
ESSEC
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1978

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve (4 h)

Des points de présentation participent au barème. Toute composition confuse et qui ne démarque pas explicitement les différents paragraphes sera pénalisée.

I - 1°) $V(x)$ étant un polynôme à coefficients complexes que dire du polynôme

$$W(x) = \frac{1}{3} (V(x) + V(jx) + V(j^2x)) \quad \text{où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} ?$$

2°) Au polynôme $Q(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ on associe le polynôme $T(x)$

$$T(x) = Q(x).Q(jx).Q(j^2x)$$

Montrer que T est un polynôme en x^3 ; on pose $T(x) = H(x^3) = H(X)$. Préciser les racines de $H(X)$. Expliciter $H(X)$. Généraliser.

II - Dans ce paragraphe seules seront prises en considération les réponses explicitées à l'aide d'un dessin ; sauf mention du contraire a et b sont deux nombres respectivement complexe et réel.

1°) Pour b donné strictement positif trouver le lieu de a défini par :

$$|a+2b| \leq 1 \quad \text{et} \quad |a-b| \leq 1.$$

Résumer clairement les cas particuliers suivants :

a) $|a+2b| = 1 \quad \text{et} \quad |a-b| \leq 1,$

b) $|a+2b| \leq 1 \quad \text{et} \quad |a-b| = 1,$

c) $|a+2b| < 1 \quad \text{et} \quad |a-b| < 1.$

2°) Quel est quand b réel varie le lieu de a défini par :

$$|a+2b| = 1 \quad \text{et} \quad |a-b| = 1 ; \quad (\text{module de } a-b = 1).$$

3°) b étant maintenant un nombre complexe donné trouver le lieu de a défini par $|a+2b| \leq 1$ et $|a-b| \leq 1$ quelle région du plan décrit alors b pour que le problème soit possible ?

Dans la suite de ce problème, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ est repéré par sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Tout endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ peut ainsi être caractérisé par la matrice qui le repère dans la base canonique ; les matrices seront donc des matrices carrées, d'ordre 3, à éléments réels ou complexes. Un nombre complexe

.../...

- 2 -

a représentera indifféremment la matrice scalaire $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ou l'endomorphisme qu'elle repère ; donc I désigne indifféremment l'application identique ou la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III - Nous disons qu'une suite M_n de matrices tend vers une matrice limite L et nous écrivons $M_n \rightarrow L$ si et seulement si le terme général de position p, q de la matrice M_n tend vers le terme de même position de la matrice L quand n tend vers l'infini. Les grandes lettres de ce paragraphe représentent des matrices.

1°) Montrer que si $M_n \rightarrow L$ et $M'_n \rightarrow L'$ alors $M_n + M'_n \rightarrow L + L'$.

2°) Montrer que si $M_n \rightarrow L$ et $M'_n \rightarrow L'$ alors $M_n \cdot M'_n \rightarrow L \cdot L'$.

3°) Montrer que si $M_n \rightarrow 0$ alors $I + M_n$ a un déterminant qui tend vers 1.

4°) Montrer que si $A^n \rightarrow 0$ alors la matrice $I - A$ est inversible.

5°) Montrer que si x_n est une suite de complexes telle que $x_n \rightarrow x_0$ alors $x_n \cdot A \rightarrow x_0 \cdot A$.

IV - Soient deux endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{C}^3$ tels que :

$$(\pi) \quad u_1 + u_2 = I, \quad u_1 \circ u_2 = 0, \quad u_1 \neq 0, \quad \text{rg } u_1 \leq \text{rg } u_2,$$

où $\text{rg } u_1$ par exemple désigne le rang de u_1 c'est-à-dire la dimension de $\text{Im } u_1 = u_1(\mathbb{C}^3)$.

1°) a) A-t-on $u_2 = 0$? Montrer que u_2 n'est pas bijectif.

b) Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants.

c) Montrer que $\text{Im } u_1$ et $\text{Im } u_2$ sont supplémentaires.

d) Préciser les rangs de u_1 et u_2 .

2°) Soient deux complexes α_1 et α_2 non simultanément nuls. On considère l'endomorphisme u défini par

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad ; \quad u_1 \text{ et } u_2 \text{ vérifiant toujours les conditions } (\pi).$$

a) Expliciter $(u - \alpha_1) \circ u_1$, $(u - \alpha_2) \circ u_2$.

(m) b) A-t-on $(u - \alpha_1) \circ (u - \alpha_2) = 0$?

3°) v étant un endomorphisme non scalaire de $\mathbb{C}^3$; on aimerait résoudre en α_1, α_2, u_1 et u_2 l'équation définie par $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ où α_1 et α_2 sont deux complexes et u_1 et u_2 deux endomorphismes vérifiant (π) .

a) Caractériser v pour que le problème soit possible et montrer qu'alors il n'admet qu'une solution.

.../...

b) Application. On désigne par A_1 et A_2 les matrices associées à u_1 et u_2 . Résoudre le problème posé en 3°) pour v donné par sa matrice associée dans les quatre cas suivants :

$$\textcircled{1}: F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textcircled{2}: G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textcircled{3}: A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad \textcircled{4}: K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V - Reprenons $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$

1°) Comment choisir a et b pour que $A^n \rightarrow 0$?

2°) Montrer qu'alors la suite de matrices définie pour $1 \leq n$ et entier par

$$B_n = I + A + A^2 + \dots + A^n \text{ converge ; calculer sa limite.}$$

3°) Résoudre en A l'équation $A^3 = I$.

4°) Peut-on avoir $A^3 = A_1$?

VI - Toujours pour $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer $(jK-1)(j^2K-1)$ et $(K-1)(K-j)(K-j^2)$.

On considère les matrices $P(K) = \frac{1}{3} (I+K+K^2)$, $P_2 = P(j^2K)$, $P_3 = P(jK)$ et P_2+P_3 .

1°) Montrer que deux de ces matrices ont déjà été identifiées antérieurement.

2°) Préciser les produits deux à deux des trois matrices A_1, P_2 et P_3 .

a) Soit X l'espace vectoriel engendré par A_1, P_2 et P_3 ; montrer qu'il est multiplicativement stable.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à X ?

c) On pose $M = M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$; décomposer M sur A_1, P_2, P_3 .

3°) Soit $D(a,b,c) = M(a,b,c) \cdot M(a,bj,cj^2) \cdot M(a,bj^2,cj)$, l'expliciter, si possible sans calcul.

4°) Soit $S = M(a,b,c)$ telle que : $a+b+c = j$, $a+bj+cj^2 = j^2$, $a+bj^2+cj = 1$.

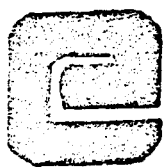
Donner le déterminant de S et montrer que lorsque k parcourt N les matrices S^k forment un ensemble fini dont on précisera le nombre d'éléments.

5°) Même question en prenant maintenant :

$a+b+c = \theta^p$, $a+bj+cj^2 = \theta^q$, $a+bj^2+cj = \theta^r$ où $\theta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ et p, q, r sont trois entiers appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Application. $n = 180$, $p = 30$, $q = 24$ et $r = 12$.

VII - Montrer que l'ensemble $\{M(x+y, -x, -y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous anneau de X isomorphe à $\mathbb{C}$.



ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979
 MATHEMATIQUES - 1ère épreuve
 (Coef. 5)

Mardi 22 Mai 1979 de 8h à 12h

P R E A M B U L E

Les applications de ce problème sont réelles et définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.

I - Page double de résultats.

Les résultats et graphes sont consignés sur la même face d'une double page aux emplacements indiqués par le tableau explicité en fin de texte. En particulier en C - III et V les tableaux de variation et les graphes auront "leurs abscisses" sur les mêmes "verticales". Les légendes T_1 et T_2 ont été sorties grossies du tableau pour pouvoir les lire. Rien ne devra figurer au verso de cette page de résultats. D'une manière impérative on représentera en bleu les graphes Γ_1 , Γ_3 et G et en rouge les autres H , Γ_2 , Γ_4 et $\tilde{G}$.

Tout résultat ou graphe demandé et ne figurant pas à la place indiquée du tableau invalidera l'ensemble de la question qui se verra aussitôt créditée d'un zéro.

II - Rappels : extensions éventuelles de f et notations. f , z sont des applications.

1°) Dans tout le problème on entend par limite d'une fonction, quand la variable tend vers un nombre a , une limite finie.

2°) $f(a+0)$: On désigne par $f(a+0)$ la limite quand elle existe de $f(x)$ quand x tend vers a à droite, donc par valeurs supérieures.

3°) $f(a-0)$: On désigne par $f(a-0)$ la limite quand elle existe de $f(x)$ quand x tend vers a à gauche, donc par valeurs inférieures.

4°) Δx : pour x voisin de a , il sera commode de poser $\Delta x = x - a$.

5°) Dérivée à droite en un point $x = a$. $\frac{\Delta z}{\Delta x}(a+0)$ représente si elle existe, la limite de $\frac{z(x) - z(a)}{x - a}$ quand x tend vers a à droite. (Définition et notation analogues à gauche).

6°) f prolongée en un point a par continuité : Si f non définie en $a \in \mathbb{R}$ possède l'une des propriétés exclusives suivantes :

1. seule existe une des deux limites $f(a+0)$ ou $f(a-0)$,
2. les deux limites existent et sont égales,

alors f est prolongée en a en prenant pour $f(a)$ la limite indiquée en 1. ou 2.

7°) $\tilde{f}$ ou f prolongée par continuité. Si cette extension est faite partout où elle est possible nous dirons que f a été prolongée par continuité. Cette extension est alors désignée par $\tilde{f}$.

8°) Dans A, 2°) la notation Log représente le logarithme népérien.

.../...

PROBLEME

A. 1°) a) Soit l'application définie par $y = f(x) = \frac{x}{x}$. Préciser les graphes G et $\tilde{G}$ de f et $\tilde{f}$.

b) Soit la relation $x.y = x$. Quel est son graphe H ?

c) Représenter G et H dans le même repère.

2°) Soit l'application définie par $f(x) = \sqrt{x} \log x + (x-2) \log |x-2|$. Préciser les domaines de définition de f et $\tilde{f}$.

B. X étant un ensemble non vide nous savons que $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble de ses parties. A toute application $f : X \rightarrow Y$ on associe l'application contre-image $\dot{f}^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui à tout $B \subset Y$ associe l'ensemble $\dot{f}^{-1}(B)$ des x tels que $f(x) \in B$. Si pour tout $y \in Y$ $\dot{f}^{-1}(\{y\})$ est réduite à un point on définit $f^{-1} : Y \rightarrow X$ par $f^{-1}(y) = \dot{f}^{-1}(\{y\})$. Comment appelle-t-on f^{-1} ?

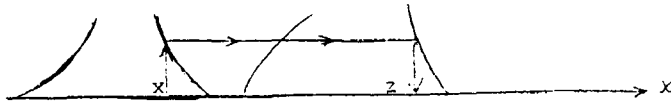
Soit alors $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$. Montrer que f^{-1} existe ; posant alors $f^{-1}(x) = \text{Arc sin } x$ donner les graphes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 de

1) $y = \text{Arc sin } x$, 2) $y = \text{Arc sin } 2x$, 3) $y = \text{Arc sin}(\sin 3x)$,

4) $y = \text{Arc sin}(\cos 3x)$. Bien préciser les domaines de définition de ces fonctions.

On représentera Γ_1 et Γ_2 sur le même repère puis Γ_3 et Γ_4 sur un même nouveau repère.

C.



Dans la suite du problème à toute application f de graphe G on associe l'application $\tilde{f}$ de graphe $\tilde{G}$ où $\tilde{f}$ est l'application $x \mapsto \text{Sup } \dot{f}^{-1}(\{f(x)\})$ prolongée par continuité.

On pose $y = f(x)$ et $z = \tilde{f}(x)$ donc $z = \tilde{f}(x) = \text{Sup } \dot{f}^{-1}(\{f(x)\})$ sous les notations rencontrées. Dans l'étude des exemples suivants, on pourra utiliser les fonctions réciproques de certaines restrictions de f .

I - Quelle est l'application $\tilde{f}$ associée à $f(x) = 2x+1$? Représenter dans les mêmes repères G et $\tilde{G}$.

II - Quelle est l'application $\tilde{f}$ associée à $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$; préciser $\tilde{f}$ en $-1, 0$ et 1 . Représenter dans le même repère G et $\tilde{G}$.

III - Soit l'application $\tilde{f}$ associée à f définie par $f(x) = \frac{-2(x^2+2x+9)}{(x-7)(x+1)}$.

1) Donner les deux éléments de $\dot{f}^{-1}(\{3\})$.

2) Préciser f et $\tilde{f}$ en $x = -1$ et $x = 1$.

3) Calculer : $\varphi(x) = x.z + 2(x+z)$ pour $x \neq z$.

4) Donner dans un même repère les graphes G et $\tilde{G}$.

IV - Soient les graphes C_1, C_2, L_1 et L_2

- du cercle C_1 centré en $(0,4)$ et de rayon 4

- du cercle C_2 centré en $(16,12)$ et de rayon 12

- des fonctions $y = \text{Log}(x+1)$ et $y = \text{Log}(x-4)$

.../...

1°) Déterminer $\tilde{f}(0)$ puis les limites à gauche et à droite de $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x}$ quand le graphe de f restreint à la bande $B = [-4, \infty[\times [0, 4]$ est donné par

a) $B \cap L_1$, b) $B \cap C_1$, c) $B \cap (C_1 \cup L_2)$, d) $B \cap (C_1 \cup C_2)$.

2°) Pour $B \cap (C_1 \cup L_2)$ donner un développement limité de $\tilde{f}(x)$

a) à l'ordre 4 en $x = 0$ par rapport à $\frac{\Delta x}{4} = \frac{x}{4}$.

b) à l'ordre 3 en $x = 2\sqrt{2}$ par rapport à $\Delta x = x - 2\sqrt{2}$.

c) à l'ordre 3 en $x = 4$ par rapport à $h = \sqrt{-\frac{\Delta x}{8}}$ où $\Delta x = x - 4 < 0$.

V - Soit enfin $\tilde{f}$ l'application associée à f définie par :

$$y = f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x-4} + \frac{6}{x-6} + \frac{8}{x-8}$$

1°) Calculer $\tilde{f}(x)$ et sa dérivée $\tilde{f}'(x)$ pour $x = 2$, $x = 4$, $x = 6$ et $x = 8$.

2°) G coupe l'axe des x en trois points d'abscisses α, β et γ ($\alpha < \beta < \gamma$).

(Nous supposons connus les trois nombres α, β, γ et les trois dérivées $f'(\alpha), f'(\beta), f'(\gamma)$). Etablir l'existence et donner les valeurs de $\tilde{f}$ et de sa dérivée à droite pour $x \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Equiper des résultats du 1° et 2° le tableau de $\tilde{f}$ et f (à droite de T_1).

3°) Construire G et $\tilde{G}$ dans deux repères distincts.

Feuille de résultats,
les repères sont orthonormés.

Γ_1, Γ_3, G en bleu

$H, \Gamma_2, \Gamma_4, \tilde{G}$ en rouge.

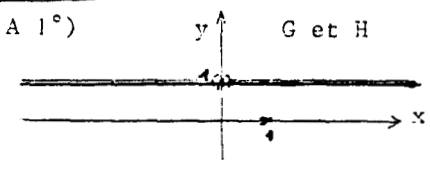
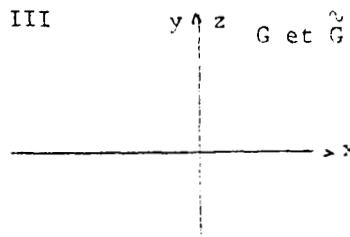
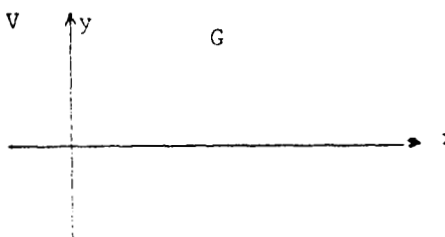
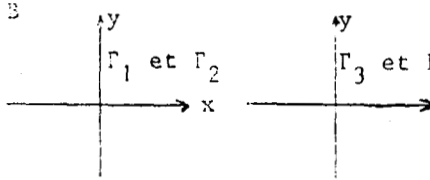
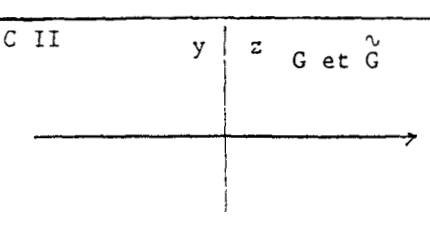
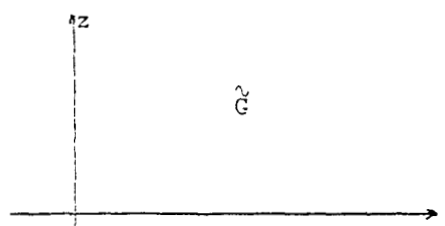
Le tableau ci-dessous doit occuper
toute la surface d'une double page.

T_2

$z = \tilde{f}(0)$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} (0-0)$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} (0+0)$

T_1

x
$y' = f'(x)$
$y = f(x)$
$\frac{\Delta z}{\Delta x} (x-0), z', \frac{\Delta z}{\Delta x} (x+0)$
$\tilde{f}(x-0), z, \tilde{f}(x+0)$

A 1°) 	III 	V 				
B 	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 60%;">$\varphi(x) =$</td> <td style="width: 40%;"></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;">T_1</td> </tr> </table>		$\varphi(x) =$		T_1	
$\varphi(x) =$						
T_1						
C II 	IV 1°) <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%;">T_2</td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> </tr> </table> 2°) a) $\Delta z =$ b) $\Delta z =$ c) $\Delta z =$	T_2				V 
T_2						

FIN

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

MATHÉMATIQUES - 1ère épreuve

(Coef. 5)

(4h)

Dans ce problème les polynômes sont à coefficients complexes. L'ensemble des polynômes en x est donc désigné par $\mathbb{C}[x]$; l'ensemble des polynômes en x^3 est désigné par $\mathbb{C}[x^3]$; plus particulièrement π est le polynôme défini par $\pi(x) = a+bx+cx^2$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ est l'une des trois racines cubiques de 1. Enfin les matrices sont carrées d'ordre 3 à éléments complexes ; toute matrice scalaire de la forme $\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, pour $z \in \mathbb{C}$, est désignée par z .

I - 1°) Que dire d'un polynôme A tel que $A(x) = A(jx)$.

2°) Pour $B \in \mathbb{C}[x]$ on pose $R(x) = B(x) + B(jx) + B(j^2x)$ que dire de R ?

3°) Pour $P \in \mathbb{C}[x]$ on pose $H(x) = P(x).P(jx).P(j^2x)$ que dire de H ?

4°) A tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x]$ on associe le polynôme $\tilde{P}$ défini par l'algorithme suivant :

$$P(x) \mapsto P(y).P(jy).P(j^2y) = S(y^3) \mapsto \tilde{P}(x) = S(x) ;$$

- donc dans P on "change" x en y , jy , j^2y puis on fait le produit des trois polynômes et dans le produit obtenu on change y^3 en x .

Soit φ l'application $P \mapsto \tilde{P}$.

Donner les images par φ de :

a) $x-1$

b) x^2+x+1

c) $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$

où $n \in \{3p, 3p+1, 3p+2\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$

II - Pour α complexe non nul on considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis pour $q \in \mathbb{C}$ on pose $L(q) = \frac{q^2 K^2 + \alpha q K + \alpha^2}{3\alpha^2}$ et $L_1 = L(1)$, $L_2 = L(j^2)$, $L_3 = L(j)$.

....!

1°) Montrer que $q^2x^2 + q\alpha x + \alpha^2 = (qx-j\alpha)(qx-j^2\alpha)$

2°) Calculer $L_1 + L_2 + L_3$ et K^3 ..

3°) Dresser la table de multiplication en L_1, L_2, L_3 donc donner les produits

$$\{L_p \cdot L_{p'}\}_{(p,p') \in \{1,2,3\}^2}$$

4°) Les matrices L_1, L_2 et L_3 sont-elles linéairement indépendantes ?

5°) Peut-on décomposer K et K^2 sur L_1, L_2 et L_3 ? Montrer que ceci permet une autre démonstration du 3°).

6°) Montrer que K admet $\alpha, \alpha j$ et αj^2 comme valeurs propres ; si αq désigne l'une de ces valeurs propres expliciter un vecteur propre associé sous la forme

$\lambda_1 q^2 \vec{e}_1 + \lambda_2 q \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$; calculer λ_1 et λ_2 .

Donner la matrice T de "passage" permettant de passer de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base "propre" trouvée ci-dessus dans la question 5°).

7°) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{14} x^k$; calculer $P(K)$ puis $P(K)P(jK)P(j^2K)$.

8°) Pour $(a,b,c,q) \in \mathbb{C}^4$ et toujours pour $\alpha \neq 0$ on pose :

$$M(q) = \begin{pmatrix} a & cq^2\alpha^3 & bq\alpha^3 \\ bq & a & cq^2\alpha^3 \\ cq^2 & bq & a \end{pmatrix}$$

a) Expliciter, à l'aide du polynôme π , la matrice $M(q)$ sous forme d'un polynôme en K .

b) Montrer que $M(q)$ est diagonalisable. Expliciter ses valeurs propres à l'aide du polynôme π du préambule.

c) Montrer que les matrices $M(1), M(j)$ et $M(j^2)$ ont même déterminant.

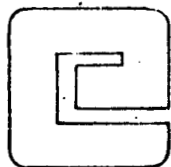
d) Calculer $M(1) \cdot M(j) \cdot M(j^2)$ puis $(M(1))^{-1}$ lorsque $M(1)$ est inversible.

e) Montrer que $T \cdot \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$ pour $(r,s,t) \in \mathbb{C}^3$ est un polynôme F en K que l'on explicitera.

f) Trouver les matrices $M(1)$ admettant 1 comme valeur propre double et 0 comme valeur propre simple.

g) Donner le rang de $M(1), M(j), M(j^2)$. K est-elle combinaison linéaire de ces trois matrices ?

h) Expliciter $1, M(1)$ et $(M(1))^2$ dans la base (L_1, L_2, L_3) et donner le rang de $1, M(1)$ et $(M(1))^2$.



ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION de 1981

MATHÉMATIQUES - 1ère épreuve

(Coef. 5)

Jeudi 7 mai 1981 de 8h à 12h

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en x à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[x]$ la partie de $\mathbb{R}[x]$ formée par l'ensemble des polynômes de degré n au plus ; on pose $\mathbb{R}_3[x] = X$.

Dans tout le problème s désigne une constante réelle donnée.

Enfin, si un polynôme s'introduit sous l'aspect d'une fraction rationnelle, il en est par définition la forme réduite, que l'on obtiendrait après simplification car le numérateur est un multiple du dénominateur.

I - A. A tout polynôme P on associe $\hat{P}$ défini par $\hat{P}(x) = \frac{1}{x-s} \int_s^x P(t) dt$.

1. Montrer que $\hat{P}$ est un polynôme.

2. Soit $\bar{u}$ l'application définie par $\bar{u}(P) = \hat{P}$. Montrer que $\mathbb{R}_0[x] = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_1[x]$, $\mathbb{R}_2[x]$, ..., $\mathbb{R}_n[x]$ sont stables par $\bar{u}$.

3. Montrer que $\bar{u}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[x]$.

B. Soit u la restriction de $\bar{u}$ à X .

1. Montrer que u admet quatre valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3 . On les indexe pour avoir $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$.

2. Expliciter une base (T_0, T_1, T_2, T_3) constituée de vecteurs propres, T_k étant associé à la valeur propre λ_k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Décomposer x^3 sur T_0, T_1, T_2 et T_3 .

C. On pose $L(x) = (x-\lambda_0)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ puis on définit quatre polynômes

$$\text{par } L_0(x) = \frac{4 L(x)}{x-\lambda_0}, L_1(x) = \frac{-48 L(x)}{x-\lambda_1}, L_2(x) = \frac{108 L(x)}{x-\lambda_2} \text{ et } L_3(x) = \frac{-64 L(x)}{x-\lambda_3}$$

1. Calculer $L_0 + L_1 + L_2 + L_3$.

2. Calculer $L_0 + \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{3} L_2 + \frac{1}{4} L_3$.

3. Si, dans un polynôme en x nous remplaçons l'indéterminée x par u et le produit par la composée d'endomorphismes, nous obtenons un polynôme en u . Par exemple $2x^3 - 4x^2 + 1$ donnerait $2.u^3 - 4u^2 + I_d$; ici u^2 est l'application $u \circ u$ et I_d l'application identité.

On pose : $l = L(u)$, $l_0 = L_0(u)$, $l_1 = L_1(u)$, $l_2 = L_2(u)$ et $l_3 = L_3(u)$.

a) Déterminer l .

b) Calculer, pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, les endomorphismes $l_k^2 - l_k$.

c) Expliciter les espaces images $l_0(X)$, $l_1(X)$, $l_2(X)$ et $l_3(X)$.

II - A. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ on associe le polynôme $\hat{P}$ défini par :

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{(x-s)^2} \cdot \int_s^x \left(\int_s^y P(t) dt \right) dy.$$

et on pose $\bar{v}(P) = \hat{P}$.

1. Calculer $\bar{v}(H)$ où $H(x) = x+1$.

2. Montrer que $\bar{v}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

B. Soit v la restriction de $\bar{v}$ à X .

1. Montrer que v est un isomorphisme de X .

2. Expliciter v sous la forme d'un polynôme en u .

3. Montrer que v est un polynôme en u^2 .

4. L'endomorphisme $v \circ u^2$ est-il injectif ?

C. On considère six nombres réels et distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et s ; s est toujours le nombre introduit dans le préambule.

On pose $A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$.

Pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ on définit $A_p(x)$ par $A_p(x) = \frac{A(x)}{(x-\alpha_p) A'(\alpha_p)}$.

Enfin pour $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ on définit g_p par $g_p(P) = \tilde{P}(\alpha_p)$.

1. Pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, calculer $A_p(\alpha_q)$.

2. Montrer que les applications g_i sont des formes linéaires ; quel est le rang de la famille $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$?

3. Comment déterminer quatre polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 qui, pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, vérifient :

$$g_p(B_p) = 1 \text{ et, pour } p \neq q, g_p(B_q) = 0 ?$$

4. Pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ on pose $B_p = b_{p,0} T_0 + b_{p,1} T_1 + b_{p,2} T_2 + b_{p,3} T_3$.

Expliciter les coefficients $b_{p,k}$ à l'aide des valeurs prises par A_p ou ses dérivées en $x = s$.

D. Les combinaisons linéaires en g_1, g_2, g_3 et g_4 demandées dans ce paragraphe ont des coefficients qui s'expriment simplement en fonction des valeurs prises par $A_k(x)$ ou $A'_k(x)$ en des points appartenant à $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Seules seront retenues les réponses qui se présenteront sous cet aspect.

1. Expliciter g_5 comme combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 et g_4 .

2. On définit f par $f(P) = \tilde{P}'(\alpha_5)$ expliciter f comme combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 et g_4 . ($\tilde{P}'$ est la dérivée de $\tilde{P}$).

3. Posant $f_i(P) = \hat{P}(\alpha_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, expliciter f_i comme combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 et g_4 .

III - Application On prend $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, s) = (1, -1, 2, -2, 3, 0)$.

1. Expliciter les quatre polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 sur la base canonique x^3, x^2, x et 1 .

2. Donner les coefficients de la décomposition de g_5 sur g_1, g_2, g_3 et g_4 .

3. Donner les coefficients de la décomposition de f sur g_1, g_2, g_3 et g_4 .

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION de 1982

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale (4 h)

- (A) Interprétation - Soient a et b deux constantes réelles telles que $a < b$ et soit f une fonction continue. Préciser la surface ayant pour aire algébrique :

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] .$$

- (B) Problème - A toute fonction continue $u(x)$ on associe au-delà d'un certain rang n_0 , précisé par le texte, les séries de termes généraux

$$\bar{u}_n = \int_n^{n+1} u(x) dx - u(n)$$

$$\tilde{u}_n = \int_n^{n+1} u(x) dx - \frac{1}{2} (u(n) + u(n+1))$$

Dans ce problème plusieurs fonctions $u(x)$ interviendront et pour chacune des deux séries associées $\bar{u}_n$ et $\tilde{u}_n$ on devra préciser :

- ① soit sa divergence,
- ② soit sa convergence et alors on sera tenu de donner une majorante de sa somme.

Le logarithme utilisé est le logarithme népérien.

I - Développer le problème proposé avec $n_0 = 1$ pour $u(x) = \text{Log}(x)$.

On écrira $\bar{u}_n = \text{Log}_n$ et $\tilde{u}_n = \tilde{\text{Log}}_n$

II- On pose maintenant $u(x) = \text{Log}(\text{Log}(x))$, $v(x) = u'(x)$ et $w(x) = u''(x)$

- ① Construire les graphes de $u(x)$, $\frac{1}{x \text{Log}(x)}$ et $\left(\frac{1}{x \text{Log}(x)}\right)'$
- ② Développer le problème proposé dans le préambule du B avec $n_0 = 3$ pour :
 - a) $\bar{w}_n$ et $\tilde{w}_n$.
 - b) $\bar{v}_n$ et $\tilde{v}_n$.
 - c) $\bar{u}_n$ et $\tilde{u}_n$.

CONCOURS D'ADMISSION de 1983

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Samedi 7 mai de 8h à 12h

A tout $n \in \mathbb{N}^*$ on associe la suite $\Gamma_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$\Gamma_n = C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^p, \dots$$

définie pour $p \leq n$ par $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et pour $n < p$ par $C_n^p = 0$.

(On pose $0! = 1$). Puis à toute suite Γ_n on associe les trois nombres α_n , β_n

et γ_n définis par :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k}, \beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k+1} \text{ et } \gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^{3k+2}.$$

I - 1. En utilisant l'application $x \mapsto E(x) = \sup(\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$ trouver les entiers minimum $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$ et $\tilde{\gamma}_n$ tels que :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\alpha}_n} C_n^{3k}, \beta_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\beta}_n} C_n^{3k+1} \text{ et } \gamma_n = \sum_{k=0}^{\tilde{\gamma}_n} C_n^{3k+2}.$$

2. On pose $a_n = 3\alpha_n - 2^n$, $b_n = 3\beta_n - 2^n$ et $c_n = 3\gamma_n - 2^n$.

Donner sous forme d'un tableau où figurent uniquement des éléments de $\mathbb{N}$ la matrice m , de terme général $m_{n,k}$, de type $[8 \times 15]$, où n indice

de ligne varie de 1 à 8 et k indice de colonne varie de 1 à 15, défini par :

$$n \leq 8 \text{ et } k \leq 8 \mapsto m_{n,k} = C_n^k \text{ sinon}$$

$$m_{n,9} = 2^n, m_{n,10} = \alpha_n, m_{n,11} = \beta_n, m_{n,12} = \gamma_n,$$

$$m_{n,13} = \alpha_n, m_{n,14} = \beta_n, m_{n,15} = \gamma_n.$$

3. En admettant provisoirement que les suites a , b et c sont périodiques, préciser les périodes et prévoir les valeurs de a_{34} , b_{36} et γ_{42} .

