c) Donner la matrice D de f dans cette base.

Partie C

Dans cette partie, $n = 2$. On définit les polynômes E_0, E_1 et E_2 par :

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ E_1' = E_0 \text{ et } E_1(1) = 2 \cdot E_1(0) \\ E_2' = E_1 \text{ et } E_2(1) = 3 \cdot E_2(0) \end{cases}$$

1. Expliciter les polynômes E_1 et E_2 .

2. Montrer que (E_0, E_1, E_2) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de f .

3. Calculer les coordonnées du polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P(X+1) + X \cdot P'(X) = X^2 + X + 1$.

Exercice 3

p et q désignent deux réels avec $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.

On considère une variable aléatoire réelle X ayant pour loi : $\left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = p \cdot q^k \end{array} \right.$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

   (a) Déterminer la loi de Y .

   (b) Justifier l'égalité : $\forall x \in [0;1[, \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

   En déduire que : $\forall t \in [0;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \dfrac{x^{n+1}}{x-1}\,dx$.

   (c) Montrer que : $\forall t \in [0;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \int_0^t \dfrac{x^{n+1}}{x-1}\,dx \right| \leq \dfrac{1}{1-t} \cdot \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$.

   Prouver alors que : $\forall t \in [0;1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k} = -\ln(1-t)$.

   (d) Calculer $E(Y)$.

3. Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant $(X = k)$ est uniforme sur $[\![0;k]\!]$.

   (a) Pour $z \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(Z = z / X = k)$.

   (b) Déterminer la loi de Z *(chaque probabilité sera laissée sous forme d'une somme).*

   (c) Calculer $E(Z)$.

4. Soit T une variable aléatoire absolument continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de T sachant $(X = k)$ est exponentielle de paramètre $k + 1$.

   (a) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer $P(T \leq t / X = k)$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de T .

   (c) Donner alors une densité de T .

   (d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $E(T)$.

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

MERCREDI 16 MAI 2001, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On désigne pour tout entier naturel non nul n : $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels qui sont soit le polynôme nul, soit de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout polynôme P de E_n, on note P' le polynôme dérivé de P.

On définit sur E_n l'application f, qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$

1. Propriétés générales.

   (a) Calculer $f(X^n)$, $f(1)$. Calculer $f(P)$ pour $P = X^k$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ et $n \geq 2$.

   Quelles sont les valeurs de $k \in \{0, \cdots, n\}$ pour lesquelles le degré de X^k est égal à celui $f(X^k)$?

   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E_n.

   (c) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de E_n $\left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$

2. Etude pour des valeurs particulières de n.

   (a) On suppose dans cette question seulement que $n = 1$.
   Trouver les valeurs propres de A.
   Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

   (b) On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.
   Trouver les valeurs propres de A.
   Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

3. On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.

   (a) Montrer que si un polynôme P est vecteur propre de l'endomorphisme f, alors P est de degré n.

   (b) On considère les polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$:
   $$P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$$
   Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $f(P_k) = (2k - n - 1)P_k$

   En déduire les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'endomorphisme f.

   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   Pour quelles valeurs de n est-il bijectif ? (on justifiera ses réponses).

EXERCICE 2

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives u et v, alors $U+V$ est une variable à densité dont une densité w est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt$$

Les candidats devront adopter la notation suivante pour les fonctions de répartition :
F_U est la fonction de répartition de U, F_V est la fonction de répartition de V, et ainsi de suite pour les différentes variables aléatoires rencontrées dans l'énoncé.

1. Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   - (a) Quelle est la loi de $(-Y)$?
   - (b) Montrer que $X - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :
     $$\forall z \in \mathbb{R}, \quad h(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}$$
   - (c) En déduire que la variable $|X - Y|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Trois personnes A, B, C se rendent à la poste au même instant pour téléphoner.
   Il n'y a que deux cabines, que prennent A et B, et C attend.
   On suppose que les durées de communication téléphonique de chacun, notées X_A, X_B, X_C, sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   - (a) Vérifier que C sort le dernier de la poste si et seulement si l'événement $\left(|X_A - X_B| < X_C\right)$ est réalisé.
   - (b) Montrer que la variable aléatoire $D = |X_A - X_B| - X_C$ admet h pour densité. En déduire la probabilité pour que C sorte le dernier.

3.
   - (a) Soient Z et T deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β, avec $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.
     Déterminer la loi de $Z + T$.
   - (b) Soit T_C la variable aléatoire égale au temps total passé par C à la poste.
     Déterminer la loi de la variable $M = \min(X_A, X_B)$ et en déduire la loi de T_C.

EXERCICE 3

On considère l'ensemble C des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $\mathbb{R}^+$.
Soit φ l'application qui à toute fonction $f \in C$ fait correspondre $\varphi(f) = F$ définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$$

On note D_F l'ensemble de définition de la fonction F.

1. Expliciter la fonction F, en précisant son ensemble de définition D_F, dans les cas suivants :

(a) Pour tout $t \in I\!R^+, f(t) = 1$.

(b) Pour tout $t \in I\!R^+, f(t) = e^t$.

(c) Pour tout $t \in I\!R^+, f(t) = t$.

2. Soit L l'ensemble des fonctions définies, positives et continues sur $I\!R^+$ telles que :

$$\forall m \in I\!R_+^* \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-mt} f(t) = 0$$

(a) Montrer que si f et g sont éléments de L alors $f + g \in L$, et que les fonctions $t \mapsto t^n$ pour $n \in I\!N$ sont éléments de L.

(b) On considère $f \in L$ et $x \in I\!R_+^*$.

Montrer la convergence de l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$.

(On admettra que la fonction g définie sur $I\!R^+$ par $g(t) = e^{-\frac{xt}{2}} f(t)$ est bornée).

3. Etude de la dérivabilité de F.

(a) Montrer que l'on a :

$\forall u \in [0;+\infty[\;\; e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} e^u \leq 0$ et $\forall u \in]-\infty;0] \;\; e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \leq 0$.

(On posera deux fonctions et on calculera jusqu'à leur dérivée seconde)

En déduire que pour tout réel u : $\quad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$ $(\ast)$

(b) Soient $f \in L$ et $n \in I\!N$. En remarquant que $e^{-mt} = e^{-\frac{m}{2}t} e^{-\frac{m}{2}t}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient à L.

(c) Soient $f \in L$, $F = \varphi(f)$ et $x \in I\!R_+^*$.

Montrer que pour tout réel h tel que $|h| < \frac{x}{2}$:

$$0 \leq F(x+h) - F(x) + h \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}dt \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{xt}{2}} dt .$$

(On pourra poser $u = -ht$ dans l'inégalité $(\ast)$).

(d) En déduire que si $f \in L$, F est dérivable sur $I\!R_+^*$ et exprimer, pour $x > 0$, $F'(x)$ sous forme d'intégrale.

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

MARDI 21 MAI 2002 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On rappelle que lorsque Y est une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et un écart-type non nul σ_Y , on note Y^* la variable centrée réduite associée à Y , définie par $Y^* = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, suivant la même loi , et admettant une espérance notée m et un écart-type strictement positif notée σ .

