Ecole des Hautes Etudes Commerciales 1978

1ère Composition de Mathématiques (4 h)

E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. E_1 est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée continue.

Le nombre n est un entier strictement positif.

PREMIÈRE PARTIE

A tout élément f de E_0, on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F_n(0) = f(0), \text{ et } F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t)\, dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

1° Que peut-on dire de F_n si f est paire ? si f est impaire ?

2° Calculer F_n lorsque $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, lorsque $f(x) = \sum_{p=0}^{m} a_p x^p$.

3° Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M, montrer alors que F_n a la même propriété.

4° Montrer que F_n appartient à E_0.

5° a) Montrer que, si f(x) tend vers 0 quand x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini), $F_n(x)$ a la même propriété. (On pourra considérer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[0, x_0] \cup [x_0, x]$; et pour tout x assez grand et x_0 bien choisi, majorer séparément deux intégrales.)

b) Etendre au cas où f(x) tend vers λ appartenant à $\mathbb{R}$.

c) Etendre au cas où f(x) tend vers plus l'infini.

6° Montrer que F_n admet une dérivée F'_n en tout point $x \neq 0$ et que

$$F'_n(x) = \frac{n}{x}\left[f(x) - F_n(x)\right].$$

SECONDE PARTIE

Désormais f appartient à E_1.

1° Montrer que F_n admet une dérivée en tout point. Calculer $F'_n(0)$ en fonction de n et de $f'(0)$.

2° Montrer que F_n appartient à E_1 et que T_n, défini par $T_n(f) = F_n$, est un endomorphisme de E_1.

3° T_n est-il injectif ? surjectif ? (on pourra étudier la dérivabilité de F'_n.)

4° On suppose désormais que f est la fonction de répartition d'un aléa numérique (ou variable aléatoire) X dont la densité de probabilité, notée φ, appartient à E_0. Ecrivant $F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}} h(x)$ pour $x \neq 0$, étudier les variations et le signe de h(x). En déduire que F_n est la fonction de répartition d'un aléa noté X_n, de densité de probabilité Φ_n.

5° Si $A \neq 0$, montrer que pour tout entier $p \in [1, n-1]$:

$$\int_0^A t^p \Phi_n(t)\, dt = \frac{n}{n-p} A^p \left[F_n(A) - F_p(A)\right] = \frac{n}{n-p}\left[\int_0^A t^p \varphi(t)\, dt - A^{p-n}\int_0^A t^n \varphi(t)\, dt\right].$$

6° On suppose de plus que, pour tout entier strictement positif p, il existe

$$M_p[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \varphi(t)\, dt \quad \text{(moment d'ordre p de X.)}$$

En déduire l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n, noté $M_p[X_n]$, pour tout $p < n$. Montrer que, si p reste fixe, le moment $M_p[X_n]$ a pour limite $M_p[X]$ lorsque n tend vers plus l'infini.

7° Montrer que la fonction de répartition de X_n est telle que, pour tout x fixé, sa valeur a pour limite la valeur de la fonction de répartition de X.

-FIN-

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979

Composition de Mathématiques

1re EPREUVE

Mardi 8 Mai 1979, de 8 heures à midi

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. On désigne par f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que, en tout point v de $]a, b[$, la fonction f admet une dérivée seconde $f''(v)$. On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$.

PREMIÈRE PARTIE

Soit Γ le graphe de f.

1° On désigne par T la tangente à Γ au point d'abscisse c.

a) Donner une équation de T sous la forme : $y = \tau(x)$.

b) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b \tau(x)\,dx$.

Dans la suite de la première partie, on suppose que, pour tout élément v *de* $]a, b[$, $f''(v) \geqslant 0$.

2° Etudier la variation de la fonction numérique ψ définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\psi(x) = f(x) - \tau(x).$$

En déduire le signe de $\psi(x)$.

3° Soit D la droite joignant les points de Γ d'abscisses a et b.

a) Donner une équation de D sous la forme :

$$y = \delta(x).$$

b) Etudier la variation de la fonction numérique θ définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\theta(x) = f(x) - \delta(x).$$

En déduire le signe de $\theta(x)$.

c) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx$.

4° Comparer deux à deux les nombres réels :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad J = (b-a)\,f(c) \qquad K = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$$

En déduire l'encadrement : $1 \leqslant \ln 3 \leqslant \dfrac{4}{3}$.

(Le symbole ln représente le logarithme népérien.)

.../...

DEUXIÈME PARTIE

1° Soient x un élément de [a, b] distinct de c et φ la fonction numérique définie sur [a, b] par la relation :

$$\varphi(t) = f(t) - f(c) - (t - c)\, f'(c) - \lambda\,(t - c)^2,$$

où λ est le nombre réel déterminé par la relation $\varphi(x) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ et à sa dérivée, montrer qu'il existe un élément v_0 de]a, b[tel que :

$$\lambda = \frac{1}{2} f''(v_0).$$

Retrouver ainsi le signe de $\psi(x)$, déjà étudié dans le 2° de la première partie.

2° On suppose qu'il existe un nombre réel positif M_2 tel que, pour tout élément v de]a, b[, $|f''(v)| \leqslant M_2$.

a) Montrer que, pour tout élément x de [a, b],

$$|f(x) - f(c) - (x - c)\, f'(c)| \leqslant \frac{M_2}{2}(x - c)^2.$$

b) En déduire que : $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b - a)\, f(c) \right| \leqslant \frac{M_2}{24}(b - a)^3.$$

Examiner le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.

TROISIÈME PARTIE

1° Calculer le nombre : $$\int_a^b f(x)\,dx - (b - a)\, f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}[f'(b) - f'(a)]$$

lorsque : a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = x^3$.

Généraliser les résultats obtenus au cas où f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 3$.

Dans la suite du problème, on désigne par ω un nombre réel strictement positif et par g une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-\omega, \omega]$. On suppose que g est impaire, c'est-à-dire que, pour tout élément t de $[-\omega, \omega]$, $g(-t) = -g(t)$. On suppose en outre que g est cinq fois dérivable sur $[-\omega, \omega]$, et que sa dérivée cinquième $g^{(5)}$ est continue.

2° Soit u un élément de $[-\omega, \omega]$.

a) On considére les fonctions numériques α et β définies sur $[-\omega, \omega]$ par les relations :

$$\alpha(t) = \frac{1}{24}(u - t)^4,$$

$$\beta(t) = \alpha(t)\, g^{(4)}(t) - \alpha'(t)\, g'''(t) + \alpha''(t)\, g''(t) - \alpha'''(t)\, g'(t) + \alpha^{(4)}(t)\, g(t).$$

Calculer la dérivée de β. En déduire la relation :

$$g(u) = ug'(0) + \frac{u^3}{6} g'''(0) + \frac{1}{24}\int_0^u (u - t)^4\, g^{(5)}(t)\,dt.$$

b) Etablir de même la relation :

$$g''(u) = ug'''(0) + \frac{1}{2}\int_0^u (u - t)^2\, g^{(5)}(t)\,dt.$$

c) Soit N_5 un nombre réel positif tel que, pour tout élément t de $[-\omega, \omega]$, $|g^{(5)}(t)| \leqslant N_5$.

Montrer que : $$\left| g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6} g''(u) \right| \leqslant \frac{N_5}{24} \left| \int_0^u (u - t)^2 (u^2 + 2ut - t^2)\,dt \right|.$$

Calculer l'intégrale : $$\int_0^u (u - t)^2 (u^2 + 2ut - t^2)\,dt.$$

3° On suppose que la fonction f est quatre fois dérivable sur [a, b] et que sa dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue. Soit M_4 un nombre réel positif tel que, pour tout élément x de [a, b], $|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4$.

En posant $t = x - c$ et $g(u) = \int_{-u}^{u} f(t + c)\,dt$, déduire de la question précédente la majoration :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b - a)\, f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}[f'(b) - f'(a)] \right| \leqslant \frac{7\, M_4}{5\,760}(b - a)^5.$$

Retrouver ainsi les résultats du 1° de la troisième partie.

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1980

Composition de Mathématiques (1 R)

1^re EPREUVE

Dans tout le problème on désigne par n un naturel strictement positif, par I l'intervalle $[-1, +1]$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour $x \in I$, on pose $T_0(x) = 1$ et $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$.

1° Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.

Prouver que T_n est un polynôme en x de degré n et calculer le coefficient de x^n. (On pourra poser $x = \cos \theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$).

2° Montrer que T_n, $n \in N^*$, admet exactement n racines réelles, distinctes, toutes dans l'intervalle I. On les note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en les classant par valeurs décroissantes. Expliciter x_j en fonction de l'angle $(\frac{2j-1}{n})\pi$.

3° Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur I.

a) Montrer que, pour tout $f \in E$, l'intégrale $\mathbf{J}(f) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ existe.

b) Calculer, à l'aide du changement de variable $x = \cos t$, les intégrales suivantes : $\mathbf{J}(1)$, $\mathbf{J}(T_n^2)$, $\mathbf{J}(T_n \cdot T_m)$ avec $m \neq n$.

c) Vérifier, rapidement, que les polynômes $T_0, T_1, \ldots, T_n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus n.

En déduire que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathbf{J}(T_n.P) = 0$. Que vaut $\mathbf{J}(T_n.P)$ si P est de degré n ?

DEUXIÈME PARTIE

On se donne dans cette partie n nombres réels distincts de I : $x_1, \ldots, x_n$.

On pose, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k}\right)$ et on note L'_j le polynôme dérivé de L_j. $\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (a_k) \text{ désigne le produit des nombres } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ excepté } a_j.\right)$

1° Calculer, en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$, le nombre réel $L_j(x_i)$.

2° Soit F l'application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $F(P) = (P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$. (On note P' le polynôme dérivé de P).

. . . / . . .

a) Vérifier que F est linéaire.

b) Montrer que le noyau de F est réduit au polynôme nul.

c) En déduire que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3° Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Utiliser la question précédente pour prouver qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus $2n-1$, que l'on note $\tilde{f}$, tel que :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \tilde{f}(x_j) = f(x_j) \ \text{et} \ \tilde{f}'(x_j) = f'(x_j).$$

4° Vérifier que :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j^2(x) + \sum_{j=1}^{n} [f'(x_j) - 2f(x_j) L_j'(x_j)] (x - x_j) L_j^2(x).$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie f est une fonction numérique $2n$ fois dérivable sur I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n points donnés distincts de I.

1° On suppose que f s'annule ainsi que sa dérivée f′ en chacun des x_i. On se donne $x \in I$ *distinct* des x_i et on définit une fonction φ par :

$\varphi(t) = f(t) - A(t-x_1)^2 (t-x_2)^2 \ldots (t-x_n)^2$ où la constante réelle A est déterminée par la *condition* $\varphi(x) = 0$.

a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que la dérivée φ' s'annule en au moins $2n$ points distincts de I.

b) En déduire que chaque dérivée d'ordre p, $\varphi^{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant 2n$, s'annule en au moins $2n - p + 1$ points distincts de I.

c) En déduire qu'il existe au moins un $c \in I$ tel que $f(x) = (x-x_1)^2 \ldots (x-x_n)^2 \dfrac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}$.

d) Est-ce encore vrai si $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

2° On ne suppose plus que f et f′ s'annulent nécessairement aux points x_i, et on adopte les notations du 3° de la deuxième partie. Montrer que :

$$(1) \qquad \forall x \in I, \ \exists c \in I, \ f(x) = \tilde{f}(x) + (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \ldots (x-x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Soit $f : I \to R$, une fonction $2n$ fois continûment dérivable sur I.

Dans cette partie, on choisit pour n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, le n-uple constitué des n racines du polynôme T_n.

Pour chaque $x \in I$ on fait choix d'un $c \in I$ satisfaisant à l'égalité (1) du 2° de la troisième partie.

1° *Montrer que, quel que soit* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_j) L_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. (On pourra utiliser le 3° c) de la première partie.)

En déduire que $\mathbf{J}(\tilde{f}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \mathbf{J}(L_j^2)$.

2° On pose $a_j = \mathbf{J}(L_j^2)$.

Montrer, à l'aide des parties II et III, qu'il existe un réel $d \in I$ tel que :

$$\mathbf{J}(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}.$$

3° On dit que la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j)$, notée $\tilde{\mathbf{J}}(f)$, est une valeur approchée de l'intégrale $\mathbf{J}(f)$.

Montrer que $\tilde{\mathbf{J}}(f) = \mathbf{J}(f)$ si f est un polynôme de degré au plus $2n - 1$.

N. B. — On peut démontrer, ce que l'on ne demande pas de faire, que les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont tous égaux à $\dfrac{\pi}{n}$.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1981

Composition de Mathématiques

1re EPREUVE

Vendredi 15 Mai 1981, de 8 heures à midi

Les trois parties sont indépendantes

On désigne par R_+ l'ensemble des réels positifs, R_- celui des réels négatifs, R_+^* celui des réels strictement positifs. On se donne $\alpha \in R_+^*$ et une application continue f de R_+ dans R_+^*.

PREMIÈRE PARTIE

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On suppose que F est continue, nulle sur R_-, dérivable sur R_+^*. On suppose, en outre, qu'on a la relation:

$$\forall\, t \in R_+^*, \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} P\,(X \leqslant t+h / X \geqslant t) = f(t)[\,P\,(X \leqslant t)\,]^{\alpha},$$

(on note $P(A)$ la probabilité de A, $P(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B).

1° Montrer que F vérifie : $\forall\, t \in R_+^*$, $F'(t) = f(t)[F(t)]^{\alpha}[1-F(t)]$ (1)

($F'(t)$ est la dérivée de F au point t).

2° Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$.

DEUXIÈME PARTIE

On désigne maintenant par F une application de R_+ dans $[0,1[$, dérivable sur R_+, vérifiant (1) et la condition supplémentaire: $x=0 \Leftrightarrow F(x)=0$.

1° Montrer que F est strictement croissante, et admet une limite finie $L \in\,]0,1]$ à l'infini.

2° Soit $x > 0$.

a) Montrer que l'application H définie sur $]0, x]$ par :

$$H(y) = \int_{F(y)}^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)} - \int_y^x f(t)dt$$ est dérivable sur $]0, x]$ et calculer $H'(y)$.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)}$ est convergente et vaut $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

En déduire que $\alpha < 1$.

c) Que dire de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$?

3° a) Montrer que, si α est rationnel, un changement de variable simple ramène le calcul de $\displaystyle\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)}$ à l'intégration d'une fraction rationnelle.

b) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que $F(x) = \text{th}^2\left(\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)$. Examiner le cas où $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

4°) Soit $G :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2(1-t)}$.

a) En calculant $G(x) - \int_0^x \frac{dt}{t^2}$, et en utilisant l'identité $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$,

donner un développement limité, en 0, à l'ordre n, de $x^{\alpha-2} G(x) - \frac{1}{x(1-x)}$.

b) En déduire, si $f(0) \neq 0$, un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 0.

5°) Montrer les inégalités :

$$\forall x \in]0, 1[, \ \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) \leqslant G(x) < \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x}.$$

En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'encadrement :

$$1 - e^{\frac{1}{1-x} - \int_0^x f(t)\,dt} < F(x) \leqslant 1 - e^{-\int_0^x f(t)\,dt}.$$

6°) Montrer que, si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, F est la restriction à $\mathbb{R}_-$ de la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

TROISIÈME PARTIE

Soit x_0 fixé dans $]0, 1[$. On étudie dans cette partie la fonction g de la variable réelle z définie par :

$$g(z) = \int_0^{x_0} \frac{t^z\,dt}{1-t}.$$

1°) Montrer que le domaine de définition de g est $]-1, +\infty[$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, et plus généralement $g(n)$ pour n entier naturel.

2°) a) Montrer que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

b) Montrer les inégalités: $\frac{x_0^{z+1}}{z+1} \leqslant g(z) \leqslant \frac{x_0^{z+1}}{(z+1)(1-x_0)}$, en déduire le comportement de g quand z tend vers -1 ou vers $+\infty$.

c) En déduire que la série $\left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} x_0^k\right)$ est convergente, et donner sa somme.

3°) Montrer que les intégrales $\int_0^{x_0} \frac{t^z \,\mathrm{Log}\,t}{1-t}\,dt$ et $\int_0^{x_0} \frac{(\mathrm{Log}\,t)^2 t^z}{1-t}\,dt$ existent si $z > -1$ (on ne cherchera pas à les calculer).

4°) Soit $a > -1$, et z fixé dans $]a, +\infty[$. Soit h, variable, non nul, tel que $z + h > a$.

a) Montrer, qu'à chaque h, on peut associer une application θ, à valeurs dans $]0, 1[$, telle que :

$$\frac{1}{h}\left(g(z+h) - g(z)\right) - \int_0^{x_0} \frac{t^z \,\mathrm{Log}\,t}{1-t}\,dt = \frac{h}{2}\int_0^{x_0} \frac{(\mathrm{Log}\,t)^2\, t^{z+\theta(t)h}}{1-t}\,dt;$$

on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité: $t^h - 1 - h\,\mathrm{Log}\,t = \frac{h^2}{2}(\mathrm{Log}\,t)^2\, t^{h\theta}$ pour un $\theta \in]0, 1[$.

b) En déduire que g est dérivable en z et donner $g'(z)$.

c) Où g est-elle dérivable ?

5°) Tracer l'allure du graphe de g en repère orthonormé.

Ecole des Hautes Etudes Commerciales 1982

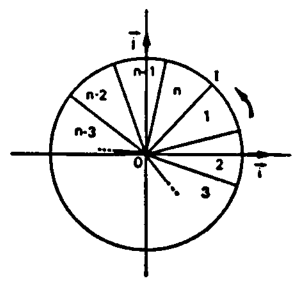
Mathématiques I (4 h)

OPTION GENERALE

(La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note. La première et la seconde partie sont indépendantes.)
Le symbole ln représente le logarithme népérien. On note $E(x)$ la partie entière de x, et $\bar{E}(x)$ la différence $x - E(x)$.

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2 ($n \geqslant 2$) et par N un entier naturel non nul. On pose $h = \frac{2\pi}{n}$ et $x_0 = Nh$.

Une roue de loterie est schématisée par un disque D de centre O divisé en n secteurs égaux, mobile par rapport à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les secteurs sont numérotés de 1 à n dans le sens inverse du sens trigonométrique. Soit I le point du cercle limitant D tel que le segment $[O,I]$ sépare les secteurs de numéros 1 et n.



Une expérience aléatoire consiste à lancer la roue dans le sens trigonométrique. On suppose que lorsque celle-ci est arrêtée, la demi-droite $(O, \vec{i})$ ne rencontre qu'un seul secteur (dit gagnant) en des points autres que O. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la mesure x en radians de l'angle total dont a tourné la roue avant de s'arrêter (x est donc une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OI})$ qui prend en compte les tours effectués par la roue). On suppose enfin que la variable aléatoire X possède une densité de probabilité f définie par: $f(t) = \exp(x_0 - t)$ si $t \geqslant x_0$, $f(t) = 0$ si $t < x_0$.

PREMIÈRE PARTIE

1°) a) Expliciter la fonction de répartition F de X et tracer son graphe. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

b) Soit q un élément de $\mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $\{(q-1)h \leqslant X < qh\}$.

c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X < qh\}$ sachant que l'événement $\{X \geqslant (q-1)h\}$ est réalisé.