4. Les suites a , b et c sont-elles linéairement indépendantes ?

5. Les suites α , β et γ sont-elles linéairement indépendantes ?

6. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

a) Pour $0 \leq n$ expliciter 2^n d'une part et $(1+j)^n$ d'autre part comme combinaisons linéaires de α_n , β_n et γ_n ; les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des nombres complexes indépendants de n .

b) Montrer que les suites $n \mapsto 2^n$ et $n \mapsto (1+j)^n$ vérifient une relation de récurrence linéaire de la forme

$$u_{n+3} = p u_{n+2} + q u_{n+1} + r u_n,$$

où $0 \leq n$ et p, q, r sont trois constantes réelles indépendantes de n ; préciser ces constantes.

c) α , β et γ vérifient-elles la même relation ?

d) Expliciter α_n , β_n et γ_n (chacun des nombres α_n , β_n et γ_n sera exprimé sous forme d'une somme de deux nombres réels).

.../...

II - On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } M^0 = I.$$

1) Montrer que M^4 appartient à l'espace vectoriel engendré par M^3 , M^2 et M .

2) Soient α' , β' et γ' trois suites définies par

$$\begin{pmatrix} \alpha'_n \\ \beta'_n \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \beta'_0 \\ \gamma'_0 \end{pmatrix} \quad \text{où } (\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ est donné et } 0 \leq n.$$

Montrer que ces suites vérifient une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$u'_{n+3} = p' u'_{n+2} + q' u'_{n+1} + r' u'_n \quad \text{où}$$

$0 \leq n$ et $(p', q', r') \in \mathbb{R}^3$ est indépendant de n . Expliciter (p', q', r') .

3) Expliciter la matrice H^{-1} inverse de la matrice H .

4) Déterminer $(p'', q'', r'') \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$MH \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix}.$$

5) Expliciter la matrice P carrée d'ordre 3 telle que pour $0 \leq n$ on ait :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6) Expliciter pour $0 \leq n$ la matrice P^n et pour

$0 \leq n-3$, les matrices, $P^{n-3}H$ et $P^{n-3}H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 14 mai de 14h à 18h

Dans ce problème a et b sont deux nombres réels ($a < b$). $\mathcal{C}$ est l'ensemble des applications indéfiniment dérivables définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Id est l'application identique définie sur $\mathcal{C}$.

δ est l'endomorphisme de dérivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe son application dérivée ; donc pour tout $f \in \mathcal{C}$ on a $\delta(f) = f'$. u est l'endomorphisme de primitivation qui à tout élément de $\mathcal{C}$ associe sa primitive qui s'annule en a ; donc pour $f \in \mathcal{C}$ et $x \in [a, b]$ on a $u(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$.

On pose $\delta^0 = u^0 = \text{Id}$, et pour $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ on définit δ^k et u^k par : $\delta^k = \delta \circ \delta^{k-1}$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$.

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le monôme de degré maximum a pour coefficient 1.

Enfin pour $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$ on désigne par $(f|g)$ le nombre défini par :

$$(f|g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt ; \text{ donc } (f|g) = u(f \cdot g)(b).$$

Si $(f|g) = 0$ nous dirons que f et g sont orthogonaux ou que f s'orthogonalise à g .

1 - Montrer que si P est un polynôme il en est de même de $u^k(P)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Si P est de degré p quel est le degré de $u^k(P)$. Montrer que $(x-a)^k$ divise $u^k(P)(x)$.

- 2 -

2 - Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, h définie par $h(x) = (b-x)^p$ quelles sont les racines de $\delta^k(h)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3 - a) Préciser $\delta \circ u$.

b) Soit $\tau = u \circ \delta - \delta \circ u$. Quel est le rang de τ . Préciser les éléments de son noyau.

Soient f_1 et f_2 définis par $f_1(x) = \sin(x-a)$ et $f_2(x) = \cos(x-a)$ donner $\tau(f_1)$, $\tau(f_2)$ et $\tau^2(f_2) = \tau \circ \tau(f_2)$.

4 - A tout $(f, g) \in \mathcal{C}^2$ et $p \in \mathbb{N}$ on associe l'application φ définie par :

$$\varphi = \sum_{k=0}^p (-1)^k \cdot \delta^k(f) \cdot u^{k+1}(g).$$

a) Montrer que $\delta(\varphi)$ est réduit à une somme de deux termes.

b) Exprimer $u[f \cdot g - (-1)^{p+1} \delta^{p+1}(f) \cdot u^{p+1}(g)]$

1) quand f est quelconque de $\mathcal{C}$,

2) quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p ,

3) quand $f = h$.

5 - Calculer $\varphi(a)$. $\square$

6 - Pour $f = h$ montrer que $\varphi(h)$ est réduit à un terme.

7 - Supposons que g s'orthogonalise à tout polynôme de degré p inférieur à n ; donc $p < n$.

a) Que vaut alors l'image de b par $u^{p+1}(g)$?

b) On suppose en outre que g est un polynôme unitaire de degré n

1) Préciser alors les racines de $u^n(g)$ avec leur ordre de multiplicité.

2) Combien y a-t-il de racines de g appartenant à $[a, b]$?

II - 1) Soit $K(x) = (x-a)(x-b) = (x-s)^2 - \ell^2$. Préciser les constantes s et ℓ^2 .

2) Soit $M(x) = (x-a)^n (x-b)^n = (K(x))^n$ et $S = \delta^n(M)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $(x-a)(x-b)M'(x) - n(2x-a-b)M(x)$

b) Calculer $(x-a)(x-b)S''(x) + (2x-a-b)S'(x)$

III - Dans la suite on désigne par v l'application qui à tout $f \in \mathcal{C}$ associe l'application $v(f)$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$v(f)(x) = (x-a)(x-b)f''(x) + (2x-a-b)f'(x).$$

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel non nul.

① Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

② En donner des valeurs propres.

③ Montrer que les polynômes 1 et $x - 3(x-s)^2 - \ell^2$ en sont deux vecteurs propres ; en donner les valeurs propres.

④ Montrer qu'existe un polynôme unitaire, vecteur propre de v admettant 12 comme valeur propre. Préciser ce polynôme.

⑤ Soient deux polynômes unitaires de même degré n , vecteurs propres de v . Quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent.

⑥ On suppose maintenant qu'existent :

1) λ non entier ($\lambda \notin \mathbb{Z}$) valeur propre de v de vecteur propre $G \in \mathcal{C}$.

2) $x_0 \in [a, b]$ tel que $G(x_0) = 2\lambda \neq 0$; on prendra $0 < \lambda$.

et on pose $Q(x) = q(x-\alpha)(\beta-x)+1$ avec $0 < q$ et $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

a) Montrer que G s'orthogonalise à tout polynôme.

b) Montrer que l'on peut choisir q pour que $0 \leq Q(a)$ et $0 \leq Q(b)$

c) Montrer que l'on peut choisir $\alpha < \beta$ tels que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ on ait $\lambda < G(x)$. Quelle est alors la valeur minimum prise par

$$Q(x) \text{ sur l'intervalle } \left[\frac{3\alpha+\beta}{4}, \frac{\alpha+3\beta}{4} \right] \subset [\alpha, \beta].$$

d) Quelle est la limite de la suite de terme général $\int_a^b |G(x)|^n G(x) dx$

lorsque n vérifie les propriétés énoncées en b) et c) ?

e) Montrer que l'hypothèse du paragraphe 6.1) ci-dessus conduit à une contradiction et conclure.

⑦ Montrer qu'existent $n+1$ polynômes $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ de degrés inférieurs ou égaux à n , vecteurs propres de v de valeurs propres distinctes vérifiant $(\Lambda_k | \Lambda_k) = 1$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

On pourra choisir Λ_k de degré k et tel que son terme en x^k ait un coefficient positif.

b) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ une suite croissante de $n+1$ nombres distincts. Montrer qu'existent et d'une manière unique $n+1$ constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que la fonction

$$\psi = f - \sum_{k=0}^n \alpha_k \Lambda_k \text{ admette parmi ses racines les nombres } x_0, x_1, x_2, \dots, x_n. \text{ On pose } B = \sum_{k=0}^n \alpha_k \Lambda_k.$$

c) Comparer les polynômes T et U de degrés inférieurs ou égaux à n qui rendent $(T-f|T-f)$ et $(U-\psi|U-\psi)$ minimum.

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 13 Mai de 14h à 18h

Dans ce problème on désigne par T l'ensemble des suites $t : \mathbb{N}^* \rightarrow \{0,1,2\}$, donc des suites de terme général $t_n \in \{0,1,2\}$ pour $n = 1,2,3,4,\dots$ et par D l'ensemble des suites de $\mathbb{N}^* \rightarrow \{0,1\}$, donc des suites de terme général $d_n \in \{0,1\}$ pour $n = 1,2,3,4,\dots$. Soient σ et σ' les applications numériques définies sur T et D par

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{3^k} \quad \text{et} \quad \sigma'(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{2^k}$$

Sous des notations usuelles :

$\text{Im } t \subset \{0,1,2\}$ représente l'ensemble des images par t donc les t_n ,
 $t^{-1}(\{1\})$ représente l'ensemble des entiers d'image 1 par t ,
 $\text{Inf } t^{-1}(\{1\})$ représente le premier entier n_0 tel que $t_{n_0} = 1$.

Soit v l'application $v : T \rightarrow D$ qui à $t \in T$ associe $d \in D$ de la manière suivante :

- 1) Si $1 \notin \text{Im } t$, alors si $t_n = 0$ on pose $d_n = 0$ et si $t_n = 2$ on pose $d_n = 1$.
- 2) Sinon soit $n_0 = \text{Inf } t^{-1}(\{1\})$,
pour $p < n_0$, d_p est défini comme ci-dessus,
pour $p = n_0$ on pose $d_{n_0} = 1$,
pour $n_0 < p$ on pose $d_p = 0$.

I. Soient enfin t et t' deux suites de T . S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on ait $t_{n_0} < t'_{n_0}$ alors que pour $p < n_0$ on a $t_p = t'_p$ on dit que t est inférieur à t' et on note $t < t'$.

- 1) Montrer que pour $t \neq t'$ la relation " $t < t'$ ou $t' < t$ " est vraie, ($t \leq t'$ est définie par $t < t'$ ou $t = t'$).

2) Montrer que si on a $t < t'$, alors on a $\sigma(t) < \sigma(t')$.

3) Soit n_0 introduit ci-dessus dans la définition $t < t'$, montrer que $t_{n_0} = 0$ et $t'_{n_0} = 2$ impliquent $\sigma(t) < \sigma(t')$.

4) On suppose maintenant $t < t'$ avec $t_{n_0} + 1 = t'_{n_0}$ peut-on avoir $\sigma(t) = \sigma(t')$?

II. A $x \in [0,1[$ on associe deux suites $t : T$ et r de la manière suivante : on pose $r_1 = x$, sinon les termes généraux t_n et r_n de ces suites sont définis par récurrence par $r_n = \frac{1}{3^n} t_n + r_{n+1}$ et $0 \leq r_{n+1} < \frac{1}{3^n}$. On pose $u(x) = t$.

1) Montrer que l'application u est définie sur $[0,1[$.

2) u est-elle injective ?

3) u est-elle surjective ?

4) Que dire des applications $\sigma \circ u$ et $u \circ \sigma$?

5) $t' \in T$ étant donnée, résoudre en $t \in T$ l'équation $(u \circ \sigma)(t) = t'$.

6) Montrer que l'application $w = \sigma' \circ v \circ u$ est croissante.

7) Expliciter $w^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, $w^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$, $w^{-1}(\{\frac{7}{8}\})$.

III. Dans cette partie du problème il sera toujours préférable de remplacer une explication confuse par un dessin clair.

Soit f une fonction affine définie sur $[a,b]$ où $a < b$. Il existe donc deux constantes p et q telles que pour tout $x \in [a,b]$ on ait $f(x) = px + q$.

1) Montrer que si l'on connaît les images a' et b' de a et b par f alors on peut déterminer p et q , donc f est connue.

2) On pose $b - a = \ell$, $a_0 = a$, $a_1 = a + \frac{\ell}{3}$, $a_2 = a + \frac{2\ell}{3}$, $a_3 = b$ et on définit l'application continue g affine sur $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$ et $[a_2,b]$,

donc "affine par morceaux" par $g(a) = f(a)$, $g(a_1) = g(a_2) = f(\frac{a+b}{2})$, $g(b) = f(b)$.

Montrer que la représentation graphique de g est une ligne polygonale de trois côtés. On appelle palier horizontal ou palier celui pour lequel $g'(x) = 0$ on appelle obliques les deux autres côtés. Donner les longueurs du palier et celles de chaque oblique.

IV. On pose $\tau(f) = g$ et on se propose d'étendre τ aux fonctions affines par morceaux. On appelle application caractéristique toute application définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble image a au plus deux éléments 0 et 1. Si h est une telle fonction et si $A = h^{-1}(\{1\})$ est l'ensemble des éléments dont l'image par h vaut 1 on note χ_A cette application h .

Soit une suite finie $a_0 = a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n = b$ strictement croissante (donc pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ on a $a_k < a_{k+1}$). On pose

$\Delta = [a, b] - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ et on considère l'application k restriction

à Δ de $\sum_{k=0}^{n-1} p_k \chi_{[a_k, a_{k+1}]}$ où pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ on a $p_k \neq p_{k+1}$.

1) Montrer qu'existe une seule fonction g continue affine par morceaux dont on connaît l'image y_0 en un point $x_0 \in [a, b]$ et dont la dérivée g' sur Δ est k .

2) Soit $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ les fonctions affines restriction de g à $[a, a_1], [a_1, a_2] \dots [a_{n-1}, b]$, et $\tau(g_0), \tau(g_1), \tau(g_2), \dots, \tau(g_{n-1})$ leurs images par τ (cf III 2) on définit $\tau(g)$ par ses restrictions :

$$\tau(g_0), \tau(g_1), \dots, \tau(g_{n-1}).$$

a) Montrer que $\tau(g)$ a pour représentation graphique une ligne polygonale ; en donner le nombre de paliers et le nombre d'obliques.

b) Soit k la fonction périodique de période 2 définie sur $\mathbb{R}$ et dont la restriction à $[-1, 1]$ est définie par $k(x) = |x|$. On désigne par k_1 et k_2 les restrictions de k à $[0, 2]$ et $[0, \frac{3}{2}]$. Construire $\tau(k_1)$ et $\tau(k_2)$. Montrer que $\tau(k_2)$ n'est pas la restriction à $[0, \frac{3}{2}]$ de $\tau(k_1)$.

V. Dans la suite f est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$, on pose $f_1 = \tau(f), f_2 = \tau(f_1), \dots, f_n = \tau(f_{n-1})$.

1) Montrer que la représentation graphique de f_n est une ligne polygonale T_n .

2) Quelle est la somme k_n des longueurs de paliers de T_n ?

3) Quelle est la somme θ_n des longueurs des obliques de T_n ?

4) Quelle est la longueur $\ell_n = k_n + \theta_n$ de T_n ?

5) Calculer $\int_0^1 f_n'(x) dx$.

6) Donner les limites des suites k_n, θ_n et ℓ_n .

VI. On appelle suite stationnaire toute suite constante à partir d'un certain rang. Pour $x_0 \in [0, 1]$ on considère la suite numérique de terme général $f_n(x_0)$ et on désigne par $S \subset [0, 1]$ l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ pour lesquels cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

1) Préciser S .

2) Montrer que pour $x_0 \in [0, 1] - S$ la suite $f_n(x_0)$ est telle que pour tout n on a $f_n(x_0) \neq f_{n+1}(x_0)$ et montrer que cette suite converge.

VII. Pour $x \in [0, 1]$ on définit ψ par $\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$; $\psi'_d(x)$ et $\psi'_g(x)$

désignent, quand elles existent, les dérivées à droite et à gauche de ψ en x pour $x \in [0, 1[$ ou $x \in]0, 1]$. (Rappelons que pour $x_0 \in [0, 1[$ par

exemple $\psi'_d(x_0)$ et si elle existe la limite de $\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}$ quand x

tend vers x_0 par valeurs supérieures).

1) Etudier l'application $w = \psi$.

2) Montrer que ψ est continue.

3) Montrer que ψ est intégrable et calculer $\int_0^1 \psi(x) dx$.

4) ψ'_d est-elle définie en tout point de $[0, 1[$?

5) ψ'_g est-elle définie en tout point de $]0, 1]$?

6) Préciser la partie P de $[0, 1[$ où ψ'_d n'est pas définie.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 12 Mai 1986 de 14 H à 18 H

Les parties II et III largement indépendantes de I peuvent être abordées en admettant, au besoin, des résultats fournis par l'énoncé.

On désigne par : $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs,
 $\tan$ la fonction tangente,
 $\ln$ la fonction logarithme népérien.

Question préliminaire

- ① $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer, en posant $t = \frac{1}{x} \tan u$, $I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$
- ② a) $x \in]0, 1[$. Calculer, en posant $v = \cos u$, $I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$

b) En déduire que, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$I_2(x) \sim -\ln x$$

Ces deux intégrales interviennent dans les questions qui suivent.

I - Etude de l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$$

- ① a) Calculer $f(1)$.
- b) Montrer que $f(x) + f(\frac{1}{x})$ est indépendant de x élément de $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa valeur (on pourra poser $u = \frac{\pi}{2} - v$ dans l'intégrale donnant $f(\frac{1}{x})$).

- ② Détermination de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a) Montrer que, pour $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$: $u \leq \frac{\pi}{2} \sin u$.

b) En déduire une majoration de $f(x)$ pour $x < 1$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- ③ Dérivabilité de f

a) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \, du}{x \cos^2 u + \sin^2 u}$
 x désignant un réel strictement positif, h un réel tel que $0 < |h| < \frac{x}{2}$,
on pose $A = x \cos^2 u + \sin^2 u$ $B = h \cos^2 u$.

Utiliser la relation $\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} + \frac{B^2}{A^3(A+B)}$ pour démontrer que :

$$\left| \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^2 u \, du}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \right| \leq |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^4 u \, du}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(x^2 \cos^2 u - \sin^2 u)}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} du$

c) Quelle est la dérivée de la fonction ψ telle que $\psi(u) = \frac{\sin u \cos u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$?

En déduire $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(u) \, du$.

d) Calculer $f'(1)$, puis $f'(x)$ pour $x \neq 1$ en utilisant une primitive de ψ . f' est-elle continue en 1 ?

- ④ Autre expression de f

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$ (on considérera $\int_y^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$ avec $0 < y < x$).

b) Dresser le tableau de variation et construire la courbe représentative de f .

- 3 -

II - Démonstration de la formule : $\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$ (2)

① Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

a) Montrer l'existence d'une fonction g unique continue sur $[0,1]$ telle que $\forall t \in]0,1[$ $g(t) = \frac{t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}}{t^2-1}$ (donner $g(0)$ et $g(1)$).

b) Démontrer, en utilisant l'expression de f obtenue au I-④-a que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(1) = - \sum_{p=0}^n \int_0^1 t^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} dt + \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt$$

c) Calculer $\int_0^1 t^{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} dt$, p désignant un entier naturel.

d) Dédire de II-①-a l'existence d'une constante K telle que :

$$0 \leq \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt \leq \frac{K}{2n+2}$$

e) En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donner la valeur de sa somme.

② a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge et calculer sa somme.

b) En déduire la formule (2) (on pourra considérer $\frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$)

③ Détermination d'une valeur approchée de π^2

Soit pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ $h(x) = \frac{2}{x(x+1)(2x+1)^2}$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ $s_p = \sum_{n=1}^p \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$

et $r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$

a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\int_{p+1}^{+\infty} h(x) dx \leq r_p \leq \int_p^{+\infty} h(x) dx$, puis en

encadrant $h(x)$ que : $\frac{1}{6(p+2)^3} \leq r_p \leq \frac{1}{6p^3}$

- 4 -

b) Calculer une valeur approchée de s_6 à 10^{-4} près. En déduire une valeur approchée de π^2 à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

c) Donner l'ordre de grandeur de la valeur de p à utiliser pour obtenir par la méthode précédente une valeur approchée de π^2 à 10^{-6} près.

III - Accélération de la convergence

Les candidats qui le désirent peuvent aborder directement la question III-④ qui rappelle les résultats théoriques obtenus aux questions III-①, ② et ③.

① Démontrer que :

$$\forall (n,q) \in \mathbb{N}^2 \quad \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=0}^q \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} + \frac{2^{q+1} (q+1)!}{(2n+1)^2 (2n+3)(2n+5)\dots(2n+2q+3)}$$

(on pourra procéder par récurrence).

② Calcul de $v_k = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)}$ ($k, p \in \mathbb{N}^2$)

a) En remarquant que :

$$\frac{2(k+1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2k+3)}$$

simplifier, pour $N \geq p$: $\sum_{n=p}^N \frac{1}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+3)}$

b) En déduire l'existence et la valeur de v_k .

③ Application à la détermination d'une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$

a) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, démontrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + R_q$$

$$\text{avec } R_q = 2^{q+1}(q+1)! \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2q+3)}$$

b) En majorant, pour $n \geq p$, $\frac{1}{(2n+1)^2}$ par $\frac{1}{(2p+1)(2n+1)}$ démontrer que :

$$0 \leq R_q \leq 2 W_q \quad \text{avec } W_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q.$$

c) En déduire que : $\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + W_q$ est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

④ Détermination d'une valeur approchée de π^2 à 10^{-5} près

a) Imaginer un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de π^2 à 10^{-5} près, par la méthode précédente, ainsi que le plus petit entier q nécessaire à cette obtention, p étant considéré comme paramètre.

On rappelle à cet effet que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k=0}^q v_k + W_q \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_k = \frac{2^{k-1} k!}{k+1} \cdot \frac{1}{(2p+1)(2p+3)\dots(2p+2k+1)} \\ W_q = \frac{q+1}{2p+1} v_q \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{8}$ à W_q près.

b) Utiliser cet algorithme dans les trois cas suivants $p = 5$; $p = 10$; $p = 15$. On donnera dans chaque cas la valeur approchée de π^2 obtenue (avec toutes les décimales fournies par la machine) et la valeur de q ayant servi à l'obtenir.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option générale

Lundi 18 Mai 1987 de 14 H à 18 H

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de $\ln 2$ par des nombres rationnels, ce qui fait l'objet de la partie III. A cet effet, on établit dans les parties I et II une formule interpolatoire pour le calcul d'une intégrale.

Notations :

1 - Pour toute fonction numérique f de classe C^k sur un intervalle J , on note $f^{(0)} = f$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, $f^{(i)}$ la dérivée $i^{\text{ème}}$ de f .

2 - Pour tout entier naturel n , E_n désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On munit E_n du produit scalaire : $(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, et de la norme euclidienne associée : $P \longmapsto \|P\| = \sqrt{\int_0^1 P^2(t)dt}$.

Enfin, on confond dans la suite polynôme et fonction polynôme associée.

3 - On définit les trois suites de polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad U_n(x) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(x) = U_n^{(n)}(x)$$

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n(x) = \int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x} dt.$$

I - ETUDE DES POLYNÔMES P_n et Q_n :

1 - a) Expliciter P_0 , P_1 , P_2 .

b) Montrer que P_n est un polynôme de degré n et préciser le coefficient de x^n dans P_n .

c) Comparer $U_{n-1}(x)$ à $U_n(x)$ puis $P_{n-1}(1-x)$ à $P_n(x)$.

- 2 -

2 - Relation de récurrence entre les polynômes P_n :

a) Vérifier que :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U'_{n+1}(x) = (2x-1) U_n(x)$$

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U''_{n+1}(x) = 2(2n+1) U_n(x) + U_{n-1}(x)$$

b) En dérivant n fois (1) et $(n-1)$ fois (2), démontrer que :

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

3 - Orthogonalité des polynômes P_n :

a) Pour $n \geq 1$, calculer $U_n^{(k)}(1)$ et $U_n^{(k)}(0)$ si $0 \leq k \leq n-1$.

b) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties successives que, si f est une fonction numérique de classe C^n sur $[0,1]$:

$$(4) \quad \int_0^1 f(t)P_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t) U_n(t)dt$$

En déduire que, si $n \geq 1$, pour tout polynôme Q appartenant à E_{n-1} :

$$(5) \quad \int_0^1 Q(t) P_n(t)dt = 0$$

c) Prouver enfin que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E_n .

4 - Calcul de la norme du polynôme P_n :

a) On pose : $I_n = \int_0^1 U_n(t)dt$.

Utiliser (2) pour obtenir, pour $n \geq 1$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} . En déduire la valeur de I_n .

b) Calculer $\|P_n\|$ en utilisant (4).

5 - Etude des racines de P_n :

On suppose que $n \geq 1$, et l'on se propose de démontrer que P_n admet n racines distinctes appartenant à $]0,1[$.

Tournez la page S. V. P.

a) Que vaut $\int_0^1 P_n(t)dt$? P_n peut-il conserver un signe constant sur $[0,1]$?

En déduire que P_n admet au moins une racine d'ordre impair appartenant à $]0,1[$.

b) Soient $x_1, x_2, \dots, x_k$ les racines d'ordre impair de P_n appartenant à $]0,1[$.

Montrer que $\int_0^1 \prod_{i=1}^k (t-x_i) P_n(t)dt$ est non nulle et, à l'aide de la formule (5), prouver que $k = n$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les racines du polynôme P_n rangées dans l'ordre croissant.

6 - Minoration de P_n :

a) Comparer x_i et x_{n+1-i} pour $1 \leq i \leq n$ (utiliser le résultat obtenu au 1-1-c).

En déduire que : $P_n^2(x) = \left(\binom{n}{2n}\right)^2 \prod_{i=1}^n [x(x-1) + x_i(1-x_i)]$.

b) Que vaut $\sup_{0 \leq x \leq 1} x(1-x)$? En déduire, par une majoration simple de

$|I_n|$, que : $\binom{n}{2n} \geq \frac{4^n}{2n+1}$

c- Prouver que : $\forall x \geq 1 \quad P_n(x) \geq \frac{[4\sqrt{x(x-1)}]^n}{2n+1}$

7; Etude de la suite (Q_n) :

a) Expliciter Q_0, Q_1, Q_2 et montrer que, pour tout entier n , Q_n est un polynôme à coefficients rationnels dont on donnera le degré.

b) Démontrer, en utilisant (3), que :

$$(6) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)Q_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) = 0$$

II - CALCUL DE L'INTEGRALE D'UN POLYNOME PAR INTERPOLATION :

Dans cette partie, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Détermination d'une formule interpolatoire :

Pour tout entier i tel que : $1 \leq i \leq n$, on appelle L_i le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

a) Pour $1 \leq j \leq n$, calculer $L_i(x_j)$.

En déduire que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de E_{n-1} .

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P de E_{n-1} dans cette base ?

b) Prouver l'existence d'une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de réels tels que :

$$(7) \quad \forall P \in E_{n-1} \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$$

c) Etablir que :

$$\forall x \neq x_i \quad L_i(x) = \frac{1}{P_n'(x_i)} \cdot \frac{P_n(x)}{x - x_i}$$

d) En déduire que :

$$(8) \quad \lambda_i = \frac{Q_n(x_i)}{P_n'(x_i)}$$

2) Extension de la formule interpolatoire :

a) Soit P appartenant à E_{2n-1} , R le reste de sa division euclidienne

par P_n , montrer que : $\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 R(t)dt$

b) En déduire que la relation (7) reste valable si P appartient à E_{2n-1} .

Tournez la page S. V. P.

— 5 —

3) Applications de cette formule :

a) Si $0 \leq k \leq 2n-1$, que vaut $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k$?

b) En remarquant que $P_n^2(x) - (C_{2n}^n)^2 x^{2n}$ appartient à E_{2n-1} ,

calculer $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2n}$.

c) Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lambda_i = \int_0^1 L_i^2(t) dt$. En déduire que :
 $\lambda_i > 0$.

III - APPLICATION A LA DETERMINATION DE VALEURS APPROCHEES DE $\ln 2$:

On se propose, dans cette partie, de démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie

par : $\forall n \geq 1 \quad u_n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2-x_i}$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ ont été définis précédemment, converge

vers $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dt}{2-t}$ et d'étudier la vitesse de convergence.

1) Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

a) En remarquant que : $\frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^k}{2^{k+1}} + \frac{x^{2n}}{4^n(2-x)}$

démontrer que : $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k2^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^{2n}}{4^n(2-x_i)}$

et que : $\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{4^n} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2-t} dt$

b) En déduire que : $\forall n \geq 1 \quad |\ln 2 - u_n| \leq \frac{2}{(2n+1)4^n}$

Conclure.

— 6 —

2) Autre expression de u_n :

Montrer, en décomposant Q_n sur la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ de E_{n-1} et en utilisant la formule (8) que :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{Q_n(2)}{P_n^2(2)}$$

En déduire que u_n est rationnel.

3) Relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} :

Utiliser les formules (3) et (6) pour simplifier $Q_{n+1}(2)P_n(2) - Q_n(2)P_{n+1}(2)$.

En déduire que : $\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{(n+1)P_n(2)P_{n+1}(2)}$

4) Rapidité de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

a) Montrer, en considérant $Q_n(2)$, que : $\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t} dt$.

b) En déduire, en remarquant que $\int_0^1 \frac{P_n(t) - P_n(2)}{t-2} P_n(t) dt = 0$, que :

$$\ln 2 - u_n = \frac{1}{P_n^2(2)} \int_0^1 \frac{P_n^2(t)}{2-t} dt$$

c) Démontrer les inégalités :

$$0 \leq \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{(2n+1)P_n^2(2)} \leq \frac{2n+1}{(32)^n}$$

5) Application numérique :

Dresser un tableau, donnant pour $n = 1, 2, 3, 4$, u_n sous forme irréductible, sous forme décimale approchée, ainsi qu'un majorant de $\ln 2 - u_n$.

**ESSEC**

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

MATHEMATIQUES I

Option générale
Lundi 9 mai 1988 de 14h à 18h

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur $[0,1]$ par des fonctions polynômes.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Notations:

On associe, à tout entier naturel n non nul et à toute fonction numérique f continue sur $[0,1]$, la fonction polynôme, notée f_n , définie par :

$$(1) \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k x^{n-k} (1-x)^{n-k}.$$

Rappel:

Soit h une fonction numérique définie sur $[0,1]$. S'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |h(x) - h(x')| \leq k|x - x'|$$

on dit que h est k -Lipschitzienne sur $[0,1]$.