On pose également $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Enfin on note Φ la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.

1. (a) Montrer que S_n admet une espérance et une variance et les exprimer en fonction de n , m et σ.

   (b) En déduire l'expression de S_n^* en fonction de S_n.

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel β :

$$p_{n,\beta} = P\left(\left| S_n^* \right| < n^{\beta} \right)$$

On cherche à étudier la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans différents cas de figure.

2. On suppose $\beta = 0$.

   (a) Montrer grâce au théorème de la limite centrée que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,0} = \Phi(1) - \Phi(-1)$.

   (b) Donner une valeur approchée de cette limite (On donne $\Phi(1) \approx 0.8413$).

3. On suppose $\beta > 0$.

   (a) Montrer que $p_{n,\beta} = P\left(\left| S_n - n\,m \right| < \sigma . n^{\beta + \frac{1}{2}} \right)$.

   (b) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev que $p_{n,\beta} \geq 1 - \dfrac{1}{n^{2\beta}}$.

   (c) En déduire la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4. On suppose ici que $\beta < 0$, et que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suivent la loi normale centrée réduite.

   (a) Quelle est la loi de la variable S_n ? de la variable S_n^* ?

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $p_{n,\beta} = 2(\Phi(n^{\beta}) - \Phi(0))$.

   (c) Montrer en utilisant la continuité de Φ en 0 que : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_{n,\beta} = 0$.

   (d) Montrer en utilisant la dérivabilité de Φ en 0 , que :

$$p_{n,\beta} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} . n^{\beta}$$

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général $a_n^{\ 2}$ converge.

Dans cet énoncé on emploie la notation a *pour désigner une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels .*

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout réel non nul α , on considère la suite $u(\alpha)$ définie par :

   Pour tout entier naturel n , $u_n(\alpha) = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$.

   Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E.

2. (a) Montrer que si a et b sont éléments de E , alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.

   (b) Soit ϕ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

   $$\phi((a,b)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \quad \text{pour toutes suites } a \text{ et } b \text{ de } E.$$

   Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

   On notera alors $< a,b >= \phi((a,b))$, et $\|.\|_2$ la norme associée à ϕ .

   (c) Montrer que pour toutes suites a et b de E , $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{\ 2}}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{\ 2}}$

   (d) Déterminer pour tout réel α la norme $\|u(\alpha)\|_2$, et pour tous réels α et β distincts , le produit scalaire $< u(\alpha), u(\beta) >$.

   (e) Déterminer une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par la famille $[u(-1), u(1), u(2)]$.

3. Pour tout entier naturel k non nul, on définit :

   F_k l'ensemble des suites réelles a telles que : pour tout entier $n \geq k$, $a_n = 0$

   G_k l'ensemble des suites réelles a de E telles que : pour tout entier $n \leq k-1$, $a_n = 0$

   (a) Montrer que $F_k \subset E$, et que F_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k .

   (c) Montrer que G_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (d) Soit a une suite de E. Montrer qu'il existe deux suites r et s telles que :

   $$r \in F_k,\ s \in G_k \quad \text{et pour tout entier naturel , } a_n = r_n + s_n .$$

   En déduire que F_k et G_k sont des espaces supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire ϕ .

   (e) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.

   Déterminer son projeté orthogonal sur F_k pour le produit scalaire ϕ .

EXERCICE 3

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\quad g(t) = te^{-t}$ $\quad$ pour tout réel t positif.

1. (a) Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que pour tout réel strictement positif t, $g(t) \leq \dfrac{4}{t.e^2}$.

2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions notées ρ_n et ρ'_n et telles que : $0 < \rho_n < 1 < \rho'_n$.

3. (a) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geq 3}$ converge et que sa limite est 0.
   (b) Montrer que $\rho_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite $(\rho'_n)_{n\geq 3}$ diverge.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f((x,y)) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+4y^2}}}{x^2+4y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f((0,0)) = 0.$$

1. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer en utilisant la question 1.b de la partie 1 que f est continue en $(0,0)$.

2. (a) Déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que (x,y) est un point critique pour f (c'est-à-dire susceptible d'être un extremum pour f) si et seulement si : $x^2 + 4y^2 = 1$ *ou* $(x,y) = (0,0)$.

4. En utilisant la fonction g étudiée dans la première partie :
   (a) Trouver le minimum global de f ainsi que l'ensemble P des points le réalisant.
   (b) Trouver le maximum global de f ainsi que l'ensemble E des points le réalisant.

5. On note pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

   E_n l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f((x,y)) = \dfrac{1}{n}$.

   On note également D la demi-droite de $\mathbb{R}^2$ définie par : $D = \left\{(x,y) / x \geq 0 \text{ et } y = \dfrac{1}{2}x\right\}$.

   Montrer que : $E_n \cap D = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}\right), \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}\right)\right\}$

   où ρ_n et ρ'_n sont les valeurs définies dans la question 2 de la partie 1.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{2}{\pi(e^t + e^{-t})}$.

1. (a) Soit la fonction g définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par : Pour tout $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $g(\theta) = \ln(\tan\theta)$.

   Montrer que g est de classe C^1 sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.

   (b) En déduire grâce au changement de variable $t = g(\theta)$ que f est une densité de probabilité.

   On note dans toute la suite X une variable aléatoire admettant une densité égale à f.

   (c) Montrer que f est paire , puis que X admet une espérance et que celle-ci est nulle.

2. *Ce paragraphe établit des préliminaires au calcul de la variance de X.* Soit p un entier naturel non nul.

   (a) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre p.

   Donner l'espérance et la variance de Y. En déduire l'espérance $E(Y^2)$.

   (b) On note $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt$. Déduire du (a) la convergence et la valeur de J_p en fonction de p .

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}dt$ converge et que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}dt = 0$.

3. *On exprime dans ce paragraphe la variance de X à l'aide d'une série.*

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{1+e^{-2t}} = (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}$.

   (b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$: $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}\right]$.

   (c) Montrer finalement que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On note h une densité de U et de V.

   (a) Montrer que la variable aléatoire $A = \ln(|U|)$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité f_A telle que pour tout réel x , $f_A(x) = 2e^x h(e^x)$.

   (b) Montrer que la variable aléatoire $B = -\ln(|V|)$ est une variable aléatoire à densité admettant une densité f_B telle que pour tout réel x , $f_B(x) = f_A(-x)$.

   (c) Soit C la variable aléatoire à densité $C = A + B = \ln\left(\left|\dfrac{U}{V}\right|\right)$.

   Calculer pour tout réel strictement positif y l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{u} f_B(-\ln u)\, f_A(\ln(uy))du$.

   En effectuant dans cette intégrale le changement de variable $u = e^{-t}$ en déduire une densité de C.
   Vérifier que C suit la même loi que X .

EXERCICE 2

Dans cet exercice , n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $< . , . >$ et de norme associée notée $\| . \|$.

On note BC la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

On note I la matrice carrée unité d'ordre n.

Etant donnés n réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$, on note $m = \min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}, d(e_i) = a_i e_i$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

1. (a) Montrer que le vecteur $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f. A quelle valeur propre est-il associé ?

   (b) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base orthonormée.

