M 182

ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES

2ème épreuve - (Coef. 4)

JEUDI 18 MAI 1978 de 8 h à 12 h.

Les parties I - II - III (sauf III-5) sont indépendantes.

QUESTION PRELIMINAIRE

X désignant une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ et, pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, p_i désignant la probabilité de l'évènement $X = i$, on appelle *fonction génératrice* de la variable aléatoire X, la fonction polynôme F_X définie pour tout nombre réel u par

$$F_X(u) = \sum_{i=0}^{n} p_i\, u^i \, .$$

Que vaut $F_X(1)$?

Exprimer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X en fonction de $F'_X(1)$ et $F''_X(1)$ [F'_X et F''_X désignent les dérivées première et seconde de la fonction F_X].

PROBLEME

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels autres que zéro, et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au "hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

.../...

PARTIE I

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule *blanche*.

1 - Déterminer la loi de probabilité de Y (ensemble des valeurs prises par Y et probabilité attachée à chacune de ces valeurs).

2 - Soit Z la variable aléatoire définie à partir de Y par la relation $Z = b + 1 - Y$ et pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, b\}$ α_k = Probabilité $(Z=k)$

Que vaut α_0 ? Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant b$ $\alpha_k = \frac{b!}{N^b}\left[\frac{N^k}{k!} - \frac{N^{k-1}}{(k-1)!}\right]$

3 - Soit F_Z la fonction génératrice de Z. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad F_Z(u) = \frac{b!}{N^b}(1-u)\left[\sum_{k=0}^{b} \frac{(Nu)^k}{k!}\right] + u^{b+1}$$

En déduire l'espérance mathématique de Z puis celle de Y.

PARTIE II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'évènement, noté N_n : "la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est *noire*" ;
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules *noires* obtenues au cours des n premiers tirages ;
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $P(n,k)$ la probabilité de l'événement : "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules *noires*".

On remarquera que $P(0,0) = 1$ et que $P(n,k) = 0$ si $k > \text{Inf}(n,b)$.

1°) a - En remarquant que l'évènement N_{n-1} et l'évènement contraire $\overline{N}_{n-1}$ constituent un système complet d'évènements et en utilisant la formule des probabilités totales trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre q_n et q_{n-1}.

b - En déduire la valeur de q_n.

2°) a - Que valent $\sum_{k=0}^{n} P(n,k)$; $P(n,0)$; $P(n,n)$?

b - Démontrer, en s'inspirant de la méthode utilisée au II-1°)-a que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall k \geqslant 1 \quad N\,P(n,k) = (a+k)\,P(n-1,k) + (b+1-k)\,P(n-1,k-1) \qquad (1)$$

c - On pose, pour $n \geq 0$ $u_n = b + \left(\frac{N}{a}\right)^n P(n,1)$. Utiliser la relation (1) pour exprimer u_n en fonction de u_{n-1}. En déduire la valeur de $P(n,1)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

d - Montrer que la suite $(P(n,b))_{n\in N}$ est croissante, convergente et que sa limite ℓ est inférieure ou égale à 1.

e - Montrer que la suite $(P(n,b-1))_{n\in N}$ converge et donner sa limite. Montrer plus généralement que, pour tout entier naturel $k < b$ la suite $(P(n,k))_{n\in N}$ converge, et donner sa limite. En déduire que $\ell = 1$.

3°) Dans cette question, on demande de déterminer l'espérance mathématique $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n par les deux méthodes suivantes :

a) en remarquant que X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

b) en utilisant la relation, valable pour tout entier n :

$$N\, q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)\, P(n,k)$$

que l'on démontrera en s'inspirant de II-1°)-a.

Quelle est la limite de la suite $(E(X_n))_{n\in N}$ quand n tend vers $+\infty$.

4°) a - Soit Q_n la fonction génératrice de la variable aléatoire X_n. Démontrer, en utilisant la relation (1) que, pour tout $n \geq 1$:

$$N\, Q_n(u) = (a+bu)\, Q_{n-1}(u) + u(1-u)\, Q'_{n-1}(u) \qquad (2)$$

En remarquant que $Q_0(u) = 1$, montrer que la relation (2) permet de déterminer de proche en proche tous les polynômes Q_n. Ecrire, en particulier Q_1 et Q_2.

b - En dérivant (2), trouver une relation de récurrence entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire à nouveau $E(X_n)$.

c - Déterminer de même une relation de récurrence entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$ pour $n \geq 1$. En déduire que :

$$Q''_n(1) = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

Calculer enfin $V(X_n)$ variance de la variable aléatoire X_n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n)$?

.../...

PARTIE III

Dans ce paragraphe, $\mathbb{R}[u]$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de la variable réelle u, et pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[u]$ le sous-espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $(1, u, \ldots, u^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[u]$. appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[u]$. Enfin, un polynôme de $\mathbb{R}[u]$ sera indifféremment noté A ou A(u).

1 - Soit Φ l'application : $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[u] & \longrightarrow & \mathbb{R}[u] \\ A(u) & \longmapsto & (a+bu)\,A(u) + u(1-u)\,A'(u) \end{array}$

montrer que Φ est linéaire et qu'il existe un entier r *unique* tel que $\mathbb{R}_r[u]$ soit stable par Φ (c'est-à-dire tel que $\Phi(\mathbb{R}_r[u] \subset \mathbb{R}_r[u])$.

On note, pour cette valeur de r, Φ_r l'endomorphisme de $\mathbb{R}_r[u]$ tel que : $\forall A \in \mathbb{R}_r[u]$ $\Phi_r(A) = \Phi(A)$. Ecrire la matrice B de Φ_r dans la base canonique de $\mathbb{R}_r[u]$.

2 - On suppose ici que $b = 2$: chercher les valeurs propres et les polynômes propres de l'endomorphisme Φ_r correspondant à cette valeur de b.

3 - On revient au cas général $b \geqslant 1$ et l'on appelle polynôme propre de Φ tout polynôme A non nul de $\mathbb{R}[u]$ pour lequel existe un nombre réel λ (appelé valeur propre associée au polynôme propre A) vérifiant $\Phi(A) = \lambda A$.

a) Montrer que, si A est un polynôme propre de Φ , il est nécessairement de degré b , et que le polynôme B défini par $B(u) = A(1-u)$ est également un polynôme propre de Φ . Quel lien existe-t-il entre les valeurs propres associées à A et à B ?

b) Démontrer que les polynômes propres de Φ sont, à une constante multiplicative près non nulle, les polynômes A_k tels que $A_k(u) = u^k(1-u)^{b-k}$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots, b$.
Donner la valeur propre associée à chaque polynôme A_k .

4 - Montrer que le système $(A_0, A_1, \ldots, A_b)$ est une base de $\mathbb{R}_b[u]$. Ecrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_b[u]$ à cette base, la matrice inverse P^{-1} et la matrice produit $P^{-1}BP$.

5 - Quelles sont les coordonnées du polynôme Q_n défini au II-4 dans la base $(A_0, A_1, \ldots, A_b)$? En déduire, pour tous entiers n et k la valeur de P(n,k).

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES
Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES

2ème épreuve - (Coef. 4)

VENDREDI 25 MAI 1979 de 8 h à 12 h.

Les parties I - II (sauf II-5) et III sont indépendantes.

NOTATIONS

Si Z est une variable aléatoire, on note :

$E(Z)$ son espérance mathématique, $V(Z)$ sa variance, et, pour tout z réel, $P(Z=z)$ la probabilité que Z prenne la valeur z.

. $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, $\mathcal{B}(n,p)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et p,

. $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ désigne la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0,1,\dots,n\}$, à chacune de ces valeurs étant associée la même probabilité $\frac{1}{n+1}$.

DONNEES

. Dans tout le problème, p désigne un nombre réel vérifiant $0 < p < 1$ (on notera $q = 1-p$).

. Dans les parties I et II seulement : n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 1, un triplet (X,Y,N) de variables aléatoires réelles est défini par les conditions :

1. N est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs prises est $\{0,1,2,\dots,n\}$.

   on note, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$: $\alpha_k = P(N=k)$

   pour tout x réel : $F(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$.

2. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n :
   - la loi conditionnelle de X, sachant que $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{U}_k$.
   - la loi conditionnelle de Y, sachant que $N = k$ est réalisé, est $\mathcal{B}(k,p)$.

PARTIE I

1 $(i,k)\in\mathbb{N}^2$, calculer en fonction des données la probabilité de l'évènement : "X=i et N=k". En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
Si X' désigne la variable aléatoire $N-X$, que valent $E(X')$ et $V(X')$?

3. Déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N sachant que $X = 0$ est réalisé, soit $\mathcal{U}_n$.

Cette condition étant satisfaite :

- comparer les deux variables aléatoires N et $n-X$;
- déterminer en fonction de n : $E(N)$, $V(N)$, $E(X)$, $V(X)$;
- déterminer, pour tout i appartenant à $\{1,2,\dots,n\}$ la loi conditionnelle de N sachant que $X = i$ est réalisé.

4. On revient au cas général et l'on note, pour tout x réel : $G(x) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)x^i$

Démontrer que, pour tout x différent de 1 :

$$G(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x F(t)dt \ .$$

PARTIE II

1. $(i,k)\in\mathbb{N}^2$, calculer en fonction des données la probabilité de l'évènement : "Y=i et N=k". En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .

2. Calculer $E(Y)$, $E(Y^2)$, $V(Y)$ en fonction de $E(N)$ et $V(N)$.
Si Y' désigne la variable aléatoire $N-Y$, que valent $E(Y')$ et $V(Y')$?

3. q' appartenant à $]0,1[$, déterminer la loi de probabilité de N pour que la loi conditionnelle de N sachant que $Y=0$, soit $\mathcal{B}(n,q')$.

Cette condition étant satisfaite, déterminer en fonction de $n,p,p'=1-q'$

a) la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ;

b) $E(N)$, $V(N)$, $E(Y)$, $V(Y)$;

.../...

c) pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$ la loi conditionnelle de N sachant que $Y=i$ est réalisé.

4. On revient au cas général, et l'on note, pour tout x réel, $H(x) = \sum_{i=0}^{n} P(Y=i)x^i$

Démontrer que, pour tout x réel : $H(x) = F(px+q)$.

5. Montrer que la loi de probabilité de X quand N suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est égale à celle de Y quand N suit la loi $\mathcal{U}_n$.

(on pourra utiliser les fonctions G et H).

PARTIE III

On note C_0 l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

C_∞ l'ensemble des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

et, pour tout λ réel, E_λ l'ensemble des éléments f de C_0 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(px+q) = \lambda f(x).$$

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 réel et pour tout n entier naturel $u_{n+1} = p\,u_n + q$.

Déterminer u_n en fonction de u_0. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Si $f \in E_\lambda$ exprimer $f(u_n)$ en fonction de λ et $f(u_0)$.

2. Soit λ réel tel que E_λ ne soit pas réduit à la seule fonction nulle.

Montrer que nécessairement $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

Déterminer E_1.

Si $f \in E_\lambda$ et $\lambda \neq 1$, que vaut $f(1)$?

3. a) Montrer que, si $f \in E_\lambda \cap C_\infty$, il existe un entier naturel k tel que $f^{(k+1)}$ soit la fonction nulle (on pourra raisonner par l'absurde en remarquant que si $f \in E_\lambda$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $f^{(n)} \in E_{\lambda/p^n}$).

b) On suppose qu'il existe λ réel et f non constante tels que $f \in E_\lambda \cap C_\infty$. Soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $f^{(n_0+1)}$ soit la fonction nulle.
Montrer que $\lambda = p^{n_0}$, $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n_0-1)}(1) = 0$. Déterminer f.

c) En déduire, pour toute valeur de λ, $E_\lambda \cap C_\infty$.

4. Soit $\Phi : C_0 \longrightarrow C_0$ $\quad \forall x \neq 1 \quad h(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$

$\qquad f \longmapsto h \qquad\qquad h(1) = f(1)$

   a) Vérifier que, pour tout élément f de C_0, $h = \Phi(f)$ appartient bien à C_0, que $h = \Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et exprimer sa dérivée en fonctin de f et h.

   Montrer que Φ est linéaire.

5. On dit que f élément de C_0 est propre pour Φ si $h = \Phi(f)$ est proportionnelle à f.

   a) Montrer que, si f est propre pour Φ, g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(px+q)$ l'est également.

   b) Déterminer les fonctions propres pour Φ, non nulles (on cherchera leur restriction à chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$ et on tiendra compte de leur nécessaire continuité au point 1).

   c) En déduire que, pour tout λ appartenant à $]0,1]$, E_λ n'est pas réduit à la à la fonction nulle et donner un élément non nul de E_λ.

6. On suppose ici que $p=q=\frac{1}{2}$ et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \lambda^{-k} \times \sin\left[\frac{\pi}{2^k}(x-1)\right] \quad \text{si} \quad x \in]1+2^k, 1+2^{k+1}] \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

$$f(1) = 0 ;$$

$$f(x) = f(2-x) \quad \text{si} \quad x < 1 .$$

Vérifier que f est bien définie pour tout x réel. A quelle condition nécessaire et suffisante sur λ est-elle continue au point 1 ? λ étant ainsi choisi, montrer que f appartient à E_λ. En déduire, pour $p = \frac{1}{2}$ l'ensemble Λ des λ réels tels que E_λ ne soit pas réduit à la fonction nulle.

Que peut-on dire si $\lambda \in \Lambda - \{1\}$ de la dimension de E_λ ?

ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION de 1980

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve (4h)

(Coef. 4)

Préambule - L'attention des candidats est attirée sur le fait que de nombreux résultats peuvent être obtenus avec très peu de calculs.

I - On note $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base, ainsi qu'une algèbre commutative.

2. Dire pourquoi $M(a,b)$ est diagonalisable.

   On note j et k les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique, supposée orthonormale, de $\mathbb{R}^4$ enclidien, sont respectivement :

   $$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de j et k.

   Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices de j et k sont toutes les deux diagonales : déterminer effectivement une telle base et écrire les matrices de j et k dans cette base.

   En déduire les valeurs propres de $M(a,b)$ et une matrice P orthogonale telle que $P^{-1} M(a,b) P$ soit diagonale.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $[M(a,b)]^n$.

.../...

II -

P_1	I_1	P_2
I_4	P_0	I_2
P_4	I_3	P_3

On considère un carré constitué de 9 cases P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, I_1, I_2, I_3, I_4 . Un pion "saute" à l'intérieur de ce carré, "au hasard" d'une case sur l'une des autres cases qui possède avec celle-ci un côté commun. Par exemple :

- de P_0, le pion saute au hasard sur I_1 ou I_2 ou I_3 ou I_4 .
- de P_1, le pion saute au hasard sur I_1 ou I_4 .
- de I_1, le pion saute au hasard sur P_0 ou P_1 ou P_2 .

On suppose que le pion se situe au départ (c'est-à-dire avant le premier saut) sur l'une des cases P_0 ou P_1 ou P_2 ou P_3 ou P_4 .

Où se trouve-t-il, dans ces conditions, après un nombre pair de sauts ? Après un nombre impair de sauts ?

- Pour tout $j \in \{0, 1, 2, \overset{4}{3}\}$, on désigne par p_{j0} la probabilité que le pion se situe sur la case P_j au départ, et pour tout entier k $(k \geqslant 1)$, par p_{jk} la probabilité que le pion se situe sur la case P_j à l'issue du $(2k)^{\text{ème}}$ saut.
- Pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ et pour tout entier naturel k au moins égal à 1, on désigne par y_{jk} la probabilité que le pion se situe sur la case I_j à l'issue du $(2k-1)^{\text{ème}}$ saut.

On note enfin : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad \Pi_k = \begin{pmatrix} p_{0k} \\ p_{1k} \\ p_{2k} \\ p_{3k} \\ p_{4k} \end{pmatrix}$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad Y_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \\ y_{4k} \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B que l'on déterminera, telles que, pour tout entier $k \geqslant 1$: $Y_k = A\,\Pi_{k-1}$ et $\Pi_k = B\,Y_k$.

   Ecrire les deux matrices $F = BA$ et $G = AB$.

2. a - Vérifier que G appartient à l'ensemble E , en déduire G^k pour k entier $(k \geqslant 1)$.

   b - $k \in \mathbb{N}^*$, calculer F^k .

.../...

3. a - Soit U une matrice à p lignes, q colonnes, à coefficients complexes. Soit V une matrice à q lignes, p colonnes, à coefficients complexes. Montrer que UV et VU ont mêmes valeurs propres non nulles.

   b - En déduire les valeurs propres de F.

   c - F est-elle diagonalisable ?

   d - S'il existe une position initiale du pion telle que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, Π_k ne dépende pas de k, que valent nécessairement Π_k et Y_k. Quelle est cette position initiale ?

4. a - Quelle est la probabilité que le pion se situe en P_0 à l'issue d'un nombre pair (2k), non nul, de sauts ? Cette probabilité dépend-elle de la position initiale du pion ? Etait-ce prévisible ?

   b - Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et X_0 la variable aléatoire égale au nombre de passages par P_0 en $(2n)$ sauts. Déterminer la loi de X_0, son espérance mathématique et sa variance.

   c - Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et la variance, de la variable aléatoire Z_0 égale au nombre de sauts nécessaires pour obtenir un premier passage en P_0, lorsque le pion se situe au départ sur l'une des cases P_1 ou P_2 ou P_3 ou P_4.

   d - Quelle est, sous les mêmes hypothèses qu'au c., la probabilité que le pion passe par P_0. Etait-ce prévisible ?

5. a - Quelle est, en fonction de la position initiale du pion, la probabilité qu'il se situe en P_1, à l'issue d'un nombre pair $(2k)$, non nul, de sauts ?

   b - $n \in \mathbb{N}^*$; déterminer, en fonction de la position initiale du pion, l'espérance mathématique du nombre aléatoire X_1 de passages par P_1 en $(2n)$ sauts.

   c - $(n,k) \in [\mathbb{N}^*]^2$. On suppose que le pion se situe au départ sur la case P_0. Déterminer la probabilité que le pion se situe en P_1 à l'issue du $2(n+k)^{\text{ème}}$ saut, sachant qu'il n'est pas sur la case P_1 à l'issue du $(2n)^{\text{ème}}$.

6. Déterminer la loi de probabilité de X_1 (c.f. II-5-b) pour $n=3$ (6 sauts).

ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION de 1981

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

(Coef. 4)

Mercredi 6 mai 1981 de 8h à 12h

Les parties II, III, IV, sont, dans une large mesure, indépendantes.

Question préliminaire : Montrer que, si X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n\,P(X>n)$$

- I -

1. Soient p et q deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant q$. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans $\{1, 2, \dots, q\}$?

2. n et r désignant deux entiers naturels non nuls, on note :

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \{1, 2, \dots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2, \dots, r\} \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array} \quad \text{telle que } \sum_{i=1}^{n} f(i) \leqslant n + r - 1 \right\}.$$

et $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n + r - 1\}$.

Montrer que l'application Φ de $\mathcal{F}_1$ dans $\mathcal{F}_2$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{F}_1,\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \Phi(f)(k) = \sum_{i=1}^{k} f(i) \quad \text{est une bijection.}$$

En déduire le cardinal de $\mathcal{F}_1$.

./.

3. n, N, m désignant des entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant m \leqslant N + n - 1$, déduire des résultats précédents le nombre de n-uplets $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ éléments de $\{1, 2, \dots, N\}^n$:

a) tels que $u_1 + u_2 + \dots + u_n \leqslant m$

b) tels que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$

c) tels que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ (on supposera ici $n \geqslant 2$)

d) tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n$ (on pourra remarquer qu'un tel n-uplet est entièrement défini par les nombres, éventuellement nuls, $y_1, y_2 \dots y_N$ de 1, de 2, ... de N qui y figurent, puis prendre comme inconnues $1+y_1, 1+y_2, \dots 1+y_N$ de façon à utiliser I-3-b convenablement adapté).

A titre indicatif, et en vue de leur utilisation éventuelle dans la suite du problème, les réponses aux questions 3 a), b), c), d) sont respectivement :

C_m^n , C_{m-1}^{n-1} , C_N^n (si $n \leqslant N$) , C_{N+n-1}^n .

Dans toute la suite, N désigne un entier supérieur ou égal à 3, et l'on considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

Dans la partie II, on tire "au hasard et sans remise" chacun des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ la suite des nombres ainsi obtenus.

Dans les parties III, IV, on tire "au hasard et avec remise" des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ la suite des nombres ainsi obtenus.

- II -

Soit X_N la variable aléatoire égale au plus petit entier $r \geqslant 1$, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$, sinon à N .

1. $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(X_N > n)$.

2. En déduire la loi de probabilité de X_N et son espérance mathématique $E(X_N)$.

3. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} E(X_N)$.

./.

4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = \lim_{N\to+\infty} P(X_N = k) .$$

Démontrer que X possède une espérance mathématique, et la comparer à $\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

- III -

1. Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, $v_n = P(u_1 \leqslant u_2 \dots \leqslant u_n)$.
   On pose, dans la suite, $v_1 = 1$.

2. Montrer que les séries de termes généraux respectifs v_n, nv_n, et $w_n = v_n - v_{n+1}$ convergent. Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$?

3. En déduire l'existence d'une variable aléatoire Z_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $Z_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$.
   Montrer que Z_N admet une espérance mathématique $E(Z_N) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

4. Ecrire la formule de Mac-Laurin, avec reste de Lagrange, pour la fonction :
   $x \longmapsto (1+x)^{-N}$; en déduire une expression de $\sum_{n=1}^{p} v_n$, puis $E(Z_N)$.
   Déterminer $\lim_{N\to+\infty} E(Z_N)$.

5. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Z = k) = \lim_{N\to+\infty} P(Z_N = k) .$$

Comparer Z et X.

- IV -

1. k appartenant à $\{1, 2, \dots, N\}$, quelle est la probabilité de l'événement :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad k < u_{1+i}$$ (où n désigne un entier supérieur ou égal à 1).

En déduire, pour n élément de $\mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement A_n défini par :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad u_i < u_{i+1}$$

2. Montrer que la série de terme général x_n défini par $x_0 = 1$ et $x_n = P(A_n)$ si $n \geqslant 1$, converge et calculer sa somme.

3. Prouver l'existence d'une variable aléatoire T_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $T_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier strictement positif tel que :

$$u_{r+1} \leqslant \text{Inf}\,(u_1, u_2, \ldots, u_r) .$$

4. Montrer que T_N admet une espérance mathématique que l'on calculera.

Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} E(T_N)$.