I - Etude des fonctions f_n associées à $f: x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme f_n associée à f par (1) dans les deux cas particuliers suivants:

- a) $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 1$
b) $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = x$

2. f désignant une fonction numérique continue sur $[0,1]$, on note g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x f(x)$. f_n et g_n les fonctions respectivement associées à f et g par (1) et f'_n la dérivée de f_n .

Vérifier que: (2) $\forall x \in [0, 1] \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x)$

3. On suppose que $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = x^2$.

- a) déterminer f_n
b) calculer $\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x) - f'(x)|$

4. Dédurre des résultats précédents que :

$$(3) \quad \forall x \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k x^{n-k} (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

II - Etude des fonctions f_n associées à $f: x \mapsto \exp x$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{par la relation (1).}$$

$$x \mapsto \exp x$$

1. Vérifier que: $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 \right]^n$.

2. Déterminer, pour tout x de $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in]0, 1[$.

- a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2, en zéro, de: $u \mapsto \ln [x (\exp u - 1) + 1]$.

- b) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de: $f_n(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par: $\psi(x) = n \ln \left[x \left(\exp \frac{1}{n} - 1 \right) + 1 \right] - x$

(On montrera, à l'aide du théorème de Rolle que ψ' possède au moins une racine sur $]0,1[$ et, en calculant ψ' , que cette racine x_n est unique).

5. En déduire que: $\forall x \in [0, 1] \quad \exp x \leq f_n(x) \leq \exp [x + \psi(x_n)]$.

et que: $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - \exp x| \leq e [\exp(\psi(x_n)) - 1]$.

6. Donner, en utilisant un développement limité de $\psi(x_n)$ à un ordre suffisant, un équivalent de $\exp(\psi(x_n)) - 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

III - Etude des fonctions f_n associées à $f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Dans toute cette partie, f_n désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{par la relation (1).}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

1. Détermination de f_n :

Vérifier que: $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = n \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n+k} x^{k(1-x)^{n-k}} = n \int_0^1 u^{n-1} [1 - x(1-u)]^n du$.

TSVP

2. Majoration de $|f'_n(x)|$:

- a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que : $\forall (t, t') \in [0, 1]^2 \quad |t^n - t'^n| \leq n|t - t'|$
- b) En déduire que : $\forall (x, x') \in [0, 1]^2$ et $\forall u \in [0, 1] \quad |[1 - x(1-u)]^n - [1 - x'(1-u)]^n| \leq n(1-u)|x - x'|$,
puis que f_n est 1-Lipschitzienne sur $[0, 1]$.
- c) En déduire un majorant de $\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)|$.

3. Majoration de $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$

- a) Utiliser la relation (2) et l'égalité évidente $x f(x) = 1 - f(x)$ pour démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - (1-x)f'_n(x).$$

- b) En déduire que : $\sup_{x \in [0, 1]} \left| f'_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n}$.

IV - Convergence de la suite (f_n) vers f sur $[0, 1]$:

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ et, pour tout entier ne N^* , par f_n la fonction polynôme associée à f par (1).

1. Convergence de $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \geq 1}$:

- a) On note, pour $0 \leq k \leq n$: $I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$.

Déterminer, pour $0 \leq k \leq n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

- b) Calculer, en fonction de f , $\int_0^1 f_n(x) dx$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

2. Etude de $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe C^1 sur $[0, 1]$:

On suppose f de classe C^1 sur $[0, 1]$.

- a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que f soit k -Lipschitzienne sur $[0, 1]$. En déduire que, si $M_0(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, on a :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x)| \leq k\alpha + 2 \frac{M_0(f)}{\alpha^2} (x' - x)^2.$$

(on distinguera les 2 cas $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$).

- b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall x \in [0, 1] \quad |f'_n(x) - f'(x)| \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}.$$

- d) En déduire l'existence d'un nombre réel positif A tel que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}}.$$

(on pourra étudier, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction : $\alpha \mapsto k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}$)

Retrouver ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

3. Vitesse de convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f si f est de classe C^2 sur $[0, 1]$:

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $[0, 1]$.

- a) Démontrer que, si $M_2(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f''(x)|$, on a :

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2} (x' - x)^2.$$

- b) En déduire que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n}.$$

et montrer, par un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.



ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

Option générale

MATHEMATIQUES I

Jeudi 11 mai 1989 de 14 h à 18 h

Le problème a pour objet l'étude d'un procédé d'approximation de la fonction exponentielle (notée aussi exp) par des fonctions rationnelles.

I. ETUDE D'UNE SUITE DE POLYNOMES.

Pour tout entier naturel n , on note E_n l'ensemble des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x :

$$4xf_n''(x) - 8nf_n'(x) - xf_n(x) = 0$$

1°) Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \exp(x/2)$ appartient à E_0 .

2°) Etant donné un élément f_n de E_n , on note f_{n+1} la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$(1) \quad f_{n+1}(x) = 2((2n+1)f_n(x) - xf_n'(x))$$

Montrer que:

$$a) \quad f_{n+1}'(x) = -\frac{x}{2} f_n'(x).$$

$$b) \quad f_{n+1} \in E_{n+1}$$

3°) On définit à partir de la fonction f_0 donnée au 1° et de la relation (1) une suite de fonctions (f_n) telle que, pour tout entier naturel n , f_n appartienne à E_n .

a) Expliciter f_1 .

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x :

$$(2) \quad f_{n+1}(x) = 2(2n+1)f_n(x) + x^2 f_{n-1}(x)$$

4°) Pour tout entier naturel n , on note P_n le polynôme défini pour tout nombre réel x par:

$$P_n(x) = f_n(x) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Expliciter P_0 et P_1 .

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x :

$$(3) \quad P_{n+1}(x) = 2(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x)$$

En déduire pour tout entier naturel n :

- que $P_n(x)$ est strictement positif pour $x < 2$.
- que P_n est un polynôme à coefficients entiers dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
- la valeur de $P_n(0)$.

II. ETUDE D'UNE SUITE DE FRACTIONS RATIONNELLES.

Dans la suite du problème, on désigne par n un entier naturel et l'on pose pour tout nombre réel x non racine de P_n :

$$u_n(x) = \frac{P_n(-x)}{P_n(x)}$$

En particulier, u_n est au moins définie sur $]-\infty, 2[$.

1°) Etude numérique d'un exemple.

a) Ecrire un algorithme de calcul des n premiers termes de la suite $(P_k(x))$ pour une valeur donnée du réel x .

b) Utiliser cet algorithme pour calculer pour $k \leq 8$ les valeurs exactes de $P_k(1)$, $P_k(-1)$, et des valeurs approchées (à la précision fournie par la calculatrice) de $u_k(1)$ (les résultats obtenus figureront dans un tableau).

Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n(1))$?

2°) Etude d'une fonction auxiliaire.

On désigne par g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g_n(x) = (-1)^n (f_n(x) - f_n(-x))$$

a) Etablir que, pour x non racine de P_n :

$$(4) \quad u_n(x) - e^x = (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{2}} g_n(x)}{P_n(x)}$$

b) Montrer que g_n est impaire et prouver que, pour tout nombre réel x :

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t g_n(t) dt$$

$$\frac{1}{2} \int_0^x t g_n(t) dt$$

c) En déduire, par récurrence sur n , que, pour tout réel positif x :

$$0 \leq g_n(x) \leq \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{n!}$$

3°) Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.

a) A l'aide de la relation (3), montrer, par récurrence sur n , que, pour $x \leq 0$:

$$P_n(x) \geq P_{n+1}(x)$$

b) Dédire des résultats précédents que, pour tout réel $x \leq 0$:

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

c) En déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ pour $x \leq 0$.

TSVP

PAGE 322
1989 1

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES ECONOMIQUES ET COMMERCIALES
Opt. générale-math 1

4°) Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $0 \leq x < 2$.

Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_{n-1}(x)$ pour $0 \leq x < 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

Dans la suite de cette partie, on étudie la suite $(u_n(x))$ pour x supérieur à 2.

5°) Variations de f_n .

- Prouver, d'abord pour $x \leq 0$, puis (en utilisant g_n) pour $x > 0$ que, si n est pair, alors $f_n(x) > 0$.
- Utiliser l'expression de f'_{n+1} en fonction de f_n obtenue en 1.2° pour étudier les variations de f_n pour $n \geq 1$ (on commencera par l'étude de f_{2p+1}).

6°) Etude des racines de P_n .

- Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ n'a pas de solution si n est pair, et en possède une et une seule, notée a_p , si $n = 2p + 1$.
- Montrer, en utilisant (2) et les variations de f_{2p+1} , que la suite (a_p) est strictement croissante.
- Montrer que la suite (a_p) diverge et tend vers $+\infty$ (on pourra raisonner par l'absurde en considérant la suite $(u_{2p+1}(-L))$ avec $L = \lim a_p$).

7°) Convergence de la suite $(u_n(x))$ pour $x \geq 2$.

- Montrer que, pour tout réel $x \geq 2$, existe un entier p_x tel que, pour $n \geq 2p_x$, $u_n(x)$ existe et soit strictement positif.

On n'étudie désormais la suite $(u_n(x))$ que pour $n \geq 2p_x$.

- Exprimer $u_n(x)$ en fonction de $u_{n-1}(x)$ pour $x \geq 2$ et en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$ dans ce cas.

III. VITESSE DE CONVERGENCE DE LA SUITE $(u_n(x))$.

1°) Equivalent de $P_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

- On suppose que n est supérieur ou égal à 1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f_n sur $[x, 0]$, établir que, pour $x \leq 0$:

$$0 \leq P_n(0) - P_n(x) \cdot e^{\frac{x}{2}} \leq \frac{x^2}{2} \cdot P_{n-1}(0).$$

- En déduire, que pour tout x fixé, $P_n(x)$ équivaut lorsque n tend vers l'infini à:

$$P_n(0) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

(on commencera par le cas $x \leq 0$ et on l'étendra au cas $x > 0$ à l'aide de $u_n(x)$).

2°) Majoration de $|u_n(x) - \exp(x)|$.

- Déduire de la relation (4) que, pour tout réel x :

$$|u_n(x) - e^x| \leq |u_{n-1}(x) - u_n(x)|$$

- Déduire de la relation (3) que, pour tout réel x :

$$P_{n+1}(-x) \cdot P_n(x) - P_{n+1}(x) \cdot P_n(-x) = 2(-1)^n \cdot x^{2n+1}$$

- En déduire enfin que:

$$|u_n(x) - e^x| \leq \frac{2|x|^{2n+1}}{P_n(x) \cdot P_{n-1}(x)}$$

- Donner un majorant de l'erreur commise au 1.1° en prenant $u_1(1)$ comme valeur approchée du nombre e .

3°) Equivalent de $u_n(x) - \exp(x)$.

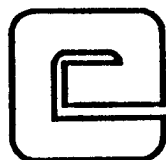
Déduire des résultats précédents, pour tout réel non nul x fixé:

- un équivalent de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(x) - u_n(x)} = 0.$$

- que $u_n(x) - \exp(x)$ équivaut quand n tend vers l'infini à:

$$(-1)^{n+1} e^{-x} \cdot \frac{1}{(4n)^{2n+1}} \quad (\text{on rappelle: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1).$$



ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

MATHEMATIQUES I

Option générale

Vendredi 11 mai 1990 de 14h à 18h

Le but du problème est de déterminer la probabilité pour qu'un entier naturel appartienne à certains sous-ensembles de $\mathbb{N}$, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'Analyse.

*Dans tout le problème, on désigne par x une variable réelle appartenant à $[0, 1[$ et les fonctions considérées sont définies uniquement sur $[0, 1[$.
En particulier, les limites ou équivalents en 1 supposent x inférieur à 1.*

PRELIMINAIRE

Etant données deux suites réelles à termes positifs (x_n) et (y_n) , on pose:

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \dots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}.$$

a) Prouver que, pour tout entier naturel n , on a:

$$\sum_{k=0}^n z_k \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n y_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

b) En déduire que, si les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont convergentes de sommes respectives X et Y , alors la série $\sum z_n$ est convergente de somme $Z = XY$.

PARTIE I

On considère dans cette partie les deux suites de nombres réels (u_n) et (J_n) définies respectivement par:

$$- u_0 = 1 \text{ et } u_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} \text{ pour } n \geq 1.$$

$$- J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

- 1°) a) Etudier le sens de variation de la suite (J_n) et prouver sa convergence.
b) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} pour $n \geq 2$.
c) Calculer J_0 et J_1 . En déduire les valeurs de J_{2n+1} et J_{2n} en fonction de u_n .

2°) a) Déduire successivement des résultats précédents les inégalités:

$$(1) \quad 1 \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u_n^2}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

$$(2) \quad 0 \leq u_n - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \leq \frac{u_n}{2n+1}.$$

b) Déduire de (1) un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3°) Calculer l'intégrale suivante:
$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos^2(t)}$$

(on pourra poser $\tan(t) = \sqrt{1-x} \cdot \tan(u)$).

.../...

4°) a) Démontrer que:
$$\sum_{k=0}^n J_{2k} x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x \cos^2(t)} - x^{n+1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t) dt}{1-x \cos^2(t)}.$$

b) Etablir l'inégalité suivante:
$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n+2}(t) dt}{1-x \cos^2(t)} \leq \frac{J_{2n+2}}{1-x}.$$

c) En déduire que:
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{2n+1}.$$

5°) a) Etablir par récurrence que:
$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2k+1}.$$

b) A l'aide du résultat préliminaire, en déduire que:
$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

6°) En utilisant les inégalités (2), établir:

a) la convergence de la série:
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n.$$

b) la double inégalité:
$$x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1-x)^{\frac{3}{2}} S(x) \leq 1.$$

On donnera alors un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 1.

PARTIE II

A toute partie A de $\mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par:

$$\begin{cases} a_n = 1 & \text{si } n \in A. \\ a_n = 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

On pose alors, sous réserve d'existence de ces nombres:

$$f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad P(A) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) f_A(x).$$

1°) Prouver que la série définissant $f_A(x)$ est convergente.

On notera S l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $P(A)$ existe.

2°) Etablir les propriétés suivantes:

a) Si A appartient à S , alors $0 \leq P(A) \leq 1$.

b) $\emptyset$ et $\mathbb{N}$ appartiennent à S . On précisera $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.

c) Si A appartient à S , alors son complémentaire $\bar{A}$ appartient à S . On précisera $P(\bar{A})$ en fonction de $P(A)$.

d) Si A, B tels que $A \cap B = \emptyset$ appartiennent à S , alors $A \cup B$ appartient à S . On précisera $P(A \cup B)$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$.

On admettra désormais que $(\mathbb{N}, S, P)$ est un espace probabilisé.

3°) Montrer que les parties A suivantes appartiennent à S et préciser $P(A)$:

a) A partie finie de $\mathbb{N}$.

b) $A = q\mathbb{N} = \{qk / k \in \mathbb{N}\}$ où q est un entier naturel non nul.

c) $A = q\mathbb{N} + t = \{qk + t / k \in \mathbb{N}\}$ où t et q sont deux entiers naturels avec $q \neq 0$.

.../...

4°) On se propose dans cette question d'établir que la partie C de $\mathbb{N}$ constituée des carrés d'entiers naturels non nuls appartient à S, et de calculer $P(C)$.

La suite (c_n) et la fonction f_C associées à C sont donc définies par:

$$\begin{cases} c_n = 1 & \text{si } n \in C \text{ (soit : } \exists k > 0, k^2 = n) \\ c_n = 0 & \text{si } n \notin C \end{cases} \quad \text{et} \quad f_C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$$

a) A l'aide de la question préliminaire, établir que:

$$\frac{f_C(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} [\sqrt{n}] \cdot x^n$$

([a] désigne ici la partie entière de a, c'est à dire l'entier tel que $[a] \leq a < [a]+1$).

b) Démontrer la double inégalité suivante:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n - \frac{f_C(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

c) A l'aide des résultats de la partie I, en déduire un équivalent de $f_C(x)$ quand x tend vers 1. Prouver alors que C appartient à S et donner $P(C)$.

5°) On admet dans cette question que la partie D de $\mathbb{N}$ constituée des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls appartient à S, et l'on se propose de majorer $P(D)$.

La suite (d_n) et la fonction f_D associées à D sont donc définies par :

$$\begin{cases} d_n = 1 & \text{si } n \in D \text{ (soit : } \exists p > 0, \exists q > 0, p^2 + q^2 = n) \\ d_n = 0 & \text{si } n \notin D \end{cases}$$

$$\text{et} \quad f_D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

On note $v(n)$ le nombre des couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que :
 $p^2 + q^2 = n$.

a) Etablir que :

$$(f_C(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) x^n.$$

b) Etablir que :

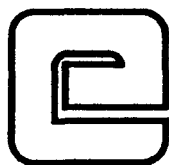
$$f_D(x) \leq (f_C(x))^2.$$

En déduire un majorant de $P(D)$.

c) En comparant d_n et $v(n)$, montrer que l'on a plus précisément :

$$2f_D(x) \leq (f_C(x))^2 + f_C(x^2).$$

En déduire un nouveau majorant de $P(D)$.



ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la
Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES I

Option générale

Mercredi 15 mai 1991 de 8h à 12h

Dans tout le problème, on désigne par a un réel strictement positif et par K une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme:

$$K(x) = P(x) \cdot \exp\left(-\frac{x}{2a}\right)$$

où P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

L'objet du problème est la recherche des fonctions continues f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'on ait pour tout réel positif x :

$$(1) \quad f(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f(t)dt.$$

Les trois parties du problème sont indépendantes les unes des autres.

PRELIMINAIRE

On considère pour tout entier naturel n l'intégrale $J_n(a)$ définie par:

$$J_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t}{a}\right) dt.$$

En raisonnant par récurrence sur n , établir la convergence de cette intégrale et préciser sa valeur en fonction de n et a .

PARTIE I

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 1$.

1°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cK$.

2°) On considère réciproquement une fonction $f = cK$, où c est un nombre réel donné.

A quelle condition sur c cette fonction est-elle solution de (1)?

3°) Etudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

A SUIVRE

PARTIE II

Dans toute cette partie, on désigne par λ un nombre réel et l'on suppose que $P(x) = \lambda a + x$.

1°) Soit E l'espace vectoriel engendré par les 2 applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{x}{2a}\right) \quad ; \quad \phi_1(x) = \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que (ϕ_0, ϕ_1) est une base de E .
- b) Soient ϕ un élément de E , et ψ la fonction définie pour $x \geq 0$ par:

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)\phi(t)dt.$$

Prouver que cette intégrale $\psi(x)$ est convergente, et montrer que ψ est un élément de E .

- c) Montrer que l'application $u: \phi \in E \rightarrow u(\phi) = \psi \in E$ est un endomorphisme de E .
Etablir que sa matrice dans la base (ϕ_0, ϕ_1) est de la forme $a^2 M(\lambda)$ où $M(\lambda)$ est une matrice ne dépendant que de λ que l'on explicitera.
 u est-il un automorphisme de E ?

2°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle appartient à E .

3°) On considère réciproquement une fonction $f = \alpha_0 \phi_0 + \alpha_1 \phi_1$ de E , où α_0, α_1 sont des nombres réels.

- a) Etablir que cette fonction f est solution de (1) si et seulement si α_0, α_1 sont solutions d'un système de deux équations que l'on explicitera.
- b) Résoudre et discuter le système obtenu.
- c) Représenter dans le plan l'ensemble des couples (a^2, λ) pour lesquels l'équation (1) n'a pas de solution (on portera a^2 en abscisse et λ en ordonnée).

PARTIE III

Dans toute cette partie, on suppose que $P(x) = 3a^2 - 4ax + x^2$.

1°) On considère la matrice M définie par:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de M (avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).
- b) Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
(On choisira à chaque fois un vecteur propre dont la 3° composante est égale à 1).
- c) En déduire une matrice inversible P telle que:

$$M = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}.$$

- d) Calculer l'inverse de la matrice P .

Tournez la page S.V.P.

2°) On considère les trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) définies par:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 6w_n & \text{et} & u_0 = 3. \\ v_{n+1} = -u_n + 2w_n & \text{et} & v_0 = -2. \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n + 2w_n & \text{et} & w_0 = 1. \end{cases}$$

- a) A l'aide du résultat précédent, expliciter u_n , v_n , w_n .
b) Etudier la convergence et calculer les sommes éventuelles U , V , W des trois séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 0} a^{3n} u_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} v_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 0} a^{3n} w_n.$$

3°) On définit une suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g_0 = K$, puis:

$$g_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} K(x+t)g_n(t)dt$$

et l'on pose alors:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x).$$

- a) Prouver par récurrence que g_n est bien définie et qu'il existe trois nombres réels α_n , β_n , γ_n tels que l'on ait pour tout réel positif x :

$$g_n(x) = a^{3n} (\alpha_n a^2 + 2\beta_n ax + \gamma_n x^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

A l'aide des résultats précédents, on explicitera les expressions de α_n , β_n , γ_n .

- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel positif x , on a:

$$f_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^{+\infty} K(x+t)f_n(t)dt.$$

4°) On suppose que $4a^3 < 1$ et l'on définit pour tout réel positif x :

$$L(x) = (Ua^2 + 2Vax + Wx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que, pour tout réel positif x , la suite $(f_n(x))$ converge et exprimer sa limite en fonction de $L(x)$.
b) Montrer que la fonction L est solution de (1).

5°) Soit f une solution de (1). Montrer qu'elle est nécessairement de la forme:

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

6°) On considère réciproquement la fonction f définie par:

$$f(x) = (Aa^2 + 2Bax + Cx^2) \exp\left(-\frac{x}{2a}\right).$$

- a) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si A , B , C vérifient:

$$(I_3 - a^3 M) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec:} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Pour quelles valeurs de a ce système admet-il une solution unique et quelle est alors cette solution?

7°) Etudier, selon les valeurs prises par a , l'existence des solutions de (1) et en déduire leur expression.

FIN

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

MATHEMATIQUES I

Option générale

Mercredi 13 mai 1992 de 14h à 18h

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications f de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f et sa dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note alors pour tout élément f de E_n :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|.$$

L'objet du problème est d'établir que E_n est inclus dans E_k pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, puis d'obtenir une majoration de M_k en fonction de M_0 et M_n .

PARTIE I

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et soit f un élément de E_2 .

1°) Une première majoration de M_1 .

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout réel x et tout réel h :

$$(1) \quad |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}.$$

b) En déduire que, pour tout réel x et tout réel h strictement positif, on a:

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

puis en déduire que E_2 est inclus dans E_1 .



c) Etablir que:

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

On pourra étudier les variations de la fonction u définie pour $t > 0$ par:

$$u(t) = \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}.$$

2°) Une seconde majoration de M_1 .

a) Soit t un nombre réel strictement positif. En appliquant l'inégalité (1) avec $h = t$, puis $h = -t$, établir que, pour tout nombre réel x :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 t}{2} + \frac{M_0}{t}.$$

b) En procédant comme précédemment, en déduire une nouvelle majoration de M_1 en fonction de M_0 et de M_2 .

PARTIE II

On suppose dans cette partie que l'entier n est supérieur ou égal à 2, et l'on désigne par f un élément de E_n , par $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ $n-1$ nombres réels non nuls et deux à deux distincts, et l'on pose pour tout nombre réel x :

$$\begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{bmatrix} = H_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad H_{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{1!} & \frac{h_1^2}{2!} & \dots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{h_2}{1!} & \frac{h_2^2}{2!} & \dots & \frac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h_{n-1}}{1!} & \frac{h_{n-1}^2}{2!} & \dots & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix}.$$

1°) Inversibilité de la matrice H_{n-1} .

a) On considère le système d'équations suivant:

$$H_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. On pourra considérer la fonction-polynôme:

$$P(t) = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} t^{n-2} + \frac{x_{n-2}}{(n-2)!} t^{n-3} + \dots + \frac{x_2}{2!} t + x_1.$$

b) En déduire que la matrice H_{n-1} est inversible.

2°) Les inclusions de E_n dans E_k ($1 \leq k \leq n$).

Soient un nombre réel x et un entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

a) En majorant $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que:

$$|F_k(x)| \leq 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!} M_n.$$

b) En déduire l'inclusion de E_n dans E_k .

PARTIE III1°) Majoration de M_1 et M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .On suppose dans cette question que $n=3$ et soit f un élément de E_3 .En appliquant les résultats de la question I.2° aux fonctions f' et f , majorer M_2 en fonction de M_1 et de M_3 , puis M_1 en fonction de M_0 et de M_2 , et enfin M_1 et M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .2°) Une seconde majoration de M_1 et M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .On suppose dans cette question que $n=3$ et soit f un élément de E_3 .a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f(x+h)$ et à $f(x-h)$, montrer que, pour tout réel x et tout réel strictement positif h , on a:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_3 h^2}{6} + \frac{M_0}{h} \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq \frac{M_3 h}{3} + \frac{4M_0}{h^2}.$$

b) En déduire de nouvelles majorations de M_1 et de M_2 en fonction de M_0 et de M_3 .3°) Majoration de M_{n-1} en fonction de M_0 et de M_n .On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de E_n .a) En appliquant les résultats de la question I.2° à la fonction $f^{(n-2)}$, majorer M_{n-1} en fonction de M_{n-2} et de M_n .b) En déduire par récurrence sur l'entier n ($n \geq 2$) l'existence d'une suite de nombres réels (a_n) indépendants de f et tels que:

$$M_{n-1} \leq a_n M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{1-\frac{1}{n}} \quad \text{avec} \quad a_n^n \leq 2^{n-1} a_{n-1}^{n-1}.$$

c) En déduire que:

$$M_{n-1} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

4°) Majoration de M_k en fonction de M_0 et de M_n ($0 \leq k \leq n$).On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et soit f un élément de E_n .Déduire par récurrence de la majoration obtenue précédemment pour M_{n-1} que, pour tout entier k compris entre 0 et n , on a:

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{\frac{n-k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

PARTIE IVOn se propose enfin d'établir que les majorations obtenues en I.2° et III.2° sont optimales. A cet effet, on considère pour tout entier $p \geq 1$ la fonction w_p définie sur $[0, 1]$ par:

$$w_p(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2p} \\ 2\sin(p\pi(1-x)) & \text{si } 1 - \frac{1}{2p} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par:

$$w_p(-x) = w_p(x) \quad \text{et} \quad w_p(2+x) = -w_p(x).$$

a) Etudier la continuité et la périodicité de w_p .

Représenter graphiquement w_1 sur $\mathbb{R}$.

b) Soit v_p la primitive de w_p s'annulant en 0.

Donner l'expression de $v_p(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

Exprimer $v_p(-x)$ et $v_p(2+x)$ en fonction de $v_p(x)$.

Représenter graphiquement v_1 sur $\mathbb{R}$.

c) Soit u_p la primitive de v_p s'annulant en 1.

Donner l'expression de $u_p(x)$ pour $0 \leq x \leq 1$.

Exprimer $u_p(-x)$ et $u_p(2+x)$ en fonction de $u_p(x)$.

Représenter graphiquement u_1 sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer les réels suivants:

$$M_0(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)|, \quad M_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u'_p(x)|, \quad M_2(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u''_p(x)|.$$

Quelles sont les limites de $M_0(p)$, $M_1(p)$ et $M_2(p)$ lorsque p tend vers l'infini?

En déduire que la majoration de M_1 en fonction de M_0 et de M_2 obtenue à la question I.2° est optimale.

e) On désigne par U_p la primitive s'annulant en 0 de la fonction u_p .

Montrer à l'aide de cette fonction U_p que les majorations de M_1 et de M_2 obtenues précédemment en III.2° sont optimales.

...

ESSEC

MATHEMATIQUES I Option générale

L'objet du problème, développé dans la partie III, est l'obtention de valeurs approchées du nombre π .

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1. On notera aussi, pour simplifier les écritures: $b = a^2 + 1$.

Partie I: étude d'intégrales.

1°) On désigne par p, q des entiers naturels et l'on étudie l'intégrale:

$$I(p, q) = \int_0^1 t^{2p} (1-t^2)^q dt.$$

- a) On suppose que $q \geq 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p, q)$ et $I(p+1, q-1)$.
- b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p, q)$, et en particulier celle de l'intégrale $I(p, p)$ que l'on notera $J(p)$ dans la suite du problème.
- c) En étudiant le maximum sur $[0, 1]$ de $t \rightarrow t^2(1-t^2)$, établir que l'on a $0 \leq J(p) \leq 1/4^p$.

2°) On étudie dans cette question l'intégrale:

$$f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}.$$

- a) Calculer $f(1)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$.
- b) Etablir pour $a \neq 1$ l'égalité suivante:

$$(1) \quad f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = f(1).$$

(on pourra utiliser dans l'intégrale donnant $f((a+1)/(a-1))$ le changement de variable défini par $t = (ax - 1) / (x + a)$).

- c) Etablir que:

$$f(a) = a \int_0^1 \frac{dt}{a^2 + t^2}.$$

Partie II: étude d'une suite de polynômes.

1°) On considère les fonctions-polynômes définies par: $P_n(x) = 1 + \lambda_n x^n (1-x)^n$.
Déterminer le nombre réel λ_n pour que $-a^2$ soit racine de P_n .

On supposera λ_n ainsi choisi dans toute la suite du problème.

On désignera alors par Q_n la fonction polynôme définie par: $P_n(x) = (x + a^2)Q_n(x)$.

2°) a) Expliciter Q_0 et Q_1 .

b) En considérant $P_{n+1}(x) - P_n(x)$, établir pour tout nombre réel x la formule suivante:

$$(2) \quad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = \left[-\frac{x(1-x)}{a^2 b} \right]^n Q_1(x).$$

En déduire l'expression de $Q_2(x)$.

Partie III: détermination de valeurs approchées de π .**1°) Une première approximation de π .**

On pose:

$$u_n(a) = a \int_0^1 Q_n(t^2) dt.$$

a) Calculer $u_1(a)$ et $u_2(a)$.

b) Vérifier que:

$$u_2(a) = a \int_0^1 \frac{P_2(t^2) dt}{a^2 + t^2}.$$

En déduire la double inégalité suivante:

$$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3 b^3} \leq f(a) \leq u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3 b^2}.$$

c) Donner un encadrement décimal de $f(2)$ et $f(3)$ (avec les 6 premières décimales).d) A l'aide de la relation (1), en déduire une valeur décimale approchée du nombre π (avec les 6 premières décimales, et une indication sur la précision obtenue).**2°) Généralisation.**

a) Etablir l'inégalité suivante:

$$(3) \quad |u_n(a) - f(a)| \leq \frac{1}{(4a^2 b)^n a}.$$

b) Etablir à l'aide de l'égalité (2) que:

$$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n a J(n)}{(a^2 b)^{n+1}} \frac{2(2b-1)n + 3b-1}{4n+3}.$$

c) On pose: $v_n(a) = u_{n+1}(a) - u_n(a)$.Exprimer pour $n \geq 1$ le rapport $v_{n+1}(a) / v_n(a)$ en fonction de n et de a .d) On donne un entier naturel n et un nombre réel a supérieur à 1. Rédiger en PASCAL:

- une procédure de calcul de $u_k(a)$ pour $0 \leq k \leq n$ (on utilisera la suite $(v_k(a))$).
- une procédure de calcul d'une valeur approchée de π (on utilisera la relation (1)).

e) On choisit $n = 5$ et $a = 2$. Quelle valeur approchée de π obtient-on ainsi?

indiquer à l'aide de l'inégalité (3) la précision de cette approximation.