   (c) Prouver que $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $B' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \cdots, e_n - e_1)$.

   (d) Justifier que $\text{Im}(f) = (Ker(f))^{\perp}$ (orthogonal de $Ker(f)$ pour le produit scalaire canonique).

   (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, et que pour tout vecteur u de E, $\|f(u)\| \leq n\|u\|$.

2. (a) Justifier que d est un automorphisme de E.

   (b) Montrer que pour tout u de E, $\|d(u)\| \geq m\|u\|$, et que pour tout v de E, $\left\|d^{-1}(v)\right\| \leq \frac{1}{m}\|v\|$.

   (c) Prouver que pour tout vecteur non nul u de E, $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.

   (d) En déduire en étudiant $Ker(g)$ que l'endomorphisme g est un automorphisme de E.

3. Soit un vecteur v fixé de E. Il existe d'après le 2.(d). un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.

   On considère alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} u_0 = v \\ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_{k+1} = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u_k) \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k : $u_{k+1} - u = -(d^{-1} \circ f)(u_k - u)$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel k : $\| u_{k+1} - u \| \leq \frac{n}{m} \| u_k - u \|$.

   Montrer enfin que $\lim\limits_{k \to +\infty} \| u_k - u \| = 0$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de deux jeux **identiques** de n cartes chacun , dont les dos sont indiscernables.
Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

Partie A

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu , formant ainsi une paire de cartes , mise de côté.
On recommence n fois ce tirage sans remise. On dispose alors de n paires de cartes.

1. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?

2. Soit k un entier naturel de $\{0, \cdots, n-1\}$ et k paires d'animaux fixées arbitrairement.
   Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?

3. Montrer grâce à la formule du crible que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée est égale à $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Partie B

On mélange maintenant les deux jeux dans une urne.
A chaque tour on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes , on ne remet pas les deux cartes dans l'urne , sinon on les remet dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de tours qui ont été nécessaires pour vider l'urne , en reconstituant ainsi les n paires de figurines d'animaux.

1. Déterminer la loi et l'espérance de la variable T_1.

2. Déterminer $T_n(\Omega)$ pour n supérieur ou égal à 2.

3. (a) En utilisant les événements C_i : " lors du i - ième tour , une paire d'animaux est reconstituée ", montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :
$$P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$
   (b) Montrer que T_2 admet une espérance et la calculer.

4. (a) Déterminer les probabilités $P(T_3 = 3)$, $P(T_3 = 4)$.
   En utilisant le système complet d'événements $\left(C_1, \overline{C_1}\right)$, déterminer $P(T_3 = 5)$.

   (b) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour $k \geq n-1$:
$$P(T_n = k+1) = \frac{n}{C_{2n}^2} P(T_{n-1} = k) + \frac{C_{2n}^2 - n}{C_{2n}^2} P(T_n = k).$$
   (c) *On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul n , T_n admet une espérance.*

   Montrer en multipliant l'égalité précédente par k et en sommant de $k = n-1$ à $+\infty$ que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1$.

   En déduire pour tout entier naturel non nul n une expression de $E(T_n)$ en fonction de n .

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

MARDI 18 MAI 2004 , de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement,** son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On munit $\mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ du produit scalaire canonique. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O désigne la matrice colonne nulle d'ordre 3.
I désigne la matrice identité (matrice unité) d'ordre 3.
Lorsque λ est une valeur propre d'une matrice carrée C, on notera $E_C(\lambda)$ le sous-espace propre associé.
Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_3(I\!R)$ définie pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(I\!R)$ par $\phi(M) = BM - MA$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont -3 et 6. Déterminer $E_A(-3)$ et $E_A(6)$.
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de B et déterminer $E_B(0)$. Montrer que $E_B(0) \subset E_A(-3)$.
   (c) Montrer que 3 est valeur propre de B et déterminer $E_B(3)$. Montrer que $E_B(3) \subset E_A(-3)$.
   (d) Montrer que (V_1, V_2) est une base orthogonale de $E_A(-3)$ formée de vecteurs propres de B.
   En déduire une matrice colonne d'ordre 3 notée V_3 et de première coordonnée égale à 1 telle que (V_1, V_2, V_3) soit une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ formée de vecteurs propres de A.
   (e) Exprimer BV_3 en fonction de V_2 et V_3.
   En déduire que la matrice B est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2. (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(I\!R)$.
   (b) Soit H une matrice carrée d'ordre 3 élément de Ker (ϕ).
   Montrer que $(B + 3I)HV_1 = O$, $(B + 3I)HV_2 = O$ et $(B - 6I)HV_3 = O$.
   En déduire $HV_1 = O$, $HV_2 = O$ et $HV_3 = O$ et que ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(I\!R)$.

3. Soient a et b deux valeurs propres respectives de A et de B.
   Soit X un vecteur propre de A associé à a et Y un vecteur propre de B associé à b.
   Montrer que $Y\,{}^tX$ est non nulle et calculer $\phi(Y\,{}^tX)$. En déduire que $b - a$ est valeur propre de ϕ.

4. Soit λ une valeur propre de ϕ. Soit M une matrice carrée vecteur propre de ϕ associée à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que :
   $(B - (\lambda - 3)I)MV_1 = O$, $(B - (\lambda - 3)I)MV_2 = O$ et $(B - (\lambda + 6)I)MV_3 = O$.
   (b) Montrer que :
   si $MV_1 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_2 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_3 \neq O$ alors $\lambda + 6$ est valeur propre de B.
   (c) Montrer que MV_1, MV_2, MV_3 ne peuvent pas être tous nuls.
   En déduire que λ est la différence d'une valeur propre de B et d'une valeur propre de A.
   Donner finalement l'ensemble des valeurs propres de ϕ.

EXERCICE 2

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé , on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A / B)$.

On considère un réel strictement positif α et la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout $t \in \left]0;1\right]$, $f_\alpha(t) = \alpha\, t^{(\alpha-1)}$ et pour tout $t \in \left]-\infty;0\right] \cup \left]1;+\infty\right[$, $f_\alpha(t) = 0$.

1. (a) Montrer que f_α est une densité de probabilité. Soit X_α une variable aléatoire de densité f_α .

   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable X_α .

   (c) Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a \leq b \leq 1$, $P_{X_\alpha \leq b}(X_\alpha \leq a) = P(X_\alpha \leq \frac{a}{b})$.

   (C' est-à-dire $P(X_\alpha \leq a \;/\; X_\alpha \leq b) = P(X_\alpha \leq \frac{a}{b})$).

2. *Ce paragraphe étudie une fonction H vérifiant la propriété **(R)** :*

   (R) : H est dérivable sur $\left]0;1\right]$ et pour tous réels x et y de $\left]0;1\right]$, $H(xy) = H(x)H(y)$.

   (a) Montrer que pour tout réel t de $\left]0;1\right]$, $\left(H(\sqrt{t})\right)^2 = H(t)$. En déduire le signe de H sur $\left]0;1\right]$.

   (b) On suppose ici qu'il existe un réel β de $\left]0;1\right]$ tel que $H(\beta) = 0$.