5. $n \in \mathbb{N}$; déterminer, en utilisant la valeur moyenne de la fonction : $x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$, $\lim\limits_{N \to +\infty} P(T_N > n)$.

Montrer qu'il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(T = k) = \lim_{N \to +\infty} P(T_N = k)$$

et que T ne possède pas d'espérance mathématique.

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES 1982

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES 2ème épreuve (4 h)

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Seules les questions II.4 et II.5 utilisent des résultats obtenus dans la partie I.

- I -

n désignant un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n et du polynôme nul. Un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est noté indifféremment P ou $P(X)$.

1 - a) Montrer que, pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, unique, $L_{k,n} = (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X-i)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad L_{k,n}(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k. \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

b) Montrer que $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

En déduire la formule $\sum_{k=0}^{n} L_{k,n} = 1$ et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n)}$.

c) Soit Π la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$. On ne demande pas d'écrire Π mais de donner : 1) les éléments de la première ligne,

2) la somme des éléments de toute autre ligne,

3) la somme des éléments des différentes colonnes.

Ecrire la matrice Π^{-1} inverse de Π.

2 - a) Montrer que $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; L_{2,2} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $\Delta : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \longmapsto P(X+1)-P(X) \end{array}$. L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ, soit $\Delta(P)$, sera notée plus simplement ΔP, dans la suite.

Montrer que l'application Δ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$. En déduire le noyau et l'image de Δ.

c) On note Δ^0 l'identité sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \geq 1$ $\Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1}$.

P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que sa décomposition sur la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0)\, L_{k,k}$.

.../...

3 - (a) f désignant une fonction réelle de variable réelle, on note désormais Δf la fonction définie pour tout x tel que $f(x+1)$ et $f(x)$ existent, par $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et par récurrence, pour $i > 1$ $\Delta^i f = \Delta(\Delta^{i-1} f)$. On convient enfin que $\Delta^0 f = f$. Soit alors f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,n]$. Montrer qu'il existe un polynôme unique $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad f(k) = P_f(k).$$

(b) Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-i\}$ $(\Delta^i f)(k) = (\Delta^i P_f)(k)$.

En déduire que : $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k f)(0)\, L_{k,k}(n)$ (1)

(c) a désignant un réel tel que $a > n$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ $(\Delta^k f)(x) = \dfrac{k!}{(a-x)(a-1-x)\dots(a-k-x)}$.

Ecrire la relation (1) pour f et en déduire que, si N est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel tel que $x \geq N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N(N-1)\dots(N-k)}{x(x-1)\dots(x-k)} = \frac{N(N-1)}{x(x-N+1)}$$

- II -

Préliminaire : 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; montrer que la série $\sum P(X=n)u^n$ converge pour tout $u \in [0,1]$. La fonction : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)u^n$ est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de la variable $X+Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y.

Dans cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule de cette urne et l'on s'intéresse au numéro marqué sur chaque boule tirée.

Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N-1$, X_n désigne le nombre aléatoire de tirages nécessaires à l'obtention de $(n+1)$ numéros distincts, et l'on note :

$$Y_1 = X_1 - 1,\ Y_2 = X_2 - X_1,\ \dots,\ Y_n = X_n - X_{n-1}.$$

On remarquera que : $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = \dots = P(Y_n = 0) = 0$.

1 - (a) Quelle est la probabilité que les k $(k \geq 2)$ premières boules tirées portent le même numéro ?

(b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_1.

(c) Donner l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice de chacune des variables aléatoires Y_1 et X_1.

2 - (a) $(p, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $p \geq n \geq 2$. Calculer la probabilité conditionnelle, sachant que $X_{n-1} = p$, de l'évènement $Y_n = k$. Dépend-elle de p ?

(b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n , son espérance mathématique, sa variance et sa fonction génératrice.

3 - Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice f_n de la variable aléatoire X_n .

4 - (a) Montrer que, pour $x \geq N$: $f_n(\frac{N}{x}) = \frac{N(N-1)\dots(N-n)}{x(x-1)\dots(x-n)}$.

(b) Utiliser la décomposition en éléments simples obtenue au I-1-b pour montrer que : $f_n(u) = C_{N-1}^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k \, u}{1-\frac{k}{N}u} \right)$.

(c) En déduire, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = i)$.

Quelle remarque peut-on faire, à propos du résultat obtenu ?

5 - (a) Trouver, en utilisant I-3-c, une expression simple de $\sum_{n=1}^{N-1} f_n(u)$.

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir au $p^{\text{ème}}$ tirage $(p \geq 2)$ un numéro non encore sorti ?

(c) En déduire l'espérance mathématique du nombre aléatoire de numéros distincts sortis en n tirages $(n \geq 1)$ et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Etait-ce prévisible ?

6 - Application : On suppose dans cette question que N et n variables sont liés par $N = \alpha\,(n+1)$ où α désigne un rationnel fixé, supérieur ou égal à 1.

(a) Montrer que, si $\alpha > 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ admettent, quand n tend vers $+\infty$, des limites $\ell(\alpha)$ et $v(\alpha)$ que l'on précisera.

Donner les limites L de $\ell(\alpha)$ et V de $v(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$ ainsi que des équivalents simples de $\ell(\alpha)-L$ et $v(\alpha)-V$.

(b) Montrer que, si $\alpha = 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donner des équivalents de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on admettra que, si n tend vers $+\infty$, $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ est équivalent à $\operatorname{Log} n$ et que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$) .

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1983

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Lundi 9 mai 1983 de 8h à 12h

Toutes les variables aléatoires considées dans le problème sont définies sur le même espace probabilisé. On rappelle que, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, les deux variables aléatoires $X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$ et X_n sont, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, indépendantes.

X désignant une variable aléatoire discrète finie, $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la suite finie strictement croissante des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle, $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_k = P(X = x_k)$, les probabilités attachées à chacune de ces valeurs, on note φ_X la fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\left[\sum_{i=1}^{k} p_i\, e^{x_i t}\right]$$

On rappelle enfin que la variable aléatoire X est dite non certaine si $k \geq 2$ et qu'alors sa variance est non nulle.

- I -

Exemple : Soit Z la variable aléatoire discrète telle que $P(Z = -1) = P(Z = +1) = \frac{1}{2}$

1. Ecrire $\varphi_Z(t)$ pour $t \neq 0$ et déterminer $\varphi_Z(0)$.

2. Montrer que φ_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$; déterminer $\varphi'_Z(0)$ et $\varphi'_Z(t)$ pour $t \neq 0$.

3. Etudier les variations de la fonction $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2\varphi'_Z(t)\end{array}$

   En déduire les variations de φ_Z. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_Z(t)$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_Z(t)$.

   Tracer la courbe représentative de φ_Z.

II - Cas général : X variable aléatoire discrète finie non certaine

1. Déterminer $\varphi_X(0)$ et le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de φ_X en fonction de l'espérance mathématique $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X. φ_X est-elle dérivable à l'origine ?

2.a. Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in]0,1[$ $\quad z^\alpha \leq 1 + \alpha(z-1)$ (1)

(On pourra par exemple, utiliser la formule de Taylor). Dans quel cas a-t-on égalité ?

b. Soients t_1 et t_2 deux nombres réels tels que $0 < t_1 < t_2$. On pose $\alpha = \frac{t_1}{t_2}$ et $z_i = e^{t_2[x_i - \varphi_X(t_2)]}$. Ecrire l'inégalité (1) pour tout z_i ($i \in \{1,2,\dots,k\}$) pour démontrer que $\varphi_X(t_1) < \varphi_X(t_2)$.

c. Etudier les variations de φ_X sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser φ_{-X}).

3. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_X(t)$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_X(t)$. Tracer la courbe représentative de φ_X.

III - Etude de l'application : $X \longmapsto \varphi_X$

1. $a \in \mathbb{R}^*$, comparer φ_{X+a} et φ_{aX} à φ_X.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

3.a. Démontrer, par récurrence sur n, que, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels, la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = e^{\alpha_n t}$, est libre.

b. En déduire que, si X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes finies : $\varphi_X = \varphi_Y$ si et seulement si X et Y ont même loi de probabilité.

4. Caractériser les variables aléatoires X telles que φ_X soit impaire.

5. Démontrer que :
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\quad e^{at}\, P(X \geq a) \leq e^{t\,\varphi_X(t)}$

.../...

6. Montrer que la fonction φ_{U_N} associée à la variable aléatoire discrète uniforme U_N définie par : $P(U_N=0)=P(U_N=1)=\ldots=P(U_N=N-1)=\frac{1}{N}$ $(N\geqslant 1)$ est telle que : $\forall t\in\mathbb{R}^*\ \varphi_{U_N}(t)=\frac{N-1}{2}+\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\frac{Nt}{2}}{N\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}}\right]$. Retrouver ainsi $E(U_N)$ et $V(U_N)$.

Ecrire $\varphi_{a+rU_N}(t)$ pour a et t réels et r réel non nul.

IV - Dans ce paragraphe on donne une suite de <u>variables aléatoires indépendantes</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui sauf au IV-4, <u>suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z définie</u> au I, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de <u>nombres réels strictement positifs</u>. On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$Y_n=u_1X_1+u_2X_2+\ldots+u_nX_n$$

1. <u>On suppose que</u> : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=1$.

a. Montrer, en utilisant III-5, que : $\forall\, a>0\quad P(|Y_n|\geqslant a)\leqslant 2\,M_n(a)$ où $M_n(a)=\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\left[e^{-at}(\mathrm{ch}t)^n\right]$

b. Etudier les variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$f_n(t)=e^{-at}(\mathrm{ch}t)^n$.

En déduire la valeur de $M_n(a)$ (on distinguera les trois cas $n<a$, $n=a$, $n>a$).

Vérifier, par un calcul direct que, si $n\leqslant a$, on a : $P(|Y_n|\geqslant a)=2\,M_n(a)$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n(a)$ et donner un équivalent de $M_n(a)-\lim\limits_{n\to+\infty}M_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

2. <u>On suppose que</u> : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n=\frac{1}{2^n}$

a. Démontrer que, si $t\neq 0$: $\varphi_{Y_n}(t)=\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{sh}t}{2^n\,\mathrm{sh}\frac{t}{2^n}}\right]$

b. En déduire que l'ensemble des valeurs prises par Y_n est $\left\{\pm\frac{2k-1}{2^n}\ k\in\{1,2,\ldots,2^{n-1}\}\right\}$

210

et donner la probabilité attachée à chacune de ces valeurs (comparer $\varphi_{Y_n}(t)$ à $\varphi_{a+rU_N}(t)$ obtenue au III-6).

Revenant à la définition de φ_{Y_n}, démontrer que :

$$\frac{\mathrm{sh}t}{2\,\mathrm{sh}\frac{t}{2^n}}=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\mathrm{ch}\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)$$

c. Déterminer, pour tout t réel, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(t)$.

d. Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire discrète finie T telle que

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi_T(t)=\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(t)$$

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>quelconque</u>.

Montrer que la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n^2$ converge.

4. On suppose que, les notations restant celles du IV, les variables aléatoires indépendantes X_n suivent désormais la même loi qu'une variable aléatoire discrète finie non certaine X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et qu'enfin $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Démontrer que :

a. Si $E(X)\neq 0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

b. Si $E(X)=0$, la suite $(\varphi_{Y_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n^2$ converge.

c. Dans le cas où, quel que soit $n\geqslant 1$, $u_n=\frac{1}{n}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left[\frac{1}{n}\,\varphi_X\!\left(\frac{t}{n}\right)+E(X)\mathrm{Log}\frac{n-1}{n}\right]$ converge. En déduire que la suite $(\varphi_{Y_n}(t)-E(X)\mathrm{Log}n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout t réel.

ESSEC

École Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 15 mai 1984 de 8h à 12h

Les parties III et IV, indépendantes entre elles, proposent deux autres démonstrations de la formule (3) de II-4-b.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur à 1, et l'on note, pour tout entier $p \leq n$, $I_p = \{0, 1, 2, \ldots, p\}$.

Question préliminaire : $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(a,b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$

a) Déterminer, lorsque $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre $I(a,b)$ et $I(a+1, b-1)$. En déduire $I(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer une expression simplifiée de la somme :

$$\sum_{j=0}^{b} (-1)^j \frac{C_b^j}{a+j+1} . \qquad (0)$$

I. 1 $\mathbb{R}_n[X]$ désignant l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et du polynôme nul, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists!\ Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad (1)$$

et que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto Q \end{array}$ (Q défini par la relation (1))

est linéaire.

2 Montrer que f est bijective et définir l'application réciproque f^{-1}.

3 Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la matrice A^{-1} inverse de A. Ces matrices sont-elles diagona-

(4) a - Soit α une racine complexe d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'ordre de multiplicité k. Est-elle racine du polynôme $f^{-1}(Q)$ et si oui, avec quel ordre de multiplicité (discuter en fonction des valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$) ?

b - En déduire les sous espaces propres de f^{-1} et montrer qu'ils sont également propres pour f.

c - Déterminer la matrice T triangulaire supérieure dont les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 1 et la matrice D diagonale telles que :

$$D = T^{-1} A T$$

Déterminer la matrice T^{-1} inverse de T.

(5) k désignant un entier naturel, f^k désignant l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ si $k \geqslant 1$, et f^0 l'application identique, montrer que le coefficient de X^p, $p \in I_n$, du polynôme $f^k(X^n)$ est égal à :

$$C_n^p \left[\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \, C_{n-p}^j \, \frac{1}{(p+j+1)^k} \right]$$

II. On s'intéresse désormais à la suite d'épreuves définies de la façon suivante :

1. La 1ère épreuve consiste à "tirer" un nombre "au hasard" dans I_n.
2. Si le nombre p a été obtenu à la $k^{\text{ème}}$ épreuve $(k \geqslant 1)$, la $(k+1)^{\text{ème}}$ épreuve consiste à "tirer au hasard" un nombre dans I_p.

Compte-tenu des hypothèses 1 et 2, on conviendra que le nombre n est le résultat de la $0^{\text{ème}}$ épreuve.

. $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$, on note $P_k(p)$ la probabilité d'obtenir le nombre p au $k^{\text{ème}}$ tirage, et U_k la matrice colonne $\begin{pmatrix} P_k(0) \\ P_k(1) \\ \vdots \\ P_k(n) \end{pmatrix}$

Enfin X_k désigne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire : "nombre obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage".

.../...

1) a - En remarquant que le resultat de la $(k+1)^{ème}$ épreuve est conditionné par celui de la $k^{ème}$, exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in I_n$, $P_{k+1}(p)$ en fonction des nombres $P_k(i)$, $i \in I_n$.

b - En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad U_{k+1} = AU_k \qquad (2)$

2) a - Ecrire la matrice uniligne B telle que $BU_k = E(X_k)$ espérance mathématique de la variable aléatoire X_k, constater que le produit BA s'exprime simplement en fonction de B, et déduire de la relation (2), une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$. Calculer $E(X_k)$.

b - Procéder de façon analogue pour déterminer $E(X_k^2)$ (introduire la suite $\left(E(X_k^2) - \frac{n}{2^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$). En déduire $V(X_k)$ variance de X_k.

3) $k \in \mathbb{N}$, soit G_k le polynôme $G_k = \sum_{p=0}^{n} P_k(p)X^p$

Exprimer, à l'aide de l'application f définie au I, G_k en fonction de X^n.
En déduire $P_k(p)$, $(k,p) \in \mathbb{N} \times I_n$.

4) a - Montrer que, si $p \in I_n - \{0\}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(p)$ converge.

La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_k(0)$ est-elle convergente ?

b - Utiliser le résultat (0) de la question préliminaire pour démontrer que :

$$\forall p \in I_n - \{0\} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_k(p) = \frac{1}{p} \qquad (3)$$

III. 1) En envisageant les différents résultats de la $k^{ème}$ épreuve, montrer que, si $p \in I_{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$, la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre p au $(k+1)^{ème}$ tirage est égale à $P_{k+1}(p+1)$.

(2) $p \in I_n$, on note $\alpha(p,n)$ la probabilité de tirer au moins une fois le nombre p lorsque les tirages "se prolongent indéfiniment", le 1er tirage s'effectuant dans I_n.

a - que vaut $\alpha(n,n)$?

b - démontrer, en tenant compte du résultat obtenu au 1er tirage que :

$$\forall p \in I_{n-1} \qquad (n+1)\,\alpha(p,n) = 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha(p,k)$$

En déduire $\alpha(n-1,n)$.

c - $p \in I_{n-2}$, trouver une relation entre $\alpha(p,n)$ et $\alpha(p,n-1)$. En déduire $\alpha(p,n)$.

(3) Utiliser les résultats obtenus aux questions III.1 et III.2 pour retrouver la formule (3).

IV.(1) Soit $d : \begin{array}{ccc} R_n[X] & \longrightarrow & R_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ (P' dérivée du polynôme P).

montrer que $dof = fod - fodof$ (considérer f^{-1} odof)

(2) Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}^* \qquad fod = \sum_{k=1}^{q} dof^k + fodof^q$

(3) Déduire du calcul de $(fod)(X^n)$ que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (X-1)\left(\sum_{k=1}^{q} G_k'\right) + G_q \qquad (4)$$

(4) Utiliser (4) pour retrouver la formule (3).

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1985

Toutes options

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 14 mai 1985 de 8h à 12h

Notations : E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

P désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n, on note e_n l'application $e_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n \end{array}$

et P_n le sous espace vectoriel de P engendré par la famille $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

ℓn désigne la fonction logarithme népérien.

Enfin, si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance mathématique et $V(X)$ sa variance.

A toute fonction f, élément de E, on associe la fonction ϕ définie, pour tout x réel, par : $\phi(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

Le problème propose l'étude de quelques propriétés de l'application $f \longmapsto \phi$.

Les parties III, IV, V, indépendantes entre elles, utilisent des résultats de la partie II, que l'on pourra, éventuellement, admettre.

I - Etude de trois exemples

Déterminer les fonctions ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 associées respectivement à f_1, f_2, f_3 définies par :

① $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = x \cos(2\pi x)$

② $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 4x & \text{si } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 4(1-x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$

Tracer la courbe représentative de ϕ_2. ϕ_2 est-elle indéfiniment dérivable ?

③ $f_3(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ \ell n\, x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,[\phi_3(x) - f_3(x)]$

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des coordonnées du point de la courbe représentative de ϕ_3, à tangente parallèle à l'axe des abscisses. Tracer les courbes représentatives de f_3 et ϕ_3 dans un même repère.

II - Etude de l'application $L : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \phi \end{array}$

① a) f appartenant à E, dire pourquoi ϕ est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Montrer que l'application $L : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \phi \end{array}$ est linéaire. Est-elle surjective ?

c) Soit α un réel strictement positif. Calculer ϕ si f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(\alpha x)$

L est-elle injective ?

② a) Montrer que, si f est bornée, $\phi = L(f)$ est bornée et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si f est périodique, $\phi = L(f)$ l'est également.

c) Soient : $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $\phi = L(f)$, g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = f(a-x)$

$\gamma = L(g)$.

Trouver un lien entre γ et ϕ.

En déduire un élément de symétrie de la courbe représentative de ϕ lorsque f est paire (respectivement impaire).

Donner une condition suffisante sur f pour que ϕ soit paire (respectivement impaire).

③ a) Montrer que, si f admet une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) $\phi = L(f)$ possède la même limite.

Y a-t-il réciproque ? Donner un contre-exemple.

b) On suppose l'existence d'un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d'une fonction numérique ε tels que, pour $x \neq 0$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$ (le symbole ∞ représentant indifféremment $+\infty$ ou $-\infty$).

Montrer qu'il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera en fonction de (a, b, c) et une fonction numérique ε' tels que :

$$\phi(x) = a' x + b' + \frac{c'}{x} + \frac{\varepsilon'(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon'(x) = 0 .$$

III - Etude d'un exemple

$\sqrt[3]{A}$ désigne, dans ce qui suit, le nombre réel unique, éventuellement négatif, dont le cube vaut A.

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{(x-2)^2(x-1)} \end{array}$

1) Etudier la fonction f (continuité, dérivabilité, variations, limites). Tracer sa courbe représentative (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

2) Etudier la fonction $\phi = L(f)$ associée, sans chercher à l'expliciter. Donner des valeurs approchées du minimum et du maximum relatifs de ϕ (on pourra utiliser la méthode des rectangles en divisant l'intervalle d'intégration en 10 parties égales).
Tracer la courbe représentative de ϕ (déterminer en particulier l'asymptote oblique).

IV - Etude des valeurs propres de L

Un nombre réel λ est dit valeur propre de L s'il existe une fonction non nulle f de E, appelée fonction propre de L associée à la valeur propre λ, telle que $L(f) = \lambda f$.

λ désignant une valeur propre de L, on note $E_\lambda = \{f \in E \,;\, L(f) = \lambda f\}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, P_n est stable par L, ainsi que P.

b) Ecrire la matrice A_n de la restriction ℓ_n de L à P_n rapporté à la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

c) Quelles sont les valeurs propres de ℓ_n ? ℓ_n est-elle diagonalisable ?

2) a) 0 est-il valeur propre de L ?

b) Montrer que, si $f \in E$ est une fonction propre associée à une valeur propre non nulle λ, elle est indéfiniment dérivable et que ses dérivées successives appartiennent à E_λ.

3) a) Montrer que : $\forall \omega \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto e^{\omega x}$ est propre pour L et déterminer la valeur propre $\lambda(\omega)$ associée.

b) Etudier les variations de la fonction $\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \lambda(\omega) \end{array}$

Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

c) En déduire que tout réel positif est valeur propre de L.

4) Montrer que toute fonction propre, associée à une valeur propre supérieure à 1, est non bornée (utiliser II-2-a).

V - Cas où f, élément de E, est la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X

1) Exprimer $\phi = L(f)$ en fonction de F fonction de répartition de l'aléa X.
Montrer que ϕ est la densité d'une variable aléatoire Y (on vérifiera en particulier, en utilisant II-3-a que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{0} \phi(t)dt$ convergent).

2) On suppose f nulle en dehors d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$.
Calculer, pour tout entier naturel n, $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$.
En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de $E(X)$ et $V(X)$.

3) Montrer que l'expression de $E(Y^n)$ en fonction de la famille $(E(X^k))_{k \in \{0,1,\ldots,n\}}$, obtenue à la question précédente, est toujours valable si l'on suppose uniquement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n)$ existe.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1986

Toutes options

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve   4 heures

Le but du problème, exposé à la partie II, est l'étude de la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu d'une population donnée. La partie I prépare l'étude numérique de ce problème sous certaines hypothèses. Dans tout le problème, on note indifféremment $\exp(x)$ ou e^x l'exponentielle du réel x.