2°) Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro du secteur gagnant.

a) Soit k un entier naturel. Montrer que la relation $nq + k > N$, où $q \in \mathbb{Z}$, équivaut à $q \geqslant 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

b) Soit k un entier naturel appartenant à l'intervalle $[1,n]$. Montrer que la probabilité $P_n(k)$ de l'événement $\{Y = k\}$ est de la forme

$$P_n(k) = \beta\, \alpha^{\bar{E}(\frac{N-k}{n})},$$

où α est un nombre réel strictement supérieur à 1 et où β ne dépend que de n (et non de k).

On pourra admettre ce résultat pour la suite, les valeurs de α et de β n'intervenant pas dans le reste du problème.

3°) Soit r le reste de la division euclidienne de N par n ($0 \leqslant r \leqslant n-1$).

a) Expliciter $P_n(k)$ en fonction de α, β, n, r et k. (On notera que l'application $x \longmapsto \bar{E}(x)$ admet 1 pour période.)

b) Montrer que lorsque k décrit l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$, le nombre $E(\frac{r-k}{n})$ prend au plus deux valeurs, que l'on précisera.

c) On suppose dans cette question que $r = 0$. Simplifier l'expression de $P_n(k)$ et dresser le tableau de variation de l'application $k \longmapsto P_n(k)$. Montrer que le graphe de cette application est contenu dans celui d'une fonction exponentielle. Donner l'allure de ces graphes sur un même dessin.

d) On suppose que $r \neq 0$. Montrer que $E(\frac{r-k}{n})$ prend effectivement deux valeurs, et trouver les valeurs correspondantes de k. Simplifier alors $P_n(k)$, dresser le tableau de variation et donner l'allure du graphe de l'application $k \longmapsto P_n(k)$.

.../...

e) On ne fait plus d'hypothèse sur r. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par $P_n(k)$ lorsque k décrit l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$ est indépendant de r. En donner le plus grand et le plus petit élément.

4°) On suppose dans cette question que $r=0$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^{n} P_n(k)$, exprimer β en fonction de a et de n. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

5°) Dans cette question, k et x_0 sont fixés, x_0 étant supposé non congru à 0 modulo 2π. On suppose que n varie dans l'intervalle $[k,+\infty[$ de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que les rapports $\frac{N}{n}$ et $\frac{r}{n}$ sont constants, et que $r \geqslant k$ pour n assez grand.

b) En déduire, quand n tend vers l'infini, que $P_n(k)$ est équivalent à $a^{r/n} \dfrac{\ln a}{n(a-1)}$.

SECONDE PARTIE

On fixe $n \geqslant 4$. Pour tout entier naturel k appartenant à $[1,n]$, on pose $p_k = P_n(k)$ et $a_k = p_{k-1} + p_k + p_{k+1}$, en convenant que $p_0 = p_n$ et que $p_{n+1} = p_1$. Le secteur de numéro n est aussi numéroté 0, et le secteur de numéro 1 est aussi numéroté $n+1$.

La loterie est utilisée avec la règle de jeu suivante: avant l'expérience, le joueur mise sur un secteur de son choix; soit k le numéro de ce secteur; après l'expérience, il perçoit le double de sa mise si la roue s'est arrêtée sur le secteur k, il est remboursé si la roue s'est arrêtée sur le secteur $k-1$ ou sur le secteur $k+1$; il perd sa mise dans les $n-3$ autres cas.

Le joueur décide de tenter sa chance plusieurs fois consécutives, avec la méthode que voici: au premier coup, il mise sur un secteur choisi au hasard (les n choix sont équiprobables); si au m-ième coup (où $m \geqslant 1$) il a été remboursé ou s'il a doublé sa mise (on dit dans l'un et l'autre cas qu'il a gagné au m-ième coup), il mise au $(m+1)$-ième coup sur le même secteur qu'au m-ième coup; sinon (on dit alors qu'il a perdu au m-ième coup), il choisit au hasard l'un des autres secteurs (les $n-1$ choix sont équiprobables).

On suppose que les coups successifs constituent des expériences indépendantes et identiques. (En particulier, le point I de D est remis sur la demi-droite $(O,\vec{i})$ après chaque expérience.)

On note $C_k(m)$ la probabilité de choisir le secteur k au m-ième coup, $G_k(m)$ la probabilité conditionnelle de gagner au m-ième coup quand on a misé sur le secteur k, et enfin $G(m)$ la probabilité de gagner au m-ième coup.

1°) Calculer les nombres $C_k(1)$, $G_k(1)$ et $G(1)$.

2°) Calculer $G_k(m)$ lorsque $m \geqslant 2$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul m,

$$C_k(m+1) = a_k C_k(m) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (1-a_i)\, C_i(m).$$

3°) Pour tout entier naturel non nul m, on considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$C_m = \begin{pmatrix} C_1(m) \\ C_2(m) \\ \vdots \\ C_n(m) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice carrée M d'ordre n à coefficients réels indépendants de m, telle que, pour tout entier naturel non nul m,

$$C_m = M^{m-1} C_1.$$

b) En déduire que $G(m) = {}^tAM^{m-1}C_1$ (où ${}^tA$ désigne la transposée de A).

4°) On prend n assez grand pour que les nombres a_k, où $1 \leqslant k \leqslant n$, puissent être supposés égaux.

a) Calculer leur valeur commune.

b) Montrer qu'il existe un couple (λ,μ) de nombres réels tel que

$$M = \lambda I + \mu J,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre n et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer J^q. En déduire M^{m-1}.

d) Déterminer finalement la valeur de $G(m)$. Le résultat était-il prévisible?

FIN

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Jeudi 12 Mai 1983, de 8 heures à midi

ATTENTION : *la présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.*

On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant 0$. Soit a un nombre réel.

I. Dans cette partie, on suppose $a \geqslant 0$.

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence :

(1) $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} = a + \dfrac{1 - e^{-n}}{2} u_n ,$

et la condition initiale $u_0 = a$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2a$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

2. Soit (v_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

(2) $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad v_{n+1} \leqslant a + \dfrac{1 - e^{-n}}{2} v_n .$

   a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n \leqslant u_n$.
   b) Montrer que la suite (v_n) est majorée.
   c) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que la suite (v_n) n'est pas nécessairement convergente.

3. a) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, $e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.
   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3} dx \leqslant \frac{5}{6}$.
   c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ est convergente, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Soit (w_n) une suite de nombres réels satisfaisant à la relation :

(3) $\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad w_{n+1} \leqslant a + \dfrac{w_n}{4} \displaystyle\int_0^n e^{-x^3} dx .$

Montrer que la suite (w_n) est majorée.

II. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles.

1. Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres réels f(t), où $t \in [0,x]$, admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On note g(x) cette borne supérieure.

Montrer que la fonction g ainsi définie est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.

.../...

2. On suppose dans cette question que f vérifie la relation :

$$(4) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt .$$

a) On suppose, dans cette question uniquement, que f est croissante.
Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant k$,

$$f(x) \leqslant a + \int_0^k f(t)\, e^{-t}\, dt + (e^{-k} - e^{-x})\, f(x) .$$

En déduire que f est majorée.

b) On suppose, dans cette question uniquement, que pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$ f(x) appartient à $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction g définie dans la question II.1 vérifie la relation (4), c'est-à-dire que :

$$g(x) \leqslant a + \int_0^x g(t)\, e^{-t}\, dt.$$

En déduire que f est majorée.

c) On suppose seulement que f vérifie la relation (4). Montrer que f est majorée.

3. On suppose que la fonction f vérifie la condition suivante :

$$(5) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, e^{-t^3}\, dt.$$

Montrer que f est majorée.

4. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ soit convergente. On suppose que la fonction f vérifie la relation suivante :

$$(6) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad f(x) \leqslant a + \int_0^x f(t)\, h(t)\, dt.$$

Montrer que f est majorée.

5. On suppose de nouveau que f vérifie la relation (4). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = f(x) - a\, e^{1 - e^{-x}} .$$

a) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) \leqslant \int_0^x \varphi(t)\, e^{-t}\, dt .$$

b) Soient c un élément de $\mathbb{R}_+$ et $\lambda = \sup_{x \in [0,c]} \varphi(x)$.

Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout élément x de $[0,c]$,

$$\varphi(x) \leqslant \lambda \frac{(1 - e^{-x})^n}{n!} .$$

c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leqslant a\, e^{1 - e^{-x}} .$$

d) Soit ψ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que, pour toute fonction continue vérifiant la relation (4) et pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant \psi(x)$.

Montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$,

$$\psi(x) \geqslant a\, e^{1 - e^{-x}} .$$

FIN

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Vendredi 11 mai 1984, de 14 heures à 18 heures

ATTENTION: La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.

I. Soit n un nombre entier naturel non nul. On considère les fonctions numériques f_n, g_n et h_n définies sur l'intervalle $[0,n]$ par les relations :

$$f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \qquad g_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \qquad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

où g_n' est la dérivée de g_n.

1. Etudier la variation de h_n. Dresser le tableau de variation de cette fonction.
En déduire la variation de g_n. Montrer en particulier que g_n est à valeurs positives et qu'il existe un élément x_n de $[0,n]$ et un seul tel que, pour tout élément t de $[0,n]$, $g_n(t) \leqslant g_n(x_n)$.

2. Montrer que $g_n(x_n) \leqslant \frac{1}{ne}$.

3. Soit x un nombre réel strictement positif.

a) Etudier la convergence des intégrales :

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t)\, t^{x-1}\, dt \qquad \text{et} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

b) Soit c un nombre réel strictement positif. Montrer que si $n \geqslant c$, alors :

$$0 \leqslant \Gamma(x) - I_n(x) \leqslant \int_0^c g_n(t)\, t^{x-1}\, dt + \int_c^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt.$$

c) En déduire que la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

II. On dit que des suites u et v de nombres réels strictement positifs sont équivalentes si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que les suites de termes généraux $n\,!$ et $\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$ sont équivalentes.

Soit α un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$P_n(\alpha) = (\alpha + 1)(2\alpha + 1)\ldots[(n-1)\alpha + 1] \qquad \text{et} \qquad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^\alpha)^n\, dt.$$

On convient que $J_0(\alpha) = 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n,
$$(1 + n\alpha) J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha).$$

2. En déduire la valeur de $J_n(\alpha)$, que l'on exprimera à l'aide de $P_n(\alpha)$.

3. En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre $J_n(\alpha)$ et $I_n(\frac{1}{\alpha})$.
En déduire un équivalent de la suite de terme général $P_n(\alpha)$.

4. Soit désormais x un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on pose :
$$Q_n(p,x) = x(x + p)(x + 2p)\ldots[x + (n-1)p].$$
Exprimer $Q_n(p,x)$ à l'aide de $P_n(\frac{p}{x})$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $Q_n(p,x)$, les nombres p et x étant fixés.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,
$$Q_n(2,x)\, Q_n(2,x+1) = Q_{2n}(1,x).$$
En déduire une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{x}{2})$ et $\Gamma(\frac{x+1}{2})$.

Chambre de Commerce et d'industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1985

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Vendredi 10 Mai 1985, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Les parties I et II sont indépendantes.

On désigne par a et b des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervelle $[0, 1]$. On suppose que, pour tout élément t de $[0, 1]$, $a(t) \geqslant 0$.
L'objet du problème est d'étudier un procédé d'approximation d'une fonction f à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0, 1]$, sachant que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$f''(t) - a(t)f(t) = b(t),$$

et:

$$f(0) = \lambda, f(1) = \mu,$$

où λ et μ sont des nombres réels donnés.
À cet effet, on introduit une subdivision $(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1})$ à pas constant $h = 1/(n+1)$ de l'intervalle $[0, 1]$, où n est un nombre entier strictement supérieur à 2. Autrement dit, pour tout nombre entier naturel k tel que $k \leqslant n+1$, $t_k = kh$.
Dans la partie I, on montre que, pour approcher f sur $[0, 1]$, il suffit de connaître une valeur approchée u_k de $f(t_k)$ en chaque point t_k. Les parties II et III décrivent un algorithme de construction des valeurs approchées u_k.
Pour toute fonction g à valeurs réelles de classe C^p sur l'intervalle $[0, 1]$, on pose:

$$M_p(g) = \sup_{t \in [0, 1]} |g^{(p)}(t)|.$$

I. *Approximation de f par une fonction affine par morceaux.*

1. Soient g une fonction à valeurs réelles de classe C^2 sur $[0, 1]$ et (α, β) un couple d'éléments de $[0, 1]$ tel que $\alpha < \beta$. On suppose que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.

a) Soit G la fonction définie sur $[0, 1]$ par les relations:

$$G(t) = \frac{g(t)}{t - \alpha} \quad \text{si } t \neq \alpha \qquad \text{et} \qquad G(\alpha) = g'(\alpha).$$

Prouver que G est continue, puis qu'elle est de classe C^1.
Prouver que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$|G'(t)| \leqslant \frac{1}{2} M_2(g).$$

b) En conclure que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$|g(t)| \leqslant \frac{1}{2}|(t - \alpha)(t - \beta)| M_2(g).$$

2. Soit ψ_h la fonction définie sur $[0, 1]$ par les conditions suivantes:
— pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\psi_h(t_k) = f(t_k)$;
— pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de ψ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$|f(t) - \psi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f).$$

3. Soient enfin $(u_0, u_1, \dots, u_{n+1})$ une suite de nombres réels et φ_h la fonction définie sur $[0, 1]$ par les conditions suivantes:
— pour tout entier k appartenant à $[0, n+1]$, $\varphi_h(t_k) = u_k$;
— pour tout entier k appartenant à $[0, n]$, la restriction de φ_h à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est affine.
Montrer que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$|f(t) - \varphi_h(t)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2(f) + \delta_h, \text{ où } \delta_h = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n+1} |f(t_k) - u_k|.$$

II. *Algorithme de résolution d'un système linéaire.*
Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ des suites de nombres réels. On suppose que, pour tout entier k appartenant à $[1, n]$, $a_k \geqslant 2$. On considère le système d'équations linéaires:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + a_2 u_2 - u_3 = b_2 \\ -u_2 + a_3 u_3 - u_4 = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -u_{n-2} + a_{n-1} u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ -u_{n-1} + a_n u_n = b_n \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'on peut construire une suite $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1]$, satisfaisant à la condition initiale $c_1 = \dfrac{1}{a_1}$ et à la relation de récurrence:

$$c_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - c_k} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

2. Soit $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ la suite de nombres réels définie par la condition initiale $d_1 = b_1 c_1$ et la relation de récurrence:

$$d_{k+1} = (b_{k+1} + d_k) c_{k+1} \quad \text{où } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Montrer que le système (1) admet une solution et une seule, et que celle-ci est déterminée par les relations:

$$u_n = d_n$$
$$u_k = d_k + c_k u_{k+1} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

3. Montrer que si les nombres $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont positifs (au sens large), il en est de même pour les nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$.
4. Dans cette question, on suppose que $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Montrer que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

5. Dans le cas général, montrer que:

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k| \leqslant \frac{1}{2}(n+1)^2 \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k|.$$

III. *Obtention de valeurs approchées de f aux points t_k.*

1. Soit t un nombre réel tel que $[t-h, t+h]$ soit contenu dans $[0, 1]$. Montrer que:

$$|f(t+h)+f(t-h)-2f(t)-h^2 f''(t)| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

À cet effet, on pourra introduire la fonction auxiliaire F définie sur l'intervalle $[-h, h]$ par la relation:

$$F(x) = f(t+x)+f(t-x)-2f(t)-x^2 f''(t).$$

On calculera les dérivées successives de F jusqu'à l'ordre 3 et en particulier leurs valeurs à l'origine, et on majorera $|F'''(x)|$ à l'aide de $M_4(f)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

(2)

$$-f(t_{k-1})+[2+h^2 a(t_k)]f(t_k)-f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k)+\varepsilon_k, \qquad \text{où } |\varepsilon_k| \leqslant \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

3. On connaît déjà $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$. Pour approcher $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... , $f(t_n)$, on remplace les relations (2) par le système linéaire:

(3) $$-u_{k-1}+[2+h^2 a(t_k)]u_k-u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$u_0 = \lambda \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \mu.$$

Montrer comment, à l'aide de la partie II, on peut construire la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$.

4. Cette suite étant ainsi définie, établir que:

$$\delta_k \leqslant \frac{h^2}{24} M_4(f).$$

En conclure que, pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$|f(t)-\varphi_h(t)| \leqslant A\, h^2, \text{ où } A = \frac{1}{8} M_2(f)+\frac{1}{24} M_4(f).$$

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

Mathématiques I — 4 heures

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

PROBLÈME

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$f(t) = t^3 + t.$$

Dans la partie I, on étudie la fonction réciproque g de f. Dans la partie II, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles. Enfin, dans la partie III, on étudie une approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés.

I. Étude de g

1. *Variation de g*

a) Construire la courbe représentative C de la fonction f (unité graphique : 2 cm).

b) Montrer que f admet une fonction réciproque ; soit g cette fonction. Ainsi, pour tout nombre réel x :

$$g^3(x) + g(x) = x.$$

Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire. Construire sa courbe représentative dans le même repère que C.

c) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$; exprimer g' en fonction de g. En déduire sans calcul la variation de g'.

2. *Étude locale et asymptotique de g*

a) Montrer que g admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre. Expliciter ce développpement à l'ordre 3.

b) Montrer que $g(x) \sim x^{1/3}$ au voisinage de $+\infty$.

c) On écrit $g(x)$ sous la forme $x^{1/3}[1 + h(x)]$, où $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Expliciter la relation satisfaite par la fonction h. En déduire que la fonction $x \mapsto x^{2/3} h(x)$ admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

3. *Étude d'une primitive de g*

Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$G(x) = \int_0^x g(u)\,du.$$

a) Calculer G en fonction de g.

b) Étudier la variation de G ; étudier G au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

II. Approximation rationnelle de g

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec la droite D_x parallèle à l'axe des abscisses et d'ordonnée x. On se propose d'approcher $g(x)$ à l'aide de la suite de terme général $u_n(x)$ ainsi construite : on pose $u_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse x ; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. *Construction de l'algorithme d'approximation*

Soit t un nombre réel positif. Prouver que l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse t est égale à $\dfrac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}$.

On considère donc la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = \frac{2u_n^3(x) + x}{3u_n^2(x) + 1}$$

et la condition initiale $u_0(x) = x$.

2. *Étude graphique d'un exemple*

Dans cette question, on prend $x = 1$. Sur une même figure, tracer soigneusement l'arc de C correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et construire $u_1(1)$ et $u_2(1)$ (unité graphique : 5 cm).

3. *Étude de l'algorithme*

Soit φ la fonction numérique qui à tout nombre réel positif t associe :

$$\varphi(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

a) Étudier le signe de $t - \varphi(t)$.

b) Calculer la dérivée de φ. Étudier le signe de $\varphi'(t)$.

c) Déduire des questions *a*) et *b*) que l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ.

En utilisant l'encadrement $0 \leqslant t^3 + t - x \leqslant t^3$, valable pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$, montrer que, sous cette dernière condition :

$$0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \frac{2}{3}.$$

4. *Étude de la convergence*

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(x)$ appartient à $[g(x), x]$, que la suite $(u_n(x))$ est décroissante et qu'elle converge vers $g(x)$.

b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}[u_n(x) - g(x)].$$

c) Soit a un nombre réel positif. On pose :

$$\beta_n = \sup_{x \in [0, a]} [u_n(x) - g(x)].$$

Prouver que $\beta_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n a.$

d) Prouver que, pour tout nombre réel positif t:

$$\varphi(t) - g(x) = [t - g(x)]^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}.$$

Montrer que, pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$:

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}[t - g(x)]^2.$$

$\left(\text{On pourra étudier la variation de la fonction } t \mapsto \frac{3t}{3t^2+1}.\right)$

e) Calculer $u_n(1)$ pour $n \leqslant 4$. Vérifier que $u_4(1)$ est une valeur approchée de $g(1)$ à la précision 10^{-6}.

III. Approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés

Soient a un nombre réel strictement positif, n un nombre entier naturel non nul et $S = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une suite d'éléments de $[0, a]$ distincts deux à deux. Pour tout nombre entier naturel p, on note E_p l'epace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

1. *Produit scalaire sur E_n adapté à S*

a) Montrer que l'application qui à tout couple (P, Q) d'éléments de E_n associe le nombre réel:

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k)$$

est un produit scalaire sur E_n.

b) Soit i un nombre entier naturel inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe un élément L_i de E_n et un seul prenant la valeur 1 au point x_i et la valeur 0 en tous les autres points de S.

c) Prouver que la famille $B = (L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormale de E_n.

d) Montrer qu'il existe un élément P_g de E_n et un seul tel que, pour tout nombre entier i appartenant à l'intervalle $[0, n]$, $P_g(x_i) = g(x_i)$; expliciter les composantes de P_g dans la base B.

2. *Approximation de g*

Soit p un nombre entier naturel strictement inférieur à n. Pour tout élément A de E_p, on pose:

$$N(A) = \sum_{k=0}^{n} [g(x_k) - A(x_k)]^2.$$

a) Interpréter $N(A)$ à l'aide du produit scalaire sur E_n.

b) Montrer qu'il existe un élément H_g de E_p et un seul tel que, pour tout élément A de E_p, $N(H_g) \leqslant N(A)$.

c) Montrer que le polynôme H_g est caractérisé par les relations:

$$(H_g | X^i) = (P_g | X^i), \quad \text{où } 0 \leqslant i \leqslant p.$$

d) On écrit H_g sous la forme:

$$H_g = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j X^j.$$

Expliciter un système linéaire admettant pour unique solution $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p)$..

e) En utilisant les résultats obtenus dans les parties II et III, indiquer les différentes étapes d'un algorithme permettant de calculer H_g.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

Mathématiques I

OPTION : Générale

Vendredi 8 Mai 1987, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Le but du problème est l'étude d'une suite de tirages de boules dans une urne, ce qui fait l'objet de la seconde partie. La première partie permet d'obtenir quelques résultats préliminaires d'algèbre.

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul et par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. On considère l'application linéaire f qui, à tout élément U de E, associe le polynôme :

$$V(X) = X \cdot U(X) - \frac{1}{N}(X^2 - 1) \cdot U'(X)$$

où U' désigne la dérivée de U.

PARTIE I

1) ***Étude de l'application f***

a) Pour tout nombre entier naturel j tel que $j \leq N$, calculer $f(X^j)$.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) On considère la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \cdots, X^N)$ de E. Écrire la matrice M associée à f dans cette base.

2) ***Recherche d'une base de polynômes propres pour f***

Soit B un polynôme propre pour f, c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant à la relation :

$$f(B) = \lambda B.$$

a) Montrer que B est nécessairement de degré N.

b) On suppose que $\lambda = 1$. Montrer que -1 est racine de B.

Soit k l'ordre de multiplicité de la racine -1 ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X+1)^k A(X) \qquad \text{avec } A(-1) \neq 0.$$

Montrer que $k = N$ et que A est constant.

Tournez la page S. V. P.

En supposant que $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.

c) On suppose maintenant que λ est différent de 1 et de -1. Montrer que 1 et -1 sont racines de B. Soient h et k leurs ordres de multiplicité respectifs.

On pose :

$$B(X) = (X-1)^h (X+1)^k A(X).$$

Montrer que $h + k = N$. Exprimer alors λ en fonction de k et de N. En déduire une factorisation des polynômes B ainsi obtenus.

d) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

e) On considère la famille $\mathcal{B}' = (B_0, B_1, \cdots, B_N)$ des éléments de E définis par :

$$B_k(X) = (X-1)^{N-k}(X+1)^k$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de E. Écrire la matrice M' associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

3) *Calcul des limites des suites* (M^{2n}) *et* (M^{2n+1})

On appelle limite d'une suite (M_n) de matrices carrées d'ordre $N+1$ la matrice carrée L d'ordre $N+1$ dont les éléments sont les limites (si elles existent) des éléments de M_n lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que, dans ces conditions, pour tout couple (P, Q) de matrices carrées d'ordre $N+1$, la suite $(P\,M_n\,Q)$ a pour limite la matrice $P\,L\,Q$.

a) Pour tout nombre entier naturel j tel que $j \leq N$, on pose :

$$B_j(X) = \sum_{i=0}^{N} p_{i,j} X^i \quad \text{et} \quad X^j = \sum_{i=0}^{N} q_{i,j} B_i(X)$$

Déterminer les éléments $p_{i,0}$ et $p_{i,N}$ pour $0 \leq i \leq N$, et les éléments $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$ pour $0 \leq j \leq N$.

b) On note respectivement P et Q les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Quels sont les éléments ainsi connus de P et de Q?

c) Exprimer M en fonction de M', P et Q. En déduire (sans expliciter davantage les matrices P et Q) les limites des suites (M^{2n}) et (M^{2n+1}) lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE II

On suppose désormais que $N \geq 3$. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches avec $r + b = N$. On procède à des tirages de la manière décrite ci-après :

— lorsqu'on obtient une boule rouge, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule blanche avant de passer au tirage suivant ;

— lorsqu'on obtient une boule blanche, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule rouge avant de passer au tirage suivant.

Soit n un nombre entier naturel. On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage (c'est-à-dire lorsque la $n^{\text{ième}}$ boule a été tirée puis remplacée selon la procédure décrite). En particulier, $X_0 = r$.

Pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$p(n, k) = P([X_n = k]).$$

Ainsi :

	$p(n, k) = 0$	si $k > N$
	$p(0, k) = 1$	si $k = r$
	$p(0, k) = 0$	sinon.

On convient de poser : $\quad p(n, -1) = 0.$

On désigne par $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n. On se propose de calculer par deux méthodes ces deux valeurs typiques, puis d'étudier le comportement asymptotique de $p(n, k)$.

1) On suppose dans cette question que n est non nul. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$$N\,p(n, k) = (N-k+1)\,p(n-1, k-1) + (k+1)\,p(n-1, k+1) \qquad (1)$$

2) *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de polynômes*

Pour tout nombre entier naturel n, soit F_n le polynôme défini par :

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^{N} p(n, k)\, X^k.$$

On suppose désormais que n est non nul.

a) Établir la relation :

$$F_n = f(F_{n-1}) \qquad (2)$$

b) Montrer que :

$$F_n'(1) = E(X_n).$$

En dérivant (2), former une relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que :

$$F_n''(1) = E(X_n^2) - E(X_n)$$

On pose :

$$a_n = E(X_n^2) - N\,E(X_n).$$

En dérivant deux fois (2), former une relation entre a_n et a_{n-1}. En déduire $V(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

3) *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de matrices*

On considère la matrice U_n à $N+1$ lignes et une colonne :

$$\begin{pmatrix} p(n, 0) \\ p(n, 1) \\ \cdots \\ p(n, N) \end{pmatrix}$$

a) A l'aide la relation (1), prouver que :

$$U_n = M\,U_{n-1}$$

où M est la matrice définie dans la question I 1).

On considère les trois matrices à une ligne et $N+1$ colonnes :

$$J = (1\,1 \ldots 1)\; K_1 = (0\,1 \ldots N)\; K_2 = (0^2\,1^2 \ldots N^2)$$

b) Calculer le produit $K_1 M$ en fonction de K_1 et de J.

Vérifier que :

$$E(X_n) = K_1\,U_n.$$

Retrouver ainsi la relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$ établie dans la question II 2) *b*).

c) Calculer le produit $(K_2 - N\,K_1)M$ *en fonction de* $K_2 - N\,K_1$ et de J. Retrouver ainsi la relation entre a_n et a_{n-1} établie dans la question II 2) *c*).

4) *Étude de la distribution asymptotique de* (X_n)

En utilisant les résultats de la fin de la première partie, déterminer selon la parité de r les limites des suites $(p(2n, k))$ et $(p(2n+1, k))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

Samedi 7 mai 1988, de 8 h. à 12 h.

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

L'objet du problème est d'étudier la convergence d'une suite de polynômes d'interpolation d'une fonction f, ce qui constitue la partie III. Dans la partie I, on construit les polynômes d'interpolation de f ; dans la partie II, on explicite un tel polynôme sur un exemple.

I. Interpolation d'une fonction par un polynôme

Soient n un nombre entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite de nombres réels distincts. On leur associe les n polynômes $L_1, L_2, \dots, L_n$ définis pour $1 \leqslant j \leqslant n$ par :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

1. Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, expliciter le degré et les racines du polynôme L_j. Calculer $L_j(x_j)$.

.2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur à n. On pose :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} P(x_j)\, L_j(x).$$

a) Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, calculer $Q(x_k)$.
b) Prouver que $P = Q$.

3. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. On suppose que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, le point x_k appartient à I.
Montrer qu'il existe un polynôme P_f de degré strictement inférieur à n et un seul satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P_f(x_k) = f(x_k).$$

II. Exemples

1. On prend $f(x) = \dfrac{64}{x+7}$; $I = [0, 36]$; $n = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 25$.
a) Expliciter les polynômes L_1, L_2, L_3.
b) Calculer le polynôme P_f défini dans la question I.3. On vérifiera que le polynôme $64\, P_f$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

TSVP

2. On prend $g(x) = \dfrac{64}{x^2+7}$; $I = [-6, 6]$; $n = 6$; $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.

a) Sans nouveaux calculs, expliciter le polynôme P_g (défini comme dans la question I.3) à l'aide du polynôme P_f.

b) Étudier la variation de P_g sur l'intervalle $[-6, 6]$.

c) Construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de g et de P_g.

III. Étude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$$

où α est un nombre réel strictement positif.

Les notations étant les mêmes que dans la partie I, les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont donnés par :

$$x_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On note P_n le polynôme P_f défini dans la question I.3.

1. *Calcul de $f(x) - P_n(x)$*

On pose : $$A(x) = 1 - (x + \alpha^2)\, P_n(x).$$

a) Vérifier que $A(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, qui admet $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme racines.

b) On pose :

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Montrer qu'il existe un nombre réel c_n tel que, pour tout nombre réel x :

$$A(x) = c_n\, Q_n(x).$$

c) Prouver finalement que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n\, Q_n(x)}{(x + \alpha^2) \prod_{k=1}^{n} (\alpha^2 + x_k)}.$$

2. *Étude d'une fonction auxiliaire*

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2)\, du.$$

a) Calculer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) Vérifier que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$h'(x) = \pi - 2 \operatorname{Arc\,tan} x.$$

c) Étudier la variation de h. Prouver que h se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

TSVP

d) Montrer qu'il existe un nombre réel α_0 et un seul tel que $0 < \alpha_0 < 1$ *et*:

$$h(\alpha_0) = 2\ln 2 - 2.$$

e) Construire la courbe représentative de h.

3. *Détermination d'un équivalent de* c_n

a) Soient F une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ et a un élément de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq 1 - a$, on pose :

$$G(t) = \int_a^{a+t} F(u)\,du - t\,F\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

(i) Calculer G' en fonction de F et de F'.

(ii) Soit x un élément de l'intervalle $[0, 1 - a]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction F sur l'intervalle $\left[a + \frac{x}{2}, a + x\right]$, établir que :

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8} M \qquad \text{où } M = \sup_{t \in [0,1]} |F''(t)|.$$

(iii) En déduire que, pour tout élément x de l'intervalle $[0, 1 - a]$:

$$|G(x)| \leq \frac{x^3}{24} M.$$

b) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\left|\ln(\alpha^2 + x_k) - n\int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2)\,du\right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\,\alpha^4 n^2}.$$

À cet effet, on appliquera le résultat de la question précédente, avec :

$$F(u) = \ln(\alpha^2 + u^2)\,; \quad a = \frac{k-1}{n}\,; \quad x = \frac{1}{n}.$$

c) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général :

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} (\alpha^2 + x_k).$$

Déduire du *b*) la limite de la suite $(\ln a_n - n\,h(\alpha))_{n \geq 1}$. Obtenir enfin un équivalent simple de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

4. *Étude de la suite* $(P_n(1))_{n \geq 1}$

a) Vérifier que :

$$Q_n(1) = \frac{(4n)!}{2^{4n}\,n^{2n}\,(2n)!}.$$

b) On admet l'équivalent (formule de Stirling) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Déterminer un équivalent simple de la suite $(Q_n(1))_{n \geq 1}$.

c) Déterminer l'ensemble des nombres réels strictement positifs α tels que la suite $(P_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers $f(1)$.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris
Direction de l'Enseignement
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS
École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1989

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 10 mai 1989, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long sur 15 cm de large.

PROBLÈME Soit k un nombre entier naturel non nul. L'objet du problème est l'étude de la série de terme général $1/p^{2k}$, où $p \geq 1$.

LIMINAIRE À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p :

$$\frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}}\right) \leq \frac{1}{p^{2k}}. \tag{0}$$

En déduire la convergence de la série de terme général $1/p^{2k}$ et un majorant simple de sa somme.

Dans la suite, pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$S_{2k}(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{2k}}, \quad R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \quad \text{et} \quad S_{2k} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n).$$

Dans la partie I, on traite le cas particulier où $k = 1$ et l'on détermine S_2.
Dans la partie II, on étudie d'abord une suite de polynômes et l'on généralise la méthode de la partie I pour déterminer S_{2k}.

PARTIE I Dans cette partie, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

1. On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cot \pi x \qquad (\text{où } \cot \pi x = 1/\tan \pi x).$$

a) Comparer $f_1(x)$ et $f_1(1-x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
b) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_1 par continuité en 0 et en 1.
c) Pour tout élément x de $]0,\ 1[$, calculer $f_1'(x)$. Montrer que f_1 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.
d) Construire la courbe représentative de f_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $[0,\ 1,]$, il existe un nombre réel strictement positif a tel que : $\left|\int_0^1 f(x)\sin 2\pi n x \, dx\right| \leq \frac{a}{n}$.

En déduire la limite de $\int_0^1 f(x)\sin 2\pi n x\, dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul p, calculer l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi p x \, \mathrm{d}x.$$

4. *a*) Vérifier que, pour tout élément x de l'intervalle $]0,\ 1[$:

$$2\sum_{p=1}^{n} \cos 2\pi p x = \cot \pi x \sin 2\pi n x + \cos 2\pi n x - 1.$$

(On pourra multiplier chacun des deux membres par $\sin \pi x$.)

b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{p=1}^{n} I_p = \frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x) \sin 2\pi n x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos 2\pi n x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

c) En faisant tendre n vers $+\infty$, déduire de l'égalité précédente que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On se propose dans cette question de comparer $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$.

a) Écrire un algorithme de calcul de $S_2(n)$ lorsque l'entier n est donné. Comparer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $S_2(n)$, $S_2(n) + 1/n$ et $\pi^2/6$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1\,000$.

b) À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Expliquer alors les résultats numériques précédents.

PARTIE II *A) Étude d'une suite de polynômes*

On se propose d'étudier les suites (Q_n) de polynômes à coefficients réels satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

(1) $$Q_0 = 1$$

(2) $$\forall n \geq 1, \quad Q_n' = Q_{n-1}$$

(3) $$\forall n \geq 2, \quad Q_n(1) = Q_n(0).$$

1. *a*) Établir qu'il existe une suite (r_n) de nombres rationnels et une seule telle que :

$$r_0 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} = 0.$$

Expliciter r_1, r_2, r_3 et r_4 sous forme de fractions irréductibles.

On considère désormais la suite (P_n) de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

T.S.V.P.

b) Montrer que la suite (P_n) vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Expliciter P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. On considère une suite (Q_n) de polynômes vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

b) Montrer que la suite $(Q_n(0))$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 : \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} = 0.$$

c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $Q_n = P_n$.

3. *a*) En considérant la suite de polynômes $((-1)^n P_n(1-X))$, établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X).$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel non nul k, $r_{2k+1} = 0$. Calculer r_6 et r_8. On pourra vérifier que :

$$r_8 = -\frac{1}{1\,209\,600}.$$

B) Expression de S_{2k}

1. Pour tout nombre entier naturel $k \geq 2$, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ par la relation :

$$f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot \pi x.$$

a) Comparer $f_k(x)$ et $f_k(1-x)$.

b) Déterminer les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_k par continuité en 0 et en 1.

c) Prouver que f_k est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on considère les intégrales :

$$J_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x) \cos 2\pi p x \, dx \quad \text{et} \quad I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cos 2\pi p x \, dx.$$

a) Calculer $J_p(1)$.

b) Exprimer $J_p(k+1)$ en fonction de $J_p(k)$. En déduire $J_p(k)$ puis $I_p(k)$.

3. *a*) En calculant de deux façons la somme :

$$I_1(k) + I_2(k) + \cdots + I_n(k),$$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, exprimer S_{2k} en fonction de r_{2k}.

b) Retrouver ainsi l'expression de S_2 ; calculer S_4, S_6 et S_8.

4. À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq S_{2k}(n) + \frac{1}{(2k-1)\,n^{2k-1}} - S_{2k} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

En déduire des valeurs approchées à 10^{-6} près de S_4, S_6 et S_8 ; les comparer aux valeurs exactes obtenues précédemment.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mercredi 9 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire**, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

L'objet du problème est l'étude de l'interpolation d'une fonction par des fonctions trigonométriques.

Dans la première partie, on étudie une fonction numérique utilisée par la suite.

La deuxième partie (indépendante de la précédente) est destinée à établir des propriétés d'une matrice qui permet d'obtenir les fonctions d'interpolation.

Enfin, dans la troisième partie, on teste la convergence du procédé d'interpolation dans le cas particulier de la fonction constante et égale 1.

PARTIE I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par les relations :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

3. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Étudier la variation de f et construire la courbe représentative de cette fonction.

PARTIE II

Soit $A_n = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$, dont l'élément à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est défini par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Ainsi :
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on se propose d'abord de diagonaliser la matrice A_n, puis d'étudier une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A_n.

On identifie les matrices colonnes :
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

En particulier, on identifie les matrices à une ligne et une colonne aux nombres réels. Par exemple, on écrira :
$${}^tX\,Y = {}^tY\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \qquad \text{pour} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où ${}^tX$ et ${}^tY$ désignent les matrices transposées de X et de Y.

.../...

1. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$, on pose : $q_n(X) = {}^tX\, A_n\, X$.

   Calculer $A_n\, X$ et vérifier que : $q_n(X) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i\, x_{i+1}$.

2. *Étude du cas particulier $n = 2$*

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^2$: $-{}^tX\, X \leq q_2(X) \leq {}^tX\, X$.

b) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A_2.

c) Trouver les éléments X de $\mathbb{R}^2$ tels que $|q_2(X)| = {}^tX\, X$.