   Montrer grâce au 2(a) et par récurrence que pour tout entier naturel n , $H\left(\beta^{\left(\frac{1}{2^n}\right)} \right) = 0$.

   En déduire par continuité de H que $H(1) = 0$, puis , que H est nulle sur $\left]0;1\right]$.

   (c) On suppose ici que pour tout réel β de $\left]0;1\right]$, $H(\beta) \neq 0$.

   c1. Montrer que H est strictement positive sur $\left]0;1\right]$. Montrer que $H(1) = 1$.

   c2. Montrer que pour tous réels x et y de $\left]0;1\right]$, $yH'(xy) = H'(x)H(y)$.

   c3. On considère la fonction V dérivable sur $\left]0;1\right]$ définie par :

   Pour tout réel $t \in \left]0;1\right], V(t) = \ln(H(t))$.

   Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $V'(t) = \dfrac{H'(1)}{t}$.

   c4. Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $V(t) = H'(1)\ln(t)$.

   En déduire que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $H(t) = t^{H'(1)}$.

3. *On suppose dans ce paragraphe que Y est une variable à densité vérifiant les propriétés suivantes :*

   - $Y(\Omega) = \left]0;1\right]$.
   - La fonction de répartition F_Y de Y est dérivable sur $\left]0;1\right]$.
   - Pour tous réels a et b tels que $0 < a \leq b \leq 1$, $P_{Y \leq b}(Y \leq a) = P(Y \leq \frac{a}{b})$.

   (a) Montrer que F_Y vérifie la propriété ***(R)*** .

   (b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif α tel que Y et X_α suivent la même loi.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} f(k) = 0 & si\ \ k\ \ est\ \ pair\ (\,ceci\ comprend\ k = 0\,) \\ f(k) = 1 & si\ \ k\ \ est\ \ impair \end{cases}$.

On considère un entier naturel non nul N, et on définit les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} N_0 = N\ ;\ u_0 = f(N_0) \\ \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}\ ,\ N_{k+1} = \dfrac{N_k - u_k}{2} \text{ et } u_{k+1} = f(N_{k+1}) \end{cases}$$

1. *Deux exemples.*

(a) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 27$.

(b) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 2^{10}$.

2. *Dans cette question on étudie les suites* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dans le cas général .*

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel k :
u_k existe et appartient à $\{0,1\}$ et N_k existe et appartient à $\mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel k, $N_{k+1} \le \frac{1}{2} N_k$.

En déduire que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel N_k est inférieur à $\frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, $N_k = u_k = 0$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel k, $2^{k+1}N_{k+1} - 2^k N_k = -2^k u_k$.

En déduire en sommant de $k = 0$ à n_0 que : $N = 2^0 u_0 + 2^1 u_1 + \cdots + 2^{n_0} u_{n_0}$.

(d) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être la suite identiquement nulle.

Il existe donc un entier s inférieur à n_0 tel que $u_s = 1$ et pour tout k strictement supérieur à s, $u_k = 0$.

3. *Informatique.* On dispose de la fonction Turbo-Pascal définie de la manière suivante :

```
function g ( n : integer ) : integer ;
begin
g : = n - 2 * int ( n / 2 ) ;
end;
```

où **int (x)** représente la fonction mathématique " partie entière de x ", aussi notée $[x]$.
(On rappelle que $[x]$ est l'unique entier tel que $[x] \le x < [x] + 1$).

(a) En distinguant deux cas selon que n est pair ou impair , montrer que la fonction g n'est autre que la fonction f.

(b) Soit d l'entier égal à la partie entière de $\dfrac{\ln(N)}{\ln(2)}$

Montrer que d est l'unique entier tel que $2^d \le N < 2^{d+1}$.
En déduire que l'entier s évoqué dans le 2.(d) est égal à d.

(c) Ecrire finalement un programme utilisant la fonction **g** qui demande un entier naturel non nul N , calcule d et affiche successivement les valeurs $u_0, u_1, \cdots, u_d$.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
292
ESC_MATS

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT-ETIENNE

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 24 Mai 2005, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Pour tout triplet de réels (a, b, c) on pose $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout triplet de réels (a, b, c) la matrice $M_{a,b,c}$ est diagonalisable.

2. On pose $E = \left\{ M_{a,b,c} \ , \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

   Montrer que E est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.

3. On pose $C = M_{0,0,1}$ et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calculer C^2 et C^3. Donner un polynôme annulateur de C.

   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de h.

   (c) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour h,
   et orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. On pose $B = M_{0,1,0}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que g et h commutent.

   (b) Montrer que tout vecteur propre de h est un vecteur propre de g.

   (c) En déduire que g et h sont diagonalisables dans une même base et donner
   les valeurs propres de g.

5. (a) Exprimer $M_{a,b,c}$ en fonction de I, B, C et des réels a, b et c.

   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M_{a,b,c}$.

6. Soit c un réel fixé.

   On considère l'application $\phi_c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que pour tous triplets de réels (x, y, z) et (x', y', z'):

$$\phi_c((x, y, z), (x', y', z')) = {}^tX \, M_{2,1,c} X' \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

   On pose $u_1 = (-1,0,1)$, $u_2 = (1,\sqrt{2},1)$, $u_3 = (1,-\sqrt{2},1)$

   (a) Montrer que ϕ_c est une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer les 6 valeurs $\phi_c(u_i, u_j)$ pour $1 \le i \le j \le 3$.

   (c) Etablir : $\left[\phi_c(u_2, u_2) > 0 \ \ et \ \ \phi_c(u_3, u_3) > 0\right] \Leftrightarrow c \in \left]\frac{-3}{\sqrt{2}} ; \frac{3}{\sqrt{2}}\right[$.

   (d) Déterminer l'ensemble des réels c tels que ϕ_c définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2

On considère, en admettant pour l'instant son existence, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f((a,b,c)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a + 2bt^2 + \frac{4c}{3}t^4)}{\sqrt{\pi}} e^{-abc-t^2} dt.$$

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge pour tout entier naturel k. On la note I_k.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k+1} = 0$.

   (c) A l'aide du changement de variable $u = t^2$ montrer que pour tout entier naturel k : $I_{2k} = \Gamma(k + \frac{1}{2})$. En déduire les valeurs de I_2 et I_4 en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   (d) En utilisant la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, calculer I_0.
   En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$, puis $I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $I_4 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

   (e) En déduire que pour tous réels a, b, c, $f((a,b,c))$ existe et $f((a,b,c)) = (a + b + c)e^{-abc}$.

2. (a) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (c) Donner les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

3. (a) On suppose que (α, β, γ) est un point critique de f.
   Montrer que $\alpha\beta\gamma \neq 0$ et que $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma}$. En déduire que $\alpha = \beta = \gamma = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.
   Réciproquement, vérifier que le point $A = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ est bien un point critique de f.

   (b) Donner la hessienne de f au point critique A.

4. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (-1,0,1), (1,-2,1))$ a les propriétés suivantes :
   - $\mathcal{F}$ est formée de vecteurs propres de h.
   - $\mathcal{F}$ est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
   - $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors ${}^tXHX = 3(x + y + z)^2 - \frac{3}{2}(z - x)^2 - \frac{1}{2}(x - 2y + z)^2$.