La qualité de la rédaction et de l'expression, la rigueur des raisonnements et le soin apporté aux calculs numériques (qui nécessitent l'emploi d'une calculatrice programmable) interviennent dans le barème.

PARTIE I

Le but de cette partie est la résolution de l'équation suivante :

$$(E) \quad \exp(t.(x-1)) = x \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

dans laquelle t désigne un paramètre réel strictement positif donné. On considère d'une part la fonction f telle que : $f(x) = \exp(t.(x-1))$ et d'autre part la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) NOMBRE DES RACINES DE L'EQUATION (E)

a) Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \longmapsto t.\exp(-t)$.

b) Etudier sur le segment $[0, 1]$ les variations de la fonction F définie par $F(x) = f(x) - x$ (on donnera les tableaux de variations correspondant aux cas : $t \leqslant 1$, $t > 1$). En déduire en fonction des valeurs du paramètre strictement positif t le nombre des racines de l'équation (E) dans $[0, 1]$.

On désigne par $r(t)$ la plus petite racine positive de (E).

2°) ETUDE DE LA SUITE (u_n)

Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par $r(t)$.

En déduire sa convergence et sa limite. Que vaut celle-ci pour $t \leqslant 1$?

3°) CALCUL APPROCHE DE $r(t)$ POUR $t > 1$

On suppose dans cette question que $t > 1$.

a) Montrer que s'il existe un entier naturel n tel que $F(u_n + a) < 0$ (où a est un réel strictement positif), alors l'on a : $u_n < r(t) < u_n + a$.

b) Imaginer un algorithme permettant de déterminer le premier entier n pour lequel est satisfaite l'inégalité $F(u_n + 10^{-6}) < 0$ ainsi que la valeur correspondante de u_n (d'après (a) on a alors $u_n < r(t) < u_n + 10^{-6}$ donc u_n constitue une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-6} près).

c) Utiliser cet algorithme pour compléter le tableau suivant dans lequel figurent pour chaque valeur de t l'entier n obtenu et la valeur approchée correspondante de u_n (que l'on donnera avec 8 décimales) :

Valeur de t	Valeur de l'entier n	Valeur approchée de u_n
3		
2.5		
2		
1.5	27	0.417187(65)
1.25	51	0.528628(81)
1.1	121	0.523864(93)

4°) ETUDE DE LA FONCTION $t \longmapsto r(t)$

On pose pour $0 < x < 1$: $h(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)}$ et : $h(1) = 1$.

a) Etudier le sens de variation de h, et montrer que h réalise une bijection continue strictement monotone de $]0, 1]$ vers $[1, +\infty[$.
Calculer $h'(1)$ et tracer la courbe représentative de h .

b) Calculer $h(r(t))$ pour $t \geqslant 1$.
En déduire que la fonction r est continue strictement monotone sur $[1, +\infty[$. Tracer la courbe représentative de r sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que : $r(t).\ln(r(t)) = t.r(t).(r(t) - 1)$. En déduire les limites de $t.r(t)$ et de $\exp(t).r(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

5°) ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DE (u_n) POUR $t \neq 1$

a) En étudiant le signe de $F'(r(t))$, montrer que : $0 < t.r(t) < 1$ pour $t \neq 1$.

b) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir pour tout entier naturel n les inégalités suivantes :

(i) $0 \leqslant r(t) - u_{n+1} \leqslant t.r(t).(r(t) - u_n)$; (ii) $0 \leqslant r(t) - u_n \leqslant (t.r(t))^n$.

Que devient (ii) pour $t < 1$?

6°) ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DE (u_n) POUR $t = 1$

Cette question, plus difficile, n'est utilisée par la suite qu'en II.B.3°).
On suppose dans toute la question que $t = 1$.

a) Soit (x_n) une suite réelle et : $\overline{x_n} = (1/n).\sum_{k=0}^{n-1} x_k$

Montrer que si la suite (x_n) converge vers 0, alors la suite $(\overline{x_n})$ converge aussi vers 0.
En déduire que si (x_n) converge vers ℓ, alors $(\overline{x_n})$ converge aussi vers ℓ.

b) On pose : $v_n = 1 - u_n$, $w_n = 1 / v_n$. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de v_n , et en remarquant que (v_n) tend vers 0 dans ce cas $(t = 1)$, en déduire la limite de la suite $(w_{n+1} - w_n)$.

c) Vérifier l'égalité : $(w_n - w_0) / n = (1/n).\sum_{k=0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k)$ puis montrer que : $\lim n.(1 - u_n) = 2$.

PARTIE II

Dans une population, on convient d'appeler descendants de 1° génération d'un individu ses enfants, descendants de 2° génération ses petits-enfants, ses descendants de $(p + 1)$° génération étant les enfants de ses descendants de p° génération $(p \in \mathbb{N}^*)$. On suppose alors que :

- Il existe une variable aléatoire X_1 suivant la loi de Poisson de paramètre $t > 0$ telle que :
  les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leurs enfants sont indépendantes et de même loi que X_1 $(t = E(X_1)$ représente donc le nombre moyen d'enfants par individu).

- Plus généralement, il existe une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que l'on ait pour tout entier naturel non nul n :
  les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leurs descendants de n° génération sont indépendantes et de même loi que X_n .

  On considère enfin les notations suivantes :

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(k) = P([X_1 = k])$.
  C'est la probabilité pour un individu d'avoir k enfants.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = P([X_n = 0])$ avec la convention $U_0 = 0$.
  C'est la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant à la n° génération. La limite de cette suite (U_n), si elle existe, représente la probabilité pour un individu de voir sa descendance s'éteindre.

(A) PROBABILITE D'EXTINCTION DE LA DESCENDANCE D'UN INDIVIDU

1°) Expliciter $p(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et montrer que l'on a pour tout réel x :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(k).x^k = f(x)$$

2°) Remarquer que $U_1 = f(U_0)$. Calculer la probabilité conditionnelle pour qu'un individu n'ait pas de petits-enfants sachant qu'il a exactement k enfants. En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales : $U_2 = f(U_1)$.

3°) Prouver que l'on a pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

En déduire que cette suite (U_n) est égale à la suite (u_n) du I, et donner des valeurs approchées de $\lim U_n$, probabilité d'extinction de la descendance d'un individu, dans les sept cas suivants :

$t = 3$, $t = 2.5$, $t = 2$, $t = 1.5$, $t = 1.25$, $t = 1.1.$, $t \leqslant 1$.

(B) NOMBRE MOYEN DE GENERATIONS DE LA DESCENDANCE D'UN INDIVIDU

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que l'on a $t \leqslant 1$ et donc $\lim u_n = 1$, ce qui revient à supposer que la descendance d'un individu s'éteint au bout d'un nombre fini de générations avec une probabilité égale à 1.
On note alors D la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ associant à un individu le nombre possible de ses générations de descendants (ainsi D prend la valeur 0 si l'individu n'a pas d'enfants, 1 s'il a des enfants et pas de petits-enfants, etc) et $E(D)$ désigne l'espérance de D si elle existe.
On considère enfin la série dont le n° terme est $1 - U_n$ $(n \geqslant 1)$ et l'on pose :

$$S(n,t) = \sum_{k=1}^{n} (1 - U_k)$$

On note $S(t)$ la somme de cette série lorsque celle-ci converge.

1°) Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

a) Calculer $P([D > n])$ et $P([D = n])$ en fonction de U_n et U_{n+1}.

b) Former une relation entre $\sum_{k=0}^{n} k.P([D = k])$ et $S(n,t)$.

2°) ETUDE DE LA SERIE $\sum (1 - U_n)$ POUR $t < 1$

Dans cette question, on suppose que $t < 1$.
On rappelle l'inégalité (ii) établie en I.5° : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - U_n \leqslant t^n$.

a) Montrer que la série précédente de terme général $1 - U_n$ est convergente.

b) Majorer $S(t) - S(n,t)$ et en déduire comment il suffit de choisir n (en fonction de t) pour que $S(n,t)$ constitue une valeur approchée de $S(t)$ à 10^{-2} près.

c) Imaginer un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée $S(n,t)$ où n est l'entier déterminé ci-dessus. Utiliser cet algorithme pour dresser un tableau dans lequel on fera figurer la valeur de l'entier n et la valeur approchée de $S(n,t)$ (que l'on donnera avec trois décimales) dans les cinq cas suivants : $t = 0.5$, $t = 0.6$, $t = 0.7$, $t = 0.8$, $t = 0.9$.

3°) EXISTENCE ET CALCUL DE L'ESPERANCE DE D.

a) Prouver l'existence de $E(D)$ lorsque $t < 1$ et l'exprimer en fonction de $S(t)$. Donner une valeur approchée de $E(D)$ lorsque $t = 0.5$, $t = 0.6$, $t = 0.7$, $t = 0.8$, $t = 0.9$.

b) Que peut-on dire de $E(D)$ si $t = 1$?

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION 1987

toutes options

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve

Mardi 19 mai 1987 de 8 h à 12 h

Le but du problème est l'étude du nombre moyen de retours à l'origine lors d'une promenade aléatoire sur une droite, dans un plan, ou dans l'espace, ce qui fait l'objet de la partie II. La partie I permet d'obtenir quelques résultats préliminaires d'Analyse.
La qualité de la rédaction et de l'expression, la rigueur des raisonnements et le soin apporté aux calculs numériques (qui nécessitent l'emploi d'une calculatrice programmable) interviennent dans le barème.

PARTIE I

Le but de cette partie est l'étude de la suite $(C_{2n}^{n} / 4^{n})$ à l'aide de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par: $u_n = \sqrt{n}\, C_{2n}^{n} / 4^{n}$.

1°) ETUDE DE LA SUITE (u_n).

a) Calculer u_1 et u_{n+1} / u_n.

b) Prouver par récurrence que:

$$u_n < \sqrt{n / (2n+1)}$$

c) Etudier le sens de variation de la suite (u_n), et montrer qu'elle converge vers un nombre réel L tel que: $1/2 \leq L \leq 1/\sqrt{2}$.

2°) RAPIDITE DE CONVERGENCE DE (u_n).

a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur un intervalle convenable, prouver la double inégalité suivante pour tout réel x strictement positif:

$$\frac{1}{8(x+1/2)} \leq (x+1/2) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$$

b) En déduire que:

$$\frac{u_k}{8(k + 1/2)} - \frac{u_k}{8(k + 3/2)} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k + 1)}$$

c) Par sommation de ces inégalités, trouver un encadrement de $u_p - u_n$ pour $p > n$, puis établir la double inégalité suivante:

$$(1) \qquad u_n / 8(n + 1/2) \leq L - u_n \leq L / 8n.$$

d) En déduire que:

$$(2) \qquad |L - (1 + 1/8n).u_n| \leq L/16n^2$$

3°) CALCUL APPROCHE DE L.

a) Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près?

b) Comment suffit-il de choisir n pour que $(1 + 1/8n).u_n$ soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près?
Ecrire un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée et donner la valeur numérique obtenue avec toutes les décimales fournies par la calculatrice (*On peut montrer, ce que l'on ne demande pas, que : $L = 1/\sqrt{\pi}$).*

PARTIE II.

(A) PROMENADE ALEATOIRE SUR UNE DROITE.

Une droite est rapportée à un repère orthonormé $(O, \vec{i})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et son abscisse à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) est une variable aléatoire X_n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$. Ainsi: $X_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$.
On suppose que les variables aléatoires A_n sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \qquad \text{et} \qquad P([A_n = -1]) = 1/2$$

Enfin, pour $n \geq 1$, U_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il etre à l'origine à un instant impair?

b) Pour $k \geq 1$, soit O_k la variable aléatoire égale à 1 si l'individu est à l'origine O à l'instant k et 0 sinon. Calculer les espérances $E(O_{2k})$ et $E(O_{2k+1})$.

c) Exprimer U_n à l'aide des variables aléatoires O_k $(1 \leq k \leq 2n)$ et calculer l'espérance $E(U_n)$.

2°) <u>ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.</u>
a) Etablir par récurrence que l'on a: $E(U_n) = (2n + 1).C_{2n}^n / 4^n - 1$.

b) Exprimer $E(U_n)$ à l'aide de u_n; en déduire la limite de la suite $(E(U_n) / \sqrt{n})$ et, à l'aide de l'inégalité (1), la limite de la suite $(E(U_n) - 2L\sqrt{n})$.

(B) PROMENADE ALEATOIRE DANS LE PLAN.

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant n $(n \in \mathbb{N})$ sont des variables aléatoires X_n et Y_n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$.
On suppose:
1. que les variables aléatoires A_n (resp. B_n) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([A_n = -1]) = 1/2$$
$$P([B_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([B_n = -1]) = 1/2$$

2. que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout entier $n \geq 1$.

Enfin, pour $n \geq 1$, V_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) <u>CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.</u>
a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il être à l'origine à un instant impair?

b) En raisonnant comme en (A), calculer l'espérance $E(V_n)$.

2°) <u>ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.</u>
On rappelle les deux résultats classiques suivants:
- $\lim [(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) / \ln(n)] = 1$.
- $\lim [1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/n^2]$ existe dans $\mathbb{R}$.

Déduire de l'inégalité (1) l'encadrement suivant:

$$0 < L^2/n - (C_{2n}^n / 4^n)^2 < L^2/4n^2$$

En déduire la limite de la suite $(E(V_n) / \ln(n))$ quand n tend vers l'infini.

Ⓒ PROMENADE ALEATOIRE DANS L'ESPACE.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un individu se trouve à l'origine O à l'instant 0, et ses coordonnées à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) sont des variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose: $A_n = X_n - X_{n-1}$, $B_n = Y_n - Y_{n-1}$, $C_n = Z_n - Z_{n-1}$.
On suppose:
1. que les variables aléatoires A_n (resp. B_n, resp. C_n)) sont indépendantes et que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$P([A_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([A_n = -1]) = 1/2$$
$$P([B_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([B_n = -1]) = 1/2$$
$$P([C_n = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad P([C_n = -1]) = 1/2$$

2. que les variables X_n, Y_n et Z_n sont indépendantes pour tout entier $n \geq 1$.

Enfin, pour $n \geq 1$, W_n est la variable aléatoire indiquant le nombre des passages à l'origine de l'individu entre les instants 1 et 2n compris.

1°) CALCUL DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

a) Quelle est la probabilité pour que l'individu se trouve de nouveau à l'origine à l'instant 2n? Peut-il etre à l'origine à un instant impair?

b) En raisonnant comme en Ⓐ, calculer l'espérance $E(W_n)$.

2°) ETUDE ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE MOYEN DES RETOURS A L'ORIGINE.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul, et l'on convient de poser (sous réserve d'existence):

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3} \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (C_{2k}^{k} / 4^{k})^{3}$$

a) Résultats préliminaires.
A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir pour $n \geq 1$ les inégalités suivantes:

(i) $$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

(ii) $$\frac{1}{(n+1)^{2}.\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{2}.\sqrt{n}}$$

et en déduire des encadrements des sommes suivantes (dont on justifiera l'existence):

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k\sqrt{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^{2}\sqrt{k}$$

b) Existence de $\lim(E(W_n))$.

Déduire de l'inégalité (1) la double inégalité suivante:

$$0 < L^3/n\sqrt{n} - (C_{2n}^n / 4^n)^3 < 3L^3/8n^2\sqrt{n}$$

Donner une majoration de $(C_{2n}^n / 4^n)^3$ et prouver l'existence de s, donc de $\lim(E(W_n))$. A l'aide d'une majoration de r_n, indiquer comment il suffit de choisir n pour que s_n soit une valeur approchée de s à 10-3 près.

c) Accélération de convergence et calcul approché de s.

A l'aide des résultats établis ci-dessus, montrer que:

$$0 \leq s_n + 2L^3/\sqrt{n} - s \leq 5L^3 / 4n\sqrt{n}$$

Comment suffit-il alors de choisir n pour que $s_n + 2L^3/\sqrt{n}$ soit une valeur approchée de s à 10-3 près? Ecrire un algorithme permettant le calcul de cette valeur approchée $s_n + 2L^3/\sqrt{n}$, et donner la valeur numérique obtenue.

D CONCLUSION

A l'aide des résultats obtenus dans le problème, comparer le nombre moyen des retours à l'origine pour les promenades aléatoires sur une droite, dans un plan et dans l'espace.

Note d'information concernant l'épreuve de maths II.

Il est rappelé aux candidats qui ne seraient pas habitués au traitement de texte utilisé pour la rédaction du problème que la notation a/b désigne le quotient $\frac{a}{b}$.

Exemples :

Question I.2°.c : l'inégalité (1) se lit : $\dfrac{Un}{8(n+\frac{1}{2})} \leqq L - Un \leqq \dfrac{L}{8n}$.

Question II.2°.a : E(Un) se lit : $E(Un) = \dfrac{(2n+1).C_{2n}^{n}}{4^{n}} - 1$.

Enfin, dans les calculs numériques, une valeur approchée à 10-5 près désigne bien entendu une valeur approchée à 10^{-5} près.

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Vald'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

MATHEMATIQUES II

Toutes Options
Mardi 10 mai 1988 de 8h à 12h

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules numérotées 1, 2, 3, ..., n. On y effectue une suite de tirages avec remise, ce qui signifie qu'à chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
Soit X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du tirage où, pour la première fois, chacune des n boules a été obtenue au moins une fois.
L'objet du problème est l'étude de la variable aléatoire X_n (partie I) et du comportement asymptotique de son espérance (partie II).

PARTIE I

On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on considère l'événement B_i défini par: "la boule numérotée i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages".

1°) Etude de la variable aléatoire X_2

Dans cette question, on suppose que n = 2, ce qui revient à supposer que l'urne ne contient que 2 boules numérotées 1 et 2.

a) Soit x un nombre réel de l'intervalle [0, 1[. Calculer les sommes:

$$S_p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p \qquad et \qquad \Sigma_p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + px^{p-1}$$

Déterminer leurs limites respectives S(x) et Σ(x) quand p tend vers l'infini.

b) Calculer $P([X_2=p])$. En déduire l'espérance de X_2.

2°) Etude de la variable aléatoire X_3

Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a) On rappelle la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements A et B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A l'aide de celle-ci, établir une formule analogue donnant la probabilité de la réunion $A \cup B \cup C$ de trois événements A, B, C.

b) Soient i, j, k trois entiers distincts appartenant à l'ensemble {1, 2, 3}. Calculer $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$, $P(B_i \cap B_j \cap B_k)$ et en déduire $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

c) Exprimer $P([X_3 > p])$ à l'aide de $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$, et en déduire $P([X_3 = p])$.

d) Calculer l'espérance de X_3 (que l'on exprimera sous forme de fraction irréductible).

3°) Etude de la loi de X_n

Dans cette question, on revient au cas général.

a) Calculer en fonction de n et p les probabilités $P(B_i)$, $P(B_i \cap B_j)$ pour $i \neq j$. De façon générale, si $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont k entiers distincts appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, calculer en fonction de n, p et k la probabilité de l'intersection $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}$.

b) En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré (ou formule du crible), la probabilité de la réunion $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

c) Que vaut $P([X_n > p])$? En déduire que:

$$P([X_n = p]) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \frac{k}{n} (1 - \frac{k}{n})^{p-1}$$

d) En déduire l'identité suivante pour tout entier q tel que $0 \leq q < n$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k^q = 0$$

4°) Calcul de l'espérance $E(X_n)$

On pose désormais:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

a) Etablir pour tout réel x de [0, 1] la formule suivante:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} x^{k-1}$$

et en déduire que:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$$

b) Déduire des résultats précédents que l'on a: $E(X_n) = n.H_n$.

c) Ecrire un algorithme de calcul de $E(X_n)$, et en déduire des valeurs décimales approchées de $E(X_n)$ pour n = 10, n = 20, n = 50, n = 100 (on donnera ces valeurs avec les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

PARTIE II

Dans cette partie, H_n est le nombre défini en I.4°.

1°) Etude de H_n - ln(n)

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, prouver que l'on a pour tout réel strictement positif x:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

b) On considère les suites définies pour $n \geq 1$ par:

$$u_n = H_n - \ln(n) \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

Etudier leur sens de variation et montrer qu'elles convergent vers une limite commune que l'on notera γ.

c) Montrer que: $u_n - 1/n \leq \gamma \leq u_n$, et en déduire comment il suffit de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de γ à 0,0001 près.

2°) Etude d'une fonction auxiliaire

Dans cette question, x désigne un réel positif, et l'on pose:

$$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x)$$

a) Calculer F' et montrer que:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de F en 0. En déduire le plus petit nombre réel positif k tel que l'on ait pour tout x positif:

$$F(x) \leq kx^3$$

3°) Etude asymptotique de H_n

On considère la suite définie pour $n \geq 1$ par:

$$w_n = H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$$

a) Soit p un entier strictement supérieur à n. Calculer la somme des termes $w_{k+1} - w_k$ pour $n+1 \leq k \leq p$, et en déduire l'existence et la valeur de:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k)$$

b) Exprimer $w_{k+1} - w_k$ en fonction de $F(1/k)$. Par comparaison d'une série à une intégrale, en déduire que:

$$0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2}$$

c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir:

$$0 \leq \gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) \leq 0,0001$$

Calculer la valeur approchée de γ ainsi obtenue, que l'on donnera avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

4°) <u>Conclusion</u>

Démontrer qu'il existe des réels a, b, c que l'on explicitera, et une suite (ε_n) de limite nulle telle que l'on ait:

$$E(X_n) = an.\ln(n) + bn + c + \varepsilon_n$$

Retrouver ainsi les résultats numériques demandés au I.4° en donnant à chaque fois un majorant de l'erreur commise.

==============================

ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

MATHEMATIQUES II

Toutes options

Vendredi 12 mai 1989 de 8 h à 12 h

Dans tout le problème, on désigne par a et n deux entiers naturels non nuls. L'objet de la partie I est l'étude d'un marché sur lequel na consommateurs achètent chacun un bien qu'ils peuvent se procurer (de façon équiprobable) auprès de n fournisseurs $F_1, \ldots, F_n$.
Dans la partie II, on étudie la loi asymptotique du nombre de clients par fournisseur lorsque n tend vers l'infini.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la fin de la question I.4° ne s'adresse qu'aux seuls candidats de l'option générale, le reste du problème étant commun aux candidats de toutes les options.

PARTIE I

On étudie dans cette partie les variables aléatoires suivantes:

1. X_i indique le nombre des consommateurs ayant acheté le bien chez le fournisseur F_i $(1 \leq i \leq n)$.
2. Y indique le nombre de fournisseurs n'ayant eu aucun client, et le quotient Y/n représente donc la proportion des fournisseurs n'ayant eu aucun client.