3°) Recherche d'un choix optimal pour a .On suppose dans cette question que $a > 1$ et l'on pose:

$$w_n(a) = 4 \left[u_n(a) + u_n\left(\frac{a+1}{a-1}\right) \right].$$

a) Soit c le plus petit des deux nombres a et $(a+1)/(a-1)$. Montrer que:

$$|w_n(a) - \pi| \leq \frac{8}{c [4c^2(1+c^2)]^n}.$$

b) Tracer la courbe représentative de la fonction définie pour $a > 1$ par:

$$a \rightarrow \min\left(a, \frac{a+1}{a-1}\right).$$

En déduire pour quelle valeur a_0 de a le nombre c défini ci-dessus est maximal.c) On choisit $a = 5/2$. Donner un majorant de $|w_n(a) - \pi|$. Qu'obtient-on alors pour $n = 5$?

**

ESSEC**MATHEMATIQUES 1****Option générale**

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

On désigne par a et b deux nombres réels strictement positifs, et l'on considère l'intégrale $I(a, b)$ définie par:

$$I(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Le problème a pour objet d'exprimer cette intégrale $I(a, b)$ à l'aide de la fonction Γ définie pour tout nombre réel strictement positif p par:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

PARTIE I

On étudie dans cette partie préliminaire l'intégrale impropre $\Gamma(p)$, avec $p > 0$.

1°) Convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ avec $p > 0$.

a) Déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de la fonction $t \rightarrow e^{-t} t^{p+1}$.

En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \rightarrow e^{-t} t^{p-1}$ sur $[1, +\infty[$.

b) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à $]0, 1]$ la double inégalité:

$$0 \leq \int_x^1 e^{-t} t^{p-1} dt \leq \frac{1}{p}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale de la fonction $t \rightarrow e^{-t} t^{p-1}$ sur $]0, 1]$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\Gamma(p)$ pour tout nombre réel $p > 0$.

2°) Expression de $\Gamma(p+1)$ pour p entier naturel.

a) A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de $\Gamma(p)$.

b) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(p+1)$ lorsque p est un entier naturel.

PARTIE II

On désigne dans cette partie par p un nombre réel strictement positif, par x un nombre réel tel que $0 \leq x < 1$, et l'on considère la série:

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^n.$$

1°) Convergence de la série définissant $g_p(x)$.

a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \rightarrow n^{p+1} x^n$ lorsque x est fixé dans l'intervalle $[0, 1[$.

b) En déduire la convergence de la série définissant $g_p(x)$ lorsque $0 \leq x < 1$.

Que vaut $g_p(0)$? Peut-on définir $g_p(x)$ pour $x = 1$?

2°) Etude des cas particuliers $p = 1$ et 2 .

- a) Donner l'expression (sans signe Σ) de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ pour $0 \leq x < 1$.
 b) Donner le sens de variation, la limite et un équivalent de $g_1(x)$ et $g_2(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

3°) Etude de la variation de g_p sur $[0, 1[$.

- a) Comparer $g_p(x)$ et $g_p(y)$ lorsque $0 \leq x \leq y < 1$.
 En déduire le sens de variation de la fonction g_p sur $[0, 1[$, et l'existence d'une limite L , éventuellement égale à $+\infty$, de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).
 b) En considérant les sommes partielles de la série définissant $g_p(x)$, établir l'inégalité suivante pour tout x de $[0, 1[$ et tout entier $N \geq 1$:

$$g_p(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}.$$

En déduire la limite L de $g_p(x)$ lorsque x tend vers 1 ($x < 1$).

On détermine maintenant un équivalent de $g_p(x)$ quand x tend vers 1.

4°) Etude du cas $0 < p \leq 1$.

- a) Etudier le sens de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \rightarrow t^{p-1}x^t = t^{p-1}e^{t \ln(x)}$ lorsque le nombre réel x est fixé dans l'intervalle $]0, 1[$ (et $0 < p \leq 1$).
 En déduire l'inégalité suivante pour tout entier naturel non nul n :

$$(n+1)^{p-1}x^{n+1} \leq \int_n^{n+1} t^{p-1}x^t dt \leq n^{p-1}x^n.$$

- b) En sommant ces inégalités pour $n \geq 1$, puis en effectuant le changement de variable $u = -t \ln(x)$ dans l'intégrale obtenue, en déduire que, pour $0 < x < 1$:

$$\int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du \leq |\ln(x)|^p g_p(x) \leq \int_{-\ln(x)}^{+\infty} u^{p-1}e^{-u} du + x |\ln(x)|^p.$$

- c) En déduire la limite de $|\ln(x)|^p g_p(x)$ quand x tend vers 1 (et $0 < p \leq 1$).
 Montrer que $\ln(x)$ équivaut à $x-1$ lorsque x tend vers 1 et en déduire que $g_p(x)$ équivaut à $\Gamma(p)/(1-x)^p$ quand x tend vers 1 (et $0 < p \leq 1$).

5°) Etude du cas général.

- a) Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1[$:

$$(1-x)g_{p+1}(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)^p - n^p]x^{n+1}.$$

- b) Etablir à l'aide de l'inégalité des accroissements finis l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ lorsque $0 < p \leq 1$:

$$p(n+1)^{p-1} \leq (n+1)^p - n^p \leq pn^{p-1}.$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

- c) En déduire l'inégalité suivante pour $0 \leq x < 1$ lorsque $0 < p \leq 1$:

$$pg_p(x) + (1-p)x \leq (1-x)g_{p+1}(x) \leq pxg_p(x) + x.$$

Comment celle-ci doit-elle être modifiée lorsque $p > 1$?

- d) On suppose à nouveau que p est un nombre réel strictement positif quelconque.
 Montrer que $g_p(x)$ équivaut encore à $\Gamma(p)/(1-x)^p$ quand x tend vers 1.

PARTIE III

On se propose enfin, dans cette partie, d'appliquer les résultats précédents au calcul de l'intégrale $I(a, b)$ où a et b désignent deux réels strictement positifs.

1°) Calcul de $I(a, b)$ pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

a) On considère une application $h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , et on désigne par M_1 le maximum de $|h'(x)|$ lorsque x décrit $[\alpha, \beta]$.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la primitive de h s'annulant en α , établir:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - (\beta - \alpha)h(\alpha) \right| \leq \frac{M_1 (\beta - \alpha)^2}{2}.$$

b) On rappelle que, dans cette question, les réels a et b sont supérieurs ou égaux à 2. Etablir que la fonction $x \rightarrow x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

En lui appliquant le résultat précédent sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = k/n$ avec $0 \leq k < n$, et en notant encore M_1 le maximum de la valeur absolue de sa dérivée lorsque x décrit $[0, 1]$, montrer que:

$$\left| I(a, b) - u_n \right| \leq \frac{M_1}{2n} \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{b-1}.$$

c) On admet le résultat suivant:

"Etant données deux séries convergentes à termes réels positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$ (définis pour $n \geq 1$) et de sommes respectives A et B , la série $\sum c_n$ où c_n est défini pour $n \geq 2$ par $c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1$, est convergente et sa somme est AB ".

En déduire le résultat suivant pour $0 \leq x < 1$:

$$g_a(x)g_b(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n.$$

d) A l'aide des résultats précédents, montrer enfin que:

$$\left| g_a(x)g_b(x) - I(a, b)g_{a+b}(x) \right| \leq \frac{M_1}{2} g_{a+b-1}(x).$$

e) Multiplier l'inégalité précédente par $(1-x)^{a+b}$, faire tendre x vers 1 et montrer, en utilisant l'équivalent en 1 de $g_p(x)$ obtenu dans la partie II, que:

$$I(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

2°) Calcul de $I(a, b)$ dans le cas général.

On étend ce résultat au cas où $a > 0$ et $b > 0$ (on ne demande pas de vérifier la convergence dans ce cas de l'intégrale $I(a, b)$).

a) Etablir à l'aide d'un changement de variable simple que $I(a, b) = I(b, a)$.

b) Prouver que $I(a+1, b) + I(a, b+1) = I(a, b)$.

Par intégration par parties, exprimer $I(a, b+1)$ en fonction de $I(a+1, b)$

En déduire $I(a+1, b)$ en fonction de $I(a, b)$.

c) En déduire que la formule obtenue précédemment pour $I(a, b)$ reste valable lorsque $a > 0$ et $b > 0$.

Dans tout le problème, et pour tout polynôme P à coefficients réels, on note $M(P)$ le maximum de la fonction $x \rightarrow |P(x)|$ sur le segment $[-1, +1]$.

On se propose alors de majorer pour tout entier naturel k le maximum $M(P^{(k)})$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P) en fonction du maximum $M(P)$.

PARTIE 1

On se propose d'étudier, dans cette partie, la suite de fonctions définies par récurrence pour tout nombre réel x par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis pour $n \geq 1$ par :

$$(1) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

1°) Etude des polynômes T_n .

a) Calculer $T_n(x)$ pour $n \leq 4$.

b) Etablir que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme à coefficients entiers de degré n tel que, pour tout nombre réel x : $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

c) Déterminer les valeurs de $T_n(1)$ et de $T_n(-1)$.

d) Dans la base canonique $(X^n, \dots, X, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , on note T_n sous la forme :

$$T_n(x) = \lambda_n [X^n + b_n X^{n-2} + c_n X^{n-4} + \dots].$$

Calculer le coefficient dominant λ_n du polynôme T_n . A l'aide de la relation (1), exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et calculer b_n en fonction de n pour $n \geq 2$.

2°) Etude de la fonction T_n sur $]1, +\infty[$ pour $n \geq 1$.

a) On considère la fonction définie pour u appartenant à $]1, +\infty[$ par :

$$x = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right).$$

Etablir qu'elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, puis montrer que :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

b) En déduire pour $x > 1$ que $T_n(x) > 1$, et montrer par récurrence pour $x \geq 1$ l'inégalité :

$$T_n(x) \leq 2^{n-1} x^n.$$

3°) Etude de la fonction T_n sur $[-1, 1]$ pour $n \geq 1$.

a) A l'aide de la relation (1), établir pour tout nombre réel θ l'égalité :

$$(2) \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

En déduire le maximum $M(T_n)$.

b) Pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \dots, n\}$, on pose $\alpha_k = \cos[(n-k)\pi/n]$.

On remarquera que $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = +1$.

Calculer $T_n(\alpha_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis prouver que, si x désigne un nombre réel, l'égalité $|T_n(x)| = M(T_n)$ a lieu si et seulement si x appartient à l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$.

4°) Equation différentielle vérifiée par T_n pour $n \geq 1$.

a) En dérivant la relation (2), exprimer $T_n'(\cos\theta)$ en fonction de θ ($0 < \theta < \pi$). En déduire, pour $n \geq 2$, la valeur de $T_n'(\alpha_k)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Etait-ce prévisible?

A l'aide d'un passage à la limite, déterminer enfin $T_n'(1)$ et $T_n'(-1)$.

b) En dérivant deux fois la relation (2), établir pour tout nombre réel x de $[-1, +1]$:

$$(3) \quad (x^2-1)T_n''(x) + xT_n'(x) - n^2T_n(x) = 0.$$

Prouver que cette relation reste valable pour tout nombre réel x .

c) Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n-1$. En dérivant j fois la relation (3), établir que:

$$T_n^{(j+1)}(1) = \frac{n^2 - j^2}{2j+1} T_n^{(j)}(1).$$

d) En déduire en fonction de n le nombre réel μ_n tel que, pour $1 \leq j \leq n$:

$$T_n^{(j)}(1) = \mu_n \cdot 2^{j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!}.$$

PARTIE 2

On désigne par n un entier naturel non nul et les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sont ceux définis à la partie I. On pose alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

1°) Etude d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer $L_k(\alpha_k)$ et $L_k(\alpha_j)$ pour $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq j \leq n, j \neq k$.

b) Etablir que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer quelles sont, dans cette base, les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et, à l'aide des résultats de la partie I, donner les composantes de T_n .

2°) Majoration de $|P(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $\deg P \leq n$.

a) Etablir, pour $x \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, l'inégalité $(-1)^{n-k} L_k(x) \geq 0$.

En déduire, pour $x \geq 1$, l'égalité $T_n(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| + \dots + |L_{n-1}(x)| + |L_n(x)|$.

b) Etablir enfin, pour $x \geq 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité:

$$(4) \quad |P(x)| \leq M(P) T_n(x).$$

c) On se propose enfin de minorer $M(P)$ lorsque P est un polynôme unitaire de degré n (c'est à dire un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est égal à 1).

A l'aide de l'inégalité (4), établir successivement que l'on a, pour $x \geq 1$ et pour tout polynôme unitaire P de degré n :

$$M(P) \geq \frac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n} \quad ; \quad M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donner en fonction de T_n un polynôme unitaire de degré n tel que $M(P) = 1/2^{n-1}$.

3°) Majoration de $|P'(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $d^0P \leq n$.

a) Montrer à l'aide du théorème de Rolle (dont on rappellera précisément l'énoncé) que, pour $0 \leq k \leq n$, le polynôme L_k' possède $n-1$ racines réelles, appartenant à $] -1, +1[$. Déterminer le coefficient dominant de L_k' et en déduire que, pour $x \geq 1$: $(-1)^{n-k}L_k'(x) \geq 0$.

b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer P' comme combinaison linéaire des polynômes $L_0', L_1', \dots, L_n'$.

En déduire, pour $x \geq 1$, l'égalité $T_n'(x) = |L_0'(x)| + |L_1'(x)| + \dots + |L_{n-1}'(x)| + |L_n'(x)|$.

c) Etablir enfin, pour $x \geq 1$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, l'inégalité:

$$(5) \quad |P'(x)| \leq M(P) \cdot T_n'(x).$$

4°) Majoration de $|P^{(j)}(x)|$ sur $[1, +\infty[$ pour $0 \leq j \leq d^0P \leq n$.

a) Montrer que, pour $0 \leq k \leq n$, le polynôme $L_k^{(j)}$ (dérivé $j^{\text{ème}}$ de L_k) possède $n-j$ racines réelles, appartenant à $] -1, +1[$, et en déduire que, pour $x \geq 1$: $(-1)^{n-k}L_k^{(j)}(x) \geq 0$.

b) En raisonnant comme précédemment, établir pour $x \geq 1$ et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$(6) \quad |P^{(j)}(x)| \leq M(P) \cdot T_n^{(j)}(x).$$

PARTIE 3

Dans cette partie, on désigne par λ un nombre réel appartenant à $[0, 1]$.

1°) Déterminer l'image du segment $[-1, +1]$ par l'application:

$$x \rightarrow \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}.$$

On pose alors pour tout polynôme P à coefficients réels de degré $n \geq 1$:

$$P_\lambda(x) = P\left(\frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Etablir que $M(P_\lambda) \leq M(P)$.

2°) Majoration de $M(P')$ en fonction de $M(P)$.

a) Déterminer $P_\lambda'(1)$ et déduire de l'inégalité (5) que l'on a:

$$|P'(\lambda)| \leq \frac{2n^2}{1+\lambda} M(P).$$

b) En déduire que:

$$(7) \quad M(P') \leq 2n^2 M(P).$$

(On pourra aussi introduire le polynôme Q défini par $Q(x) = P(-x)$).

3°) Majoration de $M(P^{(j)})$ en fonction de $M(P)$.

a) Déduire de l'inégalité (7) que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$:

$$(8) \quad M(P^{(j)}) \leq 2^j [n! / (n-j)!]^2 M(P).$$

b) On se propose enfin d'améliorer cette inégalité (8). Etablir que:

$$|P^{(j)}(\lambda)| \leq \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^j T_n^{(j)}(1) M(P).$$

En déduire que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$:

$$M(P^{(j)}) \leq n 2^{2j-1} \frac{(j-1)!(n+j-1)!}{(2j-1)!(n-j)!} M(P)$$

et prouver que cette majoration est meilleure que celle obtenue en (8).

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option scientifique

Mathématiques I

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et l'on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ rapporté à sa base canonique.

On convient d'identifier un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et l'on pose $N(X) = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. De même, on identifie tout endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ à sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Pour tout nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$, on considère la matrice réelle $A(\theta)$ d'ordre n définie par:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 \cos \theta & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 \cos \theta & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(La diagonale est donc composée d'éléments égaux à $2 \cos \theta$, la sous-diagonale et la sur-diagonale de -1 et tous les autres éléments de la matrice sont nuls).

Enfin, on convient de noter A la matrice $A(0)$ et I_n la matrice-identité d'ordre n .

Dans la partie I, on étudie les solutions de l'équation matricielle $AX = B$, où B est un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$, et on majore $N(X)$ en fonction de $N(B)$.

Dans la partie II, on met en œuvre les résultats obtenus pour approcher une fonction définie comme solution d'une équation.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

On note $E(\theta)$ l'espace vectoriel des suites réelles (u_k) vérifiant pour tout entier k supérieur ou égal à 1 la relation: $u_{k+1} - 2 \cos \theta u_k + u_{k-1} = 0$, et l'on désigne par $F(\theta)$ le sous-ensemble constitué des suites (u_k) de $E(\theta)$ telles que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

a) Expliciter une base de $E(\theta)$ en distinguant les trois cas $0 < \theta < \pi$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Déterminer la suite $(s_k(\theta))$ de $E(\theta)$ telle que $s_0(\theta) = 0$, $s_1(\theta) = \sin(\theta)$ lorsque $0 < \theta < \pi$.

b) Montrer que $F(\theta)$ est un sous-espace vectoriel de $E(\theta)$, puis déterminer $F(\theta)$ pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$.

c) On suppose $0 < \theta < \pi$. Montrer que $F(\theta)$ se réduit à la suite nulle si θ n'appartient pas à l'ensemble des réels de la forme $p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

d) On suppose que $\theta = p\pi/(n+1)$, où p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

Vérifier que la suite $(s_k(\theta))$ appartient à $F(\theta)$ et en déduire la dimension de $F(\theta)$.

2°) Noyau de la matrice $A(\theta)$.

- a) Soit X un vecteur de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
 - A quelle condition sur $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartient-il au noyau de $A(\theta)$?
 - En déduire qu'un vecteur X appartient au noyau de $A(\theta)$ si et seulement s'il existe une suite (u_k) appartenant à $F(\theta)$ telle que $u_1 = x_1, u_2 = x_2, \dots, u_n = x_n$.
 b) En déduire le noyau de $A(\theta)$ en fonction des valeurs prises par θ dans $[0, \pi]$.
 Pour quelles valeurs de θ dans $[0, \pi]$ la matrice $A(\theta)$ est-elle inversible?

3°) Valeurs propres de la matrice A .

- a) Expliciter la matrice $A = A(0)$, et montrer que ses valeurs propres sont réelles (on citera précisément le théorème utilisé).
 b) Soit λ une valeur propre de la matrice A , et X un vecteur propre non nul associé. Expliciter le système d'équations $(A - \lambda I_n)X = 0$ puis, en considérant la $i^{\text{ème}}$ équation de ce système, où i est un entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A , existe un nombre réel θ appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\lambda = 2(1 - \cos\theta)$.
 c) En déduire que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que l'on explicitera sous la forme $\lambda_p = 2(1 - \cos\theta_p)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

4°) Vecteurs propres de la matrice A .

- a) Expliciter le vecteur propre X_p associé à la valeur propre λ_p dont la première composante dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est égale à $\sin(p\pi/(n+1))$.
 b) On considère deux entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$.
 Montrer que ${}^tX_p A X_q = {}^tX_q A X_p$ (où tX désigne la transposée de la matrice-colonne X), puis, en évaluant les deux membres de cette égalité, prouver que ${}^tX_p X_q = 0$.
 c) Calculer, pour $0 < \theta < \pi$, la somme $1 + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + \dots + e^{2in\theta}$.
 En déduire que la somme des carrés des composantes du vecteur X_p , où $1 \leq p \leq n$, est égale à $(n+1)/2$.
 d) On note P la matrice d'ordre n dont les vecteurs-colonnes sont $X_1, X_2, \dots, X_n$. Montrer que la matrice P est symétrique et, à l'aide des résultats précédents, calculer P^2 , puis en déduire l'expression de P^{-1} en fonction de P . Que vaut le produit $P^{-1}AP$?

5°) Etude de l'équation $AX = B$.

On donne un vecteur B de composantes $b_1, b_2, \dots, b_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- a) Etablir que l'équation $AX = B$ admet une solution X et une seule.
 b) Soient dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ les vecteurs V de composantes $1, 1, \dots, 1$ et W de composantes $w_1, w_2, \dots, w_n$, où W vérifie l'équation $AW = V$.
 Montrer que les composantes de W sont données par $w_k = k(n+1-k)/2$, où $1 \leq k \leq n$.
 En déterminant le maximum sur $[0, a]$ de la fonction $x \rightarrow x(a-x)$ (où a est un nombre réel strictement positif donné), établir que $N(W) \leq (n+1)^2/8$.
 c) On suppose dans cette question (et dans cette question seulement) que les réels $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont positifs et l'on note X la solution unique de l'équation $AX = B$.
 - Soit i le plus grand indice tel que $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 En raisonnant par l'absurde, montrer, par considération de la $i^{\text{ème}}$ ligne du système d'équations $AX = B$, que $i = 1$ ou n .
 - Montrer que les composantes de X sont toutes positives.
 d) On pose $Y = N(B)V - B$ et $Z = N(B)V + B$.
 Déterminer le signe des composantes de Y et Z , puis en déduire que, si $AX = B$, on a pour $1 \leq k \leq n$: $|x_k| \leq N(B)w_k$.
 En déduire une majoration de $N(X)$ en fonction de $N(B)$ et de n .

PARTIE II

Etant donnés deux nombres réels a et b et une fonction g à valeurs réelles continue sur le segment $[0, 1]$, on considère la fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$ et vérifiant les trois conditions suivantes:

$$f(0) = a, f(1) = b \text{ et, pour tout élément } x \text{ de } [0, 1], f''(x) = g(x).$$

On se propose ici de déterminer des valeurs numériques approchées de $f(x)$ où x désigne un nombre réel appartenant au segment $[0, 1]$.

1°) Existence et unicité de la solution f .

a) Expliciter la dérivée seconde de la fonction L définie sur $[0, 1]$ par:

$$L(x) = x \int_x^1 (t-1) \cdot g(t) dt + (x-1) \int_0^x t \cdot g(t) dt.$$

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$ et vérifiant les trois conditions suivantes:

$$f(0) = a, f(1) = b \text{ et, pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0, 1], f''(x) = g(x).$$

Exprimer f en fonction de L .

2°) Approximation de f'' par différences finies.

Dans toute la suite du problème, on suppose la fonction g de classe C^2 sur $[0, 1]$.

a) Etablir que la fonction f est de classe C^4 sur $[0, 1]$.

b) On donne un nombre réel x dans $]0, 1[$ et un nombre réel strictement positif h tel que $0 \leq x-h < x+h \leq 1$. Etablir à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à partir du point x sur les segments $[x, x+h]$ et $[x-h, x]$ que:

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{M_2 h^2}{12}$$

où M_2 désigne le maximum (dont on justifiera l'existence) de $|g''|$ sur $[0, 1]$.

Dans la suite, on convient donc d'approcher $f''(x)$ par $[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]/h^2$.

3°) Discrétisation de l'équation $f'' = g$, avec $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

On pose désormais $h = 1/(n+1)$ et l'on note $x_k = kh$ pour $0 \leq k \leq n+1$.

On se propose de calculer des approximations $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, en prenant bien entendu $y_0 = f(x_0) = a$ et $y_{n+1} = f(x_{n+1}) = b$.

A cet effet, on remplace les n équations $f''(x_k) = g(x_k)$ où $1 \leq k \leq n$ par les n équations:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = g(x_k).$$

a) Montrer que le vecteur Y de composantes $y_1, y_2, \dots, y_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est solution d'un système d'équations $AX = B$ où B est un vecteur dont on précisera les composantes.

b) Etablir que le vecteur F de composantes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vérifie $N[A(F-Y)] \leq M_2 h^4/12$.

c) A l'aide des résultats de la partie I, en déduire en fonction de n et de M_2 une majoration de $N(F-Y)$, erreur maximale commise en remplaçant $f(x_k)$ par y_k .

4°) Applications.

a) En déduire que, si $g'' = 0$, alors $y_k = f(x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) Préciser f lorsque $g(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $a = b = 0$.

Retrouver ainsi le résultat de la question I.5.b).

c) Déterminer la solution du système d'équations $AX = B$ lorsque B est le vecteur de composantes $1, 2, \dots, n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.



Mathématiques I

OPTION SCIENTIFIQUE

Vendredi 25 Avril 1997 de 8h à 12h

Dans tout le problème, on considère un nombre entier $p \geq 1$ et, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, on note $R_k[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k .

Dans la partie I, on munit $R_{2p}[x]$ d'un produit scalaire permettant d'obtenir un ajustement affine d'une famille de points du plan à l'aide de la méthode des moindres carrés, puis, dans les parties II et III, on utilise ce produit scalaire pour étudier un ajustement polynomial de cette famille de points.

Les parties II et III du problème sont indépendantes de la partie I.

PARTIE I

1°) Définition d'un produit scalaire sur $R_{2p}[x]$.

On pose pour tout couple (A, B) de polynômes de $R_{2p}[x]$:

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^{i=+p} A(i)B(i).$$

(Dans cette formule, l'indice i prend les valeurs $-p, -(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p-1, p$).
Prouver que l'application $(A, B) \rightarrow \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur $R_{2p}[x]$.

Dans toute la suite du problème, $R_{2p}[x]$ est muni de ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et l'on pose pour tout polynôme A de $R_{2p}[x]$:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}, \quad m(A) = \langle A, 1 \rangle, \quad V(A) = \|A - m(A)\|^2, \quad \sigma(A) = \sqrt{V(A)}.$$

Pour tout couple (A, B) de polynômes de $R_{2p}[x]$, on définit de plus:

$$\text{Cov}(A, B) = \langle A - m(A), B - m(B) \rangle.$$

2°) Propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Que vaut $\|1\|$ (norme du polynôme constant égal à 1)?
- Etablir pour tout couple (A, B) de polynômes de $R_{2p}[x]$ les quatre propriétés:
 - $V(A) = \|A\|^2 - [m(A)]^2$.
 - $\text{Cov}(A, B) = \langle A, B \rangle - m(A).m(B)$.
 - $\langle A, B \rangle = 0$ lorsque A est pair et B impair.
 - $\langle xA, B \rangle = \langle A, xB \rangle$ lorsque A et B sont de degré au plus $2p-1$.

(xA, xB désignent ici les fonctions polynômes $x \rightarrow xA(x), x \rightarrow xB(x)$).

3°) Détermination des normes des polynômes x et x^2 .

- Développer $(i+1)^3$ par la formule du binôme et, en sommant les égalités obtenues pour les entiers i tels que $-p \leq i \leq +p$, déterminer $\|x\|^2$.
- Développer $(i+1)^5$ par la formule du binôme et, en procédant de même, montrer que:

$$\|x^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

4°) Meilleure approximation d'un polynôme A par une constante.

a) Prouver, pour tout polynôme A de $R_{2p}[x]$, que $m(A)$ est le projeté orthogonal de A sur $R_0[x] = R$.

b) En déduire pour toute constante b l'égalité $\|A-b\|^2 = V(A) + (m(A)-b)^2$, et montrer que le minimum de $\|A-b\|^2$ lorsque b décrit R est atteint si et seulement si $b = m(A)$, et que celui-ci est égal à $V(A)$.

c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré du polynôme A a-t-on $V(A) \neq 0$?

Montrer qu'alors $(1, (A-m(A))/\sigma(A))$ est une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(1, A)$ engendré par les polynômes 1 et A.

5°) Meilleure approximation d'un polynôme B par un polynôme de $\text{Vect}(1, A)$.

On donne des polynômes A, B de $R_{2p}[x]$, A étant de degré supérieur ou égal à 1, et on cherche des nombres réels a et b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$.

a) On fixe dans cette question le nombre réel a. Montrer que le nombre réel b minimisant l'expression $\|B - aA - b\|^2$ est $b = m(B) - a m(A)$.

b) Pour tout nombre réel a, on note alors $f(a) = \|(B - m(B)) - a(A - m(A))\|^2$.

Exprimer $f(a)$ en fonction de a, de $V(A)$, $V(B)$ et $\text{Cov}(A, B)$ et, en étudiant les variations de la fonction f, déterminer en fonction de $V(A)$, $V(B)$, $\text{Cov}(A, B)$ le minimum μ de f sur R ainsi que la valeur a_0 de a qui le réalise.

Prouver que μ est le minimum de l'expression $\|B - aA - b\|^2$ pour $(a, b) \in R^2$.

c) Déduire de ces résultats l'inégalité $|\text{Cov}(A, B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)$.

Dans quel cas y-a-t-il égalité dans cette inégalité?

d) *Application:* déterminer en fonction du nombre entier p le minimum de l'expression $\|x^2 - ax - b\|^2$ ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

PARTIE II

On donne une famille de $2p+1$ points (i, y_i) du plan, où le nombre entier i prend les $2p+1$ valeurs $-p, -(p-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, p-1, p$.

On désigne par k un nombre entier tel que $0 \leq k \leq 2p$ et, à tout polynôme P de $R_k[x]$, on associe l'expression:

$$\Delta_k(P) = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=-p}^{i=p} (y_i - P(i))^2.$$

On se propose d'établir que $\Delta_k(P)$ admet un minimum noté δ_k et un seul lorsque P décrit $R_k[x]$, et l'on note alors P_k le polynôme P réalisant ce minimum.

1°) Calcul du minimum δ_{2p} .

a) Etablir que l'application F définie de $R_{2p}[x]$ dans R^{2p+1} par:

$$F(P) = (P(-p), P(-(p-1)), \dots, P(-1), P(0), P(1), \dots, P(p-1), P(p))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En déduire qu'il existe un et un seul polynôme de $R_{2p}[x]$, noté Y dans la suite du problème, tel que $Y(i) = y_i$ pour tout nombre entier i tel que $-p \leq i \leq p$.

b) En déduire la valeur de δ_{2p} .