   (c) En déduire que le point A est un point col de f.

EXERCICE 3

Dans tout l''énoncé S désigne un entier naturel non nul fixé.

Une urne contient initialement $4S$ boules indiscernables au toucher, dont :

S boules rouges, S boules vertes et $2S$ boules bleues.

On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, avec le protocole suivant :

Si la boule tirée est rouge on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule bleue.
Si la boule tirée est verte on la remet dans l'urne.
Si la boule tirée est bleue on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n - ième tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S.

On rappelle que si A désigne un événement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire discrète, $E(X / A)$ est l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_A : $E(X / A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x)$.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.

2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.

On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à $2S$, de sorte que $X_n(\Omega) = \{0, \ldots, 3S\}$.

3. (a) Soit k un entier appartenant à $\{1, \ldots, 3S - 1\}$.
Quelle est la composition de l'urne lorsque l'événement $(X_n = k)$ se réalise ?
En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $(X_n = k)$.

   (b) Montrer alors que $E(X_{n+1} / X_n = k) = (1 - \frac{1}{2S})k + \frac{3}{4}$.
Cette formule est-elle encore vraie lorsque $k = 0$? lorsque $k = 3S$?

   (c) En déduire par la formule de l'espérance totale que $E(X_{n+1}) = (1 - \frac{1}{2S})E(X_n) + \frac{3}{4}$.

4. On note pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $2S$: $u_n = E(X_n)$.

   (a) Déterminer le réel α tel que $\alpha = (1 - \frac{1}{2S})\alpha + \frac{3}{4}$

   (b) Montrer que la suite $(u_n - \alpha)_{n \geq 2S}$ est géométrique.

   (c) En déduire l' expression de u_n en fonction de n, S, et u_{2S}.

   (d) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{3S}{2}$.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT ETIENNE

CODE EPREUVE :

292

ESC_MATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

mardi 16 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Les questions 2 , 3 et 4 sont indépendantes de la question 1.

On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice H relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$$ et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n, puis en déduire b_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

   (c) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer a_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

2. (a) Montrer que H est diagonalisable.

   (b) Montrer par la méthode du pivot que les valeurs propres de H sont -2, λ_1 et λ_2.

   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de h.
   Justifier que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère ici l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto {}^tX\,H\,X \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier que q est une forme quadratique et exprimer $q((x, y, z))$ en fonction de x, y, z.

   (b) Que peut-on dire du signe de q ? Justifier sa réponse.

4. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$ défini par $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1 ; +\infty[$, ainsi que la fonction f définie sur D par : $f((x, y, z)) = x\ln(1+z) + (y-1)^2(z-1) + 2z$.

   (a) Montrer que f est de classe C^2 sur D.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   Montrer que f ne présente qu'un point critique M_0.

   (c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   En déduire la Hessienne de f au point M_0.

   (d) Le point M_0 est-il un maximum, un minimum, ou un point col pour f ?

EXERCICE 2

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n \ln^{\alpha+1}(n)}$.

On note , pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k$.

1. Soit la fonction f définie sur $I =]\,1\,;+\infty\,[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(x)}$.

   (a) Montrer que f est de classe C^2 sur I et calculer sa dérivée f'.
   Montrer que f est concave sur I.

   (b) Etudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^{\alpha+1}(t)}\, dt$.

   En déduire la nature de la série de terme général u_n .

   (c) Soit un entier $k \geq 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k\,; k+1]$, $u_{k+1} \leq f'(t)$.

   (d) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , $u_{k+1} \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(k)} - \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(k+1)}$.

Dans toute la suite , on note $L = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} u_k$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2. (a) Justifier l'existence de R_n . Exprimer R_n à l'aide de L et S_n .

   (b) Soit p et n deux entiers tels que $2 \leq n < p$:

   Montrer grâce au 1.d. que : $\sum\limits_{k=n+1}^{p} u_k \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)} - \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(p)}$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $0 \leq L - S_n \leq \dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)}$.

3. (a) Montrer que $\dfrac{1}{\alpha \ln^{\alpha}(n)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$.

   (b) Compléter les parties pointillées du programme Turbo-Pascal suivant afin qu'il demande deux réels strictement positifs α et ε et affiche un entier naturel n et une somme partielle S_n tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε : (on rappelle que **trunc** est la fonction partie entière).

```
program esc2006;
var
        S , epsilon , alpha : real ;
        k , n : integer ;
begin
        writeln ( ........................................................................... ) ;
        readln ( .......... ) ;
        readln ( .......... ) ;
        n := trunc ( exp ( exp ( ................................................. ) ) ) + 1 ;
        S := 0 ;
        for k := 2 to n do ............................................................... ;
        writeln ( ........................................................................... ) ;
end .
```

   (c) On suppose que les valeurs $\alpha = 10$ et $\varepsilon = 10^{-6}$ ont été entrées.
   Y aura-t-il une erreur dûe à un débordement à l'exécution de ce programme ?
   (on prendra 2^{15} comme plus grand entier possible pour le type **integer** et on donne $\ln(2) \approx 0{,}69$)

EXERCICE 3

Le préliminaire n'est utilisé qu'en 2(e) et 2(f). Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. **Préliminaire :**

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance $E(Y_n)$ et une variance $V(Y_n)$.

On suppose en outre que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = m$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0$. (m étant une constante réelle).

(a) Montrer que $E((Y_n - m)^2) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.

(b) En déduire par inégalité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$.

(c) Montrer alors que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

Dans la suite de cet exercice on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi.

Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i(\omega)$.

(M_n prend donc pour valeur la plus grande des valeurs prises par $X_1, X_2, \cdots, X_n$ et on remarque que $M_1 = X_1$).

2. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.

On note $q = 1 - p$.

(a) Montrer que $(M_2 = 0) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ et en déduire la loi de M_2.

(b) Montrer plus généralement que M_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.

(c) Soient r et s deux entiers tels que $1 \leq r < s$. Montrer que si $(M_r = 1)$ alors $(M_s = 1)$.

En déduire $E(M_r M_s) = 1 - q^r$, puis calculer la covariance $\mathrm{cov}(M_r, M_s)$.

(d) Donner la matrice de variance-covariance des variables $(M_1, M_2, \cdots, M_n)$.

(e) Déduire du préliminaire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

(f) Montrer que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables à densité indépendantes, de loi uniforme sur $[0;1]$.

(a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0;1]$.

(b) En déduire que pour tout réel x de $[0;1]$, $P(M_n \leq x) = x^n$.

Montrer que M_n est une variable à densité.

(c) Soit ε un réel de $]0;1]$. Calculer $P(|M_n - 1| \leq \varepsilon)$.

(d) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

(e) Soit α un réel positif.

e1. Soit n un entier strictement supérieur à α.

Montrer que $P(n(1 - M_n) \leq \alpha) = 1 - (1 - \frac{\alpha}{n})^n$.

e2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{\alpha}{n})^n = e^{-\alpha}$.

e3. En déduire que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :

292
ESC_MATS

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

mardi 15 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^5$ où $\mathbb{K}$ peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant les cas , muni de sa base canonique $\mathscr{BC} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ ainsi que du produit scalaire canonique et de la norme associés .
On note f l'endomorphisme de E défini par les relations suivantes :

$f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_4, f(e_4) = e_5, f(e_5) = e_1 + w$, où $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$.