1°/ Etude des variables aléatoires X_i $(1 \leq i \leq n)$.

a) Déterminer la loi commune, l'espérance et la variance des variables aléatoires X_i en précisant l'expression de $P([X_i = k])$ pour tout entier naturel k.

b) Calculer le mode de X_i, c'est à dire le ou les entier(s) k tel(s) que $P([X_i = k])$ soit maximale. A cet effet, on pourra étudier le rapport suivant pour $0 < k \leq na$:

$$r_k = \frac{P([X_i = k+1])}{P([X_i = k])}$$

2°/ Coefficient de corrélation des variables aléatoires X_i.

On désigne par i et j des entiers distincts tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

a) Justifier l'identité $X_1 + X_2 + ... + X_n = na$ et, en l'élevant au carré, déterminer la valeur commune des espérances $E(X_iX_j)$ puis des covariances $Cov(X_i, X_j)$.

b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire des variables X_i et X_j. Interpréter le cas n = 2 en rappelant à quelle condition nécessaire et suffisante le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires est égal à 1 ou -1.

3°/ Espérance et variance de la variable aléatoire Y.

On désigne par B_i ($1 \leq i \leq n$) la variable aléatoire prenant pour valeur 1 lorsque le fournisseur F_i n'a aucun client, et 0 sinon.

a) En exprimant Y à l'aide des variables aléatoires B_i, calculer l'espérance de Y.

b) Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires B_iB_j en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

c) Déterminer les limites de l'espérance et de la variance de Y/n quand n tend vers l'infini.

4°/ Loi de la variable aléatoire Y.

On désigne par k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.

a) Quelles valeurs la variable Y peut-elle prendre ? Calculer $P([Y = n-1])$.

b) Exprimer l'événement $[Y \neq 0]$ à l'aide des événements $[X_i = 0]$ pour $1 \leq i \leq n$.
En déduire, à l'aide de la formule de Poincaré ou formule du crible, $P([Y = 0])$.

c) Donner dans un tableau une valeur approchée (avec deux décimales) de $P([Y = 0])$ lorsque a = 1, 2, 3 et n = 1, 2, 3.

La fin de cette question 4° ne s'adresse qu'aux seuls candidats de l'option générale, et est indépendante de la suite du problème.

d) Donner, par la même méthode, la probabilité conditionnelle suivante:

$$P\left(\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right) / \left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right)\right).$$

e) Calculer la probabilité pour que les k fournisseurs $F_1, F_2, ..., F_k$ n'aient aucun client et, en remarquant que:

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right)\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right) P\left(\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [X_i \neq 0]\right) / \left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0]\right)\right).$$

donner la probabilité pour que $F_1, F_2, ..., F_k$ n'aient aucun client et que $F_{k+1}, F_{k+2}, ..., F_n$ aient au moins un client.

f) En dénombrant alors le nombre des façons de choisir parmi les n fournisseurs les k d'entre eux qui resteront sans clients, en déduire $P([Y = k])$.

PARTIE II.

Dans cette partie, on désigne par k un entier naturel fixé et par $p_n(k)$ la probabilité (calculée en I.1°) pour qu'un fournisseur donné ait exactement k clients, et l'on se propose d'étudier la suite $n \to p_n(k)$.

1°/ Etude de la suite $(p_n(0))$.

On considère la fonction f_0 et la fonction auxiliaire g_0 définies sur $]0, 1[$ par:

$$f_0(x) = \frac{a}{x}\ln(1-x) + a \qquad \text{et} \qquad g_0(x) = x^2 f'_0(x).$$

a) Donner l'expression de la fonction g_0 et étudier son signe.
b) Etudier les variations de $f_0(x)$ et déterminer sa limite L quand x tend vers 0.
c) On pose $f_0(0) = L$. Déterminer la limite de $f_0'(x)$ quand x tend vers 0, montrer que f_0 est de classe C1 sur $[0, 1[$ et donner sa représentation graphique.
d) Exprimer $p_n(0)$ en fonction de $f_0(1/n)$ et en déduire la limite et le sens de variation de la suite $(p_n(0))$.

2°/ Etude de la loi-limite du nombre de clients par fournisseur.

a) Déterminer la limite p(k) de $p_n(k)$ quand n tend vers l'infini et reconnaitre la loi-limite du nombre de clients par fournisseur quand n tend vers l'infini.
Ce résultat était-il prévisible?
b) Donner l'espérance, la variance et calculer le mode de cette loi-limite.

3°/ Etude de la suite $(p_n(k))$ selon les valeurs de k.

On considère la fonction f_k et la fonction auxiliaire g_k définies par:

$$f_k(x) = \left(\frac{a}{x} - k\right)\ln(1-x) + a + \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{jx}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad g_k(x) = x^2 f'_k(x)$$

l'entier k étant supposé non nul et distinct des réels b et c définis par:

$$b = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad ; \quad c = a + \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

a) Comparer $\ln[p_n(k) / p(k)]$ et $f_k(1/n)$.
b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \to x f_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire, selon la position de k par rapport aux réels b et c, le signe de $f_k(1/n)$ et la position de $p_n(k)$ par rapport à p(k) quand n tend vers l'infini.
c) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $x \to g_k(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que les suites $(f_k(1/n))$ et $(p_k(n))$ sont monotones à partir d'un certain rang et préciser leur sens de variation selon la position de k par rapport aux réels b et c.

****

ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990
MATHEMATIQUES II
Option générale
Lundi 14 mai 1990 de 8h à 12h

L'objet du problème consiste en l'étude de la complexité de deux algorithmes. Dans la partie I, on s'intéresse à un premier algorithme, permettant la recherche du plus grand élément d'un tableau de nombres non triés, et dans la partie II, à un second algorithme permettant la recherche des deux plus grands éléments d'un tableau de nombres non triés.

PRELIMINAIRES.

1°) On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

A cet effet, on introduit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - 1/n$.

a) Etablir l'encadrement suivant: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), et prouver qu'elles sont adjacentes *(on rappelle que deux suites sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, la différence des deux ayant pour limite 0).*

2°) On note γ la limite commune des suites (u_n) et (v_n) et, pour évaluer numériquement γ, on se propose d'utiliser la moyenne arithmétique m_n de u_n et v_n:

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a) Prouver l'inégalité suivante: $|m_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}$.

b) Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de calculer m_n pour un entier naturel non nul n donné. Préciser en particulier m_5 et m_{50} et en déduire des valeurs approchées de γ à 0,1 et 0,01 près. Que constate-t-on a posteriori sur la qualité de l'approximation réalisée par m_5 ?

3°) On améliore dans cette question la majoration obtenue pour $|m_n - \gamma|$.

a) Comparer $m_{k+1} - m_k$ à l'intégrale: $\int_k^{k+1} \frac{(t-k)(k+1-t)\,dt}{t^3}$.

b) En déduire l'inégalité suivante: $0 \leq m_{k+1} - m_k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^3}$.

En déduire par sommation un encadrement de $m_{n+p} - m_n$, puis de $\gamma - m_n$.

A l'aide de la valeur de m_{50} calculée à la question 2°, quel encadrement de γ obtient-on finalement?

****

PARTIE I.

On considère une urne remplie de n boules $(n \geq 1)$ numérotées respectivement 1, 2, ..., n. On extrait ces n boules, une à une et sans remise, et l'on désigne par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ les variables aléatoires indiquant, dans cet ordre, les numéros des boules ainsi obtenues.

Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, on note d'autre part X_p la variable aléatoire indiquant le plus grand des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, autrement dit: $X_p = \sup(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p)$.

1°) On se propose de déterminer $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.
On pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. On demande de préciser:
a) le nombre de parties A à p éléments choisis dans l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
b) le nombre de suites $(a_1, a_2, ... , a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
c) le nombre de suites $(a_1, a_2, ... , a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
d) le nombre de suites $(a_1, a_2, ... , a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts d'une partie donnée A à p éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p° position.
e) le nombre de suites $(a_1, a_2, ... , a_p)$ composées de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ et telles que le plus grand des p éléments soit situé en p° position.
f) la probabilité $P(Z_p > X_{p-1})$ pour $1 < p \leq n$.

2°) Pour $1 < p \leq n$, on note B_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 1 si l'événement $Z_p > X_{p-1}$ est réalisé, et 0 sinon.
Montrer que l'espérance de B_p est égale à $1/p$, et donner l'expression et l'interprétation de $E(B_2 + B_3 + ... + B_n)$.

3°) On considère l'algorithme suivant, dans lequel toutes les variables sont de type entier, et où l'on a affecté un entier supérieur à 1 à la variable n, et les entiers 1, 2, ..., n dans un ordre quelconque aux variables Z[1], Z[2], ..., Z[n]:

```
begin
X := Z[1];
for p:=2 to n do
    if Z[p] > X then X := Z[p];
end;
```

a) Indiquer les valeurs successivement prises par X au cours de l'algorithme:
- d'une part lorsque Z[1] = 1, Z[2] = 2, ..., Z[n] = n.
- d'autre part lorsque Z[1] = n, Z[2] = n-1, ..., Z[n] = 1.
b) On revient au cas général. Indiquer la valeur contenue dans la variable X à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre de comparaisons (>) effectuées entre les valeurs de deux variables ainsi que le nombre maximal et le nombre minimal d'affectations (:=) effectuées.
c) A l'aide des résultats précédents, exprimer l'espérance E_n du nombre d'affectations effectuées au cours de l'algorithme en fonction de u_n, puis expliciter à l'aide du nombre γ des réels a et b tels que l'on ait:

$$E_n = a \ln(n) + b + \varepsilon_n, \quad \text{avec} \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

(les notations u_n et γ ont été introduites dans la partie préliminaire).

****

.../...

PARTIE II

Le contexte probabiliste est celui introduit au début de la partie précédente.
Pour $2 \leq p \leq n$, on note Y_p la variable aléatoire telle que X_p et Y_p indiquent respectivement les deux plus grands des p numéros obtenus au cours des p premiers tirages, avec $Y_p < X_p$.

1°) En reprenant et en adaptant le raisonnement de la question I.1°, préciser la probabilité $P(Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1})$ pour $2 < p \leq n$.

2°) Pour $2 < p \leq n$, on note C_p la variable aléatoire prenant pour valeurs 0 si l'événement $Z_p < Y_{p-1}$ est réalisé, 1 si l'événement $Y_{p-1} < Z_p < X_{p-1}$ est réalisé, et 2 si l'événement $X_{p-1} < Z_p$ est réalisé.
Montrer que l'espérance de C_p est égale à 3/p.

3°) On modifie l'algorithme de la question I.3° de la façon suivante:

```
begin
if Z[2] > Z[1] then
      begin X := Z[2]; Y := Z[1]; end
      else
      begin X := Z[1]; Y := Z[2]; end;
for p:=3 to n do
      if Z[p] > Y then
            if Z[p] < X then
                  Y := Z[p]
                  else
                  begin Y := X; X := Z[p]; end;
end;
```

a) Indiquer les valeurs successivement prises par X et Y au cours de l'algorithme:
- d'une part lorsque Z[1] = 1, Z[2] = 2, ... , Z[n] = n.
- d'autre part lorsque Z[1] = n, Z[2] = n-1, ... , Z[n] = 1.

b) On revient au cas général. Indiquer les valeurs contenues dans les variables X et Y à l'issue de l'algorithme. Déterminer le nombre maximal et le nombre minimal de comparaisons (>) effectuées entre les valeurs de deux variables ainsi que d'affectations (:=) effectuées.

c) A l'aide des résultats précédents, calculer les espérances E'_n et E''_n des nombres de comparaisons et d'affectations effectuées au cours de l'algorithme, puis expliciter à l'aide du nombre γ défini dans les préliminaires des réels a', b', c', a", b" tels que l'on ait:

$$\begin{cases} E'_n = a'n + b'\ln(n) + c' + \varepsilon'_n & \text{avec: } \lim_{n \to \infty} \varepsilon'_n = 0. \\ E''_n = a''\ln(n) + b'' + \varepsilon''_n & \text{avec: } \lim_{n \to \infty} \varepsilon''_n = 0. \end{cases}$$

****

ESSEC

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES II

Option générale

Mercredi 8 mai 1991 de 14h à 18h

Dans tout le problème, on désigne par n un entier donné, supérieur ou égal à 2, et par j un entier supérieur ou égal à 1.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n-1, et l'on considère l'application F associant à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ la fonction polynôme Q définie pour tout réel t par:

$$Q(t) \quad = \quad P(t)+\frac{1-t}{n}P'(t).$$

1°) Etude de l'application F.

a) Montrer que F est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) On considère pour $1 \leq k \leq n$ la fonction polynôme P_k définie par $P_k(t) = t^{n-k}$.
Expliciter la fonction polynôme $Q_k = F(P_k)$.

c) Déterminer la matrice M de F dans la base $B = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2°) Etude des éléments propres de F.

a) Donner les valeurs propres de F. L'endomorphisme F est-il diagonalisable?

b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.

c) Soient k un entier tel que $1 \leq k < n$ et P un élément non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que:

$$F(P) \quad = \quad \frac{n-k}{n}P.$$

Montrer que $P(1) = 0$.
On convient alors de poser $P(t) = (t-1)^r R(t)$, avec $1 \leq r < n$ et $R(1) \neq 0$.
Quelle relation vérifient alors r et R? En déduire que $r = k$ et préciser le degré de R.

d) Déterminer les sous-espaces propres de F associés aux différentes valeurs propres de F.

3°) <u>Etude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$.</u>

On considère la suite de fonctions polynômes définie par $U_1(t) = t^{n-1}$, puis $U_{j+1} = F(U_j)$.

a) Etablir l'égalité suivante pour tout réel t:

$$U_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (t-1)^k.$$

b) En déduire $U_2(t)$, $U_3(t)$, puis, par récurrence, $U_j(t)$ comme combinaisons linéaires de $1, t-1, \ldots, (t-1)^{n-1}$.
Expliciter alors $U_j(0)$ sous forme d'une somme.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, on considère un marché sur lequel n fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent, successivement et de façon indépendante, auprès de ces n fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable.
On désigne:

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre des fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un ou plusieurs des j premiers consommateurs.
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2, \ldots, n$.
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j.

1°) <u>Etude de la loi des variables aléatoires X_j.</u>

a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Donner les probabilités conditionnelles $P(X_{j+1} = k / X_j = k)$ et $P(X_{j+1} = k / X_j = k-1)$ (lorsque $k \geq 2$).
Que vaut $P(X_{j+1} = k / X_j = i)$ lorsque $1 \leq i \leq n$, l'entier i étant distinct de k-1 et k?

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de $P(X_{j+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_j = i)$ où $1 \leq i \leq n$.

On convient, dans la suite de cette partie, de poser pour tout entier $j \geq 1$:

$$G_j(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X_j = k)\, t^{n-k}.$$

2°) <u>Etude de la suite (G_j).</u>

a) Préciser G_1, puis déduire de la question précédente que $G_{j+1} = F(G_j)$.
Vérifier alors que cette suite (G_j) n'est autre que la suite (U_j) définie en I.3°.

b) En déduire l'expression de $P(X_j = n)$. A l'aide d'un raisonnement probabiliste,établir que, si $1 \leq j < n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0.$$

c) Prouver que $P(X_j = n)$ tend vers 1 lorsque j tend vers l'infini, et en déduire quelles sont les limites de $E(X_j)$ et $V(X_j)$ lorsque j tend vers l'infini.

3°) <u>Calcul de l'espérance de X_j.</u>

a) Calculer $G_j(1)$, puis exprimer $G_j'(1)$ en fonction de $E(X_j)$ et de n.

b) A l'aide de la relation $G_{j+1} = F(G_j)$, exprimer $(G_{j+1})'(1)$ en fonction de $(G_j)'(1)$. Que vaut $(G_1)'(1)$?

c) En déduire $(G_j)'(1)$, puis $E(X_j)$, en fonction de j et de n.
Retrouver ainsi la limite de $E(X_j)$ lorsque l'entier j tend vers l'infini.

PARTIE III

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

1°) Etude de la loi de la variable aléatoire T.

a) Comparer les deux événements $[T \leq j]$ et $[X_j = n]$.
En déduire $P(T = j+1)$ en fonction de $P(X_{j+1} = n)$ et $P(X_j = n)$.
(Et l'on a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = n)$, ces deux expressions étant évidemment nulles).

b) Evaluer $P(T=1) + P(T=2) + \dots + P(T=j)$ en fonction de $P(X_j = n)$. En déduire que:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(T = j) \;=\; 1.$$

c) Déduire enfin de l'expression de $P(X_j = n)$ obtenue en II.2° que:

$$P(T = j+1) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} C_{n-1}^{k} \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

2°) Etude de l'espérance de T.

a) Donner l'expression, pour $1 \leq k < n$, de la somme suivante:

$$S_k \;=\; \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

b) En déduire que:

$$E(T-1) \;=\; n\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k}.$$

c) Etablir pour tout nombre réel x appartenant à [0, 1] la formule suivante:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} \, (x-1)^{k-1} \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

d) En déduire, par intégration de l'égalité précédente sur [0, 1], que:

$$E(T) \;=\; n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \;\dots\; + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

3°) Evaluation asymptotique de E(T).

a) Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir E(T) en fonction de n.

b) A l'aide de cet algorithme, donner dans les deux cas n = 10 et n = 100 une valeur approchée du nombre moyen des consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

c) Etablir pour tout entier $k \geq 1$ l'inégalité suivante:

$$\frac{1}{k+1} \;\leq\; \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \;\leq\; \frac{1}{k}.$$

Quel équivalent de E(T) en déduit-on lorsque l'entier n tend vers l'infini?

******

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

MATHEMATIQUES II

Option générale

Jeudi 7 mai 1992 de 8h à 12h

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

PARTIE I

On se propose dans cette partie de calculer pour tout entier $p \geq 1$ la somme:

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{p} k^n = 1^n + 2^n + \cdots + p^n.$$

Soient $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels et (P_k) la suite de fonctions polynômes définies par $P_0(x) = 1$ et, si $k \geq 1$, par:

$$P_k(x) = \frac{x(x-1)\ \ldots\ (x-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(x-j).$$

On considère l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même associant à la fonction polynôme P la fonction polynôme ΔP définie par: $(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Prouver que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, puis déterminer son noyau.

b) Soient j, k des entiers naturels. On rappelle que $\Delta^j = \Delta \circ \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (j fois), et Δ^0 désigne par convention l'application identité de $\mathbb{R}[X]$.
Déterminer ΔP_k, puis $\Delta^j P_k$ en distinguant les cas $j \leq k$ et $j > k$.

c) Prouver que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base du sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ constitué des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, et établir la formule suivante pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à n:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) . P_k(x).$$

d) En déduire que Δ est surjectif, puis, pour toute fonction polynôme P de degré n, établir l'existence d'une unique fonction polynôme Q, de degré n+1, telle que:

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x) \qquad et \qquad Q(0) = 0.$$

On note Q_n la fonction polynôme telle que $Q_n(x+1) - Q_n(x) = x^n$ et $Q_n(0) = 0$.

e) Exprimer $S_n(p)$ à l'aide de Q_n et de p, et expliciter Q_n et $S_n(p)$ pour $n \leq 3$.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise-Yvelines

PARTIE II

On établit dans cette partie quelques résultats probabilistes.

1°) Fonction génératrice d'une variable aléatoire.

On considère un entier naturel p et une variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, p\}$.

On lui associe la fonction suivante, dite fonction génératrice de X:

$$t \to G_X(t) = \sum_{k=0}^{p} P(X=k)t^k.$$

Déterminer la fonction génératrice de X lorsque:

a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre λ (λ réel tel que $0 < \lambda < 1$).

b) X suit une loi binômiale de paramètres n et λ (λ réel tel que $0 < \lambda < 1$).

2°) Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

On considère désormais des entiers naturels $p_1, p_2, \dots, p_n$ et des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et à valeurs dans $\{0, 1, \dots, p_1\}$, $\{0, 1, \dots, p_2\}$, ..., $\{0, 1, \dots, p_n\}$ respectivement. On note alors: $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

a) Etablir que la fonction génératrice de $Y_2 = X_1 + X_2$ est le produit des fonctions génératrices de X_1 et de X_2.

b) Exprimer la fonction génératrice de $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ à l'aide des fonctions génératrices de X_1, de X_2, ..., de X_n.

Retrouver le résultat obtenu en 1°(b) à partir du résultat obtenu en 1°(a).

3°) Etude d'un cas particulier.

On suppose de plus que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, k-1\}$, autrement dit:

$$P(X_k=0) = P(X_k=1) = \dots = P(X_k=k-1) = \frac{1}{k}.$$

a) Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires X_k ($1 \leq k \leq n$), puis de la somme $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

On convient de noter la fonction génératrice G_n de Y_n sous la forme suivante:

$$G_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} c_{n,k}\, t^k.$$

b) En exprimant G_{n+1} en fonction de G_n, déterminer $c_{n+1,k}$ en fonction des coefficients $c_{n,k}, c_{n,k-1}, \dots, c_{n,k-n}$.

Par convention, on posera $c_{n,k} = 0$ lorsque $k < 0$ ou lorsque $k > n(n-1)/2$.

c) Montrer que les coefficients $c_{n,k}$ sont entiers naturels et calculer leur somme pour $0 \leq k \leq n(n-1)/2$.

PARTIE III

On considère un tableau s = (s[1], s[2], ... , s[n]) dans lequel toutes les variables sont de type entier et où les n entiers 1, 2, ... , n sont affectés dans un ordre quelconque aux n variables s[1], s[2], ... , s[n].

L'objet de cette partie est l'étude de la complexité de l'algorithme de tri suivant, visant à ranger dans l'ordre croissant les éléments de ce tableau s:

```
begin
for i:=1 to n-1 do
    for j:=1 to n-i do
      if s[j] > s[j+1] then  Echanger(s[j], s[j+1]);
end;
```

(la procédure Echanger(x, y) permute les valeurs des variables x, y).

1°) <u>Exemples de mise en œuvre de l'algorithme.</u>

On suppose dans cette question que n = 3. Indiquer les valeurs contenues dans les variables s[1], s[2], s[3] après chaque appel de la procédure Echanger lorsque l'on affecte initialement à (s[1], s[2], s[3]) les six valeurs suivantes:

(1, 2, 3) ; (2, 3, 1) ; (3, 1, 2) ; (1, 3, 2) ; (3, 2, 1) ; (2, 1, 3).

On précisera à chaque fois le nombre total d'appels de la procédure Echanger.

(on présentera les résultats obtenus dans six tableaux distincts).