3. *Encadrement des valeurs propres de A_n*

a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2)$.

b) En déduire que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $-2\,{}^tX\, X \leq q_n(X) \leq 2\,{}^tX\, X$

et que l'égalité $|q_n(X)| = 2\,{}^tX\, X$ équivaut à $X = 0$.

c) Soient λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre associé à λ. Montrer que : $q_n(X) = \lambda\,{}^tX\, X$.

En conclure que : $-2 < \lambda < 2$.

4. *Diagonalisation de la matrice A_n*

Pour tout élément λ de l'intervalle $]-2,\ 2[$, on note E_λ l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout nombre entier naturel k : $u_{k+2} = \lambda\, u_{k+1} - u_k$.

On pose $\lambda = 2\cos t$, où $t \in]0,\ \pi[$.

a) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de E_λ. Exprimer u_k en fonction de u_0, u_1, k et t.

b) Soit $F_\lambda(n)$ le sous-espace vectoriel de E_λ constitué des éléments $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E_λ vérifiant la condition supplémentaire : $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Déterminer, en discutant selon les valeurs de t, les éléments de $F_\lambda(n)$.

c) Soit λ un nombre réel. Montrer que λ est une valeur propre de A_n et que le vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions $u_0 = 0$, $u_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq n$, $u_{n+1} = 0$ et $u_{n+k+2} = \lambda\, u_{n+k+1} - u_{n+k}$ pour tout entier k, appartient à $F_\lambda(n)$.

d) En conclure que les valeurs propres de A_n sont les nombres réels $\lambda_p = 2\cos\theta_p$, où $\theta_p = \dfrac{p\,\pi}{n+1}$ et p entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que les vecteurs : $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$

sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

5. *Application*

On applique les résultats précédents à l'étude de la matrice M_n dont les colonnes sont les vecteurs X_p.

a) Soient λ et μ des valeurs propres distinctes de A_n, X et Y des vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ. Vérifier que : $\lambda\,{}^tX\, Y = \mu\,{}^tX\, Y$.

En déduire que, pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels distincts compris entre 1 et n :

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin k\,\theta_p)(\sin k\,\theta_q) = 0.$$

.../...

b) On considère le nombre complexe $z = e^{2i\theta_p}$. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$.

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos 2\,k\,\theta_p = -1$.

Montrer enfin que : $${}^tX_p\,X_p = \frac{n+1}{2}.$$

c) Soit $M_n = (b_{kl})$ la matrice carrée d'ordre n telle que : $b_{kl} = \sin \dfrac{kl\,\pi}{n+1} = \sin k\,\theta_l = \sin l\,\theta_k$.

En utilisant les résultats précédents, montrer que $M_n^2 = \alpha_n\,I_n$, où I_n est la matrice unité d'ordre n et α_n un nombre réel que l'on précisera. En déduire que la matrice M_n est inversible et déterminer son inverse.

PARTIE III

1. À tout élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ on associe la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $$g(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt.$$

a) On rappelle que, pour tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels : $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

Pour tout couple $(k,\ l)$ de nombres entiers naturels, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin kt \sin lt\ dt$.

b) En déduire que : $$\int_0^{\pi} g^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

c) Calculer $M_n\ A$. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$: $\displaystyle a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n} g(\theta_p) \sin k\,\theta_p$.

d) Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un élément $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ et un seul tel que, pour tout entier p avec $1 \le p \le n$: $g(\theta_p) = b_p$.

L'objet des questions suivantes est d'étudier l'unique fonction g_n telle que, pour tout entier p compris entre 1 et n : $g_n(\theta_p) = 1$. On écrira : $\displaystyle g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(n) \sin kt$.

2. *Étude des coefficients $a_k(n)$*

a) Montrer $a_k(n) = 0$ si l'entier k est pair, et que : $$a_k(n) = \frac{2}{n+1}\,\frac{\cos \dfrac{k\,\pi}{2(n+1)}}{\sin \dfrac{k\,\pi}{2(n+1)}}$$
si k est impair. (On pourra s'inspirer de la méthode employée dans la question II 5 *b*).)

b) *b*) Grâce aux résultats de la première partie, en déduire que, pour tout entier impair k tel que $0 \le k \le n$: $$0 \le \frac{4}{k\,\pi} - a_k(n) \le \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

c) Soit k un nombre entier naturel (pair ou impair). Déterminer : $\beta_k = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_k(n)$.

3. Pour tout nombre réel t, on pose : $$h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin kt.$$

a) En utilisant les résultats des questions 1 *b*) et 2 *b*), montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} [g_n(t) - h_n(t)]^2\ dt = 0$.

b) On admet que : $\displaystyle\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Prouver que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} [1 - h_n(t)]^2\ dt = 0$.

c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale : $$J_n = \int_0^{\pi} [1 - g_n(t)]^2\ dt.$$

• • •

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, e^{-t^2/2} \, dt$$

PARTIE I

1. *Cas particulier $a = 0$*

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0$ en termes de probabilités.
En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de f_a*

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas $a > 0$*

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Calculer $f_a'(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f_a'.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas $-1 < a < 0$*

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

Tournez la page S.V.P.

5. *Étude de f_a au voisinage de $+\infty$ ($a > -1$)*

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\ e^{-x^2/2} + (a-1) \int_x^{+\infty} t^{a-2}\ e^{-t^2/2}\ dt$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de : $$f_a(x) - x^{a-1}\ e^{-x^2/2}$$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$: $$\left| f_a(x) - x^{a-1}\ e^{-x^2/2} \right| \leq \frac{|a-1|}{x^2}\ f_a(x)$$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x,\ +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $$f_a(x) \sim x^{a-1}\ e^{-x^2/2}$$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\ dx$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité : $$f_{a+1}(0) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ dx$$

e) Déduire également de la question c) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left| f_a(x) - x^{a-1}\ e^{-x^2/2} \right| \leq\ 2\ x^{a-3}\ e^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose : $$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} t^a\ e^{-t^2/2}\ dt$$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\ e^{-t^2/2}\ dt$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par φ*

a) Établir l'égalité : $$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\ \varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a + 2\ n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de $g_a(x)$*

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{t^{2k+a}}{2^k\ k\,!}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto e^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a\ e^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple $(p,\ q)$ de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\ e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

A SUIVRE

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left|t^a\, e^{-t^2/2} - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\, n\,!}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\, k\,!\,(2\,k+a+1)}\right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n\, n\,!\,(2\,n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\, k\,!\,(2\,k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de $\varphi(a)$*

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, \frac{x^{2k}}{2^k\, k\,!\,(2\,k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\, p^{a-3}\, e^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left|f_a(x) - x^{a-1}\, e^{-x^2/2}\right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k\, k\,!\,(2\,k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?

FIN

page 386 14 - 1992
H. E. C Option Générale M I

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1992

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Mardi 12 mai 1992, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

-. Règles graduées.
-. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul donné.

On se propose d'étudier un algorithme de calcul d'une valeur approchée de $\tan\theta$ à 10^{-N} près, où θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, n'utilisant que des additions, des multiplications par des puissances de 10, une seule division et des tests de comparaison entre nombres réels (les soustractions éventuelles étant comptabilisées comme des additions).

On rappelle que si a et b sont des nombres réels appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

PARTIE I

L'objet de cette partie est d'étudier une suite $(\alpha_n)_{0 \leq n \leq N+1}$ d'éléments de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

1. *Étude de la fonction tangente*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervelle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donner l'allure de sa représentation graphique C sur cet intervalle. On précisera les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer qu'un algorithme de calcul approché de $\tan\theta$ lorsque θ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ permet le calcul approché de $\tan\theta$ pour tout nombre réel θ tel que $\tan\theta$ soit défini.

2. *Étude de la fonction réciproque de la fonction tangente*

a) Montrer que la fonction tangente définit une bijection strictement croissante f de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Dans toute la suite, on note g la fonction réciproque de f (appelée fonction arc tangente). Donner l'allure de sa représentation graphique.

b) Prouver que g est de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et que, pour tout nombre réel t :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

c) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel p :

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^p t^{2p} + (-1)^{p+1}\frac{t^{2p+2}}{1+t^2}$$

d) En déduire que, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq g(x) \leq x \qquad (1)$$

e) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + R_p(x) \qquad \text{où} \quad |R_p(x)| \leq \frac{x^{2p+3}}{2p+3} \qquad (2)$$

3. *Construction de la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$*

a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N, il existe un élément α_n et un seul de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\tan\alpha_n = 10^{-n}$. Préciser la valeur de α_0.

b) On convient de poser $\alpha_{N+1} = 0$. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$ est strictement décroissante.

c) Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, il existe un nombre entier naturel n et un seul compris entre 1 et $N+1$ tel que $\alpha_n \leq x < \alpha_{n-1}$.

4. *Étude de la suite $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N+1}$*

a) Prouver que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$g(10\,x) < 10\,g(x)$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à $N-1$:

$$\alpha_n < 10\,\alpha_{n+1} \qquad (3)$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à N :

$$\frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{3\times 10^{2n}}\right) \leq \alpha_n \leq \frac{1}{10^n}$$

page 388 3/4 - 1992
H. E. C Option Générale Math 1

c) En déduire que, dans l'inégalité (3), on ne peut pas remplacer 10 par un nombre strictement plus petit (indépendant de n et de N).

d) En déduire aussi que, pour tout nombre entier naturel n compris entre 1 et $N-1$:

$$9\,\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \tag{4}$$

e) Prouver enfin que :

$$7\,\alpha_1 \leq \alpha_0 < 8\,\alpha_1 \tag{5}$$

5. *Algorithme de calcul de valeurs approchées des nombres α_n*

Soit K un nombre entier naturel non nul. À partir de la relation (2), indiquer un algorithme de calcul d'une valeur approchée de α_n, où $1 \leq n \leq N$, à la précision 10^{-K}.

Montrer qu'on peut prendre pour p le plus petit des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à $\dfrac{K-3}{2\,n}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que les nombres $\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_N$ sont connus avec une précision suffisante pour qu'on puisse négliger dans les calculs l'influence des erreurs commises sur leurs valeurs.

PARTIE II

On suppose désormais donné un élément θ de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et on construit une suite $(\theta_n)_{n\geq 0}$ de valeurs approchées de θ de la forme $\theta_0 = 0$ et :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

où, pour tout nombre entier naturel non nul k, $h(k)$ est un entier compris entre 1 et $N+1$. On approche alors $\tan\theta$ à l'aide de la suite $(\tan\theta_n)$ et on indique un algorithme de calcul des nombres $\tan\theta_n$.

1. *Construction de la suite (θ_n)*

a) Montrer qu'on peut construire une application h et une seule de $\mathbb{N}$ dans $[0, \ldots,\ N+1]$ telle que :

$$h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad h(k) \geq 1 \quad \text{pour } k \geq 1$$
$$\alpha_{h(1)} \leq \theta < \alpha_{h(1)-1}$$
$$\alpha_{h(n)} \leq \theta - \left[\alpha_{h(1)} + \cdots + \alpha_{h(n-1)}\right] < \alpha_{h(n)-1} \qquad \text{pour tout entier } n \geq 2$$

b) Établir que l'application h est croissante et que $h(n)$ est égal à $N+1$ dès que n est assez grand.

Dans toute la suite, on note m le nombre entier naturel tel que $h(m) < N+1$ et $h(n) = N+1$ pour $n \geq m+1$.

c) Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$\theta_n = \alpha_{h(1)} + \alpha_{h(2)} + \cdots + \alpha_{h(n)}$$

On convient de poser $\theta_0 = 0$.

Montrer que l'obtention de $h(1), h(2), \ldots, h(m)$ et de $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_m$ ne nécessite que des additions et des tests de comparaison.

2. *Propriétés de la suite (θ_n)*

a) Établir que $\theta_n < \theta_m$ pour $n < m$ et $\theta_n = \theta_m$ pour $n \geq m$.

b) Montrer que $\theta_m \leq \theta < \theta_m + \alpha_N$.

c) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire que :

$$\tan\,\theta_m \leq \tan\,\theta < \tan\,\theta_m + 2\cdot 10^{-N}$$

Ainsi, le nombre réel $\tan\,\theta_m + 10^{-N}$ est une valeur approchée de $\tan\,\theta$ à 10^{-N} près.

3. On étudie dans cette question un algorithme permettant d'obtenir $\tan\,\theta_m$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, on pose $k_n = 10^{-h(n)}$. Montrer que, pour $1 \leq n \leq m$:

$$\tan\,\theta_n = \frac{\tan\,\theta_{n-1} + k_n}{1 - k_n \tan\,\theta_{n-1}}$$

b) On considère les $m+1$ couples de nombres réels définis par $(a_0,\ b_0) = (1,\ 0)$ et, pour $1 \leq n \leq m$:

$$(a_n,\ b_n) = (a_{n-1} - k_n\, b_{n-1},\ k_n\, a_{n-1} + b_{n-1})$$

Montrer que, pour tout nombre entier naturel n inférieur ou égal à m :

$$\tan\,\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$$

c) Montrer que l'algorithme ainsi décrit permet de déterminer $\tan\,\theta_m$ en n'effectuant que des additions, des multiplications par des puissances de 10 et une seule division.

On précisera en fonction de m le nombre d'additions et le nombre de multiplications par des puissances de 10 ainsi effectuées.

PARTIE III

Dans cette partie, à l'aide des résultats obtenus dans la partie I, on étudie la complexité de l'algorithme décrit dans la partie II.

Pour tout nombre réel x positif ou nul, on note $\mathrm{Int}(x)$ la partie entière de x.

1. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq N$, on désigne par X_k le nombre des entiers naturels non nuls p tels que $h(p) = k$.

a) Établir que $m = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

b) Prouver que $X_1 = \mathrm{Int}\left(\dfrac{\theta}{\alpha_1}\right)$. Montrer que $X_1 \leq 7$.

c) Établir que $X_k = \mathrm{Int}\left(\dfrac{\theta - X_1\,\alpha_1 - \cdots - X_{k-1}\,\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)$ pour $2 \leq k \leq N$. Montrer que $X_k \leq 9$.

d) Montrer enfin que $m \leq 9\,N - 2$.

2. On étudie dans cette question la complexité de l'algorithme donnant $h(1)$, $h(2)$,..., $h(m)$.

a) Soit T_N le nombre de tests de comparaison à effectuer. Exprimer T_N en fonction de X_1, X_2,..., X_N. Donner un majorant de T_N indépendant de θ.

b) Soit A_N le nombre d'additions à effectuer. Exprimer A_N en fonction de X_1, X_2,..., X_N. Donner un majorant de A_N.

3. On détermine à l'aide des algorithmes précédents une valeur approchée de $\tan\,\theta$ à 10^{-N} près. Donner des majorants indépendants de θ des nombres suivants :

a) nombre total de tests de comparaison effectués ;
b) nombre total d'additions effectuées ;
c) nombre total de multiplications par des puissances de 10 effectuées ;
d) nombre total de divisions effectuées.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

jeudi 20 mai 1993, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

- –. Règles graduées.
- –. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par K le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel K^n (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$. On note v_1 le vecteur de K^n dont les composantes dans la base B sont toutes égales à 1.

On rappelle que l'espace vectoriel K^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G, ce qu'on note $K^n = F \oplus G$, si tout vecteur x de K^n peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$, où y appartient à F et z appartient à G. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de K^n, appelé projecteur sur F de direction G.

Enfin, l'application identique de K^n est notée Id.

On se propose d'étudier l'ensemble S_n des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathbf{M}_n(K)$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.)

PARTIE I : *un premier exemple*

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. *a*) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}$; expliciter une base de ce sous-espace vectoriel.

b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \mathrm{Id}$.

c) Établir que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_3)$, $p\,(e_2)$ et $p\,(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On considère la base $B' = (v_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base B'.

b) Pour tout nombre entier naturel non nul k, calculer par récurrence M'^k.

c) Déterminer la matrice de passage C de la base B à la base B'. Calculer son inverse.

d) Déduire de ces résultats l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question **1.**

PARTIE II : *un second exemple*

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base B est la matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *a*) Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{Id}$.

b) Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \mathrm{Id}$, puis établir que c'en est une base.

c) Établir que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p\,(v_1)$, puis $p\,(e_1), p\,(e_2), \ldots, p\,(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base B.

e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$. Établir que $p + q = \mathrm{Id}$, et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base B.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

PARTIE III : ***étude du cas général***

1. Soit V_1 la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1.

a) Montrer qu'une matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n, le produit AB appartient encore à S_n, de même que les puissances positives de A et B.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. En déduire que :

$$\dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\,(u) = n$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base B est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on convient de noter :

$$\| x \| = \max\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$$

On remarquera que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $\mathbf{C}^n$, $\| x + x' \| \leq \| x \| + \| x' \|$.

3. *a*) Établir que, pour tout élément x de $\mathbf{C}^n$, $\| f(x) \| \leq \| x \|$.

b) En déduire que les modules de toutes les valeurs propres de f sont inférieurs ou égaux à 1. Montrer que 1 est valeur propre de f.

4. *a*) Soit y un élément de $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id}) \cap \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$, écrit sous la forme $f(x)-x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer $f^k(x)$ en fonction de k, x et y.

Déduire du **3.** *a*) que $k\,|y| \leq 2\,|x|$, puis prouver que y est nul.

b) Déduire des questions précédentes que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f-\mathrm{Id}) = \mathbf{C}^n$.

c) Montrer que, pour tout élément x de $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$, $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

On suppose désormais que l'endomorphisme f est diagonalisable.

5. *a*) Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f autres que 1 est égale à $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

b) On complète une base $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$ en une base $B' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées par modules décroissants ($1 = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$), associées à ces vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Soit D la matrice associée à f dans la base B'.

Prouver que la suite (M^k) converge si et seulement si la suite (D^k) converge.

c) En déduite que la suite (M^k) converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

d) Dans ces conditions, montrer que la limite de la suite (M^k) est la matrice associée dans la base B au projecteur sur $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$ de direction $\operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Que permet de préciser le résultat établi dans la partie I ?

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION GENERALE

vendredi 20 mai 1994, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées :

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

L'objet du problème est l'étude d'une approximation de $\ln(n!)$ pour les grandes valeurs de l'entier n.

Dans la partie I, on établit des majorations qui seront utilisées dans les parties II et III.
Dans la partie II, on étudie une suite permettant d'obtenir une première approximation de $\ln(n!)$.
Dans la partie III, on établit deux évaluations plus précises de $\ln(n!)$ puis une approximation générale.
Enfin, dans la partie IV, on étudie un algorithme permettant d'expliciter cette approximation générale.
Cette dernière partie utilise uniquement les notations et les résultats de la partie III.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1.

Étant donnés deux entiers i et j tels que $0 \leqslant j \leqslant i$, on note $C_i^j = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ avec la convention usuelle $0! = 1$.

PARTIE I.

1. Vérifier que : $\forall t \neq 1 \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

En déduire : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\big(1 - \frac{1}{k}\big) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t}\,dt$

puis que : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\big(1 - \frac{1}{k}\big) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

2. On désigne par M un réel positif et on envisage une série réelle $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$ dont le terme général z_k vérifie $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+2}}$.

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} z_k$.

Prouver que : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall m \geqslant n+1 \quad \dfrac{1}{(n+1)^{p+2}} + \dfrac{1}{(n+2)^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{k^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{m^{p+2}} \leqslant \displaystyle\int_n^m \frac{dt}{t^{p+2}}$.