2°) Existence et unicité de P_k et δ_k .

a) Etablir, pour tout polynôme P de $R_k[x]$, que $\Delta_k(P) = \|P - Y\|^2$.

b) En déduire l'existence et l'unicité du polynôme P_k de $R_k[x]$ minimisant l'expression $\Delta_k(P)$ lorsque P décrit $R_k[x]$, autrement dit tel que $\delta_k = \|P_k - Y\|^2$, et interpréter géométriquement P_k à l'aide de Y et du sous-espace vectoriel $R_k[x]$ de l'espace $R_{2p}[x]$.

c) Déterminer P_0 et δ_0 , puis P_1 et δ_1 en fonction de p, $m(Y)$, $V(Y)$ et $\text{cov}(x, Y)$.

3°) Détermination de P_k et δ_k à l'aide d'une base orthogonale de $R_{2p}[x]$.

On pose $B_0(x) = 1$ et, pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq 2p$, on note B_k le projeté orthogonal du polynôme x^k sur la droite de $R_k[x]$ orthogonale à $R_{k-1}[x]$.

a) Déterminer le polynôme B_1 .

b) Prouver, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, que le polynôme B_k est de degré k et unitaire (autrement dit, le coefficient de x^k dans B_k est 1). Etablir ensuite, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, que la famille $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ est une base orthogonale de $R_k[x]$.

En particulier, la famille $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$ est une base orthogonale de $R_{2p}[x]$.

c) En exprimant le polynôme Y dans cette base $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$ et en formant les produits scalaires $\langle B_i, Y \rangle$, établir que:

$$Y = \sum_{i=0}^{2p} \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

d) En déduire, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$:

$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{\langle B_i, Y \rangle}{\|B_i\|^2} B_i.$$

e) En déduire, pour $1 \leq k \leq 2p$, l'expression de P_k en fonction de P_{k-1} , B_k et Y , puis celle de δ_k en fonction de δ_{k-1} , B_k et Y .

PARTIE III

Dans cette partie, on se propose de déterminer par récurrence la suite des polynômes B_k définis dans la partie II.

1°) Parité de B_k .

On pose, pour $1 \leq k \leq 2p$: $A_k(x) = (-1)^k B_k(-x)$.

a) Vérifier que A_k est orthogonal à $R_{k-1}[x]$.

b) En déduire que $A_k = B_k$, et que B_k est de même parité que l'entier k .

2°) Expression de xB_k dans la base $(B_0, B_1, \dots, B_{2p})$.

a) Etablir à l'aide de (3) que $\langle xB_k, B_k \rangle = 0$ pour $0 \leq k < 2p$.

b) Etablir à l'aide de (4) que $\langle xB_k, B_i \rangle = 0$ pour $2 \leq k \leq 2p-1$ et $0 \leq i \leq k-2$.

c) En déduire qu'il existe pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq 2p-1$ deux nombres réels α_k, β_k tels que $xB_k = \alpha_k B_{k+1} + \beta_k B_{k-1}$. Que vaut α_k ?

d) En remarquant que $xB_{k-1} - B_k$ appartient à $R_{k-1}[x]$, montrer que:

$$\langle xB_{k-1}, B_k \rangle = \langle B_k, B_k \rangle.$$

En déduire que $\beta_k = \|B_k\|^2 / \|B_{k-1}\|^2$, donc que:

$$B_{k+1} = xB_k - \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}.$$

e) A l'aide de ce résultat, expliciter en fonction de l'entier p , supposé supérieur ou égal à 2, les polynômes B_2 et B_3 dans la base canonique de $R_3[x]$.

ESSEC**Option scientifique****Mathématiques I**

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère dans ce problème une fonction f à valeurs réelles définie sur $[-2, -1]$ et l'on se propose de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe C^1 , et vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$.

Dans la partie I, on étudie une suite utilisée dans la partie II.

On prolonge alors f en une fonction F vérifiant la relation précédente sur $[-1, 0]$, puis sur $[-1, 2]$, ce qui fait respectivement l'objet des parties II et III.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I**1°) Etude d'une fonction auxiliaire.**

On considère dans cette question la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = x - x^2$.

- Etudier les variations et représenter graphiquement cette fonction ψ .
- Etablir, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que ψ induit une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $]-\infty, 0]$.
- Etudier les variations et représenter graphiquement (sur la figure précédente) la bijection réciproque.

2°) Etude d'une suite définie par récurrence.

On considère la suite (x_n) de premier terme $x_0 = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par :

$$x_n - x_n^2 = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n < 0.$$

(on donne ainsi un procédé permettant de définir x_n en fonction de x_{n-1} .)

- Déterminer x_1 et x_2 , puis montrer que, pour tout nombre entier naturel n , le nombre réel x_n est bien défini, de façon unique, à partir de x_{n-1} .
- Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (x_n) , puis montrer que (x_n) converge vers 0.
- On pose pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1 + u_n), \quad w_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n).$$
 - Prouver la convergence de la série $\sum u_n$, et déterminer sa somme.
 - Prouver la convergence de la série $\sum v_n$, et donner un majorant de sa somme.
 - Prouver la convergence de la suite (w_n) , et montrer que $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$.

Dans la suite, on considère une fonction f à valeurs réelles positives, de classe C^1 sur le segment $[-2, -1]$ et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.

Partie II

On étudie dans cette partie le problème P0 suivant :

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 hypothèses :

- F est de classe C^1 sur $[-2, 0]$.
- $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à $[-2, -1]$ (f est "prolongée" par F).
- $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à $[-1, 0]$.

1°) Unicité d'une solution F .

On suppose qu'il existe une fonction F vérifiant les trois hypothèses précédentes.

- Si t est un réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$, établir que $t - t^2$ appartient à $[x_{n-1}, x_n]$.

- b) Etablir que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_1, x_2]$:

$$F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f(t-t^2)dt.$$

- c) Etablir pour $n \geq 2$ que si x désigne un nombre réel appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t-t^2)dt.$$

En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}, x_n]$ détermine F sur $[x_n, x_{n+1}]$.

- d) Quelle est la réunion I des intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ pour $n \geq 0$?

En déduire que, s'il existe une solution F au problème P_0 , celle-ci est unique.

2°) Existence d'une solution F .

On construit sur I une fonction F de la façon suivante:

la fonction F est égale à f sur $[-2, -1]$ puis, la supposant ensuite connue sur $[x_{n-1}, x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose pour tout nombre réel x appartenant à $[x_n, x_{n+1}]$:

$$F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t-t^2)dt.$$

- a) Montrer, pour tout nombre entier naturel n , que la fonction F est de classe C^1 sur $[x_n, x_{n+1}]$ et préciser $F'(x)$ en fonction de F et de x .

Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en x_1 , puis, de façon générale, en x_n .
En déduire que la fonction F est de classe C^1 sur I .

- b) Etudier le sens de variation de F sur $[x_1, x_2]$, puis montrer que F est croissante sur $[-1, 0[$.

- c) On note M le maximum de la fonction positive f sur $[-2, -1]$. Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[-2, x_{n+1}]$, que $0 \leq F(x) \leq Mw_n/2$.

En déduire que la fonction F est majorée sur l'intervalle $[-2, 0[$.

- d) Etablir que $F(x)$ admet une limite L quand x tend vers 0. On pose alors $F(0) = L$.
Prouver, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, que F est de classe C^1 sur $[-2, 0]$ (on précisera $F'(0)$), puis que F est solution du problème P_0 .

3°) Etude du signe de L .

- a) Déterminer le signe de $L = F(0)$.

- b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul?

Partie III

On étudie dans cette partie le problème P_1 suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:

H1] F est de classe C^1 sur $[-2, 1]$.

H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à $[-2, -1]$ (f est "prolongée" par F).

H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à $[-1, 1]$.

On introduit à cet effet les notations suivantes:

- E désigne l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur $[0, 1]$ et telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, on ait $g'(x) = g(x - x^2)$.
- ϕ désigne l'application associant à tout élément g de E le nombre réel $g(0)$.

1°) Propriétés de l'application ϕ .

- a) Prouver que E est un espace vectoriel, et que l'application ϕ est linéaire sur E .

- b) Soit g un élément du noyau de ϕ et M le maximum de la fonction $|g|$ sur $[0, 1/4]$.

- Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, on a $|g(x)| \leq Mx$.

- En déduire que $M = 0$, puis que g est la fonction nulle sur $[0, 1]$. Conclure.

2°) Etude d'une suite de fonctions (g_n) .

On définit une suite de fonctions (g_n) de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ en posant $g_0(x) = 1$, puis pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt.$$

- a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
 b) Etablir que g_n est une fonction polynôme. Notant d_n son degré, on exprimera d_{n+1} en fonction de d_n , puis l'on en déduira d_n en fonction de n .
 c) Etant donné un nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, établir par récurrence sur n la double inégalité suivante:

$$0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- d) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, que la suite $(g_n(x))$ est croissante, majorée par e^x , donc convergente vers une limite que l'on conviendra de noter $g(x)$ (et g réalise donc une application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$).

3°) Etude de la fonction g définie par $g(x) = \lim g_n(x)$.

- a) Etablir, pour tout couple (n, p) de nombres entiers naturels et tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}.$$

En déduire, pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

- b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple (x, h) de nombres réels tels que x et $x+h$ appartiennent à $[0, 1]$:

$$|g(x+h) - g(x)| \leq 2\left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) + |g_n(x+h) - g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h , que $|g(x+h) - g(x)|$ peut être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

En déduire enfin que g est continue en tout x appartenant à $[0, 1]$, et donc sur $[0, 1]$.

- c) Prouver, pour $0 \leq x \leq 1$, que la limite de l'expression suivante est nulle:

$$\int_0^x g(t - t^2) dt - \int_0^x g_n(t - t^2) dt.$$

En revenant à la définition de la suite (g_n) , en déduire que:

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2) dt.$$

- d) Prouver enfin que g est un élément de E tel que $\phi(g) = 1$.

4°) Résolution du problème P1.

- a) Déduire des questions précédentes que l'application ϕ est bijective, et donner la dimension de l'espace vectoriel E .
 b) Déduire des résultats des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème P1.

5°) Résolution du problème P2.

On étudie enfin le problème P2 suivant:

Etudier l'existence et l'unicité d'une fonction $F: [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les 3 hypothèses:

- H1] F est de classe C^1 sur $[-2, 2]$.
 H2] $F(x) = f(x)$ pour tout nombre x appartenant à $[-2, -1]$ (f est "prolongée" par F).
 H3] $F'(x) = F(x - x^2)$ pour tout nombre x appartenant à $[-1, 2]$.

- a) Prouver que, si F est solution du problème P2, l'application $x \rightarrow F(x) + F(1-x)$ est constante sur $[-1, 2]$.

- b) En déduire que le problème P2 admet une solution F et une seule.

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

Option scientifique

Mathématiques I

Vendredi 21 Mai 1999 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout ce problème, on désigne par :

- a) E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$.
- b) $S(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E .
On rappelle qu'un endomorphisme u est dit symétrique s'il vérifie $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tout couple (x, y) de vecteurs appartenant à E .
- c) $T(E)$ le sous-ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques u dont le rang est inférieur ou égal à 1 et qui vérifient $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ pour tout vecteur x appartenant à E .

Dans la partie I, on décrit les endomorphismes appartenant à $T(E)$ puis, dans la partie II, on munit l'espace vectoriel $S(E)$ d'un produit scalaire et on étudie au sens de la norme associée les meilleures approximations des éléments de $S(E)$ par des éléments de $T(E)$.

Préliminaire: Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

On désigne par $M_p(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $p \geq 1$. On associe à toute matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ sa trace notée $Tr(A)$ et définie par :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^p a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{pp}.$$

- a) Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ désignent deux matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, expliciter $Tr(AB)$ et montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
- b) Si M' et M désignent deux matrices semblables appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, en déduire que les traces de M' et M sont égales.

Dans la suite, on appelle *trace d'un endomorphisme de E* la valeur commune de la trace de ses matrices M relativement aux différentes bases de E .

Partie I : Etude des éléments de l'ensemble T(E).

1°) Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul x de E.

On considère dans cette question un vecteur non nul x appartenant à E.

- a) Pour tout vecteur v appartenant à E, exprimer en fonction de x et v l'unique nombre réel $\lambda(v)$ tel que le vecteur $v - \lambda(v)x$ soit orthogonal à x .
- b) En remarquant que tout vecteur v appartenant à E peut s'écrire sous la forme:

$$(1) \quad v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$$

établir que la droite dirigée par le vecteur x et le sous-espace X constitué des vecteurs de E orthogonaux au vecteur x sont supplémentaires dans E.

2°) Elément de T(E) associé à un vecteur de E.

A tout vecteur non nul x de E, on associe l'application u_x de E dans E définie par:

$$u_x(v) = \langle x, v \rangle x.$$

- a) Montrer que u_x appartient à T(E), puis écrire la matrice de u_x dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x .
En déduire la trace de u_x et la trace de $u_x \circ u_x$ en fonction de x .
- b) Déterminer en fonction de x les valeurs propres et les sous-espaces propres de u_x .
- c) On désigne par f un endomorphisme de E.
A l'aide de la formule (1), expliciter les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$ dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x , puis en déduire la trace de $f \circ u_x$ en fonction de x .

3°) Vecteurs de E associés à un élément de T(E).

A tout élément non nul u de T(E), on associe un vecteur non nul x de la droite $\text{Im } u$.

- a) Montrer que x est vecteur propre de u et que la valeur propre associée μ est positive.
- b) A l'aide de la formule (1), montrer que l'on a pour tout vecteur v appartenant à E :

$$u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

- c) En déduire que la valeur propre μ est strictement positive et qu'il existe un vecteur y de E au moins tel que $u = u_y$, c'est à dire tel que l'on ait pour tout vecteur v appartenant à E:
$$u(v) = \langle y, v \rangle y.$$
- d) L'application de E dans T(E) associant à tout vecteur x appartenant à E l'endomorphisme u_x de T(E) défini par $u_x(v) = \langle x, v \rangle x$ est-elle injective ? surjective ?

Partie II : Approximation des éléments de S(E) par des éléments de T(E).

On associe à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel:

$$[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$$

valeur commune de la trace des matrices de $f \circ g$ relativement aux différentes bases de E. Ainsi, lorsque l'espace euclidien E est rapporté à une base orthonormale dans laquelle on désigne par $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices (alors symétriques) de f et g , on a:

$$[f, g] = \text{Tr}(AB).$$

1°) Un produit scalaire sur S(E).

- a) Montrer que l'application associant à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel $[f, g] = \text{Tr}(f \circ g)$ est un produit scalaire sur S(E).

On notera N la norme associée à ce produit scalaire, définie par $N(f) = \sqrt{[f, f]}$.

- b) On désigne par f un élément de $S(E)$ et par u_x un élément de $T(E)$. Déduire des résultats obtenus dans la partie I que:

$$N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

Dans la suite, on suppose que l'endomorphisme symétrique f est *donné* dans $S(E)$ et l'on pose pour tout vecteur x appartenant à E :

$$F(x) = N^2(f) - 2\langle x, f(x) \rangle + \|x\|^4.$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs x de E , c'est à dire les endomorphismes u_x de $T(E)$, qui réalisent le minimum $m(f) = \inf\{ F(x) / x \in E \}$ dans la mesure où celui-ci existe.

2°) Condition nécessaire de minimum pour F .

Pour tout vecteur x et pour tout vecteur unitaire y (vérifiant donc $\|y\| = 1$) appartenant à E , on considère la fonction h définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par:

$$h(t) = F(x + ty).$$

- Montrer que h est une fonction polynôme de degré 4 dont on précisera les coefficients.
- Prouver, si F présente un minimum en x pour tout vecteur unitaire y , que $h'(0) = 0$.
- En déduire que $f(x) = \|x\|^2 x$.
- Prouver, si F présente un minimum en x , que:

$$F(x + ty) - F(x) = t^2[(t + 2\langle y, x \rangle)^2 + 2(\|x\|^2 - \langle y, f(y) \rangle)].$$

3°) Condition nécessaire et suffisante de minimum pour F .

Prouver que $F(x) = m(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

$$(i) \ f(x) = \|x\|^2 x \quad ; \quad (ii) \ \text{pour tout vecteur unitaire } y: \ \langle y, f(y) \rangle \leq \|x\|^2.$$

4°) Etude du maximum de $\langle y, f(y) \rangle$ pour $\|y\| = 1$.

- Justifier, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ formée de vecteurs propres pour f . On notera $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f associées à ces vecteurs propres $e_1, e_2, \dots, e_p$ en supposant celles-ci classées dans l'ordre croissant.
- Exprimer $N(f)$ en fonction des valeurs propres de f .
- En décomposant un vecteur unitaire y dans la base précédente, montrer que:

$$\sup\{ \langle y, f(y) \rangle / \|y\| = 1 \} = \lambda_p.$$

On précisera de plus quels sont les vecteurs unitaires y tels que $\langle y, f(y) \rangle = \lambda_p$.

5°) Conclusion et valeur de $m(f)$.

- Montrer que si $\lambda_p \leq 0$, alors $F(x) = m(f)$ si et seulement si x est nul.
- Déterminer si $\lambda_p > 0$ la valeur de $m(f)$ et l'ensemble des vecteurs x tels que $F(x) = m(f)$.

6°) Application à l'étude d'un exemple.

Dans cette question, l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^p$ est rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique. On suppose que, dans cette base canonique, la matrice symétrique $M = (m_{ij})$ de f vérifie les deux propriétés suivantes:

- $m_{ij} > 0$ pour tout couple (i, j) de nombres entiers compris entre 1 et p .
- $\sum_{j=1}^p m_{ij} = 1$ pour tout nombre entier i compris entre 1 et p .

- a) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
- b) On désigne par λ une valeur propre de M , par X un vecteur associé de composantes $x_1, x_2, \dots, x_p$, et par i un nombre entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$.
 En considérant la $i^{\text{ème}}$ ligne du système $MX = \lambda X$, montrer que $|\lambda| \leq 1$, puis que l'égalité $|\lambda| = 1$ implique $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2 = \dots = x_p$.
(On rappelle à cet effet que dans l'inégalité triangulaire de $\mathbf{R}$, il y a égalité si et seulement si tous les nombres réels qui interviennent sont de même signe).
 Préciser la dimension du sous-espace propre associé à 1.
- c) Déterminer enfin les vecteurs x appartenant à $\mathbf{R}^p$ tels que $F(x) = m(f)$, puis démontrer alors qu'il existe un unique endomorphisme u appartenant à $T(E)$, dont on donnera la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$, tel que $m(f) = N^2(f - u)$.
 Que représente cette dernière matrice ?

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mardi 9 Mai 2000 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans l'ensemble du problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et par $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n .
On note P_n le sous-ensemble de $\mathbf{R}_n[X]$ formé des fonctions-polynômes unitaires et de degré n , autrement dit des fonctions-polynômes de degré n et dont le coefficient de x^n est égal à 1.
L'objectif du problème est de déterminer des fonctions-polynômes P appartenant à P_n et réalisant le minimum sur P_n de chacune des trois expressions suivantes :

$$N_1(P) = \int_{-1}^{+1} |P(x)| dx \quad ; \quad N_2(P) = \sqrt{\int_{-1}^{+1} P^2(x) dx} \quad ; \quad N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| / -1 \leq x \leq 1\}.$$

Les trois parties du problème sont consacrées à la résolution des trois problèmes ainsi définis.
La partie I est indépendante des deux suivantes.

PARTIE I : Minimisation de $N_2(P)$ pour P décrivant P_n

On associe à tout couple (P, Q) de fonctions-polynômes de $\mathbf{R}_n[x]$ le nombre réel suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1°) Montrer que l'application $(P, Q) \rightarrow \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[x]$.

2°) On considère la fonction f associant à tout n -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de nombres réels l'expression suivante (qui représente le carré de la distance entre les deux fonctions-polynômes $t \rightarrow t^n$ et $t \rightarrow x_{n-1}t^{n-1} + \dots + x_1t + x_0$ de $\mathbf{R}_n[x]$) :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - x_{n-2}t^{n-2} - \dots - x_1t - x_0)^2 dt.$$

- a) Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ réalisant le minimum (désormais noté m_n) de l'expression $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ lorsque $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ décrit $\mathbf{R}^n$, et montrer que ces n nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ vérifient les n relations suivantes :

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1t - a_0)t^k dt = 0 \quad \text{où } 0 \leq k < n$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \leq k < n$.

- b) On pose pour tout nombre réel x distinct de $-1, -2, \dots, -n, -n-1$:

$$F(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{a_{n-1}}{x+n} - \frac{a_{n-2}}{x+n-1} - \dots - \frac{a_1}{x+2} - \frac{a_0}{x+1}.$$

Etablir l'existence d'un nombre réel a tel que l'on ait pour x distinct de $-1, -2, \dots, -n, -n-1$:

$$(x+n+1)(x+n)(x+n-1) \dots (x+2)(x+1)F(x) = ax(x-1)(x-2) \dots (x-n+1).$$

Déterminer la valeur de a en faisant tendre x vers $-n-1$ dans chacun des deux membres de l'égalité précédente (on exprimera a en fonction de $n!$ et $(2n)!$).

- c) Etablir l'égalité suivante :

$$m_n = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_1t - a_0)t^n dt.$$

- d) Etablir enfin que $m_n = F(n)$ et en déduire que $m_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

3°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n .

- a) Pour toute fonction-polynôme P appartenant à P_n , effectuer le changement de variables défini par $x = 2t-1$ dans l'intégrale figurant dans l'expression de $N_2(P)$ et en déduire que :

$$N_2(P) \geq 2^n \sqrt{2m_n}.$$

- b) En déduire le minimum de $N_2(P)$ lorsque P décrit P_n .

PARTIE II : Minimisation de $N_\infty(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (T_k) définies par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ puis, pour $k \geq 1$, par la relation de récurrence :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Par ailleurs, on rappelle la formule de trigonométrie suivante : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions T_k .

- a) Montrer que T_k est une fonction-polynôme de degré k , de coefficient dominant 2^{k-1} ($k \geq 1$).
b) On considère un nombre réel θ . Exprimer en fonction de θ les nombres $T_1(\cos\theta)$, $T_2(\cos\theta)$, $T_3(\cos\theta)$ et montrer que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout nombre entier naturel k .

2°) On résout maintenant le problème de la minimisation de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n .

- a) On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$N_\infty(P) = \sup\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Préciser pour $0 \leq k \leq n$ le signe de $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) - P(\cos(\frac{k\pi}{n}))$.
 - En déduire que $T_n/2^{n-1} - P$ admet au moins n racines réelles, puis établir une contradiction en examinant le degré de $T_n/2^{n-1} - P$.
- b) En déduire le minimum de $N_\infty(P)$ lorsque P décrit P_n .

PARTIE III : Minimisation de $N_1(P)$ pour P décrivant P_n

On considère la suite des fonctions (U_k) définies par $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ et pour $k \geq 1$ par :

$$U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

1°) On étudie dans cette question quelques propriétés des fonctions U_k .

- a) Montrer que U_k est une fonction-polynôme, préciser son degré et son coefficient dominant. Etablir de plus que $U_k(-x) = (-1)^k U_k(x)$.
- b) Déterminer les suites (u_k) vérifiant la relation de récurrence : $u_{k+1} - 2\cos\theta u_k + u_{k-1} = 0$.
En déduire pour tout nombre réel θ appartenant à $]0, \pi[$ l'expression de $U_k(\cos\theta)$ en fonction de $\sin((k+1)\theta)$ et $\sin\theta$, puis déterminer $U_k(1)$ et $U_k(-1)$ à l'aide d'un passage à la limite.
- c) En dérivant la relation $T_{k+1}(\cos\theta) = \cos((k+1)\theta)$, exprimer $(k+1)U_k$ en fonction de la dérivée de T_{k+1} .

2°) Pour tout nombre réel x , on note $\text{sgn}(x)$ la fonction "signe de x ", définie par :

$$\text{sgn}(x) = 1 \text{ si } x > 0, \quad \text{sgn}(x) = 0 \text{ si } x = 0, \quad \text{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0.$$

On considère, s'il en existe, une fonction-polynôme P appartenant à P_n telle que :

$$(*) \quad \int_{-1}^1 x^k \text{sgn}(P(x)) dx = 0 \quad \text{où } 0 \leq k < n.$$

- a) Prouver, pour toute fonction-polynôme Q appartenant à P_n , l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^1 (Q(x) - P(x)) \text{sgn}(P(x)) dx = 0.$$

- b) En déduire que $N_1(P) \leq N_1(Q)$.
- c) Calculer l'intégrale $N_1(U_n)$ à l'aide du changement de variables $x = \cos(\theta/(n+1))$ où θ décrit le segment $[0, (n+1)\pi]$. En admettant que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie l'hypothèse (*), en déduire le minimum de $N_1(P)$ lorsque P décrit P_n .

3°) On démontre pour terminer que la fonction-polynôme $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse faite à la question précédente. A cet effet, on introduit les nombres réels suivants :

$$c_j = \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad \text{où } 0 \leq j \leq n+1.$$

(On notera que ceux-ci vérifient $-1 = c_{n+1} < c_n < \dots < c_2 < c_1 < c_0 = 1$).

- a) Déterminer la valeur de $U_n(c_j)$ pour $1 \leq j \leq n$ et déterminer le signe de $U_n(x)$ sur chacun des $n+1$ intervalles $]c_{n+1}, c_n[, \dots,]c_2, c_1[,]c_1, c_0[$.

On considère alors l'intégrale suivante, où k désigne un nombre entier tel que $0 \leq k < n$:

$$I_k = \int_{-1}^1 x^k \text{sgn}(U_n(x)) dx.$$

- b) On suppose $n+k$ impair. Déterminer la valeur de I_k en étudiant la parité de la fonction figurant sous le signe intégral.

c) On suppose $n+k$ pair. Prouver l'égalité suivante :

$$I_k = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j^{k+1}.$$

En remarquant que :

$$c_j = \frac{1}{2} [\exp(i \frac{j\pi}{n+1}) + \exp(-i \frac{j\pi}{n+1})]$$

prouver que I_k est nul et en déduire que $U_n/2^n$ vérifie bien l'hypothèse de la question 2°.

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n) . Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S .

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1°) Convergence de la suite (J_p/I_p)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Dédire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

- a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p ($p \geq 1$).
 b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

- c) Calculer J_0 et I_0 , puis déterminer la limite S de la suite (S_n) .

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
 On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :
 $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$

1°) Sommation de séries télescopiques

- a) Etablir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
 b) Etablir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

- c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.
 d) Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de (S_n)

- a) Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

- b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

- c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

- d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S'_n pour $q = 2$ lorsque n est donné.

PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Etablir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

2°) Etude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4 .
- Montrer que $U_n' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n' = V_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n .
- c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n .
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir pour $p \geq 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x) dx}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \rightarrow |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$ lorsque n est donné.

CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Jeudi 2 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.

L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II). A cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et leurs racines. Les deux parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II.

PARTIE I

1°) Définition d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$

- a) Etablir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\phi(P) = 2xP' - P''$ (où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Ecrire sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Éléments propres de l'endomorphisme ϕ

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de ϕ (on supposera que $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$) et montrer que ϕ est diagonalisable.
- b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0.$$

- c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq n$, que H_p est nécessairement de degré p .
- d) Expliciter les polynômes H_0, H_1, H_2, H_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} ($1 \leq p \leq n$) et de x^{p-2} ($2 \leq p \leq n$) dans l'expression du polynôme H_p .

3°) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

- a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\exp(-x^2)dx.$$

- b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- c) Exprimer la dérivée de $x \rightarrow P'(x)\exp(-x^2)$ en fonction de $\phi(P)(x)\exp(-x^2)$, puis prouver qu'on a pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

- d) En déduire que $\langle H_p, H_q \rangle = 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n , puis que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire. Montrer enfin que $\langle H_p, Q \rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ ($1 \leq p \leq n$).

4°) Etude des racines des polynômes H_p ($1 \leq p \leq n$)

- a) Montrer, en remarquant que $\langle H_p, H_0 \rangle = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.
- b) On note $a_1, a_2, \dots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leq p$) et on pose alors $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$.
Étudier le signe du polynôme $H_p P_m$ et déterminer la valeur de l'intégrale $\langle H_p, P_m \rangle$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.
- c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5°) Relations entre les polynômes H_p ($2 \leq p \leq n$)

- a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$ où $3 \leq p \leq n$:

$$\langle xH_{p-1}, Q \rangle = 0 \quad ; \quad \langle H_p - xH_{p-1}, Q \rangle = 0.$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, établir la relation :

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (\text{pour } 2 \leq p \leq n).$$

- b) Prouver l'égalité $\langle H_p', Q \rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$ où $2 \leq p \leq n$, puis en déduire la relation :

$$H_p' = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \leq p \leq n).$$

PARTIE II

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué des n -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué des n -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (mais on ne demande pas de vérifier que cette partie U de $\mathbb{R}^n$ est ouverte).

On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables F définie sur l'ouvert U par :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient : $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \ln(x_2 - x_1) - 2 \ln(x_3 - x_2) - 2 \ln(x_3 - x_1)$.

1°) Etude du cas particulier $n = 2$ ($F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1)$)

- Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point $x = (x_1, x_2)$ de U et déterminer l'unique point a de U où ces dérivées partielles sont nulles.
- Calculer $F(a)$ et montrer que F présente un minimum local en a .

2°) Etude du point critique de F dans le cas général

On associe à tout point a de U le polynôme $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. On rappelle qu'un point a de U est dit point critique de F si les dérivées partielles de F sont nulles en a .

- Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}.$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$.

- Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé) le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t) \quad ; \quad g(t) = tP(a_i + t).$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$ (on posera $x = a_i + t$).

- Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$

Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$, puis démontrer que si a est point critique de F , alors $2xP' - P''$ admet pour racines $a_1, a_2, \dots, a_n$.

- En déduire qu'il existe un nombre réel λ (dont on précisera la valeur) tel que $2xP' - P'' = \lambda P$, puis comparer les polynômes P et H_n . Etablir que F admet un unique point critique a dans U .

3°) Nature du point critique de F dans le cas général

- Montrer, si x, y appartiennent à U , que $tx + (1-t)y$ appartient aussi à U si $0 \leq t \leq 1$.
- On dit qu'une fonction f définie sur l'ouvert U est convexe si :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \rightarrow x_i^2$ est convexe sur U .
- Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\rightarrow -\ln(x) \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \rightarrow -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U .
- Etablir que F est convexe sur U .

- On désigne par a le point critique de F et par x un élément de U et on pose pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\psi(t) = F(tx + (1-t)a).$$

- Calculer la dérivée $\psi'(t)$ et montrer que $\psi'(0) = 0$.
- Etablir l'inégalité ci-dessous pour $0 < t \leq 1$, puis conclure que F admet un minimum en a :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a).$$

4°) Calcul du minimum $F(a)$ de F dans le cas général

- On désigne par $y_1, \dots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1} et par $z_1, \dots, z_{n-2}$ les racines de H_{n-2} ($n \geq 3$).

- Etablir à l'aide de la relation $2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$, les relations :

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left(\frac{n-1}{2} \right)^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i) \right| \quad ; \quad \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \frac{2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

- Etablir que $|H'_n(a_i)| = \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - a_i) \right|$ et évaluer $p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ en fonction de $\prod_{i=1}^n H'_n(a_i)$.