2°) <u>Action de l'algorithme.</u>

a) Déterminer la valeur contenue dans s[n] à l'issue du passage dans la boucle suivante:

```
for j:=1 to n-1 do
if s[j] > s[j+1] then  Echanger(s[j], s[j+1]);
```

b) En déduire la valeur contenue en fin d'algorithme dans s[k] pour $1 \leq k \leq n$.

3°) <u>Complexité de l'algorithme.</u>

a) Exprimer en fonction de n le nombre de comparaisons d'entiers (>) effectuées au cours de l'algorithme.

b) Exprimer en fonction de n les nombres maximal et minimal d'appels de la procédure Echanger au cours de l'algorithme. On explicitera des tableaux s pour lesquels ces maximum et minimum sont effectivement atteints.

Dans la suite, on associe au tableau s et à tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

- le nombre $U_k(s)$ des entiers i tels que $1 \leq i < k$ et $s[i] > s[k]$ (avec $U_1(s) = 0$).
- la somme $V_n(s) = U_1(s) + U_2(s) + \dots + U_n(s)$.

On dit que $V_n(s)$ est le nombre des inversions du tableau s, autrement dit le nombre des couples d'entiers (i, k) tels que:

$$1 \leq i < k \leq n \text{ et } s[i] > s[k].$$

4°) <u>Nombre d'appels de la procédure Echanger.</u>

a) Lorsque s[j] > s[j+1], indiquer l'effet de l'échange des valeurs de s[j] et s[j+1] sur le nombre des inversions du tableau s = (s[1], s[2], ... , s[n]).
En déduire le nombre d'appels de la procédure Echanger lors du tri de s.

b) On suppose dans cette question que n = 3. Préciser $(U_1(s), U_2(s), U_3(s))$ et $V_3(s)$ lorsque l'on affecte initialement à s = (s[1], s[2], s[3]) les six valeurs:

(1, 2, 3) ; (2, 3, 1) ; (3, 1, 2) ; (1, 3, 2) ; (3, 2, 1) ; (2, 1, 3).

c) Rédiger un algorithme de calcul de $U_k(s)$ (où $1 \leq k \leq n$) et de $V_n(s)$.

(Les candidats sont tenus de rédiger les algorithmes en langage PASCAL, en conservant toutefois les noms des variables introduites dans l'énoncé).

On suppose dans la suite que les différentes façons d'affecter les n entiers 1, 2, ... , n aux n variables s[1], s[2], ... , s[n] sont équiprobables, et l'on note:

- S_n l'ensemble des différents tableaux s ainsi obtenus.
- Ω_n l'ensemble des n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ d'entiers tels que $0 \leq u_k < k$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

On considère $U_1, U_2, \ldots, U_n$ comme des variables aléatoires sur l'ensemble S_n.

5°) <u>Bijectivité de l'application $s \to (U_1(s), U_2(s), \ldots, U_n(s))$.</u>

a) Vérifier que l'application associant à tout tableau s de S_n le n-uplet $(U_1(s), U_2(s), \ldots, U_n(s))$ prend ses valeurs dans Ω_n.

b) Soit s un tableau de S_n tel que $U_1(s) = u_1$, $U_2(s) = u_2$, ... , $U_n(s) = u_n$.

- Déterminer s[n] en fonction de u_n.
- Expliquer de même comment l'on peut obtenir les valeurs de s[n-1], ... , s[1] en fonction de $u_{n-1}, \ldots, u_1$.

c) Montrer que l'application $s \to U(s)$ est une bijection de S_n sur Ω_n.
En déduire le nombre des tableaux s de S_n tels que $U_k(s) = u_k$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et tout entier u_k tel que $0 \leq u_k < k$.

6°) <u>Lois des variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_n$.</u>

a) Déterminer la probabilité $P(U_1 = u_1, U_2 = u_2, \ldots, U_n = u_n)$ pour tout n-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ appartenant à Ω_n.

b) Déterminer la probabilité $P(U_k = u_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et tout entier u_k tel que $0 \leq u_k < k$.
En déduire la loi de U_k et l'indépendance des n variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$.

c) En déduire en fonction de n l'espérance et la variance du nombre d'appels de la procédure Echanger au cours de l'algorithme, et donner des équivalents simples de ces expressions lorsque n tend vers l'infini.

***

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES II

Option générale

Mercredi 12 mai 1993 de 8h à 12h

Sont autorisées :

- *Règles graduées.*
- *Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.*

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p (ceci signifiant qu'à chaque expérience, la probabilité de succès est égale à p, où p est un réel donné tel que $0 < p < 1$).
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs (où r désigne un entier donné tel que $r \geq 2$).

PARTIE 1

On désigne par S l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes.
On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite d'une suite $u = (u_n)$ de S vérifiant pour tout entier naturel $n \geq r-1$ la relation suivante:

$$(1) \qquad u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \ \dots \ + p^{r-1}u_{n-r+1} \ = \ p^r.$$

1°) On considère le nombre complexe $\omega_r = \exp(2i\pi/r) = \cos(2\pi/r) + i.\sin(2\pi/r)$.

a) Déterminer en fonction de ω_r les racines complexes de l'équation $z^r = 1$.

b) Soient x, y des entiers. Expliciter la valeur des sommes suivantes:

$$s_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{kx} \qquad ; \qquad t_r(x,y) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_r^{-xk}\omega_r^{ky}.$$

Pour calculer $s_r(x)$, on distinguera 2 cas, selon que x est ou non multiple de r.

2°) On considère la matrice M_r carrée d'ordre r définie par:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_r & \cdots & \omega_r^{y-1} & \cdots & \omega_r^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{x-1} & \cdots & \omega_r^{(x-1)(y-1)} & \cdots & \omega_r^{(x-1)(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_r^{r-1} & \cdots & \omega_r^{(r-1)(y-1)} & \cdots & \omega_r^{(r-1)(r-1)} \end{bmatrix}.$$

On désigne par $\overline{M_r}$ la matrice conjuguée de M_r, c'est à dire la matrice carrée d'ordre r dont les éléments sont les conjugués des éléments de la matrice M_r.

a) Expliciter à l'aide du nombre complexe i l'expression de M_r pour r = 4, puis calculer le produit $\overline{M_4}M_4$.

b) A l'aide des résultats de la question 1, expliciter l'expression de $\overline{M_r}M_r$ dans le cas général, et en déduire que M_r est une matrice inversible.

c) On considère r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ tels que, pour $0 \le n \le r-1$:

$$\lambda_0 + \lambda_1\omega_r^n + \lambda_2\omega_r^{2n} + \dots + \lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n} = 0.$$

Etablir que ces r nombres complexes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ sont nuls.

d) En déduire l'indépendance des r suites géométriques suivantes:

$$e_0 = (p^n), \quad e_1 = (p^n\omega_r^n), \quad e_2 = (p^n\omega_r^{2n}), \quad \dots \quad , \quad e_{r-1} = (p^n\omega_r^{(r-1)n}).$$

3°) On étudie dans cette question les suites $v = (v_n)$ de S qui vérifient pour tout entier naturel $n \ge r-1$ la relation suivante:

$$(2) \qquad v_n + pv_{n-1} + p^2v_{n-2} + \dots + p^{r-1}v_{n-r+1} = 0.$$

a) Etablir que les suites vérifiant (2) forment un sous-espace vectoriel E de S.

b) Prouver que l'application F associant à tout élément $v = (v_n)$ de E l'élément de $\mathbb{C}^{r-1}$ défini par $F(v) = (v_0, v_1, \dots, v_{r-2})$ est linéaire et bijective.
En déduire la dimension de E.

c) Etablir que les suites $e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$ appartiennent à E, et prouver que ce sont les seules suites géométriques de premier terme égal à 1 dans E.

d) En déduire que les suites $e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$ forment une base de E.
Donner la forme générale des suites $v = (v_n)$ vérifiant (2). En déduire la limite d'une telle suite lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) On étudie dans cette question les suites complexes $u = (u_n)$ vérifiant (1).

a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).

b) Etablir que la suite $u = (u_n)$ vérifie (1) si et seulement si la suite $v = (v_n)$, définie par la relation $v = u - c$, vérifie (2).

c) En déduire enfin la limite d'une suite $u = (u_n)$ vérifiant (1).

***

PARTIE 2

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours de la suite des expériences de Bernoulli décrites dans le préambule.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désignera par S_n l'événement:

"Obtenir un succès à la $n^{\text{ème}}$ expérience".

1°) Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès.

On considère pour tout entier $n \geq 1$ l'événement E_n = "$S_{rn-(r-1)}$ et ... et S_{rn-1} et S_{rn}":

"Obtenir un succès aux $[rn-(r-1)]^{\text{ème}}$, ... , $[rn-1]^{\text{ème}}$ et $[rn]^{\text{ème}}$ expériences".

a) Déterminer la probabilité des événements suivants:

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ \dots \ \cap \overline{E}_n \quad ; \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ \dots \ \cap \overline{E}_n \cap \ \dots$$

(intersection des complémentaires de E_1, E_2, ... , E_n, puis de E_1, E_2, ... , E_n, ...).

b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2°) Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant à la n° expérience.

Pour tout entier $n \geq r$, on désigne par U_n l'événement:

"Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la $n^{\text{ème}}$ expérience, c'est à dire une suite de succès aux $[n-(r-1)]^{\text{ème}}$, ... , $(n-1)^{\text{ème}}$, $n^{\text{ème}}$ expériences, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs".

Par exemple, si $r = 3$ et si l'on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par:

$$\underline{S \ S \ S} \ \ \underline{S \ S \ S} \ \ S \ E \ E \ \ \underline{S \ S \ S} \ \ S \ S \ E \ S \ E \ \ \underline{S \ S \ S} \ \ S \ E \ \dots$$

mène à la réalisation des événements U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, ... , c'est à dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux $3^{\text{ème}}$, $6^{\text{ème}}$, $12^{\text{ème}}$, $20^{\text{ème}}$, ... expériences.

On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.

On posera par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = \dots = u_{r-1} = 0$.

a) Montrer que la réalisation de l'événement "$S_{n-(r-1)}$ et ... et S_{n-1} et S_n" implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}$, ... , U_{n-1}, U_n pour $n \geq r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie (1).

Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 Faces (respectivement de 2 As) consécutifs s'achève à la $n^{\text{ème}}$ expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée (respectivement d'un dé équilibré).

3°) Etude de la première suite de r succès consécutifs.

On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n de l'expérience où, *pour la première fois,* s'achève une suite de r succès consécutifs.

Dans l'exemple donné dans la question 2, X prend donc la valeur 3.

On posera donc par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \dots = P(X = r-1) = 0$.

a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question 1 que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X = n) = 1.$$

b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1[:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que:

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r}\,\frac{1-px}{1-x}.$$

c) Pour tout entier $n \geq r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences.
En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)u_{n-k}.$$

d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs Σa_n et Σb_n, on associe la série dite série-produit Σc_n, où $c_n = a_o b_n + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_o$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit Σc_n.
e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant U(x) et G(x) pour tout réel x appartenant à [0, 1[(on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geq 1$).
f) En déduire l'expression de G(x) pour $0 \leq x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en x = 1.

4°) <u>Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs.</u>
a) On *admet* que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur [0, 1].
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r succès consécutifs.
b) On suppose p = 1/2 (pièce équilibrée), puis p = 1/6 (dé équilibré), et l'on effectue à chaque seconde une expérience. Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs lorsque r = 5, r = 10, r = 25.
(A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).

****

**

ESSEC

Option générale

MATHEMATIQUES 2

Vendredi 13 mai 1994 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II).
Dans la partie I, on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

a) On considère l'ensemble S des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 1$:

(1) $9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0$.

Etablir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

c) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

d) On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartenant à S.

- Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que:

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha + \dfrac{\sqrt{7}}{3}\beta - \dfrac{\sqrt{7}}{3}\gamma. \\ u_2 &= \alpha + \dfrac{7}{9}\beta + \dfrac{7}{9}\gamma. \\ u_3 &= \alpha + \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \dfrac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ).

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

Etablir qu'elle appartient à S, et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$.
Exprimer enfin u_n en fonction de n.

e) En déduire que les trois suites obtenues ci-dessus au (c) forment une base de l'espace vectoriel S.

2°) Etude des puissances d'une matrice.

On étudie la suite des puissances d'une matrice réelle d'ordre 4 notée M et satisfaisant les deux conditions suivantes:

(2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.

(3) Les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes.

a) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que:

(4) $M^n = a_nM + b_nM^2 + c_nM^3$.

- Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n (s'ils existent).
- Déterminer a_n, b_n, c_n pour n = 1, 2, 3, 4.
- Etablir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général.

(On explicitera a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n).

b) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a: $a_n + b_n + c_n = 1$.

c) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifient la relation (1).

d) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1°, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante:

$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n.

3°) Etude d'un cas particulier.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), et l'on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$f(e_1) = e_2 \quad ; \quad f(e_2) = \frac{e_1}{3} + \frac{2e_3}{3} \quad ; \quad f(e_3) = \frac{2e_2}{3} + \frac{e_4}{3} \quad ; \quad f(e_4) = e_4 .$$

a) Ecrire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), calculer A^2, A^3, A^4, puis prouver que la matrice A satisfait aux conditions (2) et (3). Ainsi donc:

$$A^n = a_nA + b_nA^2 + c_nA^3 \quad (n \geq 1).$$

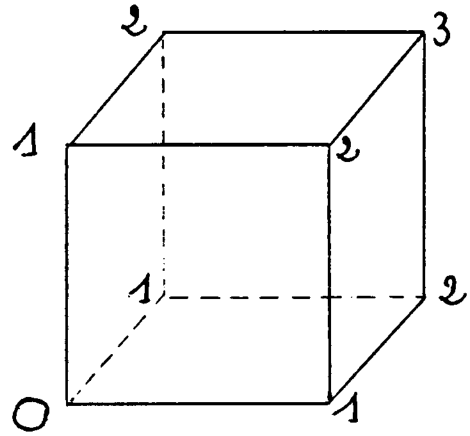
b) Ecrire la matrice B de f dans la base (e_4, e_3, e_2, e_1) et montrer que:

$$B^n = a_nB + b_nB^2 + c_nB^3 \quad (n \geq 1).$$

***

PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet O:



A] On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

A1) lorsque le point P atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
A2) lorsque le point P atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_0 = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement impair et supérieur ou égal à 3) où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1°) Lois des variables aléatoires X_n.
Pour tout entier naturel n, on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
a) Expliciter U_0, U_1, U_2.
b) Exprimer pour i = 0, 1, 2, 3 la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
En déduire une matrice M, d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$U_{n+1} = MU_n.$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0, et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire T.

a) Comparer les événements " $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$" et "T = 2n+1".

En déduire la probabilité de l'événement "T = 2n+1".

b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=2n+1) = 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T.

B] On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

B1) le point P est à l'instant 1 sur l'un des trois sommets du cube reliés à O par une arête puis, lorsqu'il atteint à l'instant $n \geq 1$ un sommet S du cube autre que le sommet 0, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.

B2) lorsque le point P revient au sommet O du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:

- Y_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $Y_1 = 1$).
- R la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant (nécessairement pair et supérieur ou égal à 2) où, pour la première fois, le point revient au sommet O.

1°) Lois des variables aléatoires Y_n.

Pour tout entier naturel n, on note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(Y_n = 0)$, $P(Y_n = 1)$, $P(Y_n = 2)$, $P(Y_n = 3)$.

a) Déterminer une matrice M, d'ordre 4, telle que l'on ait pour tout entier $n \geq 1$:

$$V_{n+1} = MV_n.$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer V_n en fonction de M^{n-1} et V_1, et en déduire l'expression du vecteur V_n et de la loi de Y_n en fonction des réels a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire R.

a) Comparer pour $n \geq 1$ les événements " $Y_{2n-1} = 1$ et $Y_{2n} = 0$" et "R = 2n".

En déduire la probabilité de l'événement "R = 2n".

b) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R=2n) = 1.$$

c) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire R.

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1995

Option générale

MATHEMATIQUES 2

Mardi 16 Mai 1995 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

Le problème a pour objet l'étude des arrivées successives des clients à un guichet (distributeur de billets d'une banque, péage d'autoroute, etc).
Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires d'analyse.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par λ un nombre réel non nul donné, et l'on se propose d'étudier par récurrence la suite (f_n) de fonctions définies de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout entier naturel n les deux conditions suivantes:

- (R_n) pour tout couple (x, y) de réels positifs, f_n vérifie la relation:

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x) f_k(y).$$

- (D_n) f_n est dérivable à droite en 0 et l'on a:

$$f_n'(0) = \lim_{y \to 0,\, y>0} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = -\lambda \text{ si } n=0, \quad +\lambda \text{ si } n=1, \text{ et } 0 \text{ si } n \geq 2.$$

1°) Etude du signe de la fonction f_0.

Dans cette question, on considère une fonction f_0: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0):

$$(R_0) \quad \forall x,y \geq 0, \quad f_0(x+y) = f_0(x) f_0(y) \qquad \text{et} \qquad (D_0) \quad f_0'(0) = -\lambda.$$

a) Etablir que f_0 n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}+$.
En faisant alors x = 0 dans la relation (R_0), déterminer la valeur de $f_0(0)$.
b) En faisant x = y = t/2 dans la relation (R_0), établir que $f_0(t) \geq 0$ lorsque $t \geq 0$.
On se propose enfin d'établir que $f_0(t) > 0$ lorsque $t \geq 0$.

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat
affilié à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Versailles - Val d'Oise-Yvelines ;
membre de la Fesic

A cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_o tel que $f_o(t_o) = 0$. En déduire que $f_o(t_o/2) = 0$, puis, pour tout entier $n \geq 1$, que $f_o(t_o/2^n) = 0$. Montrer qu'alors $f_o(0) = 0$, et conclure.

2°) <u>Existence et unicité de la fonction f_0.</u>

Dans cette question, on considère f_o: $\mathbb{R}+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_o) et (D_o).

a) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $y > 0$ le rapport $[f_o(x+y)-f_o(x)] / y$, prouver que f_o est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier, à l'aide du résultat obtenu au 1°, l'égalité $f_o(x-y) = f_o(x)/f_o(y)$ pour $0 \leq y \leq x$.
- En formant pour $0 < y \leq x$ le rapport $[f_o(x-y)-f_o(x)] / (-y)$ à l'aide de cette expression de $f_o(x-y)$, prouver que f_o est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

b) En déduire que f_o est dérivable sur $\mathbb{R}+$ et exprimer $f_o'(x)$ en fonction de λ et $f_o(x)$.

c) Dériver la fonction $x \rightarrow \exp(\lambda x).f_o(x)$, puis en déduire $f_o(x)$ en fonction de λ et x.

d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_o ainsi obtenue vérifie (R_o) et (D_o).

3°) <u>Existence et unicité de la fonction f_1.</u>

La fonction f_o étant ainsi obtenue, on considère f_1: $\mathbb{R}+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_1) et (D_1):

$$(R_1) \quad \forall x,y \geq 0, \quad f_1(x+y) = f_1(x)f_0(y)+f_0(x)f_1(y) \qquad \text{et} \qquad (D_1) \quad f_1'(0) = \lambda.$$

a) Déterminer $f_1(0)$ à l'aide de la relation (R_1), et en déduire la limite du quotient $f_1(y)/y$ quand y tend vers 0 ($y > 0$).

b) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $y > 0$ le rapport $[f_1(x+y)-f_1(x)] / y$, prouver que f_1 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier l'égalité $f_1(x) = f_1(x-y)f_o(y) + f_o(x-y)f_1(y)$ pour $0 \leq y \leq x$ et en déduire une expression de $f_1(x-y)$.
- En formant pour $0 < y \leq x$ le rapport $[f_1(x-y)-f_1(x)] / (-y)$ à l'aide de cette expression de $f_1(x-y)$, prouver que f_1 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

c) En déduire que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}+$ et exprimer $f_1'(x)$ en fonction de λ, $f_o(x)$ et $f_1(x)$.

d) Dériver la fonction $x \rightarrow \exp(\lambda x).f_1(x)$, puis en déduire $f_1(x)$ en fonction de λ et x.

e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_1 ainsi obtenue vérifie (R_1) et (D_1).

4°) <u>Existence et unicité de la fonction f_2.</u>

Les fonctions f_o et f_1 étant ainsi obtenues, on considère f_2: $\mathbb{R}+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_2) et (D_2).

a) Déterminer $f_2(0)$ à l'aide de la relation (R_2) et en déduire la limite du quotient $f_2(y)/y$ quand y tend vers 0 ($y > 0$).

b) On considère un nombre réel strictement positif x.

- En formant pour $y > 0$ le rapport $[f_2(x+y)-f_2(x)] / y$, prouver que f_2 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x.
- Justifier l'égalité $f_2(x) = f_2(x-y)f_o(y) + f_1(x-y)f_1(y) + f_o(x-y)f_2(y)$ pour $0 \leq y \leq x$ et en déduire une expression de $f_2(x-y)$.
- En formant pour $0 < y \leq x$ le rapport $[f_2(x-y)-f_2(x)] / (-y)$ à l'aide de cette expression de $f_2(x-y)$, prouver que f_2 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x.

c) En déduire que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}+$ et montrer que $f_2'(x) = \lambda(f_1(x)-f_2(x))$.

d) Dériver la fonction $x \rightarrow \exp(\lambda x).f_2(x)$, puis en déduire $f_2(x)$ en fonction de λ et x.

e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_2 ainsi obtenue vérifie (R_2) et (D_2).

5°) <u>Généralisation: existence et unicité de la fonction f_n ($n \geq 2$).</u>

On suppose avoir obtenu, pour tout entier k tel que $0 \leq k < n$, une et une seule fonction f_k vérifiant (R_k) et (D_k), dérivable sur $\mathbb{R}+$ et vérifiant $f_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$.

On considère alors une fonction f_n: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ vérifiant (R_n) et (D_n).

a) Déterminer $f_n(0)$ et la limite du quotient $f_n(y)/y$ quand y tend vers 0 ($y > 0$).

b) Etablir la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}+$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de λ, $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$.

c) Dériver la fonction $x \to \exp(\lambda x).f_n(x)$, puis en déduire $f_n(x)$ en fonction de λ et x, d'abord lorsque n = 3, puis, par récurrence, dans le cas général.

d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_n ainsi obtenue vérifie (R_n) et (D_n).

***

PARTIE II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.

Etant donnés deux nombres réels t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et l'on note $P(N(t_1, t_2) = n)$ la probabilité pour que n clients exactement se présentent au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$.