En déduire : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall m \geqslant n+1 \quad \dfrac{1}{(n+1)^{p+2}} + \dfrac{1}{(n+2)^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{k^{p+2}} + \ldots + \dfrac{1}{m^{p+2}} \leqslant \dfrac{1}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$.

puis que : $\forall n \geqslant 1 \quad \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} z_k\Big| \leqslant \dfrac{M}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$.

PARTIE II : une première approximation de $\ln(n!)$.

1. *Expression de $\ln(n!)$ à l'aide d'une suite.*

a. On considère la suite $(v_k)_{k\geqslant 2}$ définie par $v_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\,dt$.

Prouver que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k + \displaystyle\int_1^n \ln t\,dt$.

Expliciter $\displaystyle\int_1^n \ln t\,dt$.

b. Établir que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln k - \ln(k-u)\big)\,du$.

En déduire que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \dfrac{1}{2}\big(\ln k - \ln(k-1)\big) - \displaystyle\int_0^1 \frac{u - 1/2}{k-u}\,du$.

Dans la suite de cette partie on pose $w_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}\,du$ pour $k \geqslant 2$.

c. Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + 1 - \sum\limits_{k=2}^{n} w_k$

2. *Étude de la suite $(w_k)_{k\geqslant 2}$.*

Prouver que $w_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}\,du$ pour $k \geqslant 2$.

En déduire que $0 \leqslant w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} w_k$ converge. On admettra que sa somme a pour valeur $1 - \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

On note désormais, dans toute la suite du problème, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

3. *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.

Montrer que : $\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n.$ *(1)*

4. *Majoration du reste* ε_n.

En utilisant la seconde question de la première partie, établir que : $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

PARTIE III : une approximation générale de $\ln(n!)$.

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$.

1. *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.

À l'aide de l'égalité *(1)* de la partie II, établir que :

$\forall k \geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = -(k - \dfrac{1}{2})\ln(1 - \dfrac{1}{k}) - 1.$

Déduire de la question 1. de la partie I que :

$\forall k \geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{b_i}{k^{i+1}} + \dfrac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ avec $b_i = \dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $|\delta(k)| \leqslant 1$ *(2)*.

2. *Une première évaluation de* ε_n.

Dans cette question, on fixe $p = 1$ de sorte que *(2)* s'écrit $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2} + \dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{c_1}{k}$, c_1 désignant un nombre réel.

a. Montrer que : $\forall k \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{1-\frac{1}{k}} = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{\beta(k)}{k^2}$ avec $0 \leqslant \beta(k) \leqslant 2$.

b. Déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^3}$ pour $k \geqslant 2$.

Le réel c_1 étant ainsi choisi, établir que :

$\forall n \geqslant 1 \quad \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\Big| \leqslant \dfrac{7}{12n^2}.$

c. Prouver que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$ et en déduire :

$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{\lambda_1(n)}{n^2}$ avec $|\lambda_1(n)| \leqslant \dfrac{7}{12}$.

3. *Une seconde évaluation de* ε_n.

Dans cette question, on fixe $p = 2$ de sorte que *(2)* s'écrit $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2} + \dfrac{1}{12k^3} + \dfrac{\delta(k)}{k^4}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{1}{12k} - \dfrac{c_2}{k^2}$, c_2 désignant un nombre réel.

a. Montrer que :

$\forall k \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{1-\frac{1}{k}} = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{\beta_1(k)}{k^3}$ avec $0 \leqslant \beta_1(k) \leqslant 2$.

À l'aide de la question 2.a., prouver que :

$\forall k \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{(1-\frac{1}{k})^2} = 1 + \dfrac{2}{k} + \dfrac{\beta_2(k)}{k^2}$ avec $0 \leqslant \beta_2(k) \leqslant 8$.

b. Vérifier que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad r_{k-1} - r_k = \frac{-2c_2}{k^3} + \left(\delta(k) - \frac{1}{12}\beta_1(k) - c_2\beta_2(k)\right)\frac{1}{k^4}.$$

Déterminer c_2 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^4}$ pour $k \geqslant 2$.

c. Prouver que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_2(n)}{n^3} \quad \text{avec } |\lambda_2(n)| \leqslant \frac{7}{18}.$$

Désormais, dans toute la suite du problème, p désigne un entier fixé non nul.

4. *Étude d'un système auxiliaire.*

Les réels $b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant définis dans la première question de cette partie, on envisage le système S de p équations linéaires aux p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et A la matrice carrée d'ordre p dont l'élément $a_{i,j}$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est $a_{i,j} = C_i^{j-1}$ pour $j \leqslant i$ et $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.

Que valent les éléments diagonaux de A ?

Montrer que S admet une solution et une seule que l'on notera $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$.

5. *Évaluation asymptotique de ε_n.*

On pose dans cette question $r_k = \varepsilon_k - \sum\limits_{q=1}^{p} \dfrac{c_q}{k^q}$ pour $k \geqslant 1$, $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ étant la solution du système précédent.

a. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à un ordre convenable à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^q}$, q désignant un entier compris entre 1 et p, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = 1 + C_q^1\frac{1}{k} + C_{q+1}^2\frac{1}{k^2} + \ldots + C_p^{p-q+1}\frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{q(q+1)\ldots(p+1)}{(p-q+1)!}\int_0^{1/k}\frac{(1/k - t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt.$$

Prouver que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{1/k}\frac{(1/k - t)^{p-q+1}}{(1-t)^{p+2}}\,dt \leqslant \left(\frac{k}{k-1}\right)^{p+2}\int_0^{1/k} u^{p-q+1}\,du.$

En déduire que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \frac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} = 1 + C_q^1\frac{1}{k} + C_{q+1}^2\frac{1}{k^2} + \ldots + C_p^{p-q+1}\frac{1}{k^{p-q+1}} + \frac{\beta_q(k)}{k^{p-q+2}} \quad \text{avec } 0 \leqslant \beta_q(k) \leqslant C_{p+1}^{q-1}\,2^{p+2}.$$

b. En remarquant que $\sum\limits_{q=1}^{p}\dfrac{c_q}{(k-1)^q} - \sum\limits_{q=1}^{p}\dfrac{c_q}{k^q} = \sum\limits_{q=1}^{p}\dfrac{c_q}{k^q}\left(\dfrac{1}{(1-\frac{1}{k})^q} - 1\right)$, montrer que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad \sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{(k-1)^q} - \sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{k^q} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{k^{i+1}} + \Big(\sum_{q=1}^{p}c_q\beta_q(k)\Big)\frac{1}{k^{p+2}} \quad \text{avec } \mu_i = \sum_{j=1}^{i}a_{i,j}c_j.$$

c. On pose $m_p = \operatorname{Max}(|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_p|)$ et $M_p = 1 + 2^{2p+3}m_p$.

Prouver que :

$$\forall k \geqslant 2 \quad |r_{k-1} - r_k| \leqslant \frac{M_p}{k^{p+2}}.$$

d. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{q=1}^{p}\frac{c_q}{n^q} + \frac{\lambda_p(n)}{n^{p+1}} \quad \text{avec } |\lambda_p(n)| \leqslant \frac{M_p}{p+1}.$$

PARTIE IV : étude d'un algorithme.

On se propose d'étudier dans cette partie un algorithme de calcul des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_p$ intervenant dans l'approximation de $\ln(n!)$.
On rappelle que ces coefficients constituent la solution du système S défini dans la question 4 de la partie III.

On appelle *coût* d'un algorithme le nombre total d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions effectuées au cours de la mise en œuvre de l'algorithme.

L'entier p étant déclaré en constante, on effectue les déclarations suivantes :

```
type  vecteur : array[1..p] of real;
      matrice : array[1..p,1..p] of real;
var   B,C     : vecteur;
      A       : matrice;
```

1. Écrire `Procedure SecondMembre(var B : vecteur)` dont le rôle consiste à calculer le second membre B du système S.

Déterminer un équivalent de son *coût* lorsque p tend vers $+\infty$.

2. On envisage la procédure suivante :

```
procedure Coefficients(var A : matrice);
var i,j : integer;
begin
  A[1,1]:=1;
  for j:=2 to p do A[1,j]:=0;
  for i:=2 to p do begin
    A[i,1]:=1;
    for j:=2 to i-1 do A[i,j]:=A[i-1,j-1]+A[i-1,j];
    A[i,i]:=i;
    for j:=i+1 to p do A[i,j]:=0;
  end;
end;
```

Expliquer le rôle de cette procédure.

Déterminer un équivalent de son *coût* lorsque p tend vers $+\infty$.

3. Écrire `procedure Approximation(A:matrice;B:vecteur;var C:vecteur)` de sorte que, après les appels de `SecondMembre(B)` et de `Coefficients(A)`, l'appel de `Approximation(A,B,C)` produise `C` tel que `C[i]`$=c_i$ pour i de 1 à p.

Déterminer un équivalent de son *coût* lorsque p tend vers $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent, lorsque p tend vers $+\infty$, du *coût* total de détermination des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ (où le nombre entier m est supérieur ou égal à 2) vérifiant certaines relations.

Dans toute la suite, si f désigne un tel endomorphisme et k un entier strictement positif, on note f^k la composée $\underbrace{fof\ldots of}_{k\text{ fois}}$. Enfin on désigne par I l'application identité de $\mathbf{R}^m$ et par I_m la matrice identité d'ordre m.

On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G si tout vecteur x de $\mathbf{R}^m$ peut se décomposer de manière unique sous forme $x = y + z$, avec y et z appartenant respectivement à F et G. L'application qui à x associe cet unique vecteur y est le projecteur de $\mathbf{R}^m$ sur F dans la direction G.

PARTIE I.

On considère dans cette partie un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I) \qquad (1)$$

1. Recherche de solutions particulières de (1).

Déterminer les réels α tels que $f = \alpha I$ vérifie (1).

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

a. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de I et de f.
Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$.

Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n d'une part et entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n d'autre part.
En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f + b_n I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$.

Calculer p^2 et en déduire que p est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de I.

3. Étude des éléments propres de f et des solutions de (1).

a. Soit λ une valeur propre de f. En appliquant la relation (1) à un vecteur propre non nul x de f associé à λ, établir que λ vérifie l'équation $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. En déduire les valeurs propres éventuelles de f.

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(f - I)$ et $z \in \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide de y et z puis y et z en fonction de x et $f(x)$.

En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, que p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et que f est diagonalisable.

c. On pose $r = \dim \operatorname{Ker}(f - I) \qquad (0 \leqslant r \leqslant m)$.

Déterminer f lorsque $r = 0$ ou $r = m$.

On suppose désormais $0 < r < m$.
Écrire la matrice M de f dans une base de $\mathbf{R}^m$ obtenue par réunion d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et d'une base $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_m)$ de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$.

d. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_m)$.

e. Calculer $(f + \frac{1}{2}I)o(f - I)$.

En déduire que $\mathrm{Im}(f - I)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, p est aussi le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - I)$ dans la direction $\mathrm{Im}(f - I)$.

PARTIE II.

1. Étude d'une suite récurrente.

On étudie dans cette question la convergence des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1} + u_n}{3} \qquad (2)$$

a. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $r^3 = \dfrac{r^2 + r + 1}{3}$. On précisera ses racines et l'on notera α et $\overline{\alpha}$ ses racines complexes conjuguées.

b. Déterminer les suites géométriques $(r^n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation (2).

c. On associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation (2) le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = u_0 \\ x + \alpha y + \overline{\alpha} z = u_1 \\ x + \alpha^2 y + \overline{\alpha}^2 z = u_2 \end{cases}$$

- En formant la combinaison linéaire $3u_2 + 2u_1 + u_0$ exprimer x en fonction de u_0, u_1, u_2 et montrer que le système précédent admet une solution (x, y, z) et une seule. (On ne demande pas le calcul des inconnues y et z.)

- Établir par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $u_n = x + y\alpha^n + z\overline{\alpha}^n$.

- Déterminer le module de α et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

On considère désormais un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I) \qquad (3)$$

2. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

On suppose dans cette question que les endomorphismes I, f et f^2 sont linéairement indépendants.

a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un triplet (a_n, b_n, c_n) de nombres réels et un seul tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $0 \leqslant n \leqslant 2$ et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n pour $n \in \mathbf{N}$.

b. Prouver que les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifient la relation (2).
En déduire les limites $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ et $c = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$ de ces trois suites.

c. On convient d'appeler limite de $f_n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$ l'endomorphisme $q = af^2 + bf + cI$.
Établir que q est un projecteur.

d. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de f^2, f et I.

3. Étude du projecteur q.

a. Déterminer les valeurs propres réelles éventuelles de f.
Existe-t-il un endomorphisme diagonalisable vérifiant (3) ?

b. On suppose donné un vecteur x de $\mathbb{R}^m$ écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(f - I)$ et $z \in \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
Exprimer y et z en fonction de x, $f(x)$ et $f^2(x)$.
En déduire que $\mathbb{R}^m$ est somme directe de $\operatorname{Ker}(f - I)$ et de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$, et que q est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

c. Calculer $(3f^2 + 2f + I)o(f - I)$.
En déduire que $\operatorname{Im}(f-I)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$, et, en comparant les dimensions de ces deux sous-espaces, prouver leur égalité.
Ainsi donc, q est aussi le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ dans la direction $\operatorname{Im}(f - I)$.

4 Étude des solutions de (3)

a. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.
Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Montrer que $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geqslant 2$.

b. On suppose dans cette question que $m = 2$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\operatorname{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

c. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.
Soit e_2 un vecteur de $\operatorname{Ker}(3f^2+2f+I)$ tel que la famille $\big(e_1, f(e_1), e_2\big)$ soit libre. Montrer que $\big(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)\big)$ est encore une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geqslant 4$.

d. On suppose dans cette question que $m = 3$. Ainsi f est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les dimensions possibles de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et de $\operatorname{Ker}(f - I)$.
En déduire qu'il existe des bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$?

e. Étudier de la même manière le cas $m = 4$ en précisant les formes possibles de la matrice de l'endomorphisme f dans des bases convenables de $\mathbb{R}^4$.

f. On suppose désormais $\dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2q$ avec q entier naturel non nul.
Soit $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q)\big)$ une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. On peut donc trouver un vecteur e_{q+1} appartenant à $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}\big)$ soit encore une famille libre.
Montrer que $\big(e_1, f(e_1), \ldots, e_q, f(e_q), e_{q+1}, f(e_{q+1})\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et en déduire que la dimension de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est paire.

g. On pose $2r = \dim \operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I) \qquad (0 \leqslant 2r \leqslant m)$.
Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans une base de $\mathbb{R}^m$ obtenue par réunion d'une base convenable de $\operatorname{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(f - I)$.

h. Réciproquement, vérifier que la matrice M obtenue précédemment satisfait bien la relation $M^3 = \dfrac{1}{3}(M^2+M+I_m)$.

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I
OPTION SCIENTIFIQUE

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ du segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$

Dans la partie I, on étudie le polynôme $P_n(x) = (x^2-1)^n$, ses dérivées successives $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée n^{eme} : $P_n^{(n)}$.
La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul d'une valeur approchée de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

PARTIE I.

1. ***Étude des racines de P_n et de ses dérivées.***

a. Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j}Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.
En déduire les valeurs en -1 et en 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

b. Énoncer avec précision le théorème de Rolle. Établir que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1,1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.
Démontrer que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.

c. En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Dans toute la suite du problème, ces racines sont notées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ avec $-1 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$.

2. ***Calcul d'une intégrale auxiliaire.***

On pose, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels :

$$W(p,q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p(t+1)^q \,\mathrm{d}t$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1,q-1)$ et $W(p,q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

b. En déduire que $W(n,n) = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. ***Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées.***

Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

a. Établir rigoureusement l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)P_n(t)\,dt$$

b. Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,dt$ lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

c. Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer $\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 dt$ en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

PARTIE II.

1. ***Polynôme d'interpolation de Lagrange de f.***

On pose désormais pour tout entier j compris entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-r_i}{r_j-r_i} \qquad\qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)\,dt$$

a. Calculer $L_j(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j.
En déduire que $\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à n.

b. Expliciter, dans la base précédente, un polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n et prouver qu'un tel polynôme est unique.

c. Établir l'égalité $\int_{-1}^{1} A_n(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\mathfrak{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ l'intégrale $\mathfrak{I}(A_n) = \int_{-1}^{1} A_n(t)dt$ que l'on notera $\mathfrak{I}_n(f)$ dans toute la suite du problème.

En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathfrak{I}(f)$ le nombre réel $\mathfrak{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, f(r_j)$.

2. ***Comparaison de $\mathfrak{I}(P)$ et de $\mathfrak{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.***

Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $deg(P)$.
Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

a. On suppose que $deg(P) < n$. Comparer $\mathfrak{I}(P)$ et $\mathfrak{I}_n(P)$.

b. On suppose que $deg(P) < 2n$.
- Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :

$$P = Q\,P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad deg(R) < n$$

- Montrer que $deg(Q) < n$.
- Déduire des résultats de la partie I que $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(R)$.
- Comparer $\mathfrak{I}(P)$ et $\mathfrak{I}_n(P)$.

3. ***Polynôme d'interpolation de Hermite de f.***

a. À tout polynôme H de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$, on associe l'élément $\varphi(H) = \Big(H(r_1), H'(r_1), H(r_2), H'(r_2), \ldots, H(r_n), H'(r_n)\Big)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Établir que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et déterminer son noyau.

On rappelle qu'un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

b. En déduire qu'il existe un polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ et un seul tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B'_n(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

c. Déduire des résultats précédents que $\mathfrak{I}(B_n) = \mathfrak{I}_n(f)$.

4. ***Majoration de*** $\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big|$.

Soit $M_{2n}(f)$ le maximum de $|f^{(2n)}(t)|$ lorsque t décrit le segment $[-1, 1]$.

Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1, 1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

On considère alors l'application g_x définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha\left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$

où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.

a. En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles à préciser, prouver que g'_x s'annule en au moins n points de $]-1, 1[$ distincts de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

b. Calculer $g'_x(r_1), g'_x(r_2), \ldots, g'_x(r_n)$.

Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1, 1]$.

c. Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

d. À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que $f(x) - B_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} f^{(2n)}(c)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$.

e. Prouver que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$\big|f(x) - B_n(x)\big| \leqslant \frac{(n!)^2}{\big((2n)!\big)^3} M_{2n}(f)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non, égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Déduire alors des résultats des parties I et II que :

$$\big|\mathfrak{I}(f) - \mathfrak{I}_n(f)\big| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2}\,\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

f. On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe C^{2n} sur un segment $[a, b]$. On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $|g^{(2n)}(u)|$ lorsque u décrit le segment $[a, b]$.

En envisageant l'application f définie sur $[-1, 1]$ par $f(t) = g\Big(\dfrac{a+b}{2} + t\,\dfrac{b-a}{2}\Big)$, donner en fonction de a, b, n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\left|\int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\, g\Big(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\Big)\right|$$

5. ***Étude d'un cas particulier.***
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

a. Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = \mathfrak{I}(L_1)$ et $\lambda_2 = \mathfrak{I}(L_2)$.

b. En appliquant la majoration obtenue au II.4.c., montrer que :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2} \left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right) \right| \leqslant \frac{M_4(g)\,(b-a)^5}{4320}$$

c. On considère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a, b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux $c_1, c_2, \ldots, c_p$.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b g(u)\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p} \sum_{k=1}^{p} \left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) \right) \right|$$

d. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.