- Etablir à l'aide de la relation $H'_n = nH_{n-1}$ l'égalité $p_n^2 = n^n \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|$.

- En déduire p_n en fonction de n .

b) En remarquant que le polynôme H_n vérifie l'égalité suivante :

$$H_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n - \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x^{n-1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n,$$

calculer les sommes $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, puis $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2$.

En déduire la valeur $F(a)$ du minimum de F sur U et retrouver lorsque $n = 2$ le résultat du II.1°.

CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 19 Mai 2003 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par :

- $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n .
 - $\mathbf{C}^n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathbf{C}^n$ sur $\mathbf{R}$.
- En particulier, $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$.

A toute fonction f appartenant à $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$, on associe l'application notée ϕf définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\phi f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

PARTIE I : Généralités

1°) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de ϕf en fonction de celles de f .

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1) du.$$

b) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.

c) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de ϕf ?

d) On suppose la fonction f convexe (resp. concave). Est-ce le cas de ϕf ?

e) On suppose que la fonction f a une limite L en $\pm\infty$. Est-ce le cas de ϕf ?

2°) Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

- a) Montrer que $\mathbf{R}_n[x]$ est stable par ϕ . On note alors ϕ_n l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.
- b) Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.
- c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n .

3°) Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ .

- a) Montrer, pour toute fonction f de $C^0(\mathbf{R})$, que ϕf est de classe C^1 et préciser sa dérivée.
Pour quelles valeurs du nombre entier j l'espace vectoriel $\phi(C^j(\mathbf{R}))$ est-il inclus dans $C^j(\mathbf{R})$?
- b) Montrer que $\text{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.
- c) L'endomorphisme ϕ est-il surjectif ? injectif ?

4°) Dans cette question, on étudie les éléments propres de ϕ .

- a) On considère une valeur propre λ de l'endomorphisme ϕ , autrement dit un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $C^0(\mathbf{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda f$.
Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est à dire toute fonction continue non nulle f telle que $\phi f = \lambda f$, est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
- b) Quelles sont les fonctions-polynômes f qui sont fonctions propres de ϕ ?
- c) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbf{R}$) telle que $\phi f = \lambda f$.
En déduire que tout nombre réel $\lambda > 0$ est valeur propre de ϕ .
- d) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\phi)$ associé à la valeur propre 1, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x , ou :

$$\int_{x-1}^x f(t)dt = f(x).$$

PARTIE II : Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

1°) On considère la fonction f_0 définie de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_0(x) = (x - \frac{1}{2}) \exp(\frac{1}{x(x-1)}).$$

- a) Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $(1/2, 0)$.
- b) Montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

2°) On définit alors par récurrence à partir de f_0 une suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_{n+1}(x) = f_n(1) \exp(x) - \exp(x) \int_0^x f_n(t) \exp(-t) dt.$$

- a) Montrer que f_{n+1} est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que :

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

- b) Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que :

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- c) Etablir enfin, pour tout nombre réel x de $[0, 1]$, que $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt + \int_x^1 f_n(t)dt$.
- d) On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$ par $f(x) = f_n(x - n)$.
Ainsi, la fonction f est définie sur la réunion de ces intervalles $[n, n+1[$, et donc sur $[0, +\infty[$.
Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 1$.

3°) On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$.
A cet effet, on pose $f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$ pour $-1 \leq x < 0$.

Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 0$.

En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc, on obtient une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x (on ne demande pas d'explicitier ce raisonnement).

PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$

On désigne toujours par f une application de $E_1(\phi)$ et par n un nombre entier naturel.

1°) On étudie dans cette question les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.

a) Justifier l'existence du maximum M_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$, puis celle d'un nombre réel x_n appartenant à $[n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que :

- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_{n-1})$ à $f(x_n)$.
- f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.

c) On définit de même le minimum m_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$.

Etablir la monotonie de la suite (m_n) et en déduire la convergence des suites (M_n) et (m_n) .

2°) On étudie dans cette question l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et on pose :

$$L = 2 \int_0^1 t f(t) dt.$$

a) Calculer la dérivée de l'application $x \rightarrow g(x) = \int_x^{x+1} (t-x)f(t)dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L .

b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$:

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que $0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

c) Etablir une inégalité analogue faisant intervenir L , m_n et m_{n+1} , et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

PARTIE IV : Recherche des fonctions bornées de $E_1(\phi)$

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\phi)$ et on note alors :

$$M = \sup \{ |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

1°) On étudie dans cette question la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

- a) Comparer u_0 et $\phi f^2 - f^2$ (ou $\phi(f^2) - f^2$).
- b) Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0 .

2°) On définit alors par récurrence à partir de u_0 une suite de fonctions (u_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$u_n(x) = \phi u_{n-1}(x) \quad \text{c'est à dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^x u_{n-1}(t) dt.$$

- a) Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n .
- b) Déterminer le sens de variation de la suite $n \rightarrow u_n(x)$ lorsque le nombre réel x est fixé.
- c) Etablir pour tout nombre réel x et tout nombre entier naturel n l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2.$$

- d) En déduire que la suite $n \rightarrow u_n(x)$ converge vers 0, puis que f est constante sur $\mathbf{R}$.

CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 12 Mai 2004 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans ce problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et on convient d'identifier tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, c'est à dire :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La transposée d'une telle matrice X est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Le produit scalaire canonique d'un vecteur X et d'un vecteur Y de $\mathbf{R}^n$ est alors égal à :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme euclidienne de X est définie par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ et on dira qu'une suite de vecteurs (X_p) de $\mathbf{R}^n$ converge vers un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ si la suite $\|X_p - X\|$ converge vers 0.

Pour finir, on désigne par :

- I la matrice-identité d'ordre n .
- A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

PARTIE I : Etude d'une suite de vecteurs

1°) Dans cette question, on note C un vecteur non nul de composantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de $\mathbf{R}^n$.

a) Expliciter le produit matriciel $C^t C$. La matrice $C^t C$ est-elle diagonalisable?

b) Exprimer $(C^t C)^2$ en fonction de $C^t C$ et de la norme de C .

c) En déduire que toute valeur propre de $C^t C$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.

d) Préciser le sous-espace propre associé à 0.

Calculer $C^t C C$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

e) En déduire la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C^t C$.

Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

2°) Dans cette question, on désigne par X et Y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

a) Établir que $'XY = 'YX$, $'XAY = \langle X, AY \rangle = \langle AX, Y \rangle$, $(XY)^2 = X(Y^t Y)X = Y(X^t X)Y$.

b) Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_n$ de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $AU_1 = \lambda_1 U_1, AU_2 = \lambda_2 U_2, \dots, AU_n = \lambda_n U_n$.

c) Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ainsi que leurs normes à l'aide des produits scalaires $\langle U_i, X \rangle$ et $\langle U_i, AX \rangle$ où $1 \leq i \leq n$, puis prouver l'égalité suivante :

$$\langle X, AX \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle U_i, X \rangle^2.$$

d) En déduire les égalités matricielles suivantes :

$$I = \sum_{i=1}^n U_i^t U_i \quad ; \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i^t U_i.$$

Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i^t U_i$.

e) En déduire les inégalités suivantes :

$$\min_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2 \leq \langle X, AX \rangle \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) \|X\|^2$$

f) *Application* : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice d'ordre n définie ci-dessous (tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales) :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3°) Dans cette question, on note $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

a) Vérifier que $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle U_i, X \rangle^2$.

Prouver que $\|AX\| \leq \rho(A) \|X\|$ et exhiber un vecteur réalisant l'égalité.

b) Établir l'équivalence des deux propositions suivantes :

- i. Pour tout vecteur X , la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
- ii. $\rho(A) < 1$.

PARTIE II : Un problème de minimisation

Dans toute cette partie, $\mathbf{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et α, β sont deux réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| / \alpha \leq t \leq \beta\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(0) = 1$.

1°) On considère la suite de fonctions T_p définie par $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, et, si $p \geq 1$, par la relation de récurrence $T_{p+1}(t) = 2t T_p(t) - T_{p-1}(t)$.

a) Montrer que T_p est une fonction-polynôme de degré p et préciser le coefficient de t^p .

b) Prouver, pour tout réel θ et tout entier naturel p que $T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta)$.

On rappelle à cet effet la formule de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

c) En déduire $\sup\{|T_p(t)| / -1 \leq t \leq 1\}$ et montrer que T_p admet dans $[-1, 1]$ p zéros distincts que l'on précisera.

2°) On désigne par a un réel tel que $|a| > 1$.

On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| / -1 \leq t \leq 1\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$.

Pour cela, on désigne par S_p la fonction $\frac{T_p}{T_p(a)}$.

a) On considère, s'il en existe, une fonction polynôme P de $\mathbf{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et vérifiant : $\sup\{|P(t)| / -1 \leq t \leq 1\} < \frac{1}{|T_p(a)|}$.

Préciser pour $0 \leq j \leq p$ le signe de $S_p(\cos(\frac{j\pi}{p})) - P(\cos(\frac{j\pi}{p}))$.

En déduire que $S_p - P$ a au moins $p+1$ racines réelles distinctes, et en tirer une contradiction en examinant le degré de $S_p - P$.

b) En déduire que $\sup\{|Q(t)| / -1 \leq t \leq 1\}$ où Q décrit $\mathbf{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$ est minimal pour S_p et vaut $\frac{1}{|T_p(a)|}$.

c) Si P est un polynôme satisfaisant à ce problème de minimisation, montrer que $\frac{1}{2}(P + S_p)$ est aussi un polynôme satisfaisant à ce problème, et qu'on a pour $0 \leq j \leq p$:

$$\frac{1}{2} \left| P(\cos(\frac{j\pi}{p})) + S_p(\cos(\frac{j\pi}{p})) \right| = \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

En déduire que $P = S_p$.

3°) Établir que le polynôme suivant est l'unique solution du problème de minimisation posé dans le préambule de cette partie :

$$\frac{T_p(\frac{2t - \alpha - \beta}{\beta - \alpha})}{T_p(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta})}$$

PARTIE III : Résolution itérative d'un système $AX = B$

On supposera de plus, dans cette partie, que les valeurs propres de A sont strictement positives et on les classe comme suit : $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On étudie une méthode itérative de résolution du système de Cramer $AX = B$, qu'on définit à partir d'une suite de réels strictement positifs (α_p) et d'un vecteur X_0 de $\mathbf{R}^n$:

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p(B - AX_p).$$

Justifier l'existence et l'unicité de la solution X^* du système.

1°) Dans cette question, on suppose la suite (α_p) constante, égale à $\alpha > 0$.

a) Montrer, pour tout nombre entier naturel p , que $X_p - X^* = (I - \alpha A)^p(X_0 - X^*)$.

b) Préciser les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de la matrice $I - \alpha A$, ainsi que $\rho(I - \alpha A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i|$.

Tracer la courbe représentative de la fonction définie par $f(\alpha) = \rho(I - \alpha A)$.

c) En déduire que (X_p) converge vers X^* si et seulement si $\alpha < 2/\lambda_n$.

Montrer que la convergence est optimale en un sens que l'on précisera pour $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ et montrer qu'alors :

$$\|X_p - X^*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^p \|X_0 - X^*\|.$$

2°) On revient au cas général et on pose pour tout nombre entier naturel $p \geq 1$:

$$P_p(t) = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_1 t) \dots (1 - \alpha_{p-1} t) \quad \text{et} \quad P_p(A) = (I - \alpha_0 A)(I - \alpha_1 A) \dots (I - \alpha_{p-1} A).$$

a) Préciser les valeurs propres $\nu_1, \dots, \nu_n$ de la matrice $P_p(A)$, et montrer que

$$\rho(P_p(A)) = \max_{1 \leq i \leq n} |\nu_i| \quad \text{vérifie l'inégalité} \quad \rho(P_p(A)) \leq \sup \{ |P_p(t)| / \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n \}.$$

b) Établir que $X_p - X^* = P_p(A)(X_0 - X^*)$, puis que :

$$\|X_p - X^*\| \leq \sup \{ |P_p(t)| / \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n \} \|X_0 - X^*\|.$$

c) Lorsque l'entier p est fixé, comment peut-on choisir les nombres α_j où $0 \leq j \leq p-1$ pour minimiser le réel $\sup \{ |P_p(t)| / \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n \}$? Établir qu'on a alors :

$$\|X_p - X^*\| \leq \frac{1}{\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right|} \|X_0 - X^*\|.$$

Montrer que $\left| T_p \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} \right) \right|$ est équivalent lorsque p tend vers $+\infty$ à $2^{p-1} \left(\frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1} \right)^p$.

Comparer la convergence de la méthode itérative à α constant de la question 1° avec celle de la méthode itérative optimale développée à cette question.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :

281

ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.

Pour toute matrice M , on note tM sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note x_i sa

$i^{\text{ème}}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

PARTIE I

Dans cette partie, $n=1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Quelques exemples.

Après avoir étudié les variations de F_y , préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

a) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = a \frac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.

b) $U = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.

(on pourra introduire le réel β vérifiant : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$).

c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?

4) Plus généralement, on suppose que : $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x) > 0$.

a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On note g l'application réciproque de f' .

b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y , montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^*(x) = xg(x) - f(g(x))$.

Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g .

c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x \mapsto xy - f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^* = f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.

a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$.

Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1\}$?

b) Lorsque $\|y\| \leq 1$, montrer que : $F_y(x) \leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^* .

c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On rappelle que : $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

- En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :
 $\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A .
- Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah \rangle$ et $\langle h, y - Ax \rangle$ et établir que : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$.
- Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour :
 $x = A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ mais dans cette

question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

- Existence d'un maximum.
 - Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F_y(x) = -\infty$ et en déduire que pour $x_0 \in U$:
 il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\| > r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0))$.
 - Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f) = \mathbb{R}^n$.
- Unicité d'un élément réalisant le maximum.
 - Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :

$$F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x') \rangle}{8}.$$
 - En supposant que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y ,
 montrer que : $f^*(y) < F_y\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx = c$.

On note $\text{Im } M$ et $\text{ker } M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n .

On suppose que $c \in \text{Im } B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\bar{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y .

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\bar{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de $\bar{x}$.

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$ $\langle x, Bx' \rangle = \langle {}^t Bx, x' \rangle$.

Montrer que : $\text{Im } {}^t B \subset (\ker B)^\perp$ en désignant par $(\ker B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\text{Im } {}^t B$ et de $(\ker B)^\perp$ et en déduire que :

$\text{Im } {}^t B = (\ker B)^\perp$. (On admettra que : $\text{rg}(B) = \text{rg}({}^t B)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t \langle y - A\bar{x}, h \rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

En déduire que $\bar{x}$ est caractérisé par l'existence de $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\bar{x} = c$ et $y - A\bar{x} = {}^t B\bar{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\bar{x}$.

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites

$(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + {}^t Bz_p = 0 \quad \text{et} \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux

relations : $A(x_p - \bar{x}) = {}^t B(\bar{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 - 2r \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2 \|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

• Montrer la relation : $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}{}^t BBA^{-1/2}x \rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

• Établir que la matrice $A^{-1/2}{}^t BBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.

• En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$.

d) On choisit $r \in \left] 0, \frac{2}{\alpha} \right[$.

Montrer que : $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2) \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle \leq 0$.

En déduire que la suite $(\|z_p - \bar{z}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\bar{x}$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : ESSEC

CODE ÉPREUVE :

281

ESSECM1_S

CONCOURS D'ADMISSION DE 2006

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 15 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout ce problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

On rappelle qu'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même.

Par ailleurs, on note :

- $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$;
- $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $M_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes, q colonnes à coefficients réels ;
- $m_{i,j}$ l'élément générique d'une matrice M , c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de M ;
- ${}^t M$ la transposée d'une matrice M .

Lorsque σ appartient à $\mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ notée P_σ

dont le terme générique $p_{i,j}$ vérifie : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad p_{i,j} = 1 \text{ si } \sigma(i) = j \text{ et } p_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$

Par exemple, pour $n = 3$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble E_n des matrices M appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

la propriété suivante : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \sum_{k=1}^n m_{k,j}$.

Dans ce cas, leur valeur commune sera notée $\omega(M)$.

PARTIE I : Etude de l'ensemble E_n

On note J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 c'est-à-dire égale à $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

et U la matrice colonne à n lignes égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Généralités.

a) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et que l'application

$$\omega : E_n \rightarrow \mathbb{R} \quad M \mapsto \omega(M) \text{ en est une forme linéaire.}$$

b) Lorsque $M \in M_n(\mathbb{R})$, établir que : $M \in E_n$ si et seulement si U est vecteur propre commun à M et tM associé à une même valeur propre.

c) Vérifier que E_n est stable pour le produit matriciel et préciser $\omega(MN)$ en fonction de $\omega(M)$ et $\omega(N)$ lorsque M et N appartiennent à E_n .

2) Dimension de E_n .

a) Montrer que le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n .

b) Pour $(r, s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, on note $A_{r,s}$ la matrice de E_n dont tous les éléments sont nuls sauf les quatre éléments : $a_{1,1}, a_{r,s}, a_{1,s}, a_{r,1}$ qui sont tels que : $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
Montrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2}$ est libre puis qu'elle est génératrice du noyau de ω .

En déduire la dimension de E_n .

3) Une famille génératrice de E_n .

a) Établir que pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice P_σ appartient à E_n et que les matrices P_σ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M)=1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

b) Écrire la matrice P_σ correspondant à la permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ définie par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \sigma(k) = k+1 \quad \text{et} \quad \sigma(n) = 1.$$

Préciser les matrices : $(P_\sigma)^2, (P_\sigma)^3, \dots, (P_\sigma)^n$.

c) Exprimer J comme combinaison linéaire de matrices de permutations. Faire de même avec chaque matrice du type $A_{r,s}$ quand $(r, s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$: on pourra se limiter aux matrices $A_{2,2}$ et $A_{3,2}$ (si $n \geq 3$) et donner une décomposition explicite de ces deux matrices en combinaison linéaire de matrices de permutations.

d) Prouver qu'il existe $(n-1)^2 + 1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que

$(P_{\sigma_1}, P_{\sigma_2}, \dots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n .

Que représente la somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base ?

Les deux parties suivantes du problème sont indépendantes de la partie I

On s'intéresse dans toute la suite du problème à l'ensemble des matrices M de E_n dont tous les éléments $m_{i,j}$ sont positifs ou nuls. On note E_n^+ cet ensemble.

PARTIE II : Etude de l'ensemble E_n^+

- 1) Montrer que E_n^+ est stable pour le produit matriciel et que pour toute famille $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de réels positifs ou nuls $\sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+$.

Dans cette partie, on admettra que :

$$\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{telle que} \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} > 0.$$

- 2) a) On suppose que σ est une telle permutation associée à $M \in E_n^+ \setminus \{0\}$ et on désigne par $c = \min\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, \dots, m_{n,\sigma(n)}\}$. Montrer que : $M - cP_\sigma \in E_n^+$.

- b) En déduire que pour toute matrice M de $E_n^+ \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, p permutations

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } p \text{ réels } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ strictement positifs tels que : } M = \sum_{k=1}^p \alpha_k P_{\sigma_k}.$$

- c) Montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins $n^2 - n + 1$ termes nuls est nulle ; en déduire que : $1 \leq p \leq n^2 - n + 1$.

- d) Exemple : lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer M comme combinaison linéaire à scalaires

strictement positifs de matrices de permutations de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

- 3) Une application : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

- a) Vérifier que la matrice $M_{u,v} = \left(\langle v_i | u_j \rangle \right)$ appartient à E_n^+ et donner la valeur de $\omega(M_{u,v})$.

Lorsque σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, préciser $M_{u,v}$ dans le cas où

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}).$$

- b) On introduit l'endomorphisme symétrique s de $\mathbb{R}^n$ dont $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de diagonalisation et de valeurs propres respectivement associées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On note Λ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Montrer l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} \langle s(v_1) | v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle s(v_n) | v_n \rangle \end{pmatrix} = M_{u,v} \Lambda.$$

c) En utilisant la question II 2) b), établir que pour toute forme linéaire f de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe deux permutations σ et σ' de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant : $f(P_\sigma \Lambda) \leq f(M_{u,v} \Lambda) \leq f(P_{\sigma'} \Lambda)$.

d) On suppose que : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Trouver une forme linéaire f permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \leq \sum_{k=1}^r \langle s(v_k) | v_k \rangle \leq \sum_{k=1}^r \lambda_{n-r+k}.$$

Que représente le terme $\langle s(v_k) | v_k \rangle$ dans la matrice de s relativement à la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ et pouvez-vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci-dessus ?

PARTIE III

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie II 1).

Lorsque $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on appelle sous-matrice de type (p, q) de la matrice M appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de M en supprimant de M $n-p$ lignes et $n-q$ colonnes.

1) Lorsque σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et M un élément de $M_n(\mathbb{R})$, expliciter le terme générique des matrices $P_\sigma M$ et $M P_{\sigma^{-1}}$. Comment obtient-on ces deux matrices à partir de M ?

2) On suppose que M appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type (p, q) .

a) Montrer que : $\exists \sigma, \sigma'$ deux permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $P_\sigma M P_{\sigma'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$ avec

$$X \in M_{p, n-q}(\mathbb{R}), \quad Z \in M_{n-p, n-q}(\mathbb{R}) \text{ et } Y \in M_{n-p, q}(\mathbb{R}).$$

b) En déduire que si M appartient à $E_n^+ \setminus \{0\}$, on a $p+q \leq n$.

3) On désire établir la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : si M appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_n) : \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad m_{1, \sigma(1)} m_{2, \sigma(2)} \dots m_{n, \sigma(n)} = 0$, alors M contient au moins une sous-matrice nulle de type (p, q) avec $p+q = n+1$.

a) Le vérifier pour $n=2$.

b) n étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

On désigne par M une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

▪ Établir que M contient une sous-matrice de type $(n-1, n-1)$ vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.

▪ En déduire que : $\exists \tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n, \exists p, q / p+q = n$ tels que $P_\tau M P_{\tau'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$ avec

$$X \in M_p(\mathbb{R}), \quad Z \in M_{q, p}(\mathbb{R}) \text{ et } Y \in M_q(\mathbb{R}).$$

▪ Montrer que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.

▪ En déduire alors que M contient une sous-matrice nulle de type (p', q') telle que $p'+q' = n+1$ et conclure.

4) Montrer alors, à l'aide de 2) b) que : $\forall M \in E_n^+ \setminus \{0\} \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $m_{1, \sigma(1)} m_{2, \sigma(2)} \dots m_{n, \sigma(n)} > 0$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

281

ESSECM1_S

Concepteur : ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 2007

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 14 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NOTATIONS, RAPPELS :

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k vérifiant : $1 \leq k \leq n$.

Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles à n lignes,
- tM la transposée d'une matrice M ,
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$.

Objectif du problème : on dispose d'un ordre naturel sur l'ensemble des réels, on s'interroge dans ce problème sur l'extension de cet ordre à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on s'intéresse en particulier à la monotonie de quelques applications.

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La troisième partie utilise simultanément les deux parties précédentes. La quatrième partie reprend essentiellement les notions vues dans la troisième partie.

Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt$.

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Pour quelles valeurs du réel α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α , on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) t^\alpha dt.$$

2°) exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

3°) On suppose que $\alpha \in]-1, 0[$.

Pour $x > 0$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α .

En déduire l'existence de c et d , réels ne dépendant que de α , tels que : $\forall x > 0, f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$. Préciser le signe de c .

4°) On suppose que $\alpha \in]0, 1[$.

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x > 0, x+h > 0$ et $h \neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)} dt.$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x > 0, f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2} dt$

b) Justifier la relation : $\forall x > 0, f'_\alpha(x) = f'_\alpha(1).x^{\alpha-1}$. En déduire l'existence de c et d , réels ne dépendant que de α , tels que :

$\forall x > 0, f_\alpha(x) = c.x^\alpha + d$. Préciser le signe de c .

Partie II : les matrices symétriques réelles

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques, c'est-à-dire $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ($X \neq 0 \Rightarrow {}^tXMX > 0$).

L'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin, lorsque A et B sont deux matrices symétriques vérifiant $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on dira que A est strictement plus petite que B et on le notera $A < B$.

1°) **Caractérisations des matrices définies positives.**

a) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, établir l'équivalence suivante : ($A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ toute valeur propre de A est strictement positive).

b) Lorsque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, vérifier l'égalité : ${}^tXAX = (ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2$.

En déduire que : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0)$.

2°) **Exemples.**

a) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$:

vérifier que A et B appartiennent à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et montrer que $A < B$. A-t-on $A^2 < B^2$?

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

i) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit l'application : $\phi_X^A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; Y \mapsto {}^tXY - {}^tYAY$

Exprimer, pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X + H) - \phi_X^A(A^{-1}X)$ en fonction de H et A .

En déduire que ϕ_X^A admet en $A^{-1}X$ un maximum qui vaut ${}^tXA^{-1}X$.

iii) On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A < B$.

Montrer que pour tout X et tout Y matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(Y \neq 0 \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y))$.

En déduire que $B^{-1} < A^{-1}$.

Partie III : monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Lorsque F est une application définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on dit que F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si : pour tout A et tout B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $(A < B \Rightarrow F(A) < F(B))$.

On dira de même que F est strictement décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $-F$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par exemple, la propriété vue au II-2-b-iii se traduit par la stricte décroissance de l'application $F: \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); M \mapsto M^{-1}$.

1°) Résultats préliminaires.

On désigne par A une matrice symétrique réelle dont l'ensemble des valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ est classé dans l'ordre croissant.

On rappelle que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$ où $E_{\lambda_i}(A) = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$.

- Justifier la relation $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$ où M_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, une telle écriture s'appelle la décomposition de A .
- Montrer que $I_n = \sum_{i=1}^p M_i$.
- Donner la décomposition de la matrice $A + tI_n$ lorsque t est réel.

Si A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$, on définit, lorsque f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la matrice

$$\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) M_i.$$

On peut ainsi considérer l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\tilde{f}: A \mapsto \tilde{f}(A)$.

- Montrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(A)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $\tilde{f}(A)$ lorsque f est strictement monotone.
- Préciser $\tilde{f}$ lorsque que $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Soient $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux applications strictement monotones. Montrer que : $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.
- Lorsque (a, b, c, d) appartient à $\mathbb{R}^4$ avec $c > 0$, $d > 0$ et $bc - ad \neq 0$, on considère l'application $h: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$.

Après avoir vérifié que : $\forall x > 0, h(x) = \frac{bc - ad}{c(cx + d)} + \frac{a}{c}$, montrer la stricte monotonie de $\tilde{h}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Intégrales de matrices.

Soit $M: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto (m_{i,j}(t))_{(i,j) \in [1,n] \times [1,n]}$ où $\forall (i,j) \in [1,n] \times [1,n]$, $m_{i,j}: t \mapsto m_{i,j}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lorsque pour tout couple $(i,j) \in [1,n] \times [1,n]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t) dt$ converge, on dit que la matrice $\left(\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t) dt \right)_{(i,j) \in [1,n] \times [1,n]}$ existe et

on la note $\int_0^{+\infty} M(t) dt$.

a) Résultats préliminaires.

- Soient M et N telles que $\int_0^{+\infty} M(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t) dt$ existent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t)) dt$ existe et que : $\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t)) dt = \int_0^{+\infty} M(t) dt + \int_0^{+\infty} N(t) dt$.

Dans le même ordre d'idée, on admettra les deux propriétés suivantes (ii) et (iii).

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge, et $M : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; t \mapsto M(t) = h(t)A$,
alors $\int_0^{+\infty} M(t) dt$ existe et $\int_0^{+\infty} M(t) dt = \left(\int_0^{+\infty} h(t) dt \right) A$.

(iii) Soient M telle que $\int_0^{+\infty} M(t) dt$ existe et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

alors $\int_0^{+\infty} {}^t X M(t) X dt$ converge et ${}^t X \left(\int_0^{+\infty} M(t) dt \right) X = \int_0^{+\infty} {}^t X M(t) X dt$.

b) On revient à l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \varphi(t) dt$ où φ est une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} dt$ converge. (cf Partie I).

On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i$.

i) Montrer que : $\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) dt$.

ii) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A < B$, montrer que, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non-nulle, et tout $t > 0$, on a :

$${}^t X \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right) X < {}^t X \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} \right) X.$$

iii) En déduire que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) A l'aide des résultats de la Partie I, vérifier que $\tilde{f}_n$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Préciser le sens de variation de $\tilde{p}_\alpha$ associée à $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^\alpha$ selon que $\alpha \in]-1, 0[$ ou $]0, 1[$.

Partie IV : monotonies comparées de f et $\tilde{f}$

On revient aux notations introduites dans les parties précédentes.

1°) On désigne par f une application de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que, lorsque $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, f l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Pour $t > 0$, on définit les matrices : $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $A(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta_0[$, $B(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. (on ne cherchera pas à déterminer une valeur, même approchée, de η_0 .)

c) Etablir de même qu'il existe $\eta_1 \in]0, \eta_0[$ tel que $\forall t \in]0, \eta_1[$, $B(t) < A(t)$.

d) Déterminer $\tilde{p}_\alpha(A(t))$ et $\tilde{p}_\alpha(B(t))$ pour tout réel t de $]0, \eta_1[$ lorsque p_α est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto x^\alpha$.

e) Lorsque $\alpha > 1$, déterminer un équivalent en 0^+ de la quantité $\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} - t^{3\alpha} \right) \left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \right)^\alpha \right) - \left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \right)^2$.

f) En déduire que, pour $\alpha > 1$, $\tilde{p}_\alpha$ n'est pas strictement croissante sur $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Démontrer que la propriété énoncée en IV-1 n'admet pas de réciproque dès que $n \geq 2$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet

281

ESSECM1_S

CONCOURS D'ADMISSION DE 2008

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mardi 13 mai 2008 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions polynomiales appelées fonctions polynômes de Newton. La première partie les introduit de manière algébrique. La deuxième partie, tout en étant liée à la première, développe des thèmes relevant de l'analyse.

Partie I :

Dans toute cette partie, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et lorsque r est un entier naturel, on désignera par $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à r .