On note id l'endomorphisme identité de E défini par $id(u) = u$ pour tout vecteur u de E.
On note également 0_E le vecteur nul de E.

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z^5$.
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 - z)P(z) = (2 - z)(1 - z^5)$.
   (b) le réel 1 est-il racine de P ? En déduire les 5 racines de P dans $\mathbb{C}$.
   (c) Donner la matrice A de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathscr{BC}$.
   (d) Montrer alors l'équivalence : (λ est valeur propre de A) $\Leftrightarrow$ ($P(\lambda) = 0$).
   En déduire les valeurs propres de f lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (e) On suppose dans cette question uniquement que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. f est-il diagonalisable ?
   (f) On suppose dans cette question uniquement que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. f est-il diagonalisable ?

2. On étudie dans cette question le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 , noté $\mathcal{E}_2 = \mathrm{Ker}(f - 2id)$.
   (a) Calculer $f(w)$ et en déduire que $w \in \mathcal{E}_2$.
   (b) Soit $H = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Justifier que H est de dimension 4 .
   (c) Soit u un vecteur de H. Montrer que $\|f(u)\| = \|u\|$.
   (d) Soit v un vecteur de $\mathcal{E}_2$. Montrer que $\|f(v)\| = 2\|v\|$.
   (e) En déduire que $H \cap \mathcal{E}_2 = \{0_E\}$ puis donner une base de $\mathcal{E}_2$.

3. Etude de f^5:
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k , $f^k(w) = 2^k w$.
   (b) Montrer que $f^5(e_1) = e_1 + w$, puis , que pour $k = 2, 3, 4$ on a $f^5(e_k) = e_k + 2^{k-1}w$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4, w)$ est une base de E.
   (d) Former la matrice de f^5 relativement à la base $\mathscr{B}'$ et donner les valeurs propres de f^5 .

4. Questions générales :
   (a) Soit λ un élément de $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$.
   Montrer que si λ est valeur propre de g alors λ^5 est valeur propre de l'endomorphisme g^5.
   (b) En examinant l'endomorphisme f, que peut-on conclure sur une réciproque à cette propriété ?

EXERCICE 2

On pose pour tout entier naturel n non nul , $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^3)^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^3)^n} dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante , et convergente vers une limite notée ℓ .

3. On pose pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$.

Par une intégration par parties , montrer que $I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\,(I_n(A) - I_{n+1}(A))$.

4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, notée ℓ , est nulle .

(a) A l'aide de la question 3. , montrer que $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n.2^n} + (J_n - J_{n+1})$.

(b) Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\frac{1}{3n.2^n}$ sont convergentes .

En déduire la nature de la série de terme général $\frac{J_n}{3n}$.

(c) Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $(\frac{\beta}{3n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1}{3n-1}$.

(b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. (a) Grâce à la question 3. , montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $I_n = I_1 . \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.

7. On admet que $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il demande un entier n supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6. (b) :

```
program esc ;
var
        k , n : integer ;
        I : real ;
begin
        writeln ( ................................ ) ;
        readln  ( ................................ ) ;
        I := 2 * pi / ( 3 * sqrt(3) ) ;
        for k := 1 to n - 1 do ...................................... ;
        writeln ( ................................ ) ;
end .
```

EXERCICE 3

Les deux parties sont indépendantes. Dans tout l'énoncé p est un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [et $q = 1 - p$.

PARTIE A :

Sur une table sont placées deux boules noires (étape 0) .
Une des deux boules est choisie au hasard et éliminée de la table .
Ensuite on repose sur la table : soit une boule blanche , avec la probabilité p,
soit une boule noire , avec la probabilité q .
On a alors atteint l'étape 1 . Cette action est répétée ainsi indéfiniment , de sorte qu'à chaque étape k,
deux boules sont sur la table : soit deux noires (événement noté A_k)
soit une noire et une blanche (événement noté B_k)
soit deux blanches (événement noté C_k) .

A chaque étape, une des deux boules est choisie au hasard puis remplacée comme précédemment soit par une boule blanche avec la probabilité p soit par une boule noire avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ on note également $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, $c_k = P(C_k)$ et on pose les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} & 0 \\ p & \frac{1}{2} & q \\ 0 & \frac{p}{2} & p \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \text{ et } U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \text{avec } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le produit PD.

   (b) Calculer le produit MP et , en utilisant la relation $p + q = 1$, vérifier que $MP = PD$.

2. (a) Donner a_0 , b_0 , c_0. Justifier que $a_1 = q$, $b_1 = p$ et $c_1 = 0$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul .

   Justifier que : $P_{A_k}(A_{k+1}) = q$, $P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{q}{2}$ et $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$.

   Donner aussi $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $U_{k+1} = MU_k$.

   (d) En utilisant la question 1.(b) , montrer par récurrence que pour tout entier naturel k non nul :

$$U_k = P\,D^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (e) En déduire pour tout entier naturel k non nul a_k , b_k , c_k en fonction de k et montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = q^2, \qquad \lim_{k \to +\infty} b_k = 2pq, \qquad \lim_{k \to +\infty} c_k = p^2.$$

PARTIE B : *n* désigne un entier naturel non nul .

Soient $X_1 , X_2 , ..., X_n$ des variables mutuellement indépendantes et de même loi (On donne celle de X_1) :

$$P(X_1 = -1) = q^2 \qquad P(X_1 = 0) = 2pq \qquad P(X_1 = 1) = p^2$$

1. (a) Justifier que $X_1(\Omega) = \{ -1 , 0 , 1 \}$ et montrer que l'espérance de X_1 est $E(X_1) = p - q$.

   (b) Montrer que la variance de X_1 est égale à $V(X_1) = 2pq$.

2. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + X_k}{2n}$.

   (a) Déterminer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

   (b) En déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{2n\varepsilon^2}$, puis montrer que (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à p .

   (c) Justifier que (Z_n) est un estimateur de p sans biais et convergent .

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur Epreuves ESC : ESC CHAMBERY

Code sujet
292
ESC__MATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 14 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ notés $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique, que l'on notera $< \, , \, >$. On note $\| \ \|$ la norme associée.

On note $H = Vect(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ et $H^{\perp}$ l'orthogonal de H pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note f l'application qui à tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ associe $f(\vec{u}) = <\vec{u}, \vec{w}_2> \vec{w}_1 + <\vec{u}, \vec{w}_1> \vec{w}_2$.

1. **Préliminaire** : On note $M = \begin{pmatrix} a & c^2 \\ b^2 & a \end{pmatrix}$, où a est un réel et b et c deux réels strictement positifs.

   (a) Montrer que les valeurs propres de M sont $a - bc$ et $a + bc$.

   (b) On note E_λ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

   Montrer que $E_{a-bc} = Vect\left(\begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}\right)$ et $E_{a+bc} = Vect\left(\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right)$.

2. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que $H^{\perp} \subset Ker(f)$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset H$.

3. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ est liée et on note $\vec{w}_2 = \theta \vec{w}_1$.

   Justifier que $\theta \neq 0$ puis établir que $\dfrac{1}{2\theta \| w_1 \|^2} f$ est la projection orthogonale sur H.

4. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ est libre.

   (a) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $Ker(f)$. Montrer que $<\vec{u}, \vec{w}_2> = <\vec{u}, \vec{w}_1> = 0$.

   En déduire $Ker(f) = H^{\perp}$ puis $\mathrm{Im}(f) = H$.

   (b) Calculer $f(\vec{w}_1)$, $f(\vec{w}_2)$ et justifier que la restriction de f à H est représentée dans la base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ de H par la matrice : $A = \begin{pmatrix} <\vec{w}_1, \vec{w}_2> & \|\vec{w}_2\|^2 \\ \|\vec{w}_1\|^2 & <\vec{w}_1, \vec{w}_2> \end{pmatrix}$.

   On note $B' = (\|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 - \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2 \, , \|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 + \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2)$.

   Montrer que B' est une base orthogonale de H puis établir grâce à la question 1 que B' est formée de vecteurs propres de f, dont on précisera la valeur propre associée.

   (c) Soient $\vec{w}_3$ un vecteur non nul de $H^{\perp}$ et $B'' = (\|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 - \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2 \, , \|\vec{w}_2\|\vec{w}_1 + \|\vec{w}_1\|\vec{w}_2 \, , \vec{w}_3)$.

   Montrer que B'' est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de f dans la base B''. Justifier que f est un endomorphisme symétrique.

   (d) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer alors que f admet : une valeur propre $\lambda_1 < 0$, une valeur propre $\lambda_2 > 0$ et la valeur propre 0.

5. Réciproquement on note r et s deux réels strictement positifs, et g un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$, de valeurs propres $-2r^2$, 0 et $2s^2$.

   (a) Que peut-on dire des sous-espaces propres associés, respectivement notés $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_+$?

   (b) Soient $\vec{v} \in \mathcal{E}_-$ et $\vec{w} \in \mathcal{E}_+$ deux vecteurs propres de g de norme égale à 1.

   Soient $\vec{w}_1{}' = r\vec{v} + s\vec{w}$, $\vec{w}_2{}' = -r\vec{v} + s\vec{w}$.

   Montrer que pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $g(\vec{u}) = <\vec{u}, \vec{w}_2{}'> \vec{w}_1{}' + <\vec{u}, \vec{w}_1{}'> \vec{w}_2{}'$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et si $t > 0$, $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels , $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)e^{-x} = 0$.

2. Etude d'une suite de polynômes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

   On définit pour tout l'exercice $R_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = -X^2 R_n' + X^2 R_n$.

   (a) Vérifier que $R_1 = X^2$ et $R_2 = -2X^3 + X^4$. Calculer R_3.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , le monôme de plus bas degré de R_n est $(-1)^{n+1}\, n!\, X^{n+1}$. Donner sans démonstration son monôme de plus haut degré .

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir : $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} R_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} R_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}} = 0$.

   Ces égalités sont-elles valables pour $n = 0$?

3. Classe C^∞ de f : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f^{(n)}$ la dérivée n - ième de f , $f^{(0)}$ désignant f elle-même .

   (a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $]\, 0\, ; +\infty\, [$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $t > 0$: $f^{(n)}(t) = R_n(\frac{1}{t})\, e^{-\frac{1}{t}}$.

   et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} f^{(n)}(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f^{(n)}(t) = 0$.

   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

4. On note E l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant $P(0) = 0$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel et que pour tout entier naturel non nul n , $R_n \in E$.

   Montrer que pour tout $P \in E$, $P(x)$ est négligeable devant $x^{\frac{3}{4}}$ au voisinage de 0 .

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on note : $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}}\, dt$.

   (b) Montrer que $P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}}$ est négligeable devant ($t^{-\frac{3}{2}}$) au voisinage de $+\infty$.

   En utilisant la question 1 , montrer que $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} P(\frac{1}{t})\, Q(\frac{1}{t})e^{-\frac{2}{t}} = 0$.

   En déduire que l'intégrale définissant $\varphi(P, Q)$ est convergente .

   (c) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir : $\varphi(R_n, R_{n+1}) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)\, f^{(n+1)}(t)\, dt$.

   Que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2}\left(f^{(n)}(t)\right)^2$? En déduire que R_n et R_{n+1} sont orthogonaux pour φ .

   (e) Plus généralement , montrer que si p est un entier naturel supérieur à 2 , et s un entier naturel non nul , $\varphi(R_p, R_s) = -\varphi(R_{p-1}, R_{s+1})$ (on utilisera une intégration par parties) .

   En déduire que si p et s sont de parités différentes , R_p et R_s sont orthogonaux pour φ .

EXERCICE 3

Un étudiant fréquente deux cybercafés C_A et C_B .

Dans C_A , il paye 2 euros la première demi-heure puis 1 euro pour la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3 euros par heure supplémentaire entamée.
Dans C_B , il paye R euros par heure entamée (R désignant une constante strictement positive).

Par exemple pour une session de 1h 40 , il paiera $2 + 1 + 3$ € dans C_A , contre $2R$ € dans C_B .
De même , pour une session de 32 minutes , il paiera $2 + 1$ € dans C_A , contre R € dans C_B .
Enfin pour une session de 30 minutes , il paiera 2 € dans C_A , contre R € dans C_B .

On suppose ici que la durée , exprimée en heures , passée par un étudiant sur un ordinateur au cours d'une session unique , est une variable aléatoire notée T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

1. Soit B la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé C_B.

(a) Justifier que $B(\Omega) = \{ kR , k \in \mathbb{N}^* \}$.

(b) Montrer que $P(B = kR) = P(k - 1 < T \leq k)$.
En déduire que pour tout entier naturel k non nul , $P(B = kR) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

(c) Quelle est la loi de la variable $Z = \frac{1}{R} B$? En déduire l'espérance de B .

2. Soit A la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé C_A .

(a) Justifier que $A(\Omega) = \{ 2 \} \cup \{ 3k , k \in \mathbb{N}^* \}$.

(b) Montrer que $P(A = 2) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}$ et $P(A = 3) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\alpha}$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $P(A = 3k) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

(d) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} (3k e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha}))$ et en déduire $E(A) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - 1 + \frac{3}{1 - e^{-\alpha}}$.

(e) Dans cette question uniquement on suppose que $\alpha = 2 \ln 2$.

Montrer que $E(A) - E(B) = \frac{4}{3}(2{,}625 - R)$. Quel forfait horaire maximum doit proposer le cybercafé C_B pour concurrencer C_A ? (en euros et centimes d'euros) .

3. On examine le temps de connexion pour n clients ($n \geq 2$) dont on suppose les temps de connexion (notés $T_1 , T_2 , \ldots , T_n$) mutuellement indépendants , ces temps suivant tous une loi exponentielle de paramètre α . On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

(a) Justifier que S_n suit une loi gamma (Γ) dont on précisera une densité .