FIN

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

lundi 5 mai 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

On désigne par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est concave si, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Dans la partie **I** on établit quelques propriétés très classiques des fonctions concaves utilisées dans la suite du problème. Les parties **II** et **III** sont consacrées à un modèle traitant de problèmes financiers.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et f une fonction de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}$. On dit que f présente un maximum en un point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si, pour tout x de $\mathbf{R}^n$, on a $f(x) \leq f(x_0)$.

I

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave. En s'appuyant sur un dessin, donner une interprétation graphique de la concavité de f. Que peut-on dire de la fonction $-f : x \to -f(x)$?

2. On considère dans cette question une fonction $f \in \mathcal{E}$. Le but de cette question est de prouver que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$.

a. On suppose que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) \leq 0$. Etablir que f est concave.

b. Réciproquement, on suppose que f est concave. Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

En déduire que $f''(x) \leq 0$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction concave et x_0 un réel tel que $f'(x_0) = 0$. Montrer que f présente un maximum en x_0.

4. Soit $g \in \mathcal{E}$. On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout réel x, on a: $g''(x) \leq -\alpha$. Prouver que g présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Est-il unique en général ?

5. Exemple.

a. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}$ telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -x^2 e^{-x}$. (On pourra intégrer par parties).

b. Parmi les fonctions du **a**, déterminer toutes celles présentant un maximum sur $\mathbf{R}$.

6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction concave, et p un entier naturel supérieur ou égal à 1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i = 1$, et $x_1, \ldots, x_p$ des nombres réels. Etablir que:

$$f\left(\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i f(x_i)$$

II

Etude d'un modèle financier simplifié.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble fini des résultats possibles susceptibles de se produire à la Bourse. On considère un investisseur $\mathcal{S}$ se donnant, d'une part un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω, et d'autre part une fonction **concave** $u \in \mathcal{E}$, dite "fonction d'utilité". On suppose qu'entre deux variables (ou revenus) aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles, W_1 et $W_2 : \Omega \to \mathbf{R}$, $\mathcal{S}$ préfère W_1 à W_2 si $E(u(W_1)) \geq E(u(W_2))$, où $E(u(W_1))$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $u(W_1)$.

1. Soit $W : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Etablir une inégalité entre $E(u(W))$ et $u(E(W))$. En déduire le choix de l'investisseur $\mathcal{S}$ entre W et la variable aléatoire égale à la constante $E(W)$.

On considère maintenant un réel positif R_0 et une variable aléatoire $R_1 : \Omega \to \mathbf{R}$. A chaque réel x on associe la variable aléatoire $W(x) : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$W(x) = (1-x)R_0 + xR_1$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de deux natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision x de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1-x$ des titres à revenu fixe R_0 et pour x des titres à revenu aléatoire R_1 (x étant quelconque, les sommes x ou $1-x$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives). La variable aléatoire $W(x)$ représente donc le revenu associé à la décision x.

L'investisseur suppose, *dans cette partie* **II** *seulement*, que la variable aléatoire R_1 ne prend que deux valeurs: R_0+a avec probabilité $\frac{1}{2}$ et R_0-b avec probabilité $\frac{1}{2}$, où a et b sont deux réels strictement positifs fixés.

2. Donner, pour chaque réel x, une expression simple de $f(x)=E\big(u(W(x))\big)$. La fonction f ainsi définie est-elle concave?

3. On suppose que la fonction dérivée u' possède en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une limite finie strictement positive notée k_1 (resp. k_2). Vérifier que $k_1 \leq k_2$.

a. On suppose que:

$$\frac{k_1}{k_2} < \frac{a}{b} < \frac{k_2}{k_1}$$

Montrer que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$.

b. On suppose que f présente un maximum sur $\mathbf{R}$. Montrer que:

$$\frac{k_1}{k_2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{k_2}{k_1}$$

III

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel défini par: $< x, y >= \sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i$ pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ de $\mathbf{R}^3$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}$. Enfin, on dit qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ est concave si, pour tout x, y de $\mathbf{R}^3$ et tout réel $\lambda\in[0,1]$, on a:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

1. Prouver qu'une fonction $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ est concave si et seulement si, pour tous vecteurs x et h de $\mathbf{R}^3$, la fonction $\phi_{x,h}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, définie par $\phi_{x,h}(t)=f(x+th)$, est concave.

2. On reprend les notations de la question précédente et on suppose que $f\in\mathcal{F}$. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_3}$. De même, les dérivées partielles du second ordre de f sont notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, où $i,j\in\{1,2,3\}$.

a. Soit $(x,h)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$. Exprimer pour chaque réel t, les dérivées première et seconde $\phi'_{x,h}(t)$ et $\phi''_{x,h}(t)$, de l'application $\phi_{x,h}$, en fonction des dérivées partielles de f.

b. Soit x un vecteur de $\mathbf{R}^3$, on note A_x la matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels:

$$A_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$$

Par abus d'écriture A_x désignera également l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A_x dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrer que si les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles alors, pour tout h de $\mathbf{R}^3$, $< A_x(h), h > \leq 0$. La réciproque est-elle vraie ou fausse?

c. Montrer que f est concave si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, les valeurs propres de A_x sont négatives ou nulles.

d. Déterminer les réels λ tels que la fonction f de $\mathcal{F}$ définie par la relation:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_3 - x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2$$

soit concave.

3. Soit f une fonction concave de $\mathcal{F}$ et $y_0 \in \mathbf{R}^3$, tels que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y_0) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. Prouver que f présente un maximum en y_0.

4. On considère dans cette question une fonction concave f de $\mathcal{F}$ et c un nombre réel.

a. Montrer que si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,1,c) \leq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,1,c) \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0,1,c) = 0$$

alors $(0, 1, c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda} = [0, +\infty[\times]-\infty, 1] \times \mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, $f(x_1, x_2, x_3) \leq f(0, 1, c)$. (Pour chaque $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{\Lambda}$, on pourra considérer la fonction de la variable réelle $t, t \mapsto f(tx_1, 1 + t(x_2 - 1), c + t(x_3 - c))$).

b. On suppose au contraire que l'une des trois conditions du **a** n'est pas vérifiée. Etablir que $(0, 1, c)$ ne maximise pas f sur $\mathbf{\Lambda}$.

5. Etude d'un autre modèle financier simplifié.

On considère un investisseur $\mathcal{S}$, travaillant dans un univers boursier comme dans la partie **II**. Il se donne une fonction d'utilité concave $u \in \mathcal{E}$ et un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. On considère maintenant un réel positif R_0 et trois variables aléatoires définies sur Ω, à valeurs réelles, R_1, R_2, R_3.

Pour chaque $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ on définit une nouvelle variable aléatoire sur Ω en posant

$$W(y) = R_0 + \sum_{k=1}^{3} (R_k - R_0) y_k$$

L'investisseur $\mathcal{S}$ se place en tant qu'acheteur ou vendeur de titres de quatre natures, engageant *globalement* une somme unité. La décision $y = (y_1, y_2, y_3)$ de l'investisseur $\mathcal{S}$ consiste à engager cette somme unité, en négociant pour $1 - y_1 - y_2 - y_3$ des titres à revenu fixe R_0 et pour y_k (k variant de 1 à 3) des titres à revenu aléatoire R_k. La variable aléatoire $W(y)$ représente donc le revenu associé à la décision y. Les sommes y_1, y_2, y_3 et $1 - y_1 - y_2 - y_3$ correspondent à un achat si elles sont positives, à une vente si elles sont négatives.

a. Exprimer $f(y) = E(\, u(W(y))\,)$ en fonction des valeurs de R_1, R_2 et de R_3 sur Ω. Etablir que f est concave. Est-ce que $f \in \mathcal{F}$?

b. On suppose que $\mathcal{S}$ adopte les contraintes: $y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 1$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel c, pour que $(0, 1, c)$ maximise f sur l'ensemble $\mathbf{\Lambda}$ défini à la question **4.a**.

FIN

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme; ce dernier est explicitement défini dans la partie II.

Notations.

Pour tout entier naturel n non nul on notera par I_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites numériques, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ signifiera que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I. Quelques résultats préliminaires.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1) a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :
$$\forall P(X) \in \mathbf{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$
est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

2) On suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ appartiennent à $\mathbf{R}^{n+1}$ et vérifient :
$$\forall p \in \{0, \dots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k a_k$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0\ \ a_1\ \ \dots\ \ a_n)$, $(b_0\ \ b_1\ \ \dots\ \ b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres $b_0, \dots, b_k$.

B

Dans cette sous-partie $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[1, +\infty[$, telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ soit divergente et $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

1) On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant q < N$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant q$, on a : $g(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(n)$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leqslant \int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t + g(q)$.

2) On considère un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geqslant c$ tel que $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant (1+\varepsilon)g(n)$ dès que $n \geqslant q$.

b) En déduire que, pour tout entier $N > q$:
$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,\mathrm{d}t + w_q \leqslant w_N \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$$

3) Montrer que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t$.

4) En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Partie II. Etude d'un algorithme.

Dans cette partie n désignera un entier naturel non nul.
On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) une constante entière $C \geqslant 2$.
2) un type `tableau=array[1..C] of integer ;`

L'introduction de la constante `C` n'étant faite que pour pouvoir définir le type `tableau`, on pourra la considérer aussi grande que l'on veut.
On considère alors la procédure suivante.

```
procedure Recherche(n :integer ; t :tableau ; var max :integer) ;
     var i :integer ;
          begin
               max :=t[1] ;
               for i :=2 to n do
                         begin
                         if t[i]>max then max :=t[i] ;
                         end ;
          end ;
```

1) Quel sera le contenu de la variable **max** après l'appel dans le programme principal de `Recherche(10,t,max)` ?

2) On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose que ces nombres sont affectés aux n premières "cases" de `t`, variable de type `tableau`, (un entier par case).
   a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` ?

   Pour tout i appartenant à I_n, on note par $V(i,n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" `t[1], ..., t[n]` tels que l'appel de la procédure **Recherche (n,t,max)** provoque i affectations de la variable **max** au cours de son exécution.
   On admettra que ce nombre $V(i,n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois que ceux-ci soient distincts.

   b) Vérifier qu'effectivement le nombre d'affectations possibles de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche(n,t,max)** appartient à I_n.
   Par convention, on pose $V(0,n) = 0$ et $V(k,n) = 0$ lorsque $k > n$.
   c) Quel est le nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche(n,t,max)** si, pour tout $i \in I_n$, `t[i]`$= n + 1 - i$?
   d) Montrer que $V(1,n) = (n-1)!$ et déterminer $V(n,n)$.
   e) On suppose dans la première sous-question qui suit que $2 \leqslant i \leqslant n$.
   - Montrer que $V(i, n+1) = V(i-1,n) + nV(i,n)$.
   On pourra distinguer les rangements de $n+1$ entiers distincts deux à deux dans `t[1], ..., t[n+1]`, suivant que `t[n+1]` contient ou non le plus grand de ces $n+1$ entiers.
   - Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.
   - Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.

   f) On définit le polynôme $P_n(X)$ par $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i$.
   - Montrer que $P_{n+1}(X) = (n+X)P_n(X)$.
   - En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3) On pose $G_n(X) = \frac{1}{n!}P_n(X)$.
   a) Calculer $G_n(1)$.
   b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.
   c) Comparer $G_n'(1)$ et $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

4) Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n "cases" `t[1]`, ..., `t[n]` d'une variable `t` de type **`tableau`**.
Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité p : ces rangements étant de probabilités égales.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable **`max`** au cours de l'exécution de `Recherche(n,t,max)`.
   a) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_n = 1)$ et de façon générale, exprimer, lorsque i appartient à I_n, $p(X_n = i)$ à l'aide de $V(i,n)$ et n.
   b) Déterminer l'espérance de X_n.
   c) Montrer que, si n est supérieur ou égal à 2, alors : $p(X_n = 2) = \dfrac{1}{n}\Big(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}\Big)$.
   Donner un équivalent simple de $p(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) a) Si i appartient à I_n, montrer que : $(n+1)p(X_{n+1} = i) - np(X_n = i) = p(X_n = i-1)$.
   b) En utilisant les résultats de la partie I.B. montrer par récurrence sur i que :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ p(X_n = i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!\,n}\Big(\ln n\Big)^{i-1}$$

Partie III. Calcul de l'inverse d'une certaine matrice.

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i,n)$ a toujours la signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que : $V(0,0) = 1$ et $V(i,0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.
Soit $A = \Big(a_{ij}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ 1\leqslant j\leqslant n+1}}$ la matrice appartenant à $\mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{j-i}V(i-1,j-1)$ pour tout $(i,j) \in \big(I_{n+1}\big)^2$.
Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

1) Montrer que $X(X-1)(\ldots)(X-n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}V(k,n)X^k$.

2) On définit la famille de polynômes $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ par $N_0(X) = 1$, $N_1(X) = X$ et de façon générale $N_j(X) = X(X-1)(\ldots)(X-j+1)$ pour tout $j \in I_n$.
   a) Montrer que $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à $\Big(N_i(X)\Big)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$?

3) a) Montrer que A est inversible.
   Pour tout $(i,j) \in (I_{n+1})^2$, l'élément situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne de A^{-1} est noté $\omega(i-1,j-1)$.
   b) Montrer que : $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\omega(k,n)N_k(X)$.

4) a) Pour tout $p \in \{0,1,\ldots,n\}$, comparer p^n et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}k!\,\omega(k,n)\mathrm{C}_p^k$.
   b) En utilisant les résultats de la partie I.A. donner une expression de $\omega(k,n)$.

Partie IV. Interprétation des nombres $\omega(k,n)$.

Dans cette partie encore n désignera un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel non nul, on appelle $k-$partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ dont les éléments A_i, pour $i = 1, \ldots, k$, sont des parties non vides de I_n, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I_n.
On note par $s(k,n)$ le nombre de $k-$partitions de I_n et on convient que $s(0,n) = 0$.

1) Déterminer $s(1,1)$, $s(n,n)$, $s(1,n)$ et $s(k,n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

2) Soit p un entier naturel non nul.
   a) Déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à I_p. On rappelle que dans une telle liste les éléments ne sont pas forcément distincts.
   b) Soit k un élément de I_p, déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à $\{1,\ldots,k\}$, chacun des nombres $1,\ldots,k$ apparaissant au moins une fois dans la liste.
   c) Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}k!\,s(k,n)\mathrm{C}_p^k$.

3) Comparer $s(k,n)$ et $\omega(k,n)$ lorsque $k \in \{0,\ldots,n\}$.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 12 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est un entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.
On suppose qu'à l'instant initial, $(t = 0)$, une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.
Dans tout le problème n désignera un entier naturel sans qu'il soit besoin de le rappeler à chaque fois.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$, et la fonction $\ln$ représentera la fonction logarithme népérien.
La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Propagation déterministe

A
Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C.\Delta.(1 - u_n(\Delta))$$

On pose : $u_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1) Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(\Delta)$.

2) Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\dfrac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.

a) Comparer $[\dfrac{t}{\Delta}]\Delta$, t et $\left([\dfrac{t}{\Delta}] + 1\right)\Delta$. Déterminer $\lim\limits_{\Delta \to 0} \Delta[\dfrac{t}{\Delta}]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\Delta \to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

3) On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $f(t)$, f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t) = C(1 - f(t))$$

En considérant la fonction $t \longmapsto e^{Ct}f(t)$, déterminer la fonction f sachant que $f(0) = \dfrac{1}{N}\cdot$

B
Deuxième modèle de propagation

On désigne toujours par C une constante réelle strictement positive. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C.\Delta.v_n(\Delta).(1 - v_n(\Delta))$$

On pose : $v_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}\cdot$

1) Montrer que la suite $\left(v_n(\Delta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\dfrac{1}{N}, 1[$, étudier sa convergence et déterminer sa limite éventuelle.

2) Dans cette question on se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.
   a) • Montrer que pour tout entier n : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leqslant \left(1 - v_n(\Delta)\right)\left(1 - \dfrac{C\Delta}{N}\right)\cdot$
      • En déduire que la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est convergente.
   b) On pose pour tout entier n : $x_n = \dfrac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}\cdot$
      Montrer que la série de terme général $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)$ est convergente. On note s sa somme.
   c) En déduire qu'il existe un réel μ strictement positif tel que : $1 - v_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n$.
      On explicitera la valeur de μ en fonction de s et de N.

3) a) Pour tout entier n, on pose : $y_n = \dfrac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}\cdot$
      Montrer que pour tout n : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \dfrac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))}\cdot$
   b) • Comparer, en justifiant la réponse, $\ln(1+u)$ et u, pour tout réel u strictement supérieur à -1.
      • Soit q un entier naturel, montrer que : $\ln\left(\dfrac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1 - v_q(\Delta))(1 + C\Delta)^q}\right) \leqslant q\,\dfrac{C^2\Delta^2}{1 - C\Delta}\cdot$
   c) Soit t un réel strictement positif. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} v_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

4) On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $h(t)$, h étant une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h'(t) = Ch(t)(1 - h(t))$$

En considérant la fonction H définie par $H(t) = \dfrac{1}{h(t)}$, déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout réel t positif sachant que $h(0) = \dfrac{1}{N}\cdot$

Partie II. Propagation probabiliste

Dans les modèles précédents nous avons supposé que chaque intervalle de temps Δ apportait de façon certaine un lot de personnes nouvellement informées. Nous allons faire maintenant l'hypothèse que pendant l'intervalle de temps Δ, une seule personne supplémentaire est susceptible d'être informée, la probabilité qu'elle le soit étant proportionnelle au produit de Δ, du nombre de personnes déjà informées et du nombre de personnes non encore informées.
Donc, si à l'instant $n\Delta$, il reste r personnes non informées, à l'instant $n\Delta + \Delta$, la probabilité qu'il ne reste plus que $r - 1$ personnes non informées est égale à $\beta\Delta r(N - r)$, β étant une constante réelle strictement positive.

Une formule dans le cas discret

Pour tout entier naturel n, nous noterons $P_n(\Delta, r)$ la probabilité qu'à l'instant $n\Delta$ il reste exactement r personnes non informées, Δ représentant toujours un réel strictement positif. Ainsi $P_0(\Delta, N-1) = 1$.
Montrer que :

(3) $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in \{0, \ldots, N-1\},\ P_{n+1}(\Delta, r) = P_n(\Delta, r)\Big(1-\beta\Delta r(N-r)\Big)+P_n(\Delta, r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$

B
Etude d'un premier cas discret

On suppose dans cette sous-partie que : $N = 4$, $\Delta = 1$, β est strictement compris entre 0 et $\frac{1}{4}\cdot$ On pose $U_n = \begin{pmatrix} P_n(1,0) \\ P_n(1,1) \\ P_n(1,2) \\ P_n(1,3) \end{pmatrix}$, pour tout entier n.

1) Montrer qu'il existe une matrice T telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = TU_n$.

2) a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de T.

b) Déterminer trois réels y, z, t tels que : $T \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (1-3\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) En déduire qu'il existe une matrice P inversible appartenant à $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $T = PSP^{-1}$ où
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}.$$
On ne demande pas le calcul explicite de P^{-1}.

d) Pour tout entier n non nul, calculer S^n en fonction de n et β.

3) Soit A une matrice appartenant à $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$, on note $(A)_{i,j}$ l'élément de A situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne.
Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ et si M appartient à $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, on dira que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M lorsque pour tout $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (M)_{i,j}$.
On utilisera sans le démontrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors, $\big(M_nA\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(BM_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers MA et BM pour toute matrice A ayant quatre lignes et toute matrice B ayant quatre colonnes.