(Par convention, on posera $P(N(t_1, t_1) = 0) = 1$, et, lorsque $n \geq 1$, $P(N(t_1, t_1) = n) = 0$).

On fait, dans toute la suite du problème, les trois hypothèses suivantes:

A) Etant donnés quatre nombres réels t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, les variables aléatoires $N(t_1, t_2)$ et $N(t_3, t_4)$ sont indépendantes.
(Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants).

B) Pour tout entier naturel n existe une fonction p_n: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tels que $t_1 \leq t_2$:

$$P(N(t_1, t_2) = n) = p_n(t_2-t_1).$$

(Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants t_1 et t_2 dépend uniquement de la durée t_2-t_1).

C) Il existe un réel $\lambda > 0$ et des fonctions ε_1, ε: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 tels que, pour tout couple de nombres réels (t_1, t_2) tel que $t_1 \leq t_2$:

$$P(N(t_1, t_2) = 1) = \lambda(t_2-t_1) + (t_2-t_1).\varepsilon_1(t_2-t_1) \quad \text{et} \quad P(N(t_1, t_2) \geq 2) = (t_2-t_1).\varepsilon(t_2-t_1).$$

(Cette hypothèse signifie que, pour une courte durée t_2-t_1:
- la probabilité d'arrivée d'un seul client pendant cette courte durée t_2-t_1 est approximativement proportionnelle à t_2-t_1.
- la probabilité d'arrivée de plus d'un client pendant cette courte durée t_2-t_1 est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client).

1°) <u>Equation fonctionnelle des fonctions p_n.</u>

On considère dans cette question deux nombres réels positifs x, y.

a) Exprimer $P(N(0, x+y) = 0)$ en fonction de $P(N(0, x) = 0)$ et de $P(N(x, x+y) = 0)$ et en déduire que $p_o(x+y) = p_o(x)p_o(y)$.

b) Etablir plus généralement que, pour tout entier naturel n, on a:

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x)p_k(y).$$

2°) Dérivabilité en 0 des fonctions p_n.

a) Etablir l'existence d'une fonction ε_o: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que:

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - \lambda(t_2\text{-}t_1) + (t_2\text{-}t_1).\varepsilon_o(t_2\text{-}t_1).$$

b) Etablir, pour tout entier $n \geq 2$, l'existence d'une fonction ε_n: $\mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que: $P(N(t_1, t_2) = n) = (t_2\text{-}t_1).\varepsilon_n(t_2\text{-}t_1)$.

c) Etablir, en posant $x = t_2\text{-}t_1$, que $p_o(x) = 1 - \lambda x + x.\varepsilon_o(x)$, que $p_1(x) = \lambda x + x.\varepsilon_1(x)$ et donner de même un développement limité à l'ordre 1 de p_n pour $n \geq 2$.

d) En déduire la valeur de $p_o'(0)$, de $p_1'(0)$ et de $p_n'(0)$ pour $n \geq 2$.

3°) Loi de la variable aléatoire $N(t_1, t_2)$.

a) Etablir que les fonctions p_o, p_1 et p_n pour $n \geq 2$ vérifient les hypothèses (R_n) et (D_n) du I.

b) En déduire les expressions de $p_n(x)$ et $P(N(t_1, t_2) = n)$ pour tout entier naturel n et montrer que la variable aléatoire $N(t_1, t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2\text{-}t_1)$.

4°) Loi de l'instant d'arrivée du n° client.

On fixe un instant-origine et l'on note T_n la variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}+$) indiquant l'instant d'arrivée du $n^{ième}$ client ($n \geq 1$) à partir de cet instant-origine.

a) Comparer pour tout réel positif t les événements "$N(0, t) \leq n\text{-}1$" et "$T_n > t$".

b) En déduire la loi de T_1, et reconnaître celle-ci.

c) En déduire de même la fonction de répartition et la densité de T_2, de T_3, puis de T_n (dont la loi s'appelle *loi gamma de paramètres n et* λ).

d) Déterminer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire T_n.

5°) Loi du nombre de clients procédant à un achat.

On désigne par p (où $0 < p < 1$) la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat et par $A(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et procédant à un achat.

a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

Déterminer la probabilité conditionnelle $P(A(t_1, t_2) = k / N(t_1, t_2) = n)$ et reconnaître la loi de $A(t_1, t_2)$ conditionnée par l'événement $N(t_1, t_2) = n$.

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire $A(t_1, t_2)$ et préciser son espérance.

c) Donner, de même, la loi de la variable aléatoire $B(t_1, t_2)$ indiquant le nombre des clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$ et ne procédant pas à un achat.

d) Etudier enfin l'indépendance des variables aléatoires $A(t_1, t_2)$ et $B(t_1, t_2)$.

***

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option scientifique

Mathématiques II

Vendredi 10 mai 1996 de 8h à 12h

Les calculatrices, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximal 21cm x 15cm sont autorisées.

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

PARTIE I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge. On définit pour $0 \le t \le 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j.$$

1°) Etude de la fonction F sur [0, 1].

a) Montrer que la série définissant F(t) est convergente pour $0 \le t \le 1$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur [0, 1].

En déduire que F admet une limite à droite en tout point de [0, 1[, et une limite à gauche en tout point de]0, 1] (on précisera le théorème utilisé).

c) Soit t_0 un nombre réel appartenant à [0, 1[.

- Etablir pour nombre réel t tel que $t_0 < t \le 1$ et tout nombre entier naturel n:

$$0 \le F(t) - F(t_0) \le \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- En déduire pour tout nombre entier naturel n:

$$0 \le \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \le \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0.

d) Soit t_0 un nombre réel appartenant à]0, 1].

En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0, en conclure que F est continue sur [0, 1].

2°) Etude locale de la fonction F en 0.

a) Pour tout nombre entier naturel n, établir que, pour tout nombre réel t de [0, 1]:

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

b) On considère la fonction ε_n définie sur]0, 1] par l'égalité suivante:

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t).$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui permet d'obtenir $p_0, \ldots, p_n$.

3°) Etude locale de la fonction F en 1.

a) Etablir pour tout nombre réel t de [0, 1[:

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1+t+ \cdots + t^{j-1}).$$

En déduire que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est croissante sur [0, 1[.

b) On suppose dans cette question la série $\sum jp_j$ convergente.

Montrer que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est alors majorée sur [0, 1[, puis en déduire que la fonction F est dérivable en 1, et que:

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

c) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.

Montrer pour tout nombre réel t de [0, 1[et tout nombre entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (1+t+ \cdots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t)-F(1)}{t-1}.$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n \leq F'(1)$, puis établir que la série $\sum jp_j$ est convergente et comparer sa somme à F'(1).

d) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si et seulement si la série $\sum jp_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à F'(1).

e) *Application:* pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique? Comparer alors celle-ci à F'(1).

4°) Produit de deux fonctions génératrices.

Soient deux suites (p_n), (q_n) de nombres réels positifs telles que les séries $\sum p_n$, $\sum q_n$ convergent. On pose $r_n = p_0 q_n + \ldots + p_i q_{n-i} + \ldots + p_n q_0$ pour tout nombre entier naturel n.

a) Etablir pour tout entier naturel n la majoration suivante:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot \sum_{j=0}^{n} q_j.$$

En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.

b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \quad , \quad G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \quad , \quad H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j.$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de [0, 1] et tout nombre entier naturel n:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j . \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j .$$

En déduire l'égalité $F(t).G(t) = H(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).
On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul):

- Il lance la pièce:
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à K+1 francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à K-1 francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par:

- R_K l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = 0$.
- $t \to F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie donc pour $0 \leq t \leq 1$ par:

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K) t^n$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\sum p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier K = 1.

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1°) Etude de la probabilité de ruine du joueur.

a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer, pour tout nombre entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ième}}$ jet de la pièce si et seulement s'il existe un entier j (où $1 \leq j \leq n-1$) tel que:

- à l'issue du premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
- à l'issue des n-j jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_0(1) = 0$):

$$p \sum_{j=0}^{n} p_j(1) p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2. \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir à l'aide des résultats de I.4 la relation $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

d) Etudier les variations de la fonction $t \to 1-4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle $]0, 1[$, et montrer que $1-4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.
En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $pt\,x^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes $x'(t)$ et $x''(t)$ (on supposera $x'(t) < x''(t)$).
Pour tout nombre réel t appartenant à $]0, 1[$, montrer que $x''(t) > 1$ puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.
e) En faisant tendre t vers 1, déterminer alors $F_1(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) <u>Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.</u>
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

3°) <u>Expression des probabilités $p_n(1)$.</u>
a) Rappeler le développement limité de la fonction $x \to (1+x)^{1/2}$ en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre $2m+1$ de la fonction F_1 en 0.
b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel n $p_{2n}(1) = 0$ et:

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n (1-p)^{n+1}.$$

II.2 Etude du cas général.

1°) <u>Etude de la probabilité de ruine du joueur.</u>
a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1.
A l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geq 2$:

$$p_n(1) = p\,p_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir la relation $F_1(t) = pt\,F_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$
b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante:

$$P_n(K) = \begin{cases} p \cdot P_{n-1}(K+1) + (1-p)\, P_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, $F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
En étudiant alors la suite $K \to u_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.
c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) <u>Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.</u>
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

3°) <u>Expression des probabilités $p_n(K)$.</u>
a) A l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a), établir que $p_{2n+1}(2) = 0$ puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout nombre entier naturel n.
b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geq 1$.

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION SCIENTIFIQUE

Mathématiques II

Vendredi 2 Mai 1997 de 14h à 18h

On considère un parc de m machines identiques (avec $m \geq 1$) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$, on note X_i la variable aléatoire indiquant la durée de marche de la $i^{\text{ième}}$ machine (avant que celle-ci ne tombe en panne) à partir d'un instant 0.
On désigne par a un nombre réel strictement positif donné, et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines:

(H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, on suppose que la variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbf{R}+$ indiquant la durée de marche de la $i^{\text{ième}}$ machine à partir de l'instant 0 vérifie la relation suivante:

$$P(X_i < t+h \,/\, X_i \geq t) = ah + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(H2) Les m machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

Pour tout nombre réel positif t, on désigne par:

- $N(t)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t.
- $p_k(t)$ la probabilité $P(N(t) = k)$ pour que le nombre $N(t)$ de machines en panne à l'instant t soit exactement égal à k, où k est un nombre entier tel que $0 \leq k \leq m$. On suppose toutes les machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.

L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire $N(t)$ des machines déjà tombées en panne à un instant t. Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les parties I et II.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

PARTIE 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant la loi des variables aléatoires X_i introduites dans le préambule.

1°) Lois de la durée de marche X_i d'une machine ($1 \le i \le m$).

On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \ge 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \ge t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t.

a) Comparer les événements $(X_i \ge t)$ et $(t \le X_i < t+h) \cup (X_i \ge t+h)$.

En déduire l'expression de la probabilité $P(t \le X_i < t+h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t+h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse H1 l'égalité $g_i(t) - g_i(t+h) = [ah+h\varepsilon(h)]g_i(t)$.

b) En déduire successivement que:

- $0 \le g_i(t) - g_i(t+h) \le [a+\varepsilon(h)]h$.
- $0 \le g_i(t-h) - g_i(t) \le [a+\varepsilon(h)]h$ lorsque $0 < h \le t$.

En déduire que la fonction $t \rightarrow g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t+h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \rightarrow g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et $g_i(t)$.

En déduire de même que la fonction $t \rightarrow g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) Etablir que g_i est dérivable sur **R**+ et exprimer $g_i'(t)$ en fonction de a et $g_i(t)$.

En étudiant la fonction $t \rightarrow \exp(at).g_i(t)$ sur **R**+ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i.

d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i ainsi qu'une interprétation du nombre réel a.

2°) Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

Déduire des résultats précédents les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de $N(t)$. Quelle est la limite de $p_k(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Etait-ce prévisible?

PARTIE 2

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant sa fonction génératrice $G(x, t)$, c'est à dire la fonction de la variable réelle x définie par:

$$G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} p_k(t)x^k$$

Cette étude, indépendante de celle de la partie I, n'utilise aucun de ses résultats.

1°) Etude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \ge 0$ et $h > 0$ et tout couple (k, i) de nombres entiers tels que $0 \le k \le m$, $0 \le i \le m$, on se propose d'étudier les probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

a) Que vaut $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$ si $k < i$?

b) Etablir à l'aide des hypothèses H1 et H2 que:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k) = (1-ah-h\varepsilon(h))^{m-k}.$$

En déduire par un développement limité à l'ordre 1 que:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k) = 1 - (m-k)ah + h\varepsilon'(h)$$

où $\varepsilon'(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

c) Etablir de même que, pour $1 \le k \le m$:

$$P(N(t+h) = k / N(t) = k-1) = (m-k+1)ah + h\,\varepsilon''(h)$$

où $\varepsilon''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

d) Démontrer enfin que $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$ est négligeable devant h si $k \ge i+2$, c'est à dire égale à $h\varepsilon'''(h)$ où $\varepsilon'''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (on justifiera avec soin les résultats obtenus).

2°) <u>Etude des probabilités de panne $p_k(t)$ $(0 \le k \le m)$.</u>
a) A l'aide de la formule des probabilités totales, déduire des résultats précédents, pour $t \ge 0$ et $h > 0$, la probabilité $p_k(t+h)$ en fonction des probabilités $p_j(t)$ $(0 \le j \le m)$. Quelles expressions de $p_k(t+h) - p_k(t)$, puis de $p_k(t) - p_k(t-h)$ (où $h \le t$) en résulte-t-il?
b) En déduire que la fonction $t \to p_k(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[p_k(t+h) - p_k(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \to p_k(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.
Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de k, m, a, $p_{k-1}(t)$, $p_k(t)$.

(On pourra convenir, ce qui est naturel, que $p_{-1}(t) = 0$).

En déduire de même que la fonction $t \to p_k(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.
c) Etablir, pour $0 \le k \le m$, que p_k est dérivable sur $\mathbf{R}+$ et exprimer $p_k'(t)$ en fonction de k, m, a, $p_{k-1}(t)$, $p_k(t)$, puis en déduire la relation (R) suivante:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = ma(x-1)G(x,t) - ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t).$$

3°) <u>Etude d'un endomorphisme auxiliaire.</u>
On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_m[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à m, et l'application f associant à tout polynôme U de $\mathbf{R}_m[x]$ le polynôme $V = f(U)$ défini par:

$$V(x) = ma(x-1)U(x) - ax(x-1)U'(x)$$

où U' désigne le polynôme dérivé de U.
a) Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_m[x]$.
b) Soit λ une valeur propre de f et soit P un polynôme propre unitaire associé à λ, c'est à dire un polynôme unitaire P tel que $f(P) = \lambda P$.
- Etablir que 0 ou 1 est racine de P.

On pose donc $P(x) = x^h(x-1)^kR(x)$, où R est un polynôme tel que $R(0) \ne 0$, $R(1) \ne 0$ et h, k deux nombres entiers naturels tels que $1 \le h+k \le m$.
- Ecrire l'égalité $f(P) = \lambda P$ (que l'on simplifiera par $x^h(x-1)^k$), et en faisant tendre x vers 0 et vers 1, déterminer h et λ en fonction de a, k, m, et P en fonction de k et m.

c) Pour tout entier naturel $k \le m$, on note W_k le polynôme de $\mathbf{R}_m[x]$ défini par:

$$W_k(x) = x^{m-k}(x-1)^k.$$

Déterminer sous forme factorisée l'image par f du polynôme W_k.
Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f? f est-il diagonalisable?
d) Montrer que $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ est une base de $\mathbf{R}_m[x]$, et déterminer les composantes du polynôme $U = 1$ dans cette base en développant l'égalité $[x - (x-1)]^m = 1$.

4°) <u>Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$.</u>
On décompose la fonction polynôme $x \to G(x, t)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_m[x]$ d'une part, dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ de $\mathbf{R}_m[x]$ d'autre part:

$$G(x,t) = \sum_{k=0}^{m} p_k(t)x^k = \sum_{k=0}^{m} q_k(t)W_k(x).$$

a) On désigne par Π la matrice de passage de la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ à la base canonique $(1, x, \dots, x^m)$. Ecrire une relation entre les deux matrices-colonnes de composantes $q_0(t), q_1(t), \dots, q_m(t)$ d'une part, $p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t)$ d'autre part.
En déduire que $q_0, q_1, \dots, q_m$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}+$.
b) En utilisant l'expression de $x \to G(x, t)$ dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$, établir que la relation (R) obtenue à la question 2° équivaut aux m+1 égalités suivantes:

$$q_k'(t) = -akq_k(t) \qquad (0 \le k \le m).$$

En déduire que la fonction $t \to \exp(akt).q_k(t)$ est constante sur $\mathbf{R}+$, et que l'on a pour tout réel positif t: $q_k(t) = C_k.\exp(-akt)$ où C_k est une constante réelle.

c) Vérifier que $G(x, 0) = 1$, et en déduire que:

$$\sum_{k=0}^{m} C_k W_k(x) = 1.$$

En comparant cette expression du polynôme $U = 1$ dans la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ de $\mathbf{R}_m[x]$ à celle obtenue à la question 3°, déterminer les constantes C_k $(0 \leq k \leq m)$. En déduire alors que:

$$G(x, t) = [(1 - \exp(-at))x + \exp(-at)]^m.$$

d) En développant cette expression de $G(x, t)$, en déduire à nouveau les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire $N(t)$.

***

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option scientifique

Mathématiques II

Lundi 27 avril 1998 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II.
Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x) = \exp[a(x-1)].$$

On définit alors une suite (u_k) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation:

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

1°) Convergence de la suite (u_k).

a) Etablir par récurrence pour tout nombre entier naturel k les inégalités:

$$0 \leq u_k \leq 1 \qquad \text{et} \qquad u_k \leq u_{k+1}.$$

b) En déduire la convergence de la suite (u_k), dont on notera L(a) la limite.

ESSEC
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL. : 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01

ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉ.
RECONNU PAR L'ÉTAT. MEMBRE DE LA FESIC.

GROUPE ESSEC.
ETABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉS.
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITÉ AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION.
AFFILIÉ À LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES.

2°) Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que:

$$0 \le 1 - u_{k+1} \le a(1 - u_k).$$

b) En déduire l'inégalité $0 \le 1 - u_k \le a^k$ pour tout nombre entier naturel k, puis la limite L(a) de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

3°) Limite de la suite (u_k) lorsque $a \ge 1$.

a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \ge 1$.

- Prouver que $0 \le 1 - \ln(a)/a \le 1$ pour $a \ge 1$.
- Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
- En déduire la variation de la fonction $x \to f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$. Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

On convient désormais de noter r(a) la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

b) On étudie ici la plus petite racine r(a) de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \ge 1$.

- Etudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \to xe^{-x}$. Comparer les images des nombres a et ar(a) par cette fonction.
- En déduire que la fonction ϕ, définie pour $0 \le x \le 1$ par $\phi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de [0, 1] sur [0, 1/e] et montrer que la fonction ϕ^{-1} est continue et strictement croissante sur [0, 1/e] (on citera le théorème utilisé). Dresser le tableau de variation de ϕ^{-1}.
- Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\phi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de r(a) en $+\infty$.

c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) lorsque $a \ge 1$.

- Etablir l'inégalité $0 \le u_k \le r(a)$ pour tout nombre entier naturel k.
- En déduire la limite L(a) de la suite (u_k) pour $a \ge 1$.
- Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de L(a) à 10^{-2} près. On obtient ainsi L(2) = 0,20, L(4) = 0,02, etc.

4°) Courbe représentative de la fonction $a \to L(a)$ pour $a > 0$.

Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \to L(a)$ pour $a > 0$.

Partie II

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ... , n, ... et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps [n-1, n[, c'est à dire entre deux instants consécutifs quelconques n-1 et n ($n \ge 1$).
On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout nombre entier $n \ge 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants n-1 et n, et 0 sinon (et le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente devant le guichet).
Ces variables aléatoires $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p (où $0 < p < 1$).

On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée).
Pour préciser, si la durée de service du premier client est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n.

Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du client initial.

On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{\text{ième}}$ vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la $k^{\text{ième}}$ vague. On désigne alors par N_k le nombre aléatoire des clients de la $k^{\text{ième}}$ vague (étant entendu que l'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de client de $k^{\text{ième}}$ vague). Par convention, on pose $N_o = 1$.

1°) Loi de la variable aléatoire N_1.

a) Etant donné un nombre entier naturel n, déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 conditionnée par l'événement $D = n$.
On précisera les expressions des probabilités conditionnelles $P(N_1 = k / D = n)$.
b) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

2°) Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

a) Prouver que l'événement:
"la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini"
(autrement dit: "il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini") est la réunion des événements "$N_k = 0$", pour $k \geq 1$.
Montrer que cette suite d'événements $(N_k = 0)_{k\geq1}$ est croissante, et en déduire:
- que la suite $(p_k)_{k\geq1} = (P(N_k = 0))_{k\geq1}$ est convergente vers une limite $L \leq 1$.
- que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L.

b) Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules:
$P(N_{k+1} = 0 / N_1 = 1) = P(N_k = 0)$; $P(N_{k+1} = 0 / N_1 = j) = (P(N_k = 0))^j$.
c) En déduire l'expression de $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0)$ en fonction de p_k, préciser p_o, et, à l'aide des résultats de la partie I, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.
On discutera et interprétera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.
d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 instants tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est égale à 0,5 d'abord, à 0,25 ensuite.

3°) Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k.

On convient d'appeler "espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$", et de noter $E(N_{k+1} / N_k = i)$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'événement $N_k = i$ réalisé, autrement dit l'espérance définie comme suit (si elle existe):

$$(*) \qquad E(N_{k+1} / N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j / N_k = i).$$

a) On suppose l'événement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la $k^{\text{ième}}$ vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geq 1$.
En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ et vérifier que $E(N_{k+1} / N_k = i) = i\lambda p$.

b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Etablir que:

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i).E(N_{k+1} / N_k = i).$$

En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles Σ dans le calcul *(ce résultat technique sera approfondi plus loin, dans la dernière question)*, établir l'existence de l'espérance $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et de l'espérance $E(N_k)$.

c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la $n^{\text{ième}}$ vague incluse.

e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués au 2°(d)?

4°) <u>Appendice: le théorème de Fubini sur les séries doubles $\Sigma\Sigma v_{ij}$.</u>

Dans cette question indépendante des précédentes, on se propose de justifier la permutation des symboles Σ faites dans la question II.3.