Etant donné Q appartenant à $\mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

A cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathcal{P}$ par la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

- 1°) a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.
 b) Pour $P \in \mathcal{P}$ de degré r strictement positif, calculer le degré de la fonction polynomiale $\Delta(P)$.
 c) Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.
- 2°) On considère pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'application $\Delta_r : \mathcal{P}_r \rightarrow \mathcal{P}_r ; P \mapsto \Delta_r(P) = \Delta(P)$.
 a) Justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.
 b) Quel est le noyau de Δ_r ?
 c) Montrer alors que $\text{Im } \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.
 d) En déduire que l'application Δ est surjective.
- 3°) On désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynomiales s'annulant en 0. Montrer que la restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$.
- 4°) a) Déduire de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(N_n) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.
 (N_n s'appelle fonction polynomiale de Newton d'indice n .)
 b) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :

$$N_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

 c) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n \in [0, r]}$ forme une base de $\mathcal{P}_r$. En déduire que la famille $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathcal{P}$.
 d) On adopte la notation usuelle : $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathcal{P}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.
 Prouver que pour toute fonction polynomiale Q de degré r : $Q = \sum_{n=0}^r \Delta^n(Q)(0) N_n$. Justifier ensuite l'écriture $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n$.
 e) La fonction polynomiale Q étant ainsi décomposée, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = Q(x)$.
 f) Application : en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $\sum_{k=0}^n Q(k)$ faisant intervenir P .
 Calculer $\sum_{k=0}^n k^2$.
- 5°) Etablir, pour toute fonction polynomiale Q , pour tout entier naturel n et tout réel x , la relation : $\Delta^n(Q)(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i)$.
- 6°) Dans toute cette question, on suppose que $r \in \mathbb{N}^*$.
 a) On désigne par $C(\Delta_r)$ le commutant de Δ_r dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$ des endomorphismes de $\mathcal{P}_r$, c'est à dire $C(\Delta_r) = \{g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r) \mid g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g\}$.
 i. Pour g et h appartenant à $C(\Delta_r)$, montrer que, si $g(N_r) = h(N_r)$, alors $g = h$.
 ii. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$. Justifier l'existence de $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que :
 $g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \dots + a_1 N_1 + a_0 N_0$.

iii. En déduire que $C(\Delta_r)$ est de dimension $r + 1$ et qu'il admet pour base :

$$(\text{Id}_{\mathcal{P}}, (\Delta_r)^1, \dots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r).$$

iv. On introduit l'endomorphisme d de $\mathcal{P}$ qui à une fonction polynomiale P associe sa fonction dérivée P' . Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$. En supposant qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_r$ réels tels que $d = a_0 \text{Id}_{\mathcal{P}} + a_1 (\Delta)^1 + \dots + a_r (\Delta)^r$, calculer $d(N_{r+1})$. Conclure à une contradiction.

b) Préciser la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n \in \llbracket 0, r \rrbracket}$. Montrer que $(\Delta_r)^{r+1} = 0$. L'endomorphisme Δ_r est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathcal{P}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$?

Partie II :

On note toujours $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie pour tout x réel par : $N_0(x) = 1$ et pour tout entier naturel n non nul $N_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

1°) recherche d'un équivalent de $|N_n(x)|$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

On fixe x un réel non égal à un entier naturel.

Pour t réel, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^t |N_n(x)|$.

a) Préciser, selon le réel t , la nature de la série de terme général $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

b) Que conclure pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

En déduire qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que $|N_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}$.

2°) Série de Newton associée à une fonction :

On considère une application f de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

A cette application, on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$.

a) Soit $b > 0$, préciser la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque f est l'application $x \mapsto b^x$.

b) Pour n entier naturel, on note Q la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^n a_k N_k$.

Justifier que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \Delta^k(Q)(0)$.

Montrer alors que la fonction $x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(x)$ s'annule en $0, 1, \dots, n$.

c) On suppose de plus que f est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout x réel positif, il existe un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta).$$

Indication : on pourra utiliser, lorsque $x \notin \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction auxiliaire

$\varphi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n a_k N_k(t) - N_{n+1}(t)A$, avec A un réel choisi tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

- d) On note toujours f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe une constante M strictement positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq M$.

Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$.

En déduire que si une telle fonction s'annule sur $\mathbb{N}$, c'est la fonction nulle.

3°) Etude de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} h^n N_n(x)$ avec h réel :

- a) Lorsque $|h| > 1$, montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente pour tout x réel, non égal à un entier naturel.
b) On suppose que $|h| < 1$.

- i. Montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente pour tout x réel.
ii. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout n entier naturel et tout x réel :

$$(1+h)^x - \sum_{k=0}^n h^k N_k(x) = (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du, \text{ puis établir que la suite}$$

$$\left(\frac{1}{|h|^n} \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u} \right)^n (1+u)^{x-1} du \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

- iii. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x)$.

- c) On suppose que $h = 1$.

- i. Montrer que la série de terme général $N_n(x)$ est divergente pour $x \leq -1$.
ii. En reprenant la méthode préconisée au II.3.b), établir que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} N_n(x)$ est

convergente pour $x > -1$ et que : $\forall x > -1, \sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x$.

- d) On suppose que $h = -1$.

- i. Préciser les réels x pour lesquels la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ?
ii. Justifier pour tout x réel et tout entier naturel n strictement positif la formule :

$$N_0(x) - N_1(x) + \dots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1)$$

- iii. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x)$ lorsque $x \geq 0$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

281

Concepteur : ESSEC

ESSECMATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 6 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On confondra les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$) avec leurs matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$). De même, on confondra les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$) avec les matrices colonnes qui les représentent dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^n$).

Partie I

1°) Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A vérifie la condition :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$. On dit alors que A est une matrice à diagonale strictement

dominante.

- a) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_1| \geq |x_i|)$.

Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

- b) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une

contradiction.

- c) En déduire que A est inversible.

2°) Application : le théorème de Gershgorin.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \right\}. D_i \text{ est le } i^{\text{ème}} \text{ disque de Gershgorin de } A. \text{ On}$$

pose $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

- a) Montrer que le spectre de A est inclus dans D . (théorème de Gershgorin)
b) Algorithme pour $n = 3$: Ecrire une procédure PASCAL qui permet à l'utilisateur de rentrer dans un tableau les 9 coefficients d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis écrire une fonction PASCAL qui a pour argument un tel tableau et qui renvoie les centres et les rayons des 3 disques de Gershgorin associés à la matrice contenue dans le tableau.

c) Exemple : on se donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (i) Justifier sans calculs que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(ii) A l'aide du théorème de Gershgorin, situer les valeurs propres de A .
(iii) Diagonaliser explicitement A .

3°) La propriété (P).

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la propriété (P) suivante : (P)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} > 0 \\ \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, a_{i,j} \leq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0 \end{array} \right.$$

- a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que le vecteur AX ait toutes ses coordonnées positives ou nulles.

Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0$. (On pourra considérer $x_{i_0} = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} x_i$.)

c) On note $b_{i,j}$ le coefficient en position (i, j) dans la matrice inverse de A : $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que vaut $A \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$?

d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

e) Exemple : on reprend ici $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et on considère pour $\alpha > 0$: $A_\alpha = A + \alpha I_3$ où

I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir que A_α vérifie la propriété (P) et calculer A_α^{-1} .

Partie II : convergence de suites de matrices.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note : $X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

On dit que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ si pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la suite

réelle $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel x_i .

De même, pour $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si on note $M_k = (m_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, on dit que

$(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite réelle $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $m_{i,j}$.

1°) Généralités.

a) Pour un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, on définit : $m(X) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$.

Montrer qu'une suite de vecteurs $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur X si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} m(X_k - X) = 0$.

- b) Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit : $s(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$.

Montrer qu'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} s(M_k - M) = 0$.

- c) Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, m(MX) \leq s(M)m(X)$.
- d) En déduire que si une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX .
- e) Réciproquement, si on dispose d'une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et d'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, la suite $(M_k X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MX , montrer que la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers M .
- f) Montrer encore que : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, s(MN) \leq s(M)s(N)$.
- g) Etablir maintenant que : $\forall (Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$, puis en déduire que : $\forall (Y, Z) \in (\mathbb{R}^n)^2, |m(Y) - m(Z)| \leq m(Y - Z)$.

2°) Convergence de la suite des inverses.

On considère ici une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toutes inversibles, qui converge vers une matrice M inversible.

- a) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$, montrer que :

$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M - M_k)m(M_k^{-1}X)$$

puis établir que :

$$m(M_k^{-1}X) \left[1 - s(M^{-1})s(M - M_k) \right] \leq m(M^{-1}X).$$

- b) En déduire l'existence d'un entier k_0 tel que pour tout entier k supérieur à k_0 :

$$m(M_k^{-1}X) \leq 2m(M^{-1}X).$$

- c) Montrer alors que la suite $(M_k^{-1}X)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M^{-1}X$.

- d) Conclure alors que la suite de matrices $(M_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice M^{-1} .

3°) Soient M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers M . On suppose de plus que les matrices M_k vérifient toutes la propriété (P).

Montrer que les coefficients de la matrice M^{-1} sont tous positifs ou nuls.

4°) A partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} = 2, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_{i,i+1} = -1, \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_{i,i-1} = -1$ et les autres coefficients de A sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, calculer (AX/X) où $(/)$ est le produit scalaire

canonique de $\mathbb{R}^n$. Exprimer (AX/X) sous la forme d'une somme de carrés. En déduire que A est inversible.

b) Etablir que, pour tout réel α strictement positif, la matrice $A_\alpha = A + \alpha I_n$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifie la propriété (P).

c) Construire une suite de matrices, vérifiant toutes la propriété (P), qui converge vers A .

d) En déduire que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls.

Partie III : résolution du système (S).

Soit une fonction f à valeurs réelles de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. On dit qu'une fonction u

$$\text{vérifie le système (S) si : (S) } \begin{cases} u \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \\ u'' = -f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

1°) Existence et unicité de la solution de (S).

a) Montrer que (S) admet une unique solution u de classe C^4 sur le segment $[0,1]$.

b) Montrer que si f est positive, alors l'unique solution u du système (S) associé à f est également positive.

c) Expliciter la solution $\tilde{u}$ de (S) lorsque f est la fonction constante égale à 1. Calculer $\sup_{[0,1]} \tilde{u}$.

2°) On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1. On pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère la subdivision du segment $[0,1]$ formée des points $x_i = ih = \frac{i}{n+1}$, $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

a) On considère $u \in C^4([0,1], \mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$ tel que $(x+h, x-h) \in [0,1]^2$. Justifier à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que :

$$\left| u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2 u''(x) \right| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|$$

b) En déduire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| u''(x_i) - \frac{1}{h^2} [u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))] \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|.$

3°) On reprend la matrice A du II-4° et on note $\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x_1) \\ \tilde{u}(x_2) \\ \vdots \\ \tilde{u}(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

a) Réécrire les inégalités du 2°-b) dans le cas où u est la fonction $\tilde{u}$.

b) Montrer que $\frac{1}{h^2} A \tilde{U} = \tilde{F}$.

c) En déduire que les coefficients $b_{i,j}$ de la matrice A^{-1} vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} \leq \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{1}{8h^2}.$$

4°) Pour $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$, on pose : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i = f(x_i)$ et $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On note u l'unique

solution du système (S) associé à f .

On définit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ par $U = h^2 A^{-1} F$. On note : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta u_i = u_i - u(x_i)$ et

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et enfin } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ le vecteur défini par } V = A \Delta U.$$

Montrer pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que $|v_i| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{[0,1]} |f''|$.

Donner alors pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ une majoration de $|\Delta u_i| = |u_i - u(x_i)|$ en fonction de h et f'' .

5°) Exemple : on prend $f : x \mapsto \exp(\sin x)$.

a) Montrer que $|f''| \leq 2e$. En déduire une première valeur de n qui garantit $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b) Etudier la fonction $x \mapsto (x^2 + x - 1) \exp(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire une valeur de n meilleure que la précédente qui garantit encore $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

281

Concepteur : ESSEC

ESSECMATS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $C^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E , on dit qu'une fonction y de $C^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0,$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problème traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U .

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. Etude de l'équation (E_f)

- a) On considère $f \in E$ et $y \in C^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I$,

$$y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

- b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.

- c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente.

- d) Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I .

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. *Linéarité de U*

- a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
- b) Montrer que U est un endomorphisme de E .
- c) U est-il injectif ?
- d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$.

3. *Cas des fonctions exponentielles*

- a) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
- b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\text{Ker}(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.
- c) Pour tout entier naturel n , expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I , préciser $\lim_{n \rightarrow \infty} [U^n(f_k)](x)$.

4. *Cas des fonctions sinus et cosinus*

Dans cet exemple seulement (ensemble de la question I-4), on prendra $a = 1$.

- a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
- b) Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$ est stable par U et que $(\sin, \cos)$ en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : \begin{cases} P \rightarrow P \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$.
- c) Calculer M^2, M^3, M^4 . Expliciter M^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. *Une autre famille de fonctions*

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x} x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

- a) Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1} .
- b) Pour p entier naturel, montrer que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
- c) On prend ici $p = 2$, écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$. Calculer T_2^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. *Une autre expression de $U(f)$*

Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I, U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt$.

7. Positivité de U

a) Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

b) Montrer que ψ est à valeurs positives.

c) On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. Commutation de U avec la dérivation

On note $E_1 = \{f \in E \cap C^1(I, \mathbb{R}) / f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 , associe sa dérivée.

a) Pour f un élément de E_1 , montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.

b) En déduire que, pour tout élément f de E_1 , $D(U(f)) = U(D(f))$.

c) Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7.c) : $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. Résultats préliminaires

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I . On suppose que, $\forall x \in I$, $\beta(x) > 0$, et que $\int_1^{+\infty} \beta(t) dt$ converge.

a) On suppose ici que $\alpha(x) = o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists A > 0 / \forall x \geq A, \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$. Conclure.

b) On suppose maintenant que $\alpha(x) \sim \beta(x)$, montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$.

2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (on pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$ en écrivant, dans ce cas, $f(t) = o(1)$ et en utilisant la question 1.).

3. Cas des fonctions puissances

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

a) Montrer que $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \sim \frac{f_\omega(x)}{a}$.

b) Montrer que pour tout x de I : $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1)$ (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :

$$g_1(x) = e^{ax} \left\{ -\ln x - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right\}.$$

4. *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω*

On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.

- Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.
- Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty} [U(f)](t) dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

1. *Etudes d'exemples*

- Pour k un réel strictement positif et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente.
- Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω , $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ est-elle convergente ?

2. *Cas des fonctions positives*

Dans cette question, f est un élément de E , à valeurs positives tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

On note $F : x \in I \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \int_1^x g(t) dt$.

- Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.
- Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = K e^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$.
- Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .
- En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$.
- Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

3. *Cas général*

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Concepteur : ESSEC

Code épreuve :

281

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 10 mai 2011 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte cinq parties.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels.

Si n est un entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on notera $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Si U est une partie non vide de $L(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U , c'est-à-dire : $C(U) = \{v \in L(E) \mid \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}$.

Si $u \in L(E)$ et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est plus simplement noté $C(u)$ et est appelé aussi commutant de u . On a donc : $C(u) = \{v \in L(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ avec $P = a_d X^d + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on note $P(u)$

l'endomorphisme de E défini par $P(u) = a_d u^d + \dots + a_0 \text{id}_E = \sum_{k=0}^d a_k u^k$. En particulier, $1(u) = \text{id}_E$.

Enfin, on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie I – Préliminaires.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, U est une partie non vide de $L(E)$ et u un élément de $L(E)$.

- 1) Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.
- 2) Vérifier que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.
- 3) Soit λ une valeur propre de u , $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ l'espace propre associé et v dans $C(u)$.
Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Partie II – Etude d'un exemple.

Dans toute cette partie, on notera :

$$A = \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n \geq 0} |a_n x^n| \text{ converge} \right\},$$

$$B = \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in A / \forall n \in \mathbb{N}, 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0 \right\},$$

$$H = \left\{ f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n \geq 0} \in A \right\},$$

$$E = \left\{ f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n \geq 0} \in B \right\},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n}, \beta_n = (-1)^n \text{ et } \gamma_n = n(-1)^n,$$

$$\varphi : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{2-x}, \psi : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{1+x} \text{ et } \delta : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{(1+x)^2}.$$

On admet que pour f dans H , il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A telle que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- 4) Quelques propriétés de A :
 - a) Vérifier que la suite constante égale à 1 appartient à A .
 - b) Plus généralement, si $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ vérifiant : $a_n = o(n^s)$, montrer que $(a_n)_{n \geq 0} \in A$.
 - c) En déduire que les suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à A .
- 5) Premières propriétés de H :
 - a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
 - b) Montrer que les fonctions φ , ψ et δ appartiennent à H .
- 6) Premières propriétés de E :
 - a) Déterminer les suites géométriques appartenant à B .
 - b) Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartient à B .
 - c) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de H contenant les fonctions φ , ψ et δ .
- 7) Caractérisation des éléments de E :

Soit f de E telle que, pour tout x de $] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n \geq 0} \in B$.

- a) Montrer que : $\forall x \in] -1, 1[, f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0$.

- b) En déduire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout x de $] -1, 1[$, $f(x) = \frac{Q(x)}{x^3 - 3x - 2}$.
- c) Montrer alors que f est combinaison linéaire des fonctions φ , ψ et δ .
- d) Conclure que E est un espace de dimension finie dont $C = (\varphi, \psi, \delta)$ est une base.
- 8) L'endomorphisme u :
- Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ dans B et f de E telles que : $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- a) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{n+1}$, appartient à B .
- On note alors $u(f)$ l'application définie par : $\forall x \in] -1, 1[$, $[u(f)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
- b) Vérifier que u est un endomorphisme de E .
- c) Déterminer u^k pour tout k de $\mathbb{N}$. En déduire un polynôme π de $\mathbb{R}[X]$, de degré 3, tel que $\pi(u) = 0$.
- d) Déterminer la matrice T de u dans la base C et calculer T^k pour tout k de $\mathbb{N}$.
- 9) Eléments propres de u :
- a) Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de u ?
- b) u est-il diagonalisable ?
- 10) Centre de u :
- Soit v un élément du commutant de u , c'est à dire un endomorphisme de E tel que $uov = vou$.
- a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que $v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $v(\psi) = \mu\psi$.
- b) Montrer qu'il existe aussi des réels η et ω tels que $v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta$.
- c) Démontrer que $\mu = \omega$.
- d) Réciproquement, si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ , μ et η tels que $M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, vérifier que v appartient à $C(u)$.
- e) Que vaut $\dim[C(u)]$?
- f) Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $L(E)$.
- g) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie III – Centre de $L(E)$.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et u un élément de $L(E)$.

- 11) On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u . Montrer que u est une homothétie.
- 12) Soit U la partie de $L(E)$ formée des projecteurs de E et v dans $C(U)$. On se donne e un vecteur non nul de E et un supplémentaire G de $F = \text{Vect}(e)$. En considérant la projection sur F parallèlement à G , montrer que v est une homothétie de E . En déduire $C(U)$.
- 13) Que vaut $C(L(E))$?

Partie IV- Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que u est un endomorphisme diagonalisable de E .

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u , $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres correspondants et, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, $r_i = \dim E_i$.

- 14) Justifier que, pour tout v de $C(u)$ et tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, E_i est stable par v .
- 15) Réciproquement, si v est un endomorphisme de E tel que, pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, E_i est stable par v , montrer que : $v \in C(u)$.
- 16) Considérer une base b de E adaptée à l'écriture $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et caractériser les endomorphismes de $C(u)$ par l'allure de leur matrice dans cette base.
- 17) En déduire que : $\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2$.
- 18) Montrer que $\dim C(u) \geq n$, puis que : $\dim C(u) = n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.
- 19) Ecrire la matrice M de u dans la base b . Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer M^k , puis $P(M)$ pour tout P polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
- 20) On note $\pi(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$, que vaut $\pi(u)$?
- 21) Plus généralement, si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, vérifier que : $P(u) = 0$ si et seulement si pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, $P(\lambda_i) = 0$.
- 22) En déduire que la famille $(id_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre dans $L(E)$.
- 23) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \text{Vect}(id_E, u, \dots, u^{p-1})$. En déduire : $\dim \mathbb{R}[u] = p$.
- 24) Démontrer que $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie V- Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

On garde, dans cette partie, les mêmes notations et hypothèses que dans la partie IV.

On veut déterminer $C(C(u))$ que l'on notera plus simplement $C_2(u)$.

- 25) Vérifier que $C_2(u) \subset C(u)$.
- 26) Montrer que $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.
- 27) Pour v dans $C_2(u)$ et i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note v_i l'endomorphisme de E_i défini par : $\forall x \in E_i$, $v_i(x) = v(x)$. Montrer que : $v_i \in C(L(E_i))$. En déduire qu'il existe un réel μ_i tel que : $v_i = \mu_i id_{E_i}$.
- 28) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$.
- 29) Démontrer que : $C_2(u) = \mathbb{R}[u]$.

Code épreuve : 281



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations :

Dans tout le problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels ; ainsi, tout élément X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne à n lignes.
- tM la matrice transposée de la matrice M .
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Pour M appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
 $\text{Ker } M = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / MX = 0\}$ et $\text{Im } M = \{MX / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$.
- Pour tout m entier naturel non nul, on munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique ; ainsi :

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire de X et Y s'obtient

par la relation ${}^tXY = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y notée $\|Y\|_m$ par : $\|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^m y_i^2$

- On admettra que toute matrice et sa transposée ont même rang. De plus, on rappelle que lorsque le produit de deux matrices M et N est possible, on a la relation ${}^t(MN) = {}^tN^tM$.

1) Question préliminaire.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F .

On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $P = \sum_{i=1}^k U_i {}^tU_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

Partie I - Décomposition spectrale de la matrice tAA associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

2)

- Préciser la taille de la matrice tAA et vérifier que $\text{Ker } A \subset \text{Ker } {}^tAA$.
- Montrer que si $X \in \text{Ker } {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$ et établir que $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^tAA$.
Montrer que A et tAA sont nulles simultanément.
- Justifier l'égalité : $\text{Im } {}^tA = \text{Im } {}^tAA$.

3)

- Établir que la matrice tAA est diagonalisable et en calculant $\|AX\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice tAA , montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.
- On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice tAA , classée dans l'ordre croissant.

On rappelle que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}({}^tAA)$ où $E_{\lambda_i}({}^tAA) = \text{Ker}({}^tAA - \lambda_i I_n)$.

Pour i entier naturel compris entre 1 et p , on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p , $P_i P_j$ est la matrice nulle.

Justifier les relations : $I_n = \sum_{i=1}^p P_i$ et ${}^tAA = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de tAA .

4) Exemples :

- Déterminer la décomposition spectrale de tAA lorsque A est la matrice $3,3$ égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On envisage la matrice ligne $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, A^tA est un réel.

Montrer que le polynôme $X^2 - (A^tA)X$ est annulateur pour la matrice tAA . Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice tAA .

Partie II - Pseudo solution d'une équation linéaire.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Une matrice X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *solution* de cette équation si elle vérifie la relation $AX = B$.

Elle est dite *pseudo solution* de cette équation si elle vérifie :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX - B\|_m \leq \|AZ - B\|_m$$

5) On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.

6) On suppose que X est une pseudo solution de l'équation.

Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda Y^t A (AX - B) \geq 0$$

En déduire que ${}^t AAX = {}^t AB$.

7) Montrer que tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^t AAX = {}^t AB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo solution de l'équation.

8) Exemple : déterminer toutes les pseudo solutions de l'équation $AX = B$ lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9) Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

Partie III - Pseudo inverse d'une matrice.

On reprend les notations de la partie 2.

Parmi toutes les pseudo solutions de l'équation $AX = B$, on se propose de chercher s'il en existe, celle(s) dont la norme euclidienne est minimale.

10) Montrer que l'équation possède une unique pseudo solution de norme minimale notée S et qu'elle est caractérisée par les deux conditions : ${}^t AAS = {}^t AB$ et S est orthogonal à $\text{Ker} {}^t AA$.

11) Pour B fixé et appartenant à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, préciser S dans les cas suivants :

(a) A est de rang n .

(b) A est la matrice nulle.

12) Lorsque B varie dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui à B associe son unique pseudo solution de norme minimale S est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Relativement aux bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette dernière application linéaire est représentée par sa matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On convient de l'appeler, jusqu'à la fin de ce problème, *pseudo inverse* de la matrice A et de la noter A^+ .

13) On suppose que A est non nulle et on revient à la matrice ${}^t AA$ dont la décomposition spectrale introduite à la question 3) b) est $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$.

On désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des indices i compris entre 1 et p pour lesquels on a $\lambda_i \neq 0$.

(a) Pourquoi a-t-on $\Gamma(A) \neq \emptyset$?

(b) Vérifier que $A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i^t A$.

- 14) Reprendre l'exemple de la question 8) en calculant explicitement A^+ ; retrouver ainsi l'unique pseudo solution de norme minimale.
- 15) Lorsque A appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$A^+ = \begin{cases} \frac{{}^t A}{A {}^t A} & \text{si } A \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie IV - Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$.

- 16) Démontrer les relations suivantes :

$$A = AA^+A, \quad A^+ = A^+AA^+, \quad {}^t(A^+A) = A^+A, \quad {}^t(AA^+) = AA^+$$

- 17) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(*) \quad A = AMA, \quad M = MAM, \quad {}^t(MA) = MA, \quad {}^t(AM) = AM$$

- (a) Montrer que M vérifie les relations suivantes :

$$M = M {}^t M {}^t A = {}^t A {}^t M M, \quad A = A {}^t A {}^t M = {}^t M {}^t A A, \quad {}^t A = {}^t A A M = M A {}^t A$$

- (b) En déduire que $M = A^+$ et qu'ainsi A^+ est l'unique matrice vérifiant les relations (*).

- 18) Établir les formules suivantes :

$$(a) \quad (A^+)^+ = A.$$

$$(b) \quad ({}^t A)^+ = {}^t(A^+).$$

- 19) Soit x un réel strictement positif et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Montrer que : $A^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[({}^t A A + x I_n)^{-1} {}^t A \right]$. (On conviendra, sous réserve d'existence, que la limite en un point d'une matrice est la matrice formée des limites en ce même point de ses coefficients). Utiliser ce procédé pour trouver la pseudo inverse de la matrice A mise en œuvre dans la question 8).

- 20) Pour tout α réel différent de 0 et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, exprimer $(\alpha A)^+$ en fonction de α et A^+ . La matrice $(\alpha A)^+$ admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?



Code épreuve : 281

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Vendredi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte quatre parties.

On pose : $E_0 = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ bornée sur } \mathbb{R}\}$; si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Partie I – Construction de la fonction arctan.

On définit, sous réserve d'existence, la fonction $\arctan : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Vérifier que la fonction $\arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser une expression de $\frac{d}{dx}(\arctan)$.

2) Montrer que $\arctan$ admet une limite finie, notée provisoirement L , en $+\infty$ et justifier que $\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -L, L[$.

3) Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, calculer $\arctan[\tan(x)]$, en déduire la valeur de L .

4) Justifier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Si $f \in E_0$, on définit, sous réserve d'existence, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$.

L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ .

Partie II – Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ .

6) Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7) Soit $f \in E_0$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ est absolument convergente.

8) Soit $f \in E_0$, montrer que $\Phi(f)$ est bornée et $N_0[\Phi(f)] \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$.

9) Continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$.

Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.

a- Soit A un réel strictement positif et $h \in \mathbb{R}^*$, vérifier que :

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right)$$

b- En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, pour tout $A > 0$,

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq N_0(f) \left(|h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right).$$

c- Soit $h \in \mathbb{R}^*$, en choisissant $A = \frac{1}{|h|}$, établir que :

$$|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| \leq |h| \frac{N_0(f)}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi N_0(f) \arctan|h|.$$

d- Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

e- En déduire que $\Phi : f \in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0 .

Partie III – Étude d'un exemple.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

g est l'image par Φ de l'application constante égale à 1: $x \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

10) Vérifier que g est impaire.

11) Dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$. Soit x un réel strictement positif.

a- Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan''(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$.

b- Soit a et b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b . Montrer que :

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \left(\frac{1}{1+u^2} \right).$$

c- Soit $h \in \left] -\frac{x}{2}, \frac{x}{2} \right[$ et t un réel positif, établir :

$$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

d- Montrer alors que, pour tout $h \in \left] -\frac{x}{2}, \frac{x}{2} \right[$,

$$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

e- En déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

f- g est-elle dérivable sur $]-\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

12) Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

a- Déterminer $g'(1)$.

b- Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de

$$t, \text{ telles que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x) \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x) \frac{t}{1+t^2}.$$

c- En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

d- g est-elle de classe C^1 sur $]0, +\infty[$?

13) Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

a- Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$.

b- Montrer que, pour tout $x > 0$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

14) Etude de la limite de g en $+\infty$.

a- Démontrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$.

b- Ecrire, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt \text{ et montrer}$$

$$\text{alors que : } \left| \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \frac{1}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

c- Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

15) Application au calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

a- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

b- Vérifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$.

c- Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt$ (on justifiera l'existence des intégrales introduites).

d- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^{2n} \ln t dt$.

e- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt = 0$.

f- Donner alors la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie IV – Retour à l'étude de Φ .

16) Montrer que $\sup_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :

- $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \frac{\pi^2}{4} |\lambda|$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \dots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$, autrement dit $\Phi^0 = id_{E_0}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$.

- $f \in E_0 \setminus \{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$.

17) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \lambda \Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n)$.

18) Peut-on avoir $\lambda \Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $id_{E_0} - \lambda \Phi$?

19) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$ et que la série $\sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n)$ converge.

20) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x)$ converge.

On note alors $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

21) Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

22) Continuité de φ .

a- Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right].$$

b- En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right] + |f(x+h) - f(x)|.$$

c- Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

23) Application aux valeurs spectrales de Φ .

a- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(id_{E_0} - \lambda \Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right)$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_0 \left[(id_{E_0} - \lambda \Phi) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k \right) - f \right] = 0.$$

b- Montrer alors que $(id_{E_0} - \lambda \Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $id_{E_0} - \lambda \Phi$?

c- Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi - \mu id_{E_0}$ ne soit pas bijective, montrer que $|\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}$.

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Vendredi 9 mai 2014, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte 6 parties.

Le but du problème est d'étudier les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété sera dite normale.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on identifiera x et la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base B_0 .
- $\langle \mid \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: $\langle x \mid y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. La norme euclidienne associée à $\langle \mid \rangle$ est notée $\| \cdot \|$.

- Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0 , on note f^* l'endomorphisme représenté par tA dans la base B_0 .
- Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par une matrice normale dans la base B_0 est dit normal, il vérifie donc $f^*of = fof^*$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L(\mathbb{R}^n)$, on dit que F est stable par f si : $\forall x \in F, f(x) \in F$. Dans ce cas, on note f_F l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F, f_F(x) = f(x)$.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Partie I – Matrices normales d'ordre 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- 1) Vérifier que A est une matrice normale si et seulement si ou bien A est symétrique ou bien il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.
- 2) On suppose que A est une matrice normale, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$ (on pourra utiliser ${}^tA + A$).
- 3) Déterminer les matrices normales A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

Partie II – L'endomorphisme f^* .

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in M_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0 .

- 4) Propriétés élémentaires de f^* :
 - a- Préciser l'endomorphisme $(f^*)^*$.
 - b- Si f est inversible, préciser l'endomorphisme $(f^{-1})^*$.
- 5) Caractérisation de l'endomorphisme f^* :
 - a- Pour tout couple (i, j) dans $[1, n]^2$, exprimer $\langle f(e_i) | e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A .
 - b- Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.
 - c- Montrer que f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle.$$

6) Montrer que si f est un endomorphisme normal: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

7) Réciproquement, soit $g \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, \|g(x)\| = \|g^*(x)\|$. En exploitant l'égalité $\|g(x+y)\| = \|g^*(x+y)\|$, montrer que g est normal.