Montrer que $\big(T^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite, notée T_∞, est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) On considère la matrice ligne : $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout entier n : LT^n.
En déduire T_∞.

5) Soit r un élément de $\{0,1,2,3\}$, déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(1,r)$ en fonction de r.

C
Etude du cas discret général

On suppose dans cette sous-partie que $0 < \Delta < \dfrac{4}{\beta N^2}$ et on rappelle que N est supérieur ou égal à 4.

On pose $W_n = \begin{pmatrix} P_n(\Delta, 0) \\ \vdots \\ P_n(\Delta, N-1) \end{pmatrix}$, pour tout entier n.

1) Montrer qu'il existe une matrice R telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = RW_n$.

2) Dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

```
Const beta=« Constante fixée par l'utilisateur » ;
      N=« Constante entière fixée par l'utilisateur » ;
      Delta=« Constante fixée par l'utilisateur » ;
```

```
Type vecteur=array[1..N] of real ;
```

a) Écrire le corps de la procédure :

```
Procedure Calcul1(Var V : vecteur) ;
```

Cette procédure doit retourner dans V le résultat de RV.

b) Écrire le corps de la procédure :

```
Procedure Calcul2(Var V : vecteur ; i :integer) ;
```

Cette procédure qui peut utiliser la procédure précédente doit retourner dans V le contenu de W_i défini plus haut.

Dans la suite de cette sous-partie, on pose $\rho = 1 - \beta\Delta(N-1)$.

3) Calculer $P_n(\Delta, N-1)$ en fonction de n et de ρ.

4) a) On considère une suite numérique réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux réels a et q vérifiant :

$$0 < a < q,\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant av_n + bq^n$$

Montrer qu'il existe un réel A tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant Aq^n$.

b) On considère une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe deux réels a et q vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + bq^n$$

On suppose en outre que a est non nul et différent de q. En considérant, pour tout entier n non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k}\right)$, déterminer l'expression de u_n en fonction de u_0, n, a, b et q.

c) Faire le tableau de variation de la fonction $x \longmapsto x(N-x)$ sur l'intervalle $[0, N]$.

5) Déterminer $P_n(\Delta, N-2)$, pour tout n.

6) Montrer que : $\forall r \in \{2, \ldots, N-1\},\ \exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leqslant A_r\rho^n$.

7) a) Étudier la convergence de la suite $\Big(P_n(\Delta, 0)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Déterminer la limite de $P_n(\Delta, r)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et lorsque $r \in \{0, \ldots, N-1\}$.

8) Déterminer $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1)$ et $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-2)$ si t est un réel strictement positif.

D
Etude du cas continu

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'il reste r personnes non informées à l'instant t, réel positif, est donnée par $F_r(t)$, les fonctions $(F_r)_{r=0,\ldots,N}$ sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, F_N(t) = 0 \quad \text{et} \quad F_{N-1}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall r \in \{0, \ldots, N-2\},\ F_r(0) = 0 \\ \forall r \in \{0, \ldots, N-1\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_r'(t) = \beta(r+1)(N-1-r)F_{r+1}(t) - \beta r(N-r)F_r(t) \end{cases}$$

Le but de ce qui suit est d'expliciter certaines des fonctions F_r.

1) On étudie dans cette question une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I telle qu'il existe des réels a, q, b, vérifiant : $\forall t \in I,\ f'(t) = -af(t) + b\,e^{-qt}$.
On suppose en outre que les nombres a et q sont distincts.
En considérant la fonction $t \longmapsto e^{at}f(t)$ déterminer la forme de f.

2) Déterminer les fonctions F_{N-1} et F_{N-2}.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 18 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.
Pour tout entier p strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie I. Préliminaires

On dit qu'une partie K non vide de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in K,\ x \leqslant M$$

Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K ; on dit aussi que M majore K.
Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Soit M un majorant de K et a un élément de K. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = M$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Big(u_{n+1}, v_{n+1}\Big) = \begin{cases} \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas K} \\ \left(u_n, \dfrac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0,1[\cup[3,4[$, $a = 0$ et que $M = 10$.
Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1,2,3,4\}$.

2) On revient désormais au cas général.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b.

c) Montrer que pour tout entier positif n, v_n est un majorant de K, puis que b majore K.

d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.

e) On suppose que b' est un majorant de K.

- Montrer que $b' \geqslant b$.
- En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K.

Désormais, on notera α_K le majorant b de K ainsi obtenu.

Partie II. Étude d'un exemple

On munit $\mathbb{R}^2$ *de sa norme euclidienne définie par* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ *pour tout* (x,y) *appartenant à* $\mathbb{R}^2$.

1) On considère trois nombres réels a, b, c, tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On définit alors les trois ensembles :

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c=0\},\ \mathscr{R}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c>0\} \text{ et } \mathscr{R}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c<0\}$$

a) Montrer que $\mathscr{R}_+$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x,y) \longmapsto ax+by+c$ *en un point* (x_0,y_0) *appartenant à* $\mathscr{R}_+$*, qu'il existe une boule ouverte centrée en* (x_0,y_0) *et incluse dans* $\mathscr{R}_+$.

Il s'ensuit, mutatis mutandis, que $\mathscr{R}_-$ *est également une partie ouverte de* $\mathbb{R}^2$*, ce que l'on admettra.*

b) Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathscr{R}_+$. Montrer que, pour tout réel λ appartenant à $[0,1]$, le couple $\big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\big)$ appartient à $\mathscr{R}_+$.

c) On suppose que (x,y) et (x',y') appartiennent respectivement à $\mathscr{R}_+$ et $\mathscr{R}_-$.
En considérant la fonction $\lambda \longmapsto a\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) + b\big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big) + c$, montrer qu'il existe λ dans $[0,1]$ tel que $\big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\big)$ appartient à $\mathscr{D}$.

2) Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$: $A_1, \ldots, A_k$.

a) On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Si (x_0,y_0) *est un élément de* $A_1 \cap \ldots \cap A_k$*, on montrera qu'il existe un réel* r *strictement positif tel que la boule de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* r *soit incluse dans* $A_1 \cap \ldots \cap A_k$.

b) Montrer que $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3) On note Δ l'ensemble $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1-2x+y \geqslant 0 \text{ et } 1+x-2y \geqslant 0\Big\}$ et g l'application définie sur Δ par :

$$\forall (x,y) \in \Delta,\ g(x,y) = 3x - y + 4$$

a) Représenter graphiquement Δ dans un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que g admet un maximum sur Δ.

d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ' défini par :

$$\Delta' = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0,\ 1-2x+y>0 \text{ et } 1+x-2y>0\Big\}$$

e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0 \text{ et } AX = B\right\}$.

a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont :

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_1 - 2x_2,\ (x_1,x_2) \in \Delta$$

b) On considère l'élément $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^4$.

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^tX.Y$. On considère également la fonction f définie sur $\mathscr{C}$ par :

$$\forall X \in \mathscr{C},\ f(X) = \langle X, W \rangle$$

- Montrer que $f(X) = g(x_1,x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{C}$.
- Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur $\mathscr{C}$.

Partie III. Sommets et maximum

Désormais n et p désigneront des entiers strictement positifs.
On considère une matrice A appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et deux matrices colonnes B et W appartenant respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
Pour tout élément X de $\mathbb{R}^p$ et pour tout i appartenant à $\{1,\dots,p\}$, nous noterons X_i sa i-ième composante, et ainsi $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$.

On dira qu'un élément X de $\mathbb{R}^p$ est positif et on écrira $X \geqslant 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives.

On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y\rangle = {}^tX.Y$.

On considère l'ensemble $\mathscr{C} = \Big\{X \in \mathbb{R}^p;\ X \geqslant 0 \text{ et } AX = B\Big\}$ *et l'application f définie sur $\mathscr{C}$ par :*

$$\forall X \in \mathscr{C},\ f(X) = \langle X, W\rangle$$

On dit qu'un élément Z de $\mathscr{C}$ est un ***sommet*** *de $\mathscr{C}$ lorsque :*

$$\forall (Z', Z'') \in \mathscr{C}^2,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \Big(Z = \lambda Z' + (1-\lambda)Z''\Big) \Rightarrow \Big(Z' = Z''\Big)$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ *est un élément de $\mathbb{R}^p$, on notera $s(X)$ l'ensemble* $\Big\{i \in \{1,\dots,p\};\ X_i \neq 0\Big\}$ *; cet ensemble sera appelé le support de X.*

Enfin, on notera C^1, C^2, ..., C^p les colonnes de A.

Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

1) Vérifier que si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathscr{C}$, alors il est un sommet de $\mathscr{C}$.

2) On revient au cas général et on suppose dans ce qui suit que $\mathscr{C}$ est non vide et que f atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en U. Ce maximum sera noté M_0. Le but de ce qui va suivre est de construire un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel f atteint son maximum. On suppose donc que U n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$ et on considère deux éléments distincts U', U'' appartenant à $\mathscr{C}$ et un réel λ appartenant à $]0,1[$ tels que $U = \lambda U' + (1-\lambda)U''$.

a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à W.
Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et quitte à échanger U' et U'' on peut supposer que le vecteur V égal à $U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que nous supposons désormais.

b)
- Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
- Pour tout réel μ, calculer : $A(U + \mu V)$.
- Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel μ.

c) Montrer que la famille $\left(C^i\right)_{i \in s(U)}$ est liée. *On pourra considérer AV.*

d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R},\ U + \mu V \in \mathscr{C}\}$.
- Montrer que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à $\mathscr{C}$ et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$.

Le nombre α_K a été défini dans la partie I.

e) On suppose que, pour tout i appartenant à $s(U)$, la i-ième composante Y_i de la colonne Y égale à $U + \alpha_K V$ est non nulle.
En remarquant que pour tout i appartenant à $s(U)$, $\lim\limits_{\substack{\mu \to 0 \\ >}} \Big(U_i + (\alpha_K + \mu)V_i\Big) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel η, strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à $\mathscr{C}$.
En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

f) Nous noterons désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et nous supposons que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$.
En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathscr{C}$ tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.

g) Déduire de ce qui précède l'existence d'un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathscr{C}$.

Partie IV. Existence du maximum de la fonction f

Dans cette partie nous reprenons les mêmes notations que dans la partie précédente et nous noterons par $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^p$, que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer qu'il existe une matrice A' appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,\ \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle$$

2) On note r le rang de la matrice A. On suppose d'une part que r est non nul, et d'autre part que la famille $(C^1, C^2, \ldots, C^r)$ est libre.

On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, \ldots, C^p$ de A.

a) Montrer que l'application $\theta : Y \longmapsto \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.

b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne Z appartenant à E tel que, pour tout i appartenant à $\{1, \ldots, r\}$, on a $\langle Z, C^i \rangle = W_i$. *On rappelle que W_i représente la i-ième composante du vecteur W introduit dans le préambule de la partie III.*

c) Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, $(i = 1, \ldots, p)$.

d) Dans cette sous-question on suppose en outre que : $\forall i \in \{r+1, \ldots, p\}$, $\langle Z, C^i \rangle \geqslant W_i$.

- Soit X un élément appartenant à $\mathscr{C}$, montrer que $\langle Z, B \rangle \geqslant \langle X, W \rangle$.
- On suppose qu'il existe un vecteur U appartenant à $\mathscr{C}$ tel que $s(U) = \{1, \ldots, r\}$.

Prouver que la fonction $f : X \longmapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en U et que U est un sommet de $\mathscr{C}$.

3) Dans cette question A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie II.

a) Déterminer la valeur de r.

b) Déterminer le vecteur Z.

c) Est-ce que $A'Z - W \geqslant 0$?

d) Retrouve-t-on les résultats de la partie II ?

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mardi 8 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but de ce problème est l'étude du modèle démographique « Proies et prédateurs » de Vito Volterra.

Dans tout le problème, ln désigne la fonction logarithme népérien, α, β, a, b désignent des réels strictement positifs, fixés une fois pour toutes, et on définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = -\alpha \ln x + \beta x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ g(y) = -a \ln y + by$$

Enfin, on appelle F la fonction définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ F(x,y) = f(x) + g(y)$$

Partie I. Étude de la fonction F

1) Étudier les variations de la fonction f et vérifier qu'elle admet un minimum que l'on note m_f ; on définit m_g, *mutato nomine*, celui de la fonction g.

2) On note f_1 et f_2 les restrictions respectives de f à $]0, \alpha/\beta]$ et à $[\alpha/\beta, +\infty[$.
On note g_1 et g_2 les restrictions respectives de g à $]0, a/b]$ et à $[a/b, +\infty[$.
Montrer que f_1 définit une bijection de $]0, \alpha/\beta]$ dans un ensemble que l'on précisera. Énoncer des résultats analogues pour f_2, g_1 et g_2.

3) Montrer que F possède un minimum et préciser l'ensemble des points en lesquels celui-ci est atteint. On notera m_F le minimum de F.

Partie II. Étude des lignes de niveau de F

On définit pour tout réel c, l'ensemble $\Gamma_c = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ F(x,y) = c\right\}$. On se propose d'étudier, dans cette partie, la forme de la représentation graphique de Γ_c dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Préciser Γ_c lorsque $c < m_F$ et lorsque $c = m_F$.

2) On suppose désormais $c > m_F$.

a) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs u_c et v_c tels que :

$$u_c < \frac{\alpha}{\beta} < v_c \text{ et } m_g = c - f(u_c) = c - f(v_c)$$

b) On note K_c l'ensemble des réels strictement positifs x pour lesquels il existe au moins un réel strictement positif y tel que $F(x,y) = c$. Montrer que $K_c = [u_c, v_c]$.

c) • Montrer que, dans le cas où x appartient à $]u_c, v_c[$, il existe deux réels strictement positifs y tels que $F(x,y) = c$ et exprimer ces nombres y à l'aide de f, g_1^{-1} et g_2^{-1}.

• Préciser l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x,y) = c\}$ lorsque d'une part $x = u_c$ et d'autre part $x = v_c$.

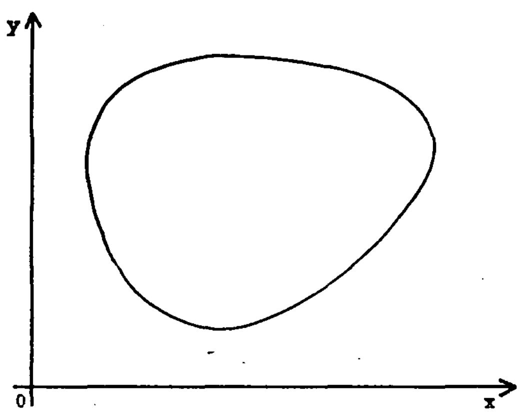
d) • Montrer qu'il existe deux fonctions h_1 et h_2 définies sur $[u_c, v_c]$ telles que :

$$\forall x \in [u_c, v_c],\ h_1(x) \leqslant \frac{a}{b} \leqslant h_2(x)$$

et

$$\Gamma_c = \Big\{(x, h_1(x)),\ x \in [u_c, v_c]\Big\} \cup \Big\{(x, h_2(x)),\ x \in [u_c, v_c]\Big\}$$

• Justifier la réprésentation de Γ_c suivante. Préciser les positions des tangentes éventuelles aux points d'abscisses u_c, α/β et v_c .



Partie III. Étude du cas discret

On considère dans cette partie un réel Δ et un entier n strictement positifs ; on pose $\delta = \dfrac{\Delta}{n}\cdot$ On considère également deux suites de nombres réels strictement positifs $(S_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(R_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telles que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ \begin{cases} \dfrac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \delta(a - bR_k) \\[2mm] \dfrac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \delta(-\alpha + \beta S_k) \end{cases}$$

On pose :

$$m = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}\ S_k,\ M = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}\ S_k,\ \ell = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\text{Min}}\ R_k,\ L = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}}\ R_k$$

1) Dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini les constantes α, β, a, b, n, et Δ précédemment introduites.

Écrire le corps de la procédure :

```
Procedure calcul(S0,R0 : Real ; Var S, R : Real) ;
```

qui doit retourner dans `S` et `R` les valeurs de S_n et R_n conformément aux relations décrites au début de cette partie, sachant que `S0`$=S_0$ et `R0`$=R_0$.

2) a) Pour tout entier k appartenant à $\{0,\dots,n-1\}$, calculer $\beta(S_{k+1} - S_k) + b(R_{k+1} - R_k)$ en fonction de S_k et R_k.

b) Déterminer, pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$, $\delta\alpha\beta\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} S_k - \delta\alpha b\sum_{k=0}^{p-1} R_k$ en fonction de S_p, S_0, R_p et R_0.

c) Montrer que, pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$:

$$\alpha\sum_{k=0}^{p-1}\frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} + a\sum_{k=0}^{p-1}\frac{R_{k+1} - R_k}{R_k} = \beta(S_p - S_0) + b(R_p - R_0)$$

3) a) Montrer que : $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\left|\ln S_{k+1} - \ln S_k - \dfrac{S_{k+1}-S_k}{S_k}\right| \leqslant \dfrac{(S_{k+1}-S_k)^2}{2m^2}$.

b) En déduire que :

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\}, \left|\ln S_{k+1} - \ln S_k - \frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}\right| \leqslant \frac{\Delta^2 M^2(a+bL)^2}{2m^2n^2}$$

c) Montrer que pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$:

$$\left|\ln S_p - \ln S_0 - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{S_{k+1}-S_k}{S_k}\right| \leqslant \frac{\Delta^2 M^2(a+bL)^2}{2m^2n}$$

4) On pose $c = -\alpha \ln S_0 + \beta S_0 - a\ln R_0 + bR_0$. Déterminer un réel A s'exprimant à l'aide de α, β, a, b, m, M, ℓ et L tel que pour tout p appartenant à $\{0,\dots,n\}$, on ait :

$$\left| -\alpha \ln S_p + \beta S_p - a\ln R_p + bR_p - c\right| \leqslant \frac{A}{n}$$

Partie IV. Étude du cas continu

Dans cette partie on considère deux fonctions S et R définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que S et R vérifient les relations $(\mathscr{E})$ suivantes :

$$(\mathscr{E}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} \dfrac{S'(t)}{S(t)} = a - bR(t) \\ \dfrac{R'(t)}{R(t)} = -\alpha + \beta S(t) \end{cases}$$

Dans ces relations, S' et R' désignent respectivement les fonctions dérivées de S et R.
Le plan est toujours muni d'un repère orthonormé.

1) a) Montrer qu'il existe un réel c tel que pour tout réel t positif le point de coordonnées $(S(t), R(t))$ appartient à Γ_c, ensemble introduit dans la partie II.

b) En déduire que les fonctions S et R sont bornées.

c) Que peut-on dire des fonctions S et R si $c = m_F$?

On suppose désormais, et ce jusqu'à la fin du problème, que $c > m_F$.

2) Soit θ un réel positif. On suppose que S' ne s'annule pas sur $[\theta, +\infty[$.

a)
- Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$.
- Montrer que cette limite est strictement positive.

b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que R' ne s'annule pas sur $[\lambda, +\infty[$. Que peut-on en déduire pour R ?

c)
- Montrer que S' admet une limite en $+\infty$.
- Montrer que cette limite est nulle en considérant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_\theta^{+\infty} S'(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Montrer également que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} R'(t) = 0$.

e) En considérant les limites de S et R en $+\infty$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que S' s'annule en une infinité de points.