A cet effet, on donne pour tout couple (i, j) de $\mathbf{N}^2$ un nombre réel positif v_{ij}, et l'on note (sous réserve de convergence) pour tout couple (i, j) de $\mathbf{N}^2$:

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij} \quad ; \quad B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}.$$

On se propose donc d'établir l'égalité suivante:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}\right)$$

l'existence de l'un des deux membres impliquant alors l'existence de l'autre.

a) On suppose que les séries définissant les nombres A_i sont convergentes, et que la série ΣA_i est convergente. Etablir pour tout couple (p, q) de $\mathbf{N}^2$:

$$\sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{i=0}^{p} v_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q} v_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right).$$

En déduire la convergence des séries définissant les nombres B_j et, en faisant tendre p vers $+\infty$, en déduire la convergence de la série ΣB_j, puis l'inégalité:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{ij}\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{ij}\right).$$

b) Quel résultat analogue peut-on obtenir en permutant les hypothèses portant sur les nombres A_i et B_j? Quelle conclusion en tire-t-on?

c) Si X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans **N**, préciser enfin sous quelles hypothèses il est licite d'écrire que:

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i).E(Y / X = i).$$

***

ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

Option scientifique

Mathématiques II

Mardi 18 Mai 1999 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objectif de ce problème est l'étude de la modélisation de l'accroissement d'une population, tant par les naissances que par l'immigration.
Cette étude est effectuée dans la partie II, tandis que, dans la partie I, on établit un résultat probabiliste préliminaire.
Dans tout le problème enfin, on admettra que l'on a pour tout couple de nombres réels (α, x) tel que $\alpha > 0$ et $0 \leq x < 1$ la formule suivante, dite *formule du binôme généralisée* :

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \ \dots \ + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}x^n + \ \dots$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}x^n.$$

On explicitera, à l'aide de cette formule, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k-1}^{k-1} x^n$ pour $0 \leq x < 1$.

Quelles formules classiques reconnaît-on pour $\alpha = 1$ et 2?

Partie I

On étudie dans cette partie une loi de probabilité, dite *loi binomiale négative*.
On considère une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité p $(0 < p < 1)$.
Pour tout nombre entier $k \geq 1$, on désigne par X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de l'épreuve où intervient le $k^{\text{ième}}$ succès (et X_k prend donc des valeurs supérieures ou égales à k).

ESSEC
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL. : 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01

a) On suppose $k = 1$. Préciser la loi de X_1, la probabilité $P(X_1 = n+1)$ pour tout nombre entier naturel n et l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.
b) On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir k-1 succès en $n+k$-1 épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n+k)$ pour tout nombre entier naturel n.
c) A l'aide de la formule du binôme généralisée donnée plus haut, vérifier alors que la série $\Sigma P(X_k = n+k)$ a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ de la variable aléatoire X_k en fonction de p et k.
Comment peut-on interpréter ce dernier résultat?
On dit alors que la variable aléatoire X_k suit la loi binomiale négative de paramètres p et k.

Partie II

On étudie dans cette partie la croissance d'une population au cours du temps. A cet effet, on introduit pour tout nombre réel positif t la variable aléatoire $X(t)$ indiquant le nombre des individus de la population à l'instant t, et l'on suppose que l'on a $X(0) = k$, autrement dit que la population compte k individus ($k \geq 0$) à l'instant initial $t = 0$.

1°) Croissance de la population par les naissances ($k > 0$).
On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif λ tel que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$ (où la notation $P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement "$X(t+h) < n+k$" sachant "$X(t) = n+k$").

$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \lambda(n+k)h + h\varepsilon'_n(h)$

$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité pour qu'une naissance se produise pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h et au nombre $n+k$ des individus présents à l'instant t, et qu'enfin la probabilité pour que plusieurs naissances se produisent pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'une seule naissance.
On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:
$$P(X(t+h) = k) = (1-\lambda kh)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$
où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $p_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:
$$p'_k(t) = -\lambda k p_k(t).$$
On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_k.
b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\lambda kt)p_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $p_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de k, λ et t.
c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:
$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\lambda(n+k)h)P(X(t) = n+k) + \lambda(n+k-1)hP(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$
où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
En déduire que la fonction définie par $p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour k $\geq$ 1 et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:
$$p'_{n+k}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$
On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction p_{n+k}.

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\lambda(n+k)t)p_{n+k}(t)$ et en déduire par récurrence sur n le résultat suivant:

$$p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^n.$$

e) Reconnaître à l'aide des résultats de la partie I la loi de la variable aléatoire $X(t)$ et déterminer son espérance $E(X(t))$ en fonction de λ, k et t.

2°) <u>Croissance de la population par l'immigration.</u>

On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif μ tel que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$

$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \mu h + h\varepsilon'_n(h)$

$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée h (mais indépendante du nombre $n+k$ des individus déjà présents à l'instant t), et qu'enfin la probabilité d'arrivée de plusieurs immigrés pendant une courte durée h est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul immigré.

On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h) = k) = (1-\mu h)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$

où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q'_k(t) = -\mu q_k(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_k.

b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $q_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de μ et t.

c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\mu h)P(X(t) = n+k) + \mu h P(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour $k \geq 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction q_{n+k}.

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1, 2,$ et 3, puis dans le cas général.

e) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $X(t)-k$ et donner l'espérance $E(X(t))$ en fonction de μ, k et t.

3°) <u>Croissance de la population par les naissances et l'immigration.</u>

On suppose dans cette question qu'il existe deux nombres réels strictement positifs λ et μ tels que l'on ait pour tout couple (t, h) de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel n:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$

$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = [\lambda(n+k)+\mu]h + h\varepsilon'_n(h)$

$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable h (indépendantes de t) tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.
Ces hypothèses font la synthèse de celles ayant été introduites dans les questions 1 et 2. On précisera dans ce contexte la probabilité conditionnelle $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir que la fonction définie par $r_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en t est:

$$r'_k(t) = -(\lambda k+\mu)r_k(t).$$

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction r_k.

b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp[(\lambda k+\mu)t]r_k(t)$, puis en déduire l'expression de $r_k(t)$ en fonction de k, λ, μ et t.

c) Etablir plus généralement que la fonction définie par $r_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour $k \geq 1$ et donner l'expression de sa dérivée à droite en t.

On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction r_{n+k}.

d) En déduire le résultat suivant:

$$r_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = \frac{(\lambda k+\mu)(\lambda(k+1)+\mu)\dots(\lambda(k+n-1)+\mu)}{\lambda^n \, n!} e^{-(\lambda k+\mu)t}(1-e^{-\lambda t})^n.$$

e) En posant $\mu = \rho\lambda$ dans la formule ci-dessus, montrer à l'aide de la formule du binôme généralisée que la série $\Sigma(P(X(t) = n+k)$ a pour somme 1 (autrement dit que $X(t)$ est une variable aléatoire) et déterminer l'espérance $E(X(t))$ en fonction de λ, μ, k et t.

***

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

ABC_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
AB_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».
On définit de façon analogue les événements BC_n et CA_n.
A_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
On définit de façon analogue les événements B_n et C_n.
$\varnothing_n$: « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, $\varnothing_0$ l'événement impossible.

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

PARTIE I

On détermine dans cette partie I les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1°) Calcul de probabilités.

a) Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.

b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :

(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :

(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2°) Détermination de probabilités conditionnelles

a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n.
Dans la suite, on ne considérera donc que les événements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, $\varnothing_n$.

b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.

c) Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.

d) Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.

e) Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.

f) Expliciter $p(\varnothing_{n+1} / ABC_n)$, $p(\varnothing_{n+1} / BC_n)$ et $p(\varnothing_{n+1} / CA_n)$.

3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?

b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ \ldots \ \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n.$$

c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \ldots \cap CA_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \ \ldots \ \cap CA_n$).

d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \ldots \cap BC_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \ \ldots \ \cap BC_n$).

e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, et en déduire la probabilité $p(T = n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question a).

f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

4°) Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

a) Montrer que l'événement « A remporte le combat à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve » est impossible si $n = 1$, et montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si $n \geq 2$:

$$ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \ldots \cap CA_{n-1} \cap A_n \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \ \ldots \ \cap CA_{n-1} \cap A_n$).

b) Calculer la probabilité pour que A remporte le combat à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve ($n \geq 2$).

c) En déduire la probabilité pour que A remporte le combat (c'est à dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat).

d) Déterminer de même la probabilité pour que B remporte le combat.

e) Déterminer de même la probabilité pour que C remporte le combat.

PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent le combat en n'utilisant que les résultats des questions I.1° et I.2°.

1°) Expression de la matrice de transition M

a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(\mathrm{ABC}_n)$, $p(\mathrm{BC}_n)$, $p(\mathrm{CA}_n)$, $p(\mathrm{A}_n)$, $p(\mathrm{B}_n)$, $p(\mathrm{C}_n)$, $p(\varnothing_n)$.
Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

b) En déduire E_n en fonction de n, de M et E_0.

2°) Calcul des puissances de la matrice M

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix} \quad , \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4.
Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}.$$

b) Expliciter les matrices U et V telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}.$$

c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \ldots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3°) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :
- la *première* composante de V_1 vaut 1.
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1.
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3.
Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$.

b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X.
On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites.
Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n), $(I_3 + U + U^2 + \ldots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \ldots + VU^{n-1})$.

c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n).

d) Vérifier que les suites $(p(\mathrm{ABC}_n))$, $(p(\mathrm{BC}_n))$ et $(p(\mathrm{CA}_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(\mathrm{A}_n))$, $(p(\mathrm{B}_n))$, $(p(\mathrm{C}_n))$, $(p(\varnothing_n))$. Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A, B, C remportent le combat.

***

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante).
La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) <u>Covariance des variables aléatoires X et Y</u>

a) Exprimer $\mathrm{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $V(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X+Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

2°) <u>Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y</u>
On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y. Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

PARTIE II

1°) <u>Calculs préliminaires</u>

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$.
En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie deux nombres entiers p et n tels que $1 \leq p \leq n$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne simultanément et au hasard p jetons et on désigne alors par :

- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des p jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des p jetons tirés.

On note $E(X)$, $V(X)$ et $E(Y)$, $V(Y)$ les espérances et variances des variables aléatoires X et Y.

A] Dans cette partie A, on suppose que $\boldsymbol{p = 2}$ (autrement dit, on extrait deux jetons de l'urne et X et Y sont les variables aléatoires indiquant le plus petit et le plus grand des 2 numéros tirés).

A.2°) <u>Lois des variables aléatoires X et Y</u>

a) Quel est le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à j éléments ? à n éléments ?
En déduire les probabilités $P(Y \leq j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$, puis, en raisonnant de même, les probabilités $P(X \geq i)$ et $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).

b) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$.
En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

A.3°) <u>Espérances et variances des variables aléatoires X et Y</u>

a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.

b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

A.4°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Montrer que la probabilité $P(X=i \cap Y=j)$ est égale à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[X(Y-2)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

B] Dans cette partie B, on revient au cas général et le nombre entier p vérifie donc $1 \leq p \leq n$.

B.5°) Lois des variables aléatoires X et Y

a) Déterminer $P(Y \leq j)$ et $P(Y=j)$ pour $p \leq j \leq n$, $P(X \geq i)$ et $P(X=i)$ pour $1 \leq i \leq n-p+1$

b) Comparer les lois de $n+1-X$ et Y et en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

B.6°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier l'égalité $jC_{j-1}^{p-1} = pC_j^p$ et en déduire les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.

b) Vérifier l'égalité $(j+1)jC_{j-1}^{p-1} = (p+1)pC_{j+1}^{p+1}$ et en déduire sous forme factorisée $E[(Y+1)Y]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

B.7°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Expliciter la probabilité $P(X=i \cap Y=j)$ pour $p \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j-p+1$.

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[(Y+1)(Y-X)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)[(p+1)n+p]}{(p+2)(p+1)}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

C] Dans cette partie C, on suppose à nouveau $\boldsymbol{p = 2}$ et on se propose de retrouver les résultats du II.A par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X=i \cap Y=j)$.

C.8°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X, Y), définie par :

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(X=i \cap Y=j)(1+u)^i(1+v)^j.$$

a) Montrer que $\dfrac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

Donner des égalités analogues pour $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$.

b) Montrer, en posant $w = u + v + uv$, c'est à dire $1+w = (1+u)(1+v)$, qu'on a pour u, v, $w \neq 0$:

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v}\right].$$

En développant ci-dessus $(1+w)^n$ et $(1+v)^n$, quelle expression de $G(u, v)$ en déduit-on?

c) Préciser les deux dérivées partielles $\partial w/\partial u$ et $\partial w/\partial v$ et retrouver $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$, $E(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et enfin le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

***

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Lundi 6 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'objectif du problème est d'étudier parmi les portefeuilles boursiers de rentabilité moyenne donnée ceux qui font courir à leurs porteurs un risque minimal en un sens qui sera précisé plus loin.

On identifie dans la suite tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, soit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et ${}^t x$ désigne alors la matrice transposée de x, autrement dit la matrice-ligne égale à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
On note enfin $< . , . >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n$ par :

$$< x , y > = {}^t x y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL : 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

PRELIMINAIRE

On rappelle que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est la partie $F^\perp$ de $\mathbb{R}^n$ qui est formée des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F, c'est à dire :

$$F^\perp = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;/\; \langle a, x\rangle = 0 \text{ pour tout vecteur } a \text{ appartenant à } F \,\}.$$

a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b) On suppose F de dimension p $(0 \leq p \leq n)$ et on considère une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F que l'on complète en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, ensemble des combinaisons linéaires de $e_{p+1}, \dots, e_n$.
En déduire la dimension de $F^\perp$ en fonction de la dimension de F.

c) Déterminer de même l'orthogonal de $F^\perp$.
En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$ où $(F^\perp)^\perp$ est l'orthogonal de $F^\perp$.

PARTIE I

On désigne par $C = (c_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n et par Q la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \langle x, Cx\rangle$, autrement dit par $Q(x) = {}^t xCx$. On suppose de plus que $Q(x) = {}^t xCx > 0$ pour tout vecteur *non nul* x de $\mathbb{R}^n$.

1°) Exemple d'une telle matrice

On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $n = 3$ avec :

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer ${}^t xC_0x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que ${}^t xC_0x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$ (on calculera ${}^t xC_0x - (x_1 + x_2 + x_3)^2$).

c) Montrer que C_0 est inversible et déterminer la matrice inverse de C_0.

d) Calculer ${}^t xC_0^{-1}x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

e) Montrer que ${}^t xC_0^{-1}x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$.

2°) Inversibilité de la matrice C

a) Vérifier, pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, que ${}^t xCy$ est un nombre réel et que :

$${}^t xCy = {}^t yCx.$$

b) On considère un vecteur x appartenant au noyau de C, c'est à dire tel que $Cx = 0$.
Montrer que ${}^t xCx = 0$ et en déduire que la matrice C est inversible.

c) Montrer C^{-1} est une matrice symétrique réelle d'ordre n, autrement dit que ${}^t(C^{-1}) = C^{-1}$.
(On pourra transposer l'égalité $CC^{-1} = C^{-1}C = I_n$ où I_n désigne la matrice-identité d'ordre n).

d) En posant $x = Cy$, montrer que ${}^t xC^{-1}x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.
Etablir l'égalité suivante dans laquelle u, v sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad {}^t(u+\lambda v)\, C^{-1} (u+\lambda v) = {}^t uC^{-1}u + 2\lambda\, ({}^t uC^{-1}v) + \lambda^2\, ({}^t vC^{-1}v).$$

Préciser le signe de ce trinôme du second degré en λ et prouver l'inégalité suivante :

$$({}^t uC^{-1}v)^2 < ({}^t uC^{-1}u)({}^t vC^{-1}v).$$

3°) Condition pour que $Q(x) \leq Q(x+h)$ lorsque $\langle u, h\rangle = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel λ, que :

$$Q(x+\lambda h) = Q(x) + 2\lambda\langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h).$$

b) On suppose que $Q(x) \leq Q(x+h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$.

- Etablir l'inégalité suivante pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad 2\lambda \langle h, Cx\rangle + \lambda^2 Q(h) \geq 0.$$

- En déduire que $\langle h, Cx\rangle = 0$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h\rangle = 0$.
- En déduire que Cx est colinéaire au vecteur u, c'est à dire que x est colinéaire à $C^{-1}u$.

c) Etablir inversement, si Cx est colinéaire à u, que $Q(x) \leq Q(x+h)$ si $<u, h> = 0$.
d) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc $Cx = \alpha u$.
- Montrer que $\alpha = a <u, x>$ où a désigne un nombre réel dépendant de u et C^{-1} tel que $a > 0$.
- Montrer que $Q(x) = a(<u , x>)^2$.

4°) Condition pour que $Q(x) \leq Q(x+h)$ lorsque $<u, h> = <v, h> = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u et v deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.
a) On suppose que $Q(x) \leq Q(x+h)$ pour tout vecteur h tel que $<u, h> = <v, h> = 0$.
- Etablir comme précédemment que $<h, Cx> = 0$ pour tout vecteur h tel que $<u, h> = <v, h> = 0$.
- En déduire que Cx appartient à Vect(u, v), c'est à dire que x appartient à Vect($C^{-1}u$, $C^{-1}v$).

b) Etablir inversement, si Cx appartient à Vect(u, v), que $Q(x) \leq Q(x+h)$ si $<u, h> = <v, h> = 0$.
c) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc $Cx = \alpha u + \beta v$.
- Montrer que les nombres réels α et β sont solutions du système suivant :
$$\begin{cases} \alpha\, {}^t u C^{-1} u + \beta\, {}^t u C^{-1} v = < u , x > . \\ \alpha\, {}^t v C^{-1} u + \beta\, {}^t v C^{-1} v = < v , x > . \end{cases}$$
- Montrer que ce système admet une solution unique, et que celle-ci est de la forme suivante :
$$\begin{cases} \alpha = a < u , x > - b < v , x > \\ \beta = - b < u , x > + c < v , x > \end{cases}$$
où a, b, c désignent trois nombres réels dépendant de u, v et C^{-1} tels que $a > 0$ et $c > 0$.
- Montrer que $Q(x) = a(<u , x>)^2 - 2b<u , x><v , x> + c(<v , x>)^2$.

PARTIE II

5°) Covariance des variables aléatoires X et Y

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (ce qui signifie, avec une probabilité égale à 1, que la variable aléatoire X n'est pas constante).
La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par $\text{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ ou encore $E(XY) - E(X)E(Y)$.

a) Etablir la formule suivante pour tout nombre réel λ :
$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$
b) En considérant le signe de ce trinôme du second degré en λ, en déduire que :
$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$
Etablir de plus que $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tels qu'on ait $\lambda X + Y = \mu$ avec une probabilité égale à 1.
c) En déduire que le coefficient de corrélation ρ des variables aléatoires X, Y appartient à $[-1, +1]$, puis préciser à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

On considère pendant une période donnée un marché financier où coexistent n actifs financiers notés $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ces actifs sont détenus positivement ou négativement (ce qui signifie alors qu'ils sont vendus à découvert)[1] au sein de portefeuilles qu'on ne modifie pas dans la période.
On désigne par $R_1, R_2, \dots, R_n$ les n variables aléatoires qui représentent les taux de rentabilité des actifs $A_1, A_2, \dots, A_n$ au cours de la période considérée (ce qui signifie qu'une unité monétaire de l'actif A_i donne un gain aléatoire R_i à la fin de la période). On suppose que ces n variables aléatoires $R_1, R_2, \dots, R_n$, qui sont définies sur un même espace probabilisé, admettent :
* des espérances $E(R_1) = m_1$, $E(R_2) = m_2$, ... , $E(R_n) = m_n$ supposées non toutes égales.
* des variances $V(R_1) = \sigma_1^2$, $V(R_2) = \sigma_2^2$, ... , $V(R_n) = \sigma_n^2$ supposées strictement positives.

[1] Cette situation se produit notamment dans le cadre des marchés à réglements mensuels.

6°) Etude des portefeuilles dans le cas $n = 2$

(Cette question est sans influence sur les suivantes qui peuvent être abordées indépendamment).

On considère ici un portefeuille contenant les actifs A_1 et A_2 en proportions respectives x et $1-x$. La variable aléatoire R indiquant le taux de rentabilité du portefeuille est alors $R = xR_1 + (1-x)R_2$. On note ρ le coefficient de corrélation des variables aléatoires R_1, R_2, supposé tel que $-1 < \rho < 1$.

a) Exprimer l'espérance $E(R)$ et la variance $V(R)$ en fonction de x, m_1, m_2, σ_1, σ_2 et ρ.

b) Etablir, si $m_1 \neq m_2$, qu'il existe des nombres réels a, b, c avec $a > 0$ et $c > 0$, indépendants de x (c'est à dire indépendants de la composition du portefeuille) tels qu'on ait $V = a - 2bm + cm^2$ où $V = V(R)$ et $m = E(R)$ désignent respectivement la variance et l'espérance de R.

7°) Matrice de variances-covariances des variables aléatoires $R_1, \dots, R_n$

On désigne par C la matrice symétrique réelle dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne (où $1 \leq i, j \leq n$) est la covariance $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ des variables aléatoires R_i et R_j.

a) Etablir, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique :

$$V(\sum_{i=1}^{n} x_i R_i) = {}^t xCx.$$

b) En déduire qu'on a ${}^t xCx \geq 0$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $R_1, R_2, \dots, R_n$ pour que ${}^t xCx > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

On supposera désormais cette condition bien vérifiée par $R_1, R_2, \dots, R_n$ et on posera $Q(x) = {}^t xCx$.

8°) Etude des portefeuilles efficaces dans le cas général

On étudie ici un portefeuille contenant les actifs $A_1, A_2, \dots, A_n$ en proportion $x_1, x_2, \dots, x_n$. La variable aléatoire R indiquant le taux de rentabilité de ce portefeuille au cours de la période considérée est alors $R = x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n$.

Ce portefeuille est dit efficace s'il est de variance minimale parmi tous les portefeuilles dont l'espérance de gain $E(R) = m$ est donnée (en effet, la variance constitue ici un risque pour le gain de l'investisseur qu'il importe donc de minimiser).

a) Montrer que le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ considéré ci-dessus vérifie :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad \text{et} \quad m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = m.$$

b) Montrer que le portefeuille considéré ici est efficace si et seulement si on a $Q(x) \leq Q(x + h)$ pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^n$ de composantes $h_1, h_2, \dots, h_n$ telles que :

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 0 \quad \text{et} \quad m_1h_1 + m_2h_2 + \dots + m_nh_n = 0.$$

c) Etablir à l'aide de I.4 qu'il existe des nombres réels a, b, c avec $a > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$V = a - 2bm + cm^2$$

où $V = V(R)$ et $m = E(R)$ désignent respectivement la variance et l'espérance de R.

d) Déterminer la nature de la courbe représentative de cette fonction associant la variance V à l'espérance m et représenter celle-ci (on rappelle que $a > 0$ et $c > 0$, et on supposera $b > 0$). Expliquer pourquoi seuls les portefeuilles dont l'espérance m et la variance V appartiennent à la portion de cette courbe telle que $m \geq b/c$ sont intéressants pour les investisseurs (et c'est cette portion de la courbe qui est la "frontière efficace" de Markowitz, du nom de l'économiste qui a reçu le prix Nobel en 1990).