8) Vérifier que, si A est une matrice normale de $M_n(\mathbb{R})$, la matrice de f dans toute base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est normale.

Dans la suite du problème, on admettra les résultats suivants :

Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on notera encore f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x, y) \in (E)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.

Dans toute base orthonormée de E , la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f .

On dira encore que f est normal si $f^*of = fof^*$.

Partie III – Matrices normales et polynômes annulateurs.

9) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. Soit $S = {}^tAA$, vérifier que $S^p = 0$ et montrer que $S = 0$. Montrer alors que $A = 0$.

10) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale, on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^q(A) = 0$, montrer que $P(A) = 0$.

11) Exemple : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4, le factoriser. En déduire que $(M - I_n)^3 \cdot (M + I_n)^3 = 0$. Montrer alors que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

12) Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au moins égal à 1, dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1.

On note I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulateurs de A dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1, et on pose $D_A = \{\deg Q; Q \in I_A\}$.

13) Justifier que D_A admet un minimum d , soit π un élément de I_A de degré d . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les racines complexes deux à deux distinctes de π .

a- Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres complexes de A .

b- En déduire que l'unique élément de I_A de degré d , de coefficient dominant égal à 1 est

$$\prod_{k=1}^d (X - \lambda_k).$$

Dans la suite du problème, on note π_A ce polynôme.

14) Déterminer π_M pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$ et $M \neq \pm I_n$.

Partie IV – Propriétés spectrales des matrices normales.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice normale, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0 .

On note toujours π_A le polynôme associé à A défini dans la partie III.

15) Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^*$. Plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifier que

$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n}) = \text{Ker}(f^* - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$, en déduire que les espaces propres, s'ils existent, de f et de f^* sont identiques.

16) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \text{Ker}(Q(f))$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f et f^* . Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f et f^* . Vérifier alors que f_F et $f_{F^\perp}$ sont deux endomorphismes normaux respectivement de F et de $F^\perp$ et que $(f_F)^* = (f^*)|_F$.

17) Recherche d'un sous-espace stable.

On désire montrer qu'il existe un sous-espace F , stable par f et f^* , de dimension 1 ou 2 :

a- Premier cas : on suppose que π_A admet une racine réelle $\lambda : \pi_A(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $e \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ appartenant à $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})$. Montrer que $F = \text{Vect}(e)$ convient.

Deuxième cas : on suppose maintenant que π_A n'admet pas de racine réelle.

b- Justifier l'existence d'un couple de réels (a, b) tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + b \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ ne soit pas inversible. On note $G = \text{Ker}(f^2 + af + b \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ et $g = f_G$.

c- Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. On note e un vecteur propre de h .

d- Montrer alors que $F = \text{Vect}(e, f(e))$ convient.

18) Montrer qu'il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont des réels, } \rho_1, \dots, \rho_s \text{ sont des réels}$$

positifs et $\theta_1, \dots, \theta_s$ des réels appartenant à $[0, 2\pi[$.

19) Quelles sont les matrices normales A pour lesquelles π_A a toutes ses racines réelles ?

Partie V – Etude d'un exemple.

Dans cette partie, A est une matrice normale et inversible de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $(A + I_n)^7 = A^7 + I_n$.

On note $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

20) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases}$ puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

21) Montrer que A est une matrice orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

22) Montrer que tA est un polynôme en A .

23) On suppose de plus que n est impair et que $A \neq -I_n$, déterminer le polynôme π_A associé à A .

Partie VI – Généralisation.

Dans cette partie A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A . On note π_A le polynôme associé à A , tel que défini à la question 13.

On désire démontrer que tA est un polynôme en A .

Plus précisément, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n - 1$, tel que ${}^tA = P(A)$.

24) Quel polynôme P convient lorsque π_A a toutes ses racines réelles ?

Dans la suite de cette partie, on suppose que A admet $2t$ valeurs propres complexes non réelles distinctes.

On les note $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_t, \bar{\mu}_t$. Pour tout q de $\llbracket 1, t \rrbracket$, on note $\mu_q = \rho_q e^{i\theta_q}$, où ρ_q est un réel strictement positif et θ_q un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. Enfin, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres réelles distinctes de A .

$$\text{On a : } \pi_A = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k) \prod_{q=1}^t (X^2 - 2\rho_q \cos \theta_q X + \rho_q^2).$$

D'après la question 18, il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la

$$\text{forme : } M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_t R_{\theta_t} \end{pmatrix} \quad (\text{les réels } \lambda_k \text{ pouvant être répétés plusieurs fois})$$

ainsi que les matrices $\rho_q R_{\theta_q}$.

25) Préciser $M_C(f^*)$.

26) Montrer que $(f^* = P(f)) \Leftrightarrow (\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_k = P(\lambda_k) \text{ et } (\forall k \in \llbracket 1, t \rrbracket, \overline{\mu_k} = P(\mu_k)))$.

On note $S = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$ et $Q = \prod_{q=1}^t (X^2 - 2\rho_q \cos \theta_q X + \rho_q^2) = \prod_{q=1}^t (X - \mu_q)(X - \overline{\mu_q})$ et on introduit les familles de polynômes $(L_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$, $(Q_j)_{j \in \llbracket 1, t \rrbracket}$ et $(T_j)_{j \in \llbracket 1, t \rrbracket}$ telles que :

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1, r \rrbracket, L_j = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) \cdot \frac{Q}{Q(\lambda_j)},$$

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1, t \rrbracket, Q_j = \frac{S}{S(\mu_j)} \cdot \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^t \frac{(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})}{(\mu_j - \mu_k)(\mu_j - \overline{\mu_k})} \right) \cdot \left(\frac{X - \overline{\mu_j}}{\mu_j - \overline{\mu_j}} \right) \text{ et}$$

$$\text{pour tout } j \in \llbracket 1, t \rrbracket, T_j = \frac{S}{S(\overline{\mu_j})} \cdot \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^t \frac{(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})}{(\overline{\mu_j} - \mu_k)(\overline{\mu_j} - \overline{\mu_k})} \right) \cdot \left(\frac{X - \mu_j}{\overline{\mu_j} - \mu_j} \right).$$

Enfin, on pose $P = \sum_{k=1}^r \lambda_k L_k + \sum_{k=1}^t (\overline{\mu_k} Q_k + \mu_k T_k)$.

27) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que ${}^t A = P(A)$.

28) Préciser P lorsque $\pi_A = X(X+1)(X^2+X+1)$.

FIN.

Concours d'admission de 2015

Conception : ESSEC

OPTION Scientifique

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai 2015, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

$C^0([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $C^k([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées successives jusqu'à la k -ème sont continues.

Si f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty$ le nombre réel $\max_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Si q est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par : $F(q) = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) / \forall t \in [0,1], f''(t) = q(t)f(t)\}$.

Introduction

1. a) Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
b) Pour toute fonction f de $C^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :
$$\Phi(f): t \in [0,1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du.$$
Vérifier que l'application Φ , qui à f associe $\Phi(f)$, est un endomorphisme de $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
c) Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^2([0,1], \mathbb{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.
d) En déduire pour toute fonction f de $C^0([0,1], \mathbb{R})$:
(f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0) = f'(0) = 0$) si et seulement si ($\Phi(f) = f$).
2. Soit f dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et, pour tout n entier naturel, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.
a) Montrer que : $\forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leq \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}$.
b) En déduire que, pour tout t de $[0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
c) Montrer alors que si f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0) = f'(0) = 0$, alors f est nulle.
d) Montrer que l'application $\Delta: \begin{cases} F(q) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \mapsto (f(0), f'(0)) \end{cases}$ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$?

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$.

Soient ω une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives et a un nombre réel. On note :

$$E_a(\omega) = \left\{ f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) / \forall t \in [0,1], f''(t) = -a\omega(t)f(t) \text{ et } f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

3. a) Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
b) Un exemple élémentaire : le cas $a = 0$. Décrire $E_0(\omega)$.
4. Un exemple constructif : le cas ω est la fonction constante 1.
a) Pour a strictement négatif, remarquer que $t \mapsto \exp\left(\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ et $t \mapsto \exp\left(-\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour a strictement négatif.
b) Pour a strictement positif, remarquer que $t \mapsto \cos\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ et $t \mapsto \sin\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour a strictement positif en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a} / \pi$.

5. On revient au cas général, montrer que : $\dim(E_a(\omega)) \leq 1$. On pourra faire intervenir encore l'application Δ .
6. Montrer que : si $E_a(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors a est strictement positif (on pourra introduire $\int_0^1 (f'(t))^2 \omega(t) dt$).
7. Lorsque f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose : $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)dt$. Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, l'espace $C^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

Pour f dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$, on note : $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \omega(t) dt}$.

8. Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

Partie II : l'exemple $\omega = 1$.

Dans cette partie, ω est la fonction constante 1 et p est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout k entier naturel non-nul, on note ψ_k la fonction définie par :

$$\psi_k : t \in [0,1] \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi t).$$

9. a) Vérifier qu'il existe un nombre réel a strictement positif tel que ψ_k appartienne à $E_a(1)$.
b) Pour tout couple (k,l) dans $(\mathbb{N}^*)^2$, calculer : $\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_l(t)dt$.
c) On note G le sous-espace vectoriel de $C^0([0,1], \mathbb{R})$ engendré par $(\psi_1, \dots, \psi_p)$. Vérifier que $C = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ est une base orthonormée de G .

10. Pour g élément de G , on définit la fonction $u(g)$ par : pour tout $t \in [0,1]$,

$$(u(g))(t) = 2 \cos(\pi t) g(t) - \left(\int_0^1 g(x) \psi_p(x) dx \right) \psi_{p+1}(t).$$

- a) Montrer que $u : g \mapsto u(g)$ est un endomorphisme de G .
- b) Ecrire la matrice de u dans la base C . Justifier que u est diagonalisable.
11. a) Vérifier que, pour g élément de G : $\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt$.
b) Soit λ une valeur propre de u , montrer d'abord que λ appartient au segment $[-2, 2]$. Vérifier ensuite que λ ne vaut ni 2 ni -2 (on pourra raisonner par l'absurde).
12. Soient λ une valeur propre de u et θ un nombre réel de $]0, \pi[$ tel que : $\lambda = 2 \cos(\theta)$, on note ψ un vecteur propre associé. Il existe un p -uplet de nombres réels $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$\psi = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k. \text{ On pose } x_0 = x_{p+1} = 0.$$
a) Vérifier que, pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, $x_{k+1} - 2 \cos(\theta) x_k + x_{k-1} = 0$.

b) En déduire l'existence d'un couple (A, B) de nombres réels tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, p+1 \rrbracket$, $x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$.

c) Justifier que A est nul et qu'il existe s dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ tel que : $\theta = \frac{s\pi}{p+1}$.

d) En déduire les valeurs propres de u et une base de vecteurs propres de u .

Partie III : l'hypothèse (H_ω) .

On revient au cas général : ω est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles strictement positives. On note (H_ω) l'hypothèse : Il existe une suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n , $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse (H_ω) est-elle vérifiée si ω est la fonction constante 1 ? Justifier la réponse.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée.

Ainsi, on suppose qu'il existe ω une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse (H_ω) est réalisée ; on note a un nombre réel positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts, tels que, pour tout entier n : $E_{a_n}(\omega) \neq \{0\}$ et $0 < a_n \leq a$.

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$f_n \in E_{a_n}(\omega)$ et $\int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 1$. Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit φ dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout n entier naturel, on note :

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt \text{ et } S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi) f_k.$$

a) Que représente $S_n(\varphi)$?

b) Vérifier que, pour tout n entier naturel : $\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2$ et $\sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2 \leq \|\varphi\|_2^2$.

c) Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 0} (c_n(\varphi))^2$?

d) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n''(t) \varphi(t) dt = 0$.

16. a) Soit x un nombre réel fixé dans le segment $[0, 1]$. On définit la fonction φ_x par :

$$\varphi_x : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t \in [0, x] \\ x(t-1) & \text{si } t \in]x, 1] \end{cases}. \text{ Vérifier que } \varphi_x \text{ est un élément de } C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

b) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f_n à l'ordre 1 entre 0 et x .

Vérifier que : $f_n(x) = x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t) dt$, puis : $f_n'(0) = -\int_0^1 (1-t) f_n''(t) dt$.

- c) En déduire : $f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f_n''(t) dt$ et conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
- d) Remarquer : $f_n(x) = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle$, en déduire : $|f_n(x)| \leq a \|\varphi_x\|_2$.
- e) Calculer $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2 dt$, en déduire : $|f_n(x)| \leq ax(1-x) \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.
- f) Justifier : $|f_n'(0)| \leq a \frac{\sqrt{\|\omega\|_\infty}}{\sqrt{3}}$.
- g) Rappeler pourquoi on a : $f_n'(x) = f_n'(0) - a_n \int_0^x \omega(t) f_n(t) dt$ et en déduire alors :
 $|f_n'(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty\right)$.
17. On note $C = a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty\right)$ (on remarque que C est un nombre réel strictement positif).
 Déduire des questions précédentes : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|$.
18. Soit ε un nombre réel strictement positif, on choisit N un entier naturel non-nul tel que :
 $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ et on pose, pour k dans $\llbracket 0, N \rrbracket$: $\alpha_k = \frac{k}{N}$.
- a) Justifier qu'il existe un entier naturel p tel que : $\forall n \geq p, \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, |f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- b) Soit alors x un nombre réel fixé dans le segment $[0, 1]$. En introduisant un entier k de $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que : $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, montrer que : $\forall n \geq p, |f_n(x)| < \varepsilon$.
- c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.
- d) Montrer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 0$ et conclure.

Conception : ESSEC

OPTION Scientifique

MATHÉMATIQUES

Vendredi 6 mai 2016, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ et $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$.

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ , des expressions des fonctions $\sin$, $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (On parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1]$,
 $[T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$.

Tournez la page S.V.P.

Partie I : Etude de la fonction φ .

- 1- Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2} \text{ est convergente.}$$

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs.

La fonction φ est donc définie sur D .

- 2- Imparité et périodicité de φ :

a- Justifier que φ est impaire.

b- Vérifier que pour x dans D : $\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$.

c- Montrer que pour x dans D : $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.

La fonction φ est donc périodique de période 1.

- 3- Continuité de φ :

a- Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0,1\}$ l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

b- Vérifier que : $\forall x \in D, \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$.

c- Soit h un nombre réel de $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$, montrer que : $\forall x \in [0,1], |g(x+h) - g(x)| \leq C|h|$ où

$$C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}.$$

d- En déduire que g est continue sur $[0,1]$ puis que φ est continue sur $]0,1[$.

La fonction φ est donc continue sur D .

- 4- Etude de φ en 0 et en 1 :

a- Montrer que : $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

b- Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II: Etude de l'opérateur T

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

On note, pour tout entier naturel k , e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [0,1], e_k(x) = x^k$ et pour tout entier naturel n , F_n le sous espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

5- Vérifier que T est un endomorphisme de E .

6- Etude de T sur F_n :

a- Vérifier que : $\forall f \in F_n, T(f) \in F_n$.

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$.

b- Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n .

c- Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7- Etude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2.id_E)$:

a- Montrer que $\text{Ker}(T - 2.id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit f un élément de $\text{Ker}(T - 2.id_E)$. On note $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0,1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0,1]$ tel que $M = f(x_1)$.

b- Montrer que : $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$.

c- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.

d- En déduire que : $m = f(0)$.

e- Faire une étude similaire pour M .

f- Montrer alors que f est constante.

8- Etude de la fonction cot :

Pour tout x dans l'ensemble D , on note $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a- Vérifier que cot est définie et continue sur D , qu'elle est impaire et périodique de période 1.

b- Montrer que : $\cot(x) \sim \frac{1}{x}$ et que : $\cot(x) - \frac{1}{x} \sim -\frac{\pi^2}{3}x$.

c- Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

d- Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D , on a : $\frac{x}{2} \in D, \frac{x+1}{2} \in D$

et $\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$.

9- Calcul de φ :

a- Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D , $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

b- Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

c- Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D, \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

10- Première application :

a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

b- Vérifier que $\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)}$.

c- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

d- Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie III: Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[0,1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ et

$$\beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x).$$

11- Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[0,1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x).$$

12- Explicitation de β : on fixe un nombre réel x dans $]0,1[$.

a- Pour N entier naturel non nul, calculer $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

b- Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

c- Montrer que : $\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

d- En déduire que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

e- Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, $\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

13- Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n , on pose $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

a- Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note: $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

b- Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

c- Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x . On note encore

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$$

d- Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $] -n, n[$, montrer que

$$P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x).$$

e- En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

f- Montrer alors que, pour tout nombre réel x , $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, on pose

$$\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt \text{ et } v_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}.$$

14- Montrer que, pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.

La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

15- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$,

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) v_n(x). \text{ Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la}$$

formule trigonométrique $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

16- Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n , on pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

a- Vérifier que lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

b- Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$.

c- Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt$.

17- Soit F une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi F(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt \right) = 0.$$

18- Pour x élément de D , on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

a- Montrer que Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

b- Vérifier que :

$$\forall t \in [0, \pi], C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

c- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D, \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt + I_n.$$

19- Application :

a- Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout x élément de D ,

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

b- En déduire que, pour tout x élément de D , $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.

Conception : ESSEC

OPTION Scientifique

MATHÉMATIQUES

Jeudi 4 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et Objectifs :

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de E .

Soit a un élément de A , on dit que a est un point extrémal de A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \left(\frac{x+y}{2} = a \right) \Rightarrow (x = y = a).$$

Les parties 0 et I permettent de se familiariser avec la notion de point extrémal.

La partie II prouve que les points d'une partie donnant le diamètre de cette partie sont extrémaux.

Enfin la partie III étudie des propriétés des matrices de permutation, en particulier de l'isobarycentre de ces matrices. On obtient finalement une preuve du fait que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.

- 1- On prend ici $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$, montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.
- 2- On considère maintenant $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$, montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

Partie I : Étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble $\left\{ M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \alpha \in [0, 1] \right\}$ et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité dans $M_2(\mathbb{R})$.

- 3- Description et propriétés des éléments de A_2 .
 - a- Vérifier que : $A_2 = \{ \alpha I_2 + (1-\alpha)J, \alpha \in [0, 1] \}$.
 - b- Soient (α, β) de $[0, 1]^2$ et (M_α, M_β) dans A_2 , montrer que : $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) \in A_2$.
 - c- Déterminer les éléments M_α de A_2 qui sont inversibles dans $M_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de α de $[0, 1]$ $(M_\alpha)^{-1}$ appartient à A_2 .
- 4- Points extrémaux de A_2 .
 - a- Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2 .
 - b- Soit α dans $]0, \frac{1}{2}[$, vérifier que : $M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J)$; en déduire que M_α n'est pas extrémal.
 - c- Par une méthode similaire, montrer que si α est dans $[\frac{1}{2}, 1[$, M_α n'est pas extrémal.
- 5- Réduction simultanée des matrices de A_2 .
 - a- Déterminer les valeurs propres et espaces propres de la matrice J .
 - b- Montrer qu'il existe une matrice inversible P dans $GL_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout α de $[0, 1]$, $P^{-1}M_\alpha P$ est une matrice diagonale D_α , on précisera P et D_α .
 - c- On note u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les réels α de $]0, 1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On précisera l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle \mid \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

On considère A une partie non vide de E telle qu'il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur v de A , on ait : $\|v\| \leq R$.

6- Montrer que l'ensemble $\{\|v-w\|; (v, w) \in A^2\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Cet ensemble admet donc une borne supérieure.

On note alors $\delta(A) = \sup \{\|v-w\|; (v, w) \in A^2\}$, $\delta(A)$ est appelé diamètre de A .

Dans la suite de cette partie, on suppose que la partie A vérifie la propriété (H) suivante :

(H) : Il existe (a, b) dans A^2 tel que $\delta(A) = \|b-a\|$.

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A .

7- On considère donc (c, d) dans A^2 tel que $\frac{c+d}{2} = a$.

a- Vérifier que : $\|a-b\| \leq \frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) \leq \|a-b\|$.

En déduire que : $\|c-b\| = \|d-b\| = \delta(A)$.

b- Vérifier que : $\|c-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a | a-b \rangle$.

En déduire que : $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a | a-b \rangle$.

c- Montrer de même que : $\|d-a\|^2 = -2\langle d-a | a-b \rangle$.

d- Montrer alors que $c-d$ et $a-b$ sont orthogonaux.

e- En déduire que a , c et d sont égaux et conclure.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.

Dans tout la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $E = M_n(\mathbb{R})$,

$$A_n = \left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{R}) / \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0, \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1 \right\}$$

est l'ensemble des matrices bistochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

$$F_n \text{ est l'ensemble } \left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in M_n(\mathbb{R}) / \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1,n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0 \right\}.$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

Enfin, $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

8- Premières propriétés de A_n .

- a- Soit (M, M') dans A_n^2 , montrer que : $\frac{1}{2}(M + M') \in A_n$, et que : ${}^t M \in A_n$ (${}^t M$ désigne la matrice transposée de M).

On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ (toutes les composantes de X_0 sont égales à 1).

- b- Soit M de A_n , montrer que : $MX_0 = X_0$.

- c- Réciproquement, soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) de $\llbracket 1,n \rrbracket^2$ $m_{i,j} \geq 0$, $MX_0 = X_0$ et $({}^t M)X_0 = X_0$, montrer que : $M \in A_n$.

- d- Soit (M, M') de A_n^2 , montrer que : $MM' \in A_n$.

9- Endomorphismes et matrices de permutation.

On note S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1,n \rrbracket$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\llbracket 1,n \rrbracket$ sur lui-même. Le cardinal de S_n est $n!$.

Soit σ de S_n , on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : pour tout $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base B_0 , on dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ .

- a- Si σ est l'identité de $\llbracket 1,n \rrbracket$ (pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $\sigma(i) = i$), que sont f_σ et M_σ ?
- b- Si σ est une permutation de S_n , montrer que : $M_\sigma \in A_n$. Déterminer τ de S_n telle que ${}^t M_\sigma = M_\tau$.

- c- Soit (σ, σ') de $(S_n)^2$, montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$; en déduire que M_σ est inversible et déterminer $(M_\sigma)^{-1}$.
- d- Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.
- e- Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.

10- Soit σ de S_n , montrer que M_σ est un point extrémal de A_n .

11- Étude d'un projecteur : on note $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ et $P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma$.

- a- Soit τ fixé dans S_n , montrer que l'application $\varphi_\tau : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. Montrer alors que : $f_\tau \circ p = p$.
- b- En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
- c- Montrer que : $\text{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.
- d- Montrer alors que : $\text{Im}(p) = \text{Vect}(x_0)$ où $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$.
- e- Calculer tP ; en déduire que p est un projecteur orthogonal et déterminer P .
- f- Vérifier que $P \in A_n$.

12- Diamètre de A_n .

- a- Si $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ sont deux matrices de E , calculer $\text{Tr}({}^tMN)$.
- b- Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E .
Si (M, N) sont dans E , on note $(M|N) = \text{Tr}({}^tMN)$ et $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$.
- c- Soit σ de S_n , calculer $\|M_\sigma\|_2$.
- d- Dans cette question seulement, on suppose que $n=2$. Soit (α, β) dans $[0,1]^2$ et (M_α, M_β) de A_2^2 , calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.
- e- On revient au cas général : $n \geq 2$. Soit M de A_n , montrer que $\|M\|_2^2 \leq n$.
- f- Montrer alors que, pour tout (M, N) de A_n^2 , $\|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$.
- g- Soit σ dans S_n , construire τ dans S_n tel que $(M_\sigma | M_\tau) = 0$.
- h- En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n .

13- Structure et dimension de F_n .

- a- Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E .

b- Soit $\Phi: F_n \rightarrow M_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de F_n , associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2}$. Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n dans $M_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de F_n .

14- On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n . On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$, on note (P_n) la proposition :

(P_n) Si M est un point extrémal de A_n , M est une matrice de permutation.

a- Vérifier, à l'aide de la partie I, que la proposition (P_2) est réalisée.

On considère n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que (P_{n-1}) soit réalisée et on se donne $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in E$ un point extrémal de A_n .

On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k, j_k} est non nul.

On pose alors $H = Vect(E_{i_k, j_k} ; k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket)$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ sont les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire : $E_{i,j}$ est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ayant $n^2 - 1$ coefficients nuls et un seul valant 1, placé en position (i, j) .

b- Montrer que $H \cap F_n \neq \{0\}$.

c- On prend N dans $H \cap F_n$ avec $N \neq 0$ et, pour t réel, on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$, Q_t est dans A_n .

d- En considérant t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t} , montrer que l'on aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

e- Montrer alors qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un terme non nul et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice de la ligne telle que $m_{r,s} = 1$.

f- Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

g- On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r , montrer que M' est dans A_{n-1} et que M' est un point extrémal de A_{n-1} .

h- En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n .

Conception : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 2 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectifs :

Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note :

$$A(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum n^k |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

$$\text{et } B(r) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \right\}.$$

Et à toute suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction

$$f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a .

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $(f_a^{(n)}(1))_{n \in \mathbb{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I – Premières propriétés et premiers exemples.

- 1- Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$, montrer que, pour tout nombre réel x de $[-r, r]$ et pour tout entier naturel k , la série $\sum n^k |a_n| |x|^n$ converge. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$.
- 2- Vérifier également que : $0 < r \leq r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$
- 3- Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif r , $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
- 4- Exemples :
 - a- On souhaite montrer que, pour tout r réel strictement positif, la suite $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k : $u_n(k) = \frac{n^{k+2} r^n}{n!}$. En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure alors : $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in A(r)$.
 - b- Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Déterminer ensuite les réels r strictement positifs pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.
- 5- Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout réel r de $]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $A(r)$.
(On pourra penser à écrire : $n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$.)

Partie II – Régularité de la fonction f_a

Dans cette partie R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

- 6- Vérifier que $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $] -R, R[$ (on pourra utiliser la question 5).
- 7- Continuité de f_a :

- a- Soit r un réel de $]0, R[$, x dans $[-r, r]$ et h un réel tel que : $x+h \in [-r, r]$, montrer que, pour tout entier naturel n : $|(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|$.
- b- Justifier alors soigneusement que $|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n \right) |h|$.
- c- Montrer alors que f_a est continue sur $[-r, r]$ puis sur $] -R, R[$.

8- Caractère C^1 de f_a :

On considère ici un réel r de $]0, R[$ et x dans $[-r, r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et, sous réserve d'existence : } g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- a- Soit ρ dans $]r, R[$. Justifier que la suite $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, en déduire que g_a est définie et continue sur $] -R, R[$.
- b- Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S'_n(t) dt$.
- c- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\left| \int_0^x (g_a(t) - S'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k$.
- d- En déduire que : $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$.
- e- Montrer alors que f_a est de classe C^1 sur $] -R, R[$ et que : $f'_a = g_a$.

9- Caractère C^∞ de f_a :

- a- Soit r de $]0, R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge.
- b- Montrer que f_a est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et que, pour tout x de $] -R, R[$ et tout k de $\mathbb{N}$: $f_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right)$.
- c- Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

10- Exemples :

- a- On pose $\alpha = \left(\frac{1}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donner une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.

- b- Soit λ un réel strictement positif, β la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$. En déduire que, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$ converge et : $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$

Partie III – Une formule de réciprocité.

Dans cette partie, R désigne un réel strictement supérieur à 1 et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel ρ strictement supérieur à 1 tel que la suite $(b_n \rho^n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

11- Expression de a_0 :

- a- Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}, f_a(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt$.
- b- Démontrer que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t) dt = 0$.
- c- En déduire que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p$ converge et que : $a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$.

12- Généralisation : On considère ici un entier naturel s fixé.

- a- Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}, f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt$.
- b- Vérifier que : $\forall N \in \mathbb{N}, \left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}$.
- c- Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t) dt$.
- d- Montrer alors que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et : $a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$.

13- Cas particulier : on suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq d+1 \Rightarrow a_n = 0$.

a- Que peut-on dire de la fonction f_a ?

b- Montrer que la condition (H) est réalisée.

c- En déduire que, pour tout s de $\llbracket 0, d \rrbracket$, $a_s = \sum_{n=s}^d (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$.

Partie IV – Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X , on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = P(X = n)$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, autrement dit : $G_X = f_a$.

14- Premiers résultats :

a- Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

b- En déduire qu'il existe un réel R au moins égal à 1 tel que G_X soit définie et de classe C^∞ sur $] -R, R[$.

15- Premier exemple :

a- On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1, déterminer la fonction G_X , vérifier qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout s de $\mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b- On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant : $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout s de $\mathbb{N}$: $f_a^{(s)}(1) = 1$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout n de $\mathbb{N}$. Quelle est la loi de X ?

16- Deuxième exemple : On considère ici un réel p dans $]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

a- On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p . Déterminer la suite

$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la fonction G_X ; vérifier que G_X est de classe C^∞ sur $\left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$. Enfin,

pour tout s de $\mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

- b- On suppose maintenant que : $p > \frac{1}{2}$. Vérifier que : $\frac{q}{p} < 1$.

On considère X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que : $G_X = f_a$ est définie et de

classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, et pour tout s de $\mathbb{N}$: $\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$. Justifier que l'hypothèse

(H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $X+1$?

17- Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :

On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $\llbracket 0, d \rrbracket$ où d est un entier de $\mathbb{N}^*$.

On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d . Pour s de $\llbracket 0, d \rrbracket$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est une base de Pol_d .

On définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \mapsto 1 \text{ et pour tout } s \text{ de } \llbracket 1, d \rrbracket, H_s : x \mapsto \frac{x(x-1)\dots(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (x-k).$$

- a- Montrer que la famille $(H_s)_{s \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est une base de Pol_d .

On note Δ défini sur Pol_d par : $\forall P \in Pol_d, \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$.

- b- Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d .

- c- Montrer que : $\Delta(H_0) = 0$ et encore : $\forall s \in \llbracket 1, d \rrbracket, \Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.

- d- Montrer que : $\forall P \in Pol_d, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{s=0}^d \left[(\Delta^s(P))(0) \right] H_s(x)$.

- e- En déduire que, pour tout k de $\llbracket 0, d \rrbracket$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^d \left[(\Delta^s(e_k))(0) \right] H_s(n).$$

- f- Montrer alors que, pour tout k de $\llbracket 0, d \rrbracket$, l'espérance de X^k est :

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^d \left[(\Delta^s(e_k))(0) \right] b_s \text{ où } b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

- g- Exemple : on suppose ici que : $d = 2, E(X) = 1$ et $E(X^2) = \frac{3}{2}$. Déterminer b_0, b_1 et

b_2 , puis a_0, a_1 et a_2 . Reconnaître la loi de X .