(b) Montrer que la variable $U_n = \frac{1}{S_n}$ admet une espérance et la calculer .

(c) En déduire en fonction de U_n un estimateur sans biais du paramètre α .

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

292

EPREUVE ESC

Conception : E.S.C. CHAMBERY

ESC__MATS

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 12 mai 2009, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère une matrice symétrique H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $H^2 = H$.
Pour tout réel a , on note alors $M(a) = aI + (1-a)H$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Justifier que pour tout réel a , $M(a)$ est une matrice symétrique et diagonalisable .
   (b) Montrer que pour tous réels a et b , $M(a)M(b) = M(ab)$.

2. Soit a un réel strictement positif .
   (a) Montrer que $M(a)$ est inversible et que $M(\frac{1}{a})$ est son inverse .
   (b) Justifier que $M(a) = {}^t(\,M(\sqrt{a})\,)\,M(\sqrt{a})$.

On suppose que X désigne une matrice colonne propre de $M(a)$ associée à la valeur propre λ .

   (c) Montrer que ${}^t(\,M(\sqrt{a})\,X\,)\,(\,M(\sqrt{a})\,X\,) = \lambda\,{}^tX\,X$ puis justifier que $\lambda > 0$.
   (d) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(\,(x, y, z\,), (\,x', y', z'\,)\,) = (\,x \;\; y \;\; z\,)\,M(a)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

3. Application : On considère le cas où $a = 4$ et $H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $H^2 = H$ (on détaillera les calculs) et expliciter la matrice $M(4)$.
   (b) On note la famille $\mathcal{B} = \left[\,(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\,), (\,\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\,), (\,\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,)\right]$.
   On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la famille $\mathcal{B}$.
   Calculer ${}^tP\,P$. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}$?
   Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ.

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.
On définit sur E l'application φ , qui , à toute fonction f de E associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par les relations suivantes :

$$(\varphi(f))\,(0) = f(0)$$
$$\text{si } x > 0 \text{ , } (\varphi(f))\,(x) = \frac{6}{x^6}\int_0^x t^5 f(t)\,dt \text{ .}$$

1. Soit $\alpha \geq 0$. On note pour tout $x \geq 0$: $h_\alpha(x) = x^\alpha$. Expliciter $\varphi(h_\alpha)$.

2. Soit f un vecteur quelconque de E.

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $(\min\limits_{[0;x]} f)\dfrac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t)dt \leq (\max\limits_{[0;x]} f)\dfrac{x^6}{6}$.

   (b) Justifier que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\min\limits_{[0;x]} f) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\max\limits_{[0;x]} f) = f(0)$ et que $\varphi(f)$ est continue en 0 à droite .

   (c) Justifier que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $I\!R^{+*}$ et montrer que pour tout $x > 0$:
   $$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x}(f(x) - (\varphi(f))(x)).$$

3. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

   (b) Justifier que $Ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle .

   (c) Que peut-on dire de la fonction h_α , définie en question 1 , relativement à φ ?

4. Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda g$.

   (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $I\!R^{+*}$ et que pour tout $x > 0$:
   $$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = x\, g'(x).$$

   (b) On note pour $x > 0$: $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$.
   Vérifier que u est de dérivée nulle sur $I\!R^{+*}$.
   En déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) . x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}$.
   En utilisant la continuité de g en 0 à droite , montrer que $\lambda \in]0;1]$.

5. Application : Déterminer $Ker(\varphi - \frac{1}{3} id_E)$ et $Ker(\varphi - 2\, id_E)$.

EXERCICE 3

On considère le programme suivant , où l'on rappelle que **random** est une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0;1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes .

```
program simulations ;
var U , V , X , Y , Z : real ;
begin
randomize ;
U : = random ; V : = random ;
X : = - ln ( U ) ; Y : = - ln ( V ) ;
Z : = X + Y ;
end .
```

1. Montrer que $X(\Omega) = I\!R^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (On considérera que , du fait que $U = 0$ est de probabilité nulle , $U(\Omega) =]0;1]$).

2. (a) Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes .

   (b) Déterminer une densité f de Z . Vérifier que si $x \geq 0$, $f(x) = x\,e^{-x}$.

   (c) Déterminer la fonction de répartition de Z.

3. (a) On note $T = e^Z$.
Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.

(b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ h(t) = \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{1}{U\,V}$.

EXERCICE 4

On examine dans cet exercice deux méthodes différentes pour tester la contamination par une bactérie de 400 bouteilles de lait choisies au hasard sur le territoire.
Dans tout l'exercice, θ est un réel fixé, élément de l'intervalle $[\,0\,;\frac{1}{10}\,]$.
On suppose que pour chaque bouteille, la probabilité de contamination est égale au réel θ.

On dispose d'un test permettant de manière infaillible de savoir si l'échantillon de lait qu'on lui soumet est contaminé ou non (quel que soit le volume de cet échantillon).

1. Dans cette question on adopte une méthode simple consistant à tester une par une chaque bouteille.

On note X_k la variable de Bernoulli valant 1 si la k- ième bouteille testée est contaminée et 0 si la k- ième bouteille testée est saine.

On supposera dans tout l'exercice que les variables $(X_k)_{1 \leq k \leq 400}$ sont mutuellement indépendantes.

(a) Justifier que la variable $Z = \frac{1}{400}\displaystyle\sum_{k=1}^{400} X_k$ est un estimateur sans biais de θ.

(b) Déterminer la variance $V(Z)$ et justifier que $V(Z) \leq \dfrac{1}{4000}$.

(c) Montrer que $P(\,|\,Z - \theta\,|\, \geq 0{,}05\,) \leq 0{,}1$.
Que peut-on en déduire sur l'intervalle de confiance $[\,Z - 0{,}05\,;Z + 0{,}05\,]$? (Justifier).

2. Dans cette question on examine une méthode moins directe :
Les 400 bouteilles sont regroupées en 40 lots de 10 bouteilles.
On remplit alors 40 jerrycans $(\,J_n\,)_{1 \leq n \leq 40}$ en versant dans chacun la quasi-totalité des 10 bouteilles d'un lot. (on garde dans chaque bouteille un peu de lait pour un futur deuxième examen éventuel).

On teste ensuite chacun des 40 jerrycans :
Si un jerrycan est contaminé, on teste une à une les 10 bouteilles incriminées.
Si un jerrycan n'est pas contaminé, on considère les 10 bouteilles dont il est rempli comme saines.

On note Y_n la variable de Bernoulli valant 1 si le n- ième jerrycan est contaminé et 0 sinon.
Enfin on note T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans cette méthode.

(a) Montrer que pour tout entier n de $\{\,1, \ldots, 40\,\}$, $E(Y_n) = 1 - (1 - \theta)^{10}$.

(b) Justifier que $T = 40 + 10\,Y_1 + 10\,Y_2 + \ldots + 10\,Y_{40}$ et que $E(T) = 440 - 400\,(1 - \theta)^{10}$.

(c) En déduire que cette méthode est préférable à la première si et seulement si $\theta \leq 1 - e^{-\frac{\ln 10}{10}}$. Est-ce le cas ici ? (On donne $e^{-\frac{\ln 10}{10}} \approx 0{,}79$).