***

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Lundi 12 mai 2003 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème étudie les rudiments de la théorie de la communication *introduite en 1948 par Claude Shannon.*
Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

Partie I *Introduction informatique*

On rappelle que les entiers compris entre 0 et 31 s'écrivent avec au plus 5 chiffres en binaire, on a donc :
Pour tout $n \in [0,31] \cap \mathbb{N}$, il existe une liste $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ d'éléments de $\{0,1\}$ telle que
$n = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + a_3.2^3 + a_4.2^4 = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}^{\text{deux}}$.
Cette écriture de n est unique et on appellera `bin(n)` *la liste $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$.*

I.1°) Déterminer l'écriture binaire de 6 puis `bin(6)` et déterminer `bin(21)` (on justifiera les résultats).

I.2°) On souhaite écrire une procédure PASCAL pour obtenir `bin(n)`. Compléter la procédure suivante de sorte qu'à l'issue de l'exécution de `bin(n)` on ait un tableau L tel que L[1] contienne a_4, L[2] contienne a_3 *etc* :

```
Type ecriture = array[1..5] of integer

Procedure bin(n : integer; var L : ecriture)
var i,          : integer                  (*à compléter éventuellement*)
begin
     for i:=1 to 5 do L[i]:=0;
     (* à compléter*)
end;
```

I.3°) On souhaite numéroter les cartes d'un jeu standard de 32 cartes. On propose ci-après la procédure `carte` (qui utilise la procédure `bin` précédente) .

Remarque : `string` désigne les chaînes de caractères (entre deux apostrophes, on met une suite de caractères quelconques).

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

```
Procedure carte(n:integer)
var
  fam : array[1..4] of string;
  val : array[1..8] of string;
  famille,valeur : string ;
  L : array[1..5] of integer;
begin
 fam[1]:='trèfle'; fam[2]:= 'carreau'; fam[3]:='coeur', fam[4]:='pique';
 val[1]:='sept'; val[2]:='huit'; val[3]:='neuf'; val[4]:='dix';
 val[5]:='valet'; val[6]:='dame'; val[7]:='roi', val[8]:='as';
 L:=bin(n);
 famille:=fam[2*L[1]+L[2]+1];
 valeur:=val[4*L[3]+2*L[4]+L[5]+1];
 writeln (valeur,' de ',famille,' est la carte numéro ',n);
end;
```

Quelle est la carte numéro 6 ? Qui est le numéro 1 ? Quel est le numéro de la dame de cœur ?

Partie II *Position du problème et recherche des fonctions solutions*

*On cherche à définir une mesure de l'*incertitude *d'un événement, c'est-à-dire, définir, pour un événement A de probabilité non nulle, un nombre réel $i(A)$, appelé l'*incertitude de A *ou* entropie de A, *en respectant le modèle suivant :*

(i) Pour l'événement certain Ω, l'incertitude est nulle : $i(\Omega) = 0$.
(ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
(iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$ alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.
(iv) Si $P(A) = P(B) \neq 0$ alors $i(A) = i(B)$.

Le dernier axiome (iv) signifie que $i(A)$ ne dépend que du réel $p = P(A)$.

II.1°) Soit φ une fonction définie sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i_\varphi(A) = \varphi(P(A))$.

Montrer que si φ vérifie les conditions :

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1/2) = 1 \tag{1}$$

$$\text{Pour tout } p \in]0,1] \text{ et tout } q \in]0,1] \quad \varphi(pq) = \varphi(p) + \varphi(q) \tag{2}$$

alors i_φ vérifie (i),(ii),(iii) et (iv).

II.2°) Existe-t-il des réels α et β pour lesquels $\varphi_{\alpha,\beta} : x \mapsto \alpha \ln(x) + \beta$ vérifie (1) et (2) ?

II.3°) Soit $\varphi :]0,1] \to \mathbb{R}$ une $\boxed{\text{fonction continue sur }]0,1] \text{ et vérifiant (1) et (2)}}$.

a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que pour tout $p \in]0,1]$:

$$\frac{1}{p}\int_{p/2}^{p} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\varphi(p) + \int_{1/2}^{1} \varphi(q)\mathrm{d}q$$

b) En déduire que φ est dérivable sur $]0,1]$ et, en dérivant $p \mapsto p\varphi(p)$, démontrer que :

$$\forall p \in]0,1], \qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p\varphi'(p) + \int_{1/2}^{1} \varphi(q)\mathrm{d}q$$

c) En déduire qu'il existe alors (α, β) tel que $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$ (*on pourra considérer l'expression de $\varphi'(p)$ en fonction de p*).

II.4°) Que peut-on conclure de cette étude ?

Partie III *Incertitude des événements*

Dans toute la suite du problème , on notera φ la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $\boxed{i(A) = \varphi(P(A))}$.

III.1°) On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur » . Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

III.2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des entiers s'écrivant avec au plus n chiffres en binaire. On choisit un élément de E au hasard et A est l'événement « le nombre obtenu est 0 » .
Quel est le cardinal de E? Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

III.3°) Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

III.4°) Que vaut $\lim_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat?

Partie IV *Incertitude d'une variable aléatoire discrète*

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par

$$h(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \in]0,1], \quad h(x) = -x\,\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire réelle X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

$H(X)$ est l'*incertitude moyenne* - ou *entropie* - de X.
Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

IV.1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?

IV.2°) Si on suppose $P(Y = 1) = 1/4$, $P(Y = 2) = 1/4$ et $P(Y = 3) = 1/2$, que vaut $H(Y)$?
Classer par ordre croissant $H(U_2)$, $H(U_3)$ et $H(Y)$.

IV.3°) Vérifier que h est continue et positive sur $[0,1]$.
Est-elle dérivable en 0? Étudier h et dessiner sa courbe représentative .

IV.4°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.
Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.

IV.5°) Pour $x \in [0,1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1-x)$.

a) Pour $x \in [0,1]$, on a clairement $h_2(x) = h_2(1-x)$. Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé?
b) Étudier h_2 et donner son graphe.
c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Montrer que $H(X) \leqslant 1$ avec égalité si, et seulement si, $p = 1/2$.

IV.6°) Soit X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_1 et p_2.
Soit Z la variable de Bernoulli telle que $P(Z = 1) = P($« $X_1 + X_2$ est impair » $)$.
Donner la loi et l'espérance de Z. En notant $p = P(Z = 1)$, contrôler $(1 - 2p) = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$.

IV.7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable de Bernoulli telle que $P(Z_n = 1) = P($« X est impair » $)$.
Montrer que $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ (*on pourra raisonner par récurrence*).
Montrer que $H(Z_n) \leqslant 1$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité?

Partie V *Maximalité de l'entropie*

V.1°) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

a) Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) \in]0,1[^{n-1}$ vérifiant $1-p_1-p_2-\ldots-p_{n-1} > 0$. **On admettra** que $\mathcal{O}$ est un ouvert.

Pour $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) \in \mathcal{O}$, on pose $h_n(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k) + h(1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{n-1})$.

Montrer que h_n admet au plus un extremum sur $\mathcal{O}$.

b) On rappelle que si une fonction f est convexe sur un intervalle I, alors on a :

$$\text{pour tout } (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

Vérifier que $-h$ est convexe sur $]0,1]$ et en déduire :

$$\text{si } (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in]0,1]^n \text{ et } p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{n} h(p_k) \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

c) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Montrer que : $H(X) \leqslant \ln(n)/\ln(2)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la loi uniforme sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

V.2°) Soit $p \in]0,1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $m = E(G)$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = P(G = k)$.

a) Rappeler la valeur de m, montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$. En justifiant rapidement que

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \tag{3}$$

vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(p_k) - \ln(q_k) \leqslant \frac{p_k}{q_k} - 1$

et établir : $H(X) \leqslant H(G)$ avec égalité si, et seulement si, X suit la même loi que G.

Partie VI *Incertitude d'une variable aléatoire continue*

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, on dit que X admet une *incertitude* quand l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))\mathrm{d}x$ converge.

Dans ce cas, la valeur de l'intégrale $H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x))\mathrm{d}x$ est appelée *incertitude* de X.

VI.1°) *Cas des lois normales*

a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que $H(Y_0)$ existe et calculer $H(Y_0)$.

b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma > 0$. Montrer que $H(Y)$ existe et calculer $H(Y)$.

VI.2°) Soit $\lambda > 0$ et X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On désignera par f_0 la densité de X_0.

a) Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant une densité f. On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Montrer que :

$$H(X_0) = -\frac{1}{\ln(2)}\int_0^{+\infty} f(x)\,\ln(f_0(x))\mathrm{d}x$$

En utilisant (3) montrer que $H(X) \leqslant H(X_0)$.

ESSEC

MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2004

Option scientifique

MATHÉMATIQUES II

Jeudi 6 mai 2004 de 8h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations de E_n. Pour tout ensemble fini A, on note card(A) son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k, le nombre $\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Partie I

Pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle *point fixe* de ω, tout élément $k \in E_n$ tel que $\omega(k) = k$.

On appelle *dérangement* toute permutation $\omega \in \Omega$ telle que pour tout $k \in E_n$, $\omega(k) \neq k$. Ainsi un dérangement est une permutation sans point fixe.

On note $D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n, \omega(i) \neq i\}$, et pour tout $k \in E_n$

$$D_{n,k} = \{\omega \in \Omega, \text{ tel que } \omega \text{ admette exactement } k \text{ points fixes}\}$$

Enfin, on note $d_{n,0} = \text{card}(D_{n,0})$ et pour tout $k \in E_n$, $d_{n,k} = \text{card}(D_{n,k})$.

1. Montrer que

$$D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subseteq E_n \\ \text{card}(I)=k}} \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \omega|_I = Id,\ \omega|_{E_n \setminus I} \text{ est un dérangement}\}$$

où $\omega|_I$ est la restriction de la permutation ω à I, Id représente la permutation identité, et $\omega|_{E_n \setminus I}$ est la restriction de la permutation ω au complémentaire de I.

2. En déduire que pour tout $k \in E_n$, $d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$.

ESSEC MBA
AVENUE BERNARD HIRSCH - BP 105
95021 CERGY-PONTOISE CEDEX FRANCE
TÉL. : 33 (0) 1 34 43 30 00
FAX : 33 (0) 1 34 43 30 01
WEB : WWW.ESSEC.FR

ESSEC
ÉTABLISSEMENT PRIVÉ D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
RECONNU PAR L'ÉTAT. MEMBRE DE LA FESIC.

ESSEC ACTING FIRST
agir en pionnier

ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVÉS D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCRÉDITÉS AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR MANAGEMENT EDUCATION.
ACCRÉDITÉS EQUIS - THE EUROPEAN QUALITY IMPROVEMENT SYSTEM
AFFILIÉS A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE VERSAILLES VAL D'OISE - YVELINES.

3. a) Soit $\omega \in \Omega$ un dérangement de E_n. Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On définit l'application $\widetilde{\omega_j}$ sur E_{n+1} par

$$\widetilde{\omega_j}(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{si } k \notin \{j, n+1\} \\ n+1 & \text{si } k = j \\ \omega(j) & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

Montrer que l'on définit ainsi un dérangement de E_{n+1}.

b) Soit $\omega \in \Omega$ admettant un unique point fixe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que $\widetilde{\omega_j}$ défini ci–dessus est un dérangement de E_{n+1}.

c) Montrer que les dérangements de E_{n+1} construits dans les questions 3.a) et 3.b) sont distincts, et que tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.

d) En déduire que $d_{n+1,0} = nd_{n,0} + d_{n,1} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0})$.

4. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = d_{n,0} - nd_{n-1,0}$$

a) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.

b) En déduire que $d_{n,0} = nd_{n-1,0} + (-1)^n$.

c) On pose $v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2, v_n = \dfrac{d_{n,0}}{n!}$. Déterminer v_n en fonction de n, puis montrer que

$$d_{n,0} = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b Euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B Euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, compris entre 1 et n et sont choisis *au hasard*.

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le «coût» d'une telle campagne.

Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme discrète P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la première partie, déterminer la loi de X_n.

b) Établir les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$$

(on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n (on pourra d'abord calculer $E[X_n(X_n - 1)]$).

3. a) Montrer que le coût aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n$$

En déduire le coût moyen $E(C_n)$, ainsi que le *risque*, donné par l'écart type $\sigma(C_n)$.

b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

4. Montrer que le gain aléatoire d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par $G_n = BY_n - b$, où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

2. Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leqslant \frac{2}{m!}$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

5. On considère les instructions Pascal suivantes :

```
eps := 0.00001 ;
x := 2 ;
k := 2 ;
While x > eps/2 do
  begin
  x := x*(2/k) ;
  k := k+1
  end ;
writeln(k)
```

a) On entre dans la boucle `While` avec $x = 2$. On suppose qu'on est passé $j \geqslant 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ est décroissante et admet une limite que l'on calculera.

c) En déduire que la boucle `While` ci–dessus se termine.

d) La valeur affichée par la dernière ligne du programme est 11. Que représente-t-elle ?

Partie IV

Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle moment factoriel d'ordre $k \geqslant 1$, l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)\cdots(X-k+1)$, soit

$$m_k(X) = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$$

1. Montrer que si $k \geqslant n+1$, alors $m_k(X_n) = 0$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que

$$m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k} = j) = 1$$

3. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer $m_k(Z)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

4. On définit des polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1) \quad (k \geqslant 1) \end{cases}$$

a) Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

b) En déduire que X_n et Z ont les mêmes moments d'ordre k, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

5. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $(a_{0,k}, a_{1,k}, \ldots, a_{k,k})$ réels tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}$$

6. On souhaite désormais calculer les réels $(a_{0,k}, a_{1,k}, \ldots, a_{k,k})$.

a) Déterminer $\dfrac{P_j(i)}{j!}$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et $i \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour $i \in [\![0, k]\!]$, $i^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_{j,k}$.

c) Écrire la matrice A de ce système d'équations.

d) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k, écrire l'expression de l'endomorphisme représenté par A^T (transposée de la matrice A) dans la base canonique.

e) Montrer que A^T est inversible et déterminer son inverse

f) En déduire que la matrice A est inversible. Déterminer A^{-1}, puis l'expression de $a_{j,k}$, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$.

g) Donner l'expression des moments d'ordre k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, de la variable aléatoire X_n.

Partie V

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ, $(\ell \geqslant 1)$, exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$.

On note Y_n^ℓ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces ℓ exemplaires achetés.

Enfin, pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$.

1. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \cdots + 1_{A_{j_\ell}}$$

En déduire l'espérance $E(Y_n^\ell)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

2. a) Montrer que

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}} + \sum_{1 \leqslant i \neq k \leqslant \ell} 1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}$$

b) En déduire la variance de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

3. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\ell$.

b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.

c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

286
ESSECM2_S

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 16 mai 2005, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans ce problème, les variables aléatoires sont réelles et toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ représente une suite de variables aléatoires et, pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Préliminaires

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m.
Énoncer, *avec précision*, la loi faible des grands nombres pour la suite (X_n).

2. Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m-\delta, m+\delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right)$$

L'objet du problème est de préciser de manière quantitative les résultats ci-dessus.

I. Un premier exemple. Le cas gaussien

Dans cette partie, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Quelle est la loi de $\dfrac{S_n}{n}$?

2. Soit δ un réel strictement positif. Dans cette partie, on note exp la fonction exponentielle.

a) Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \delta\right) = 2P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \delta\right) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt$$

b) En posant $u = n(t-\delta)$, montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \delta\right) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \times \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right) \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du$$

3. a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - \exp(-x) \leqslant x$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta)\, du$ converge et la calculer.

c) Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta)\, du - \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta \right) du \right)$$

d) En déduire, lorsque n tend vers l'infini, un équivalent de $P\left(\left| \dfrac{S_n}{n} \right| \geqslant \delta \right)$.

II. Quelques résultats généraux

À l'instar des variables aléatoires discrètes, on admettra que si X, Y sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, admettant une espérance, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité). Pour tout $s \in \mathbb{R}$ telle que e^{sX} admet une espérance $E(e^{sX})$, on pose

$$\varphi(s) = E(e^{sX})$$

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(s)$ existe, on a $E(e^{s\frac{S_n}{n}}) = (\varphi(s/n))^n$.

2. Soit Y une variable aléatoire réelle et $s > 0$ tel que $E(e^{sY})$ existe.
a) Montrer que pour tout a réel, $1_{(Y \geqslant a)} \leqslant e^{s(Y-a)}$, où $1_{(Y \geqslant a)}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \geqslant a\}$.
b) En déduire que $P(Y \geqslant a) \leqslant e^{-as} E(e^{sY})$,
c) Montrer que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant a \right) \leqslant e^{-as} (\varphi(s/n))^n$.

3. Soit Y une variable aléatoire réelle et $s < 0$ tel que $E(e^{sY})$ existe.
a) Montrer que pour tout a réel, $1_{(Y \leqslant a)} \leqslant e^{s(Y-a)}$.
b) En déduire que $P(Y \leqslant a) \leqslant e^{-as} E(e^{sY})$, puis que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant a \right) \leqslant e^{-as} (\varphi(s/n))^n$.

III. Un second exemple. Le cas binomial

Dans cette partie, $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$. On rappelle que $P(X_1 = 1) = p$, $\quad P(X_1 = 0) = 1 - p = q$.

1. Calculer $\varphi : s \longmapsto \varphi(s)$ et déterminer son domaine de définition.
Soit a un réel fixé de $]0, 1[$.

2. On suppose dans cette question que $a > p$.
a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a : s \longmapsto as - \ln \varphi(s)$$

b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif $h(a, p)$ qu'on exprimera en fonction de a et p.

c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a \right) \leqslant e^{-n(\sup\limits_{t>0}(at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a,p)}$$

3. On suppose dans cette question que $a < p$, (donc $1 - a > 1 - p$).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-nh(1-a,1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Déduire des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-n\min(h(p+\varepsilon,p),h(p-\varepsilon,p))}$$

5. Soit α un réel de $]0,1[$. Montrer que, pour n assez grand, il est toujours possible de trouver deux réels a_1, a_2 tels que $0 < a_1 < p < a_2 < 1$ qui vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant a_1\right) \leqslant \dfrac{\alpha}{2} \\ P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant a_2\right) \leqslant \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

(on pourra étudier les variations de la fonction $a \mapsto h(a,p)$).

6. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p, $(0 < p < 1)$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n, $(n \geqslant 1)$, objets qu'il analyse.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet prélevé est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

a) Montrer que $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p.

b) Calculer le risque quadratique $r_n = E\left((F_n - p)^2\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

7. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1 - \alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

Déterminer en fonction de n, f_n, t_α un intervalle de confiance $[U_n, V_n]$ de p au niveau $1 - \alpha$.

IV. Le cas général

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

Pour tout réel t tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)du$ converge, on note

$$L_X : t \longmapsto E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)du$$

On supposera que L_X est défini sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant 0.

1. Soit $t \in]\alpha, \beta[$, et $\delta > 0$ tel que $[t - \delta, t + \delta] \subset]\alpha, \beta[$.

a) Montrer que pour tout u réel

$$|e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta^n |u^n|}{n!}$$

b) Montrer que, pour tout u réel

$$e^{tu}\left|e^{\delta u}-1-\delta u\right| f(u) \leqslant (e^{(t-\delta)u}+e^{(t+\delta)u})f(u)$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{tu}f(u)du$ converge, puis que X admet une espérance m.

2. Soit $t \in]\alpha,\beta[$, et $\delta > 0$ tel que $[t-\delta, t+\delta] \subset]\alpha,\beta[$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \delta$.

a) Montrer que, pour tout u réel,

$$\left|\frac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h}-ue^{tu}\right| f(u) \leqslant |h|e^{tu}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\delta^{n-2}|u|^n}{n!}f(u)$$

puis que

$$\delta^2\left|\frac{e^{(t+h)u}-e^{tu}}{h}-ue^{tu}\right| f(u) \leqslant |h|e^{tu}e^{\delta|u|}f(u)$$

b) Montrer que L_X est dérivable en t et que

$$L'_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{tu}f(u)du$$

On admettra (et on démontrerait de manière analogue) que la fonction L_X est de classe C^2 sur $]\alpha,\beta[$ et que pour tout $t \in]\alpha,\beta[$

$$L''_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{tu}f(u)du$$

3. On note $\psi(t)=\ln L_X(t)$.

a) Donner le domaine de définition de la fonction ψ.

b) Calculer ψ', ψ'', dérivées première et seconde de ψ.

c) En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, montrer que ψ' est strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$; en déduire que ψ' admet en α (respectivement β) une limite (finie ou infinie) qu'on notera $L_1(\alpha)$ (respectivement $L_1(\beta)$). Quelle est la valeur de $\psi'(0)$?

d) Montrer que ψ admet en α (respectivement β) une limite (finie ou infinie) qu'on notera $L_0(\alpha)$ (respectivement $L_0(\beta)$).

4. Soit a réel donné. Pour tout $t \in]\alpha,\beta[$, on pose : $\ell_a(t)=at-\psi(t)$.
Dresser le tableau de variations de la fonction ℓ_a (on distinguera trois cas : $a \geqslant L_1(\beta), a \leqslant L_1(\alpha)$ et $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$).

5. Pour tout a réel, on pose : $h(a)=\sup\limits_{t\in]\alpha,\beta[}\ell_a(t)$. On suppose désormais que $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.
Montrer que $h(a)=a(\psi')^{-1}(a)-\psi((\psi')^{-1}(a))$.

6. Montrer que si $a > m$,

$$h(a)=\sup_{t\in]0,\beta[}(at-\psi(t))$$

puis que si $a < m$

$$h(a)=\sup_{t\in]\alpha,0]}(at-\psi(t))$$

7. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
Montrer que si $a > m$, $P\left(\dfrac{S_n}{n}\geqslant a\right)\leqslant e^{-nh(a)}$, puis que si $a < m$, $P\left(\dfrac{S_n}{n}\leqslant a\right)\leqslant e^{-nh(a)}$.

8. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2e^{-n\min(h(m-\varepsilon),h(m+\varepsilon))}$$