3) On considère dans cette question deux réels positifs τ_1 et τ_2 distincts tels que $S'(\tau_1) = S'(\tau_2) = 0$, et on suppose : $\tau_1 < \tau_2$.

a) Montrer qu'il existe θ appartenant à $]\tau_1, \tau_2[$ tel que $R'(\theta) = 0$.

b) En considérant les valeurs de S en θ et τ_1, montrer qu'il existe un réel μ strictement positif et indépendant de τ_1 et τ_2 tel que $|S(\theta) - S(\tau_1)| \geqslant \mu$.

c) Montrer que S' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

d) Montrer qu'il existe un réel η strictement positif et indépendant de τ_1 et τ_2 tel que $|\tau_2 - \tau_1| > \eta$.

4) a) Montrer qu'on peut trouver trois réels positifs θ_1, θ_2, θ_3 tels que :

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \text{ et } S'(\theta_1) = S'(\theta_2) = S'(\theta_3) = 0$$

b) Montrer que S' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[0, \theta_3]$.

c) En déduire qu'il existe trois réels positifs t_1, t_2, t_3 tels que $t_1 < t_2 < t_3$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \\ \forall t \in [t_1, t_3],\ S'(t) = 0 \iff t \in \{t_1, t_2, t_3\} \end{cases}$$

5) Montrer que S' est de signe constant sur $]t_1, t_2[$ et sur $]t_2, t_3[$ et que les signes respectifs de S' sur ces deux intervalles sont opposés. On pourra considérer les valeurs de R en t_1, t_2, t_3.

Dans la suite on supposera que S' est positif sur $]t_1, t_2[$ et donc négatif sur $]t_2, t_3[$.

6) a) Montrer que $S(t_1) = S(t_3) = u_c$ et $S(t_2) = v_c$.

b) Déterminer les valeurs de $R(t_1)$ et $R(t_3)$.

7) a) Sur un même tableau de variation faire apparaître les variations de S et de R sur $[t_1, t_3]$.

b) En déduire le sens de déplacement du point M_t de coordonnées $\big(S(t), R(t)\big)$ sur la représentation graphique de Γ_c lorsque t décrit $[t_1, t_3]$.

8) *On admet que si (S_1, R_1) et (S_2, R_2) sont deux couples de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant les relations $(\mathscr{E})$ et s'il existe un réel $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $S_1(t_0) = S_2(t_0)$ et $R_1(t_0) = R_2(t_0)$, alors :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ S_1(t) = S_2(t) \text{ et } R_1(t) = R_2(t)$$

Montrer que les fonctions S et R sont périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

9) On considère un réel u positif.

a) Calculer $\displaystyle\int_u^{u+T} \frac{S'(t)}{S(t)}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la *valeur moyenne* de R sur le segment $[u, u+T]$, c'est-à-dire $\displaystyle\frac{1}{T}\int_u^{u+T} R(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer de même la *valeur moyenne* de S sur le segment $[u, u+T]$.

10) On considère dans cette question deux fonctions K et H définies sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On considère également un réel ε appartenant à $]0, a[$. On suppose que K et H vérifient les relations $(\mathscr{E}')$ suivantes :

$$(\mathscr{E}') \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} \dfrac{K'(t)}{K(t)} = a - \varepsilon - bH(t) \\ \dfrac{H'(t)}{H(t)} = -\alpha - \varepsilon + \beta K(t) \end{cases}$$

Dans ces relations, K' et H' désignent respectivement les fonctions dérivées de K et H.

Montrer qu'il existe un réel Θ strictement positif tel que les fonctions K et H sont périodiques de période Θ et déterminer la valeur moyenne de ces fonctions sur un segment de longueur égale à Θ.

Partie V. Le contexte historique du modèle de Vito Volterra

On peut voir dans les calculs qui précèdent une représentation de l'évolution d'une population d'individus de deux types : les proies et les prédateurs. Ceux-ci se nourrissent uniquement de celles-là, et celles-là d'une autre nourriture disponible en abondance. Les proies, en l'absence de prédateurs, se développeraient de façon exponentielle, mais cette croissance est en fait réduite par la présence des prédateurs. En revanche, le nombre de prédateurs, en l'absence de proies, décroîtrait de manière exponentielle, (sans proies ils finiraient par disparaître), laquelle décroissance est compensée par la présence des proies.

Supposons alors que cette population soit une population de poissons constituée de proies et de prédateurs d'effectifs relatifs $K(t)$ et $H(t)$ à l'instant t, (les fonctions K et H ont été introduites à la question 10) de la partie IV) ; la constante ε apparaissant dans les relations $(\mathscr{E}')$ représente un taux de pêche identique pour les proies et les prédateurs.

Au cours de la première guerre mondiale, on a pu constater, dans l'Adriatique, qu'une diminution de la pêche était défavorable aux proies.

Montrer que les calculs de la question IV. 10 expliquent directement le phénomène observé.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 16 Mai 2002, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le sujet ci-dessous vise à faire comprendre comment deux concurrents aux intérêts antagonistes, ne parvenant pas à fixer conjointement les stratégies de l'un et l'autre, conviennent de les tirer au sort avec des probabilités bien déterminées.

Notations :

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls fixés et on pose $E_n = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit de même E_p.

On note K_n l'ensemble $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n, x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$ *; on définit de même K_p.*

Les espaces E_n et E_p sont munis de leur structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur X de E_n est notée $\|X\|$; le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de E_n est noté $\langle X, Y\rangle$; on adopte la même notation pour les vecteurs de E_p.

Enfin, si k est un entier naturel non nul et si $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille finie de réels, on note $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Max}} z_i$ ou $\operatorname{Max}_i z_i$ (respectivement $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} z_i$ ou $\operatorname{Min}_i z_i$) son plus grand (respectivement son plus petit) élément.

Plus généralement, si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant un maximum (respectivement un minimum) sur E, on note $\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{Max}} f(x)$, (respectivement $\underset{x\in\mathcal{A}}{\operatorname{Min}} f(x)$), ce maximum, (respectivement ce minimum).

Partie I. Le plus petit des plus grands et le plus grand des plus petits

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On note $u(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} \left(\underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} a_{ij}\right)$ et $v(A) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} \left(\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}} a_{ij}\right)$. Pour simplifier les notations, on pourra écrire ces expressions : $u(A) = \operatorname{Min}_i \operatorname{Max}_j a_{ij}$ et $v(A) = \operatorname{Max}_j \operatorname{Min}_i a_{ij}$.

1) Calculer $u(A)$ et $v(A)$ dans les deux cas suivants : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) On revient au cas général où $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, on pose $s_{j_0} = \operatorname{Min}_i a_{ij_0}$ et $t_{i_0} = \operatorname{Max}_j a_{i_0 j}$.

a) Montrer que $s_{j_0} \leqslant t_{i_0}$ pour tout $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ et tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

b) En déduire que $v(A) \leqslant u(A)$.

3) On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) deux constantes entières : `n` et `p`,

2) un type : `matrice = array[1..n,1..p] of real;`

a) Écrire le corps de la fonction `function Max_ligne (A:matrice; i:integer): real;` cette fonction doit retourner le plus grand élément de la ligne `i` de la matrice `A`, c'est-à-dire la valeur $\operatorname{Max}_j A[i,j]$.

b) Écrire le corps de la fonction `function MinMax(A:matrice):real;` cette fonction doit retourner la valeur $u(A)$, définie plus haut; on pourra utiliser la fonction `Max_ligne`.

Partie II. Le minimum des maxima et le maximum des minima

1) Dans cette question on étudie un exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ puis $h(x,y) = {}^tXAY$.

a) Calculer $h(x,y)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer suivant les valeurs de $x \in [0,1]$, le maximum de la fonction $y \longmapsto h(x,y)$ sur $[0,1]$; ce maximum sera noté $\lambda(x)$.

c) Déterminer la valeur minimum de $\lambda(x)$ lorsque x décrit $[0,1]$. Cette valeur sera notée $\alpha(A)$, elle est donc égale à $\underset{X\in K_2}{\operatorname{Min}} \left(\underset{Y\in K_2}{\operatorname{Max}} {}^tXAY \right)$, qu'on note plus simplement $\underset{X}{\operatorname{Min}}\,\underset{Y}{\operatorname{Max}}\, {}^tXAY$, étant entendu que X et Y décrivent K_2.

d) Par une méthode analogue, montrer l'existence de $\beta(A) = \underset{Y}{\operatorname{Max}}\,\underset{X}{\operatorname{Min}}\, {}^tXAY$ et donner sa valeur.

Dans la suite de cette partie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ désigne une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la fonction f sur $K_n \times K_p$ par: $\forall (X,Y) \in K_n \times K_p,\ f(X,Y) = {}^tXAY$.

Pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K_n$, on pose $\varphi_j(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$, puis $\lambda(X) = \underset{1\leqslant j\leqslant p}{\operatorname{Max}} \varphi_j(X)$.

2) On considère des fonctions $g_1, \dots, g_p$ définies et continues sur K_n, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) On pose $h = \operatorname{Max}(g_1, g_2)$, c'est-à-dire la fonction de K_n dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \operatorname{Max}\big(g_1(x), g_2(x)\big)$. Vérifier que $h = \dfrac{g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|}{2}$ et en déduire que h est continue sur K_n.

b) Montrer que la fonction $g = \operatorname{Max}(g_1, \dots, g_p)$ est continue sur K_n, g étant définie sur K_n par: $\forall x \in K_n,\ g(x) = \operatorname{Max}\big(g_1(x), \dots, g_p(x)\big)$.

3) Dans cette question on considère un élément X appartenant à K_n.

a) Montrer que pour tout $Y \in K_p$, $f(X,Y) \leqslant \lambda(X)$.

b) Montrer qu'il existe $Y_X \in K_p$ tel que $f(X, Y_X) = \lambda(X)$.

c) En déduire qu'on peut poser: $\lambda(X) = \underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}} f(X,Y)$.

4) **a)** Montrer que K_n est borné.

(*On admet pour la suite du problème, que K_n est une partie fermée de E_n*)

b) Montrer que λ admet un minimum sur K_n.

Ce minimum est noté $\alpha(A)$ et il est donc égal à $\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}} \left(\underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}} {}^tXAY \right)$, qu'on note plus simplement $\underset{X}{\operatorname{Min}}\,\underset{Y}{\operatorname{Max}}\, {}^tXAY$.

On montrerait de manière analogue que le nombre $\underset{Y\in K_p}{\operatorname{Max}} \left(\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}} {}^tXAY \right)$ existe. Il est noté $\beta(A)$ et on l'écrit plus simplement $\underset{Y}{\operatorname{Max}}\,\underset{X}{\operatorname{Min}}\, {}^tXAY$.

5) **a)** Soit (X', Y) appartenant à $K_n \times K_p$. Montrer que $\underset{X\in K_n}{\operatorname{Min}} f(X,Y) \leqslant \lambda(X')$.

b) En déduire: $\beta(A) \leqslant \alpha(A)$.

6) *On dit qu'une partie non vide $\mathscr{C}$ de E_p est convexe lorsque: $\forall (X,Y) \in \mathscr{C}^2,\ \forall m \in [0,1],\ mY + (1-m)X \in \mathscr{C}$.*

On considère dans cette question une partie $\mathscr{C}$ de E_p convexe, fermée, bornée et non vide.

a) Montrer qu'il existe $W \in \mathscr{C}$, tel que: $\forall Y \in \mathscr{C},\ \|W\| \leqslant \|Y\|$.

b) Soit Y appartenant à $\mathscr{C}$, on pose pour tout $m \in [0,1]$: $Y_m = (1-m)W + mY$.

- Montrer que: $\forall m \in]0,1[,\ \langle W, Y \rangle \geqslant \dfrac{2-m}{2(1-m)} \|W\|^2 - \dfrac{m}{2(1-m)} \|Y\|^2$.

On rappelle que $\langle W, Y\rangle$ $(= {}^tWY)$ désigne le produit scalaire de W et Y.

• En déduire que: $\langle W, Y\rangle \geqslant \|W\|^2$.

7) Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie on considère l'ensemble:

$$\mathscr{C} = \left\{m\ {}^tAX + (1-m)\ Y,\ X \in K_n,\ Y \in K_p,\ m \in [0,1]\right\}$$

a) Montrer que K_n est une partie convexe de E_n.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie convexe et bornée de E_p.

On admet pour la suite que $\mathscr{C}$ est une partie fermée de E_p.

8) On suppose dans cette question que le vecteur nul appartient à $\mathscr{C}$.

a) Montrer qu'il existe $X_0 \in K_n$, $Y_0 \in K_p$ et un réel $\mu \leqslant 0$ tels que: ${}^tAX_0 = \mu Y_0$.

b) Déterminer le signe de ${}^tX_0AY$ pour tout $Y \in K_p$.

c) Déterminer le signe de $\alpha(A)$.

9) Dans cette question on suppose que le vecteur nul n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

a) Montrer qu'il existe un élément $W \in \mathscr{C}$ tel que :

$$\forall m \in [0,1],\ \forall X \in K_n,\ \forall Y \in K_p,\ m\ {}^tXAW + (1-m)\ {}^tYW > 0$$

b) On note $w_1, \ldots, w_p$ les coordonnées de W dans la base canonique de E_p.
Montrer que $w_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

c) Montrer que: $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW > 0$.

d) Montrer qu'il existe un vecteur $W' \in K_p$ tel que: $\forall X \in K_n,\ {}^tXAW' > 0$.

e) Montrer que $\beta(A) > 0$.

10) On définit la matrice $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $B = A - \beta(A)J$ où J est la matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Déterminer les valeurs $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ en fonction de $\alpha(A)$ et $\beta(A)$.

b) Déduire des questions précédentes que $\alpha(A) = \beta(A)$.

Partie III. Point-selle et point critique

Dans cette partie, A désigne toujours une matrice de à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout (X, Y) appartenant à $K_n \times K_p$: $f(X, Y) = {}^tXAY$.

On dit que le couple (X_0, Y_0) appartenant à $K_n \times K_p$ est un point-selle pour f, lorsque:

$$\forall (X, Y) \in K_n \times K_p,\ f(X_0, Y) \leqslant f(X_0, Y_0) \leqslant f(X, Y_0)$$

1) Montrer qu'il existe un point-selle pour f et que si (X_0, Y_0) en est un, alors $f(X_0, Y_0) = \alpha(A)$.

2) On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

On appelle point critique de g tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(u, v) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(u, v) = 0$.

a) Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) si et seulement si $a + d - b - c \neq 0$. Déterminer dans ce cas (x_0, y_0).

b) On suppose $a - b$ et $d - c$ de même signe et non tous nuls et on suppose également que $a - c$ et $d - b$ sont de même signe et non tous nuls.

• Montrer que dans ce cas g admet un unique point critique (x_0, y_0) et que $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$.

• Montrer que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)(a + d - b - c)$.

On pourra introduire les notations suivantes: $X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}$, $U = X - X_0$, $V = Y - Y_0$, et on exprimera $g(x, y)$ à l'aide de U, V, A, X_0 et Y_0.

• En déduire que $\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ 1-x_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ 1-y_0 \end{pmatrix}\right)$ est un point-selle pour l'application f définie sur $K_2 \times K_2$ par: $\forall (X, Y) \in K_2 \times K_2,\ f(X, Y) = {}^tXAY$.

• Quelle est la valeur de $\alpha(A)$?

Partie IV. Application à une étude de la concurrence

Deux entrepreneurs Primus et Secundus se partagent le marché d'un produit sur un territoire commun, de sorte qu'au cours d'un trimestre, si l'un voit sa part de marché varier de Δ unités (nombre réel positif ou négatif) l'autre voit la sienne varier de $-\Delta$ unités. Cette variation dépend à chaque trimestre des stratégies choisies par l'un et l'autre.

Primus a le choix entre deux stratégies notées P_1 et P_2, Secundus a le choix entre deux stratégies S_1 et S_2. Lorsque Primus et Secundus choisissent chacun l'une de leurs deux stratégies, leurs parts de marché sont modifiées et le tableau suivant donne les variations trimestrielles de la part de marché de Secundus, celles de Primus étant opposées.

Variation trimestrielle de la part de marché de Secundus lorsque :	Secundus choisit S_1	Secundus choisit S_2
Primus choisit P_1	-2	3
Primus choisit P_2	1	-1

Dans une négociation entre Primus et Secundus, si Secundus propose par exemple S_2, Primus propose alors P_2, mais dans ce cas Secundus préfère S_1 et Primus souhaite alors P_1, ce qui pousse Secundus à choisir de nouveau S_2; finalement toute entente semble être impossible.

Primus et Secundus décident alors de s'en remettre au hasard de la manière suivante: les deux concurrents choisissent simultanément et aléatoirement l'une des deux stratégies dont chacun dispose: Primus choisit la stratégie P_1 avec la probabilité x ($x \in [0, 1]$) et la stratégie P_2 avec la probabilité $1 - x$, Secundus, indépendamment du choix de Primus, choisit la stratégie S_1 avec la probabilité y, ($y \in [0, 1]$) et la stratégie S_2 avec la probabilité $1 - y$. On note, dans ces conditions, $V_{x,y}$ la variable aléatoire égale à la variation trimestrielle de la part de marché de Secundus.

1) Déterminer l'espérance de $V_{x,y}$.

2) Établir qu'il existe des probabilités x_0 et y_0 telles que Primus (respectivement Secundus) ne trouve aucun avantage à prendre x différent de x_0 (respectivement y différent de y_0), lorsque Secundus (respectivement Primus) s'en tient à y_0 (respectivement à x_0).
Déterminer les valeurs de x_0 et y_0.

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 7 Mai 2003, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

NUAGES DE POINTS ET APPROXIMATION D'UN NUAGE

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on pose $E_p = \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté $\langle x, y\rangle$.
Si u est un vecteur non nul appartenant à E_p, D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u et si x est un vecteur de E_p, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur la droite D_u.
Si F est un sous-espace vectoriel de E_p, le supplémentaire orthogonal de F dans E_p est noté $F^{\perp}$.
Pour toute matrice A appartenant à $\mathbb{M}_{m,\ell}(\mathbb{R})$ on note Φ_A l'application linéaire de $\mathbb{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathbb{M}_{\ell,1}(\mathbb{R})$, $\Phi_A(X) = AX$.
Pour tout r appartenant à $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de vecteurs de E_p, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ est le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_r$.
Si g est une fonction définie sur un sous-espace vectoriel F de E_p et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\underset{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}}{\mathrm{Max}}\, g(x)$ ou $\mathrm{Max}\left\{g(x); x \in F \text{ et } \|x\| = 1\right\}$ le maximum, lorsqu'il existe, de la fonction g sur l'ensemble des vecteurs x de F dont la norme est égale à 1.

Partie I. Étude d'un exemple

Dans cette partie et uniquement dans celle-ci, on suppose que $p = 2$. On note (u_1, u_2) la base canonique de E_2.

1) On considère les vecteurs v_1, v_2 et v_3 appartenant à E_2 et dont les coordonnées dans la base (u_1, u_2) sont respectivement $(1,2)$, $(-3,-1)$, $(2,-1)$.
On considère un réel m et on note, pour tout i appartenant à $\{1,2,3\}$, v'_i le projeté orthogonal de v_i sur la droite vectorielle engendrée par $u_1 + mu_2$.
   a) Calculer en fonction de m la quantité : $\|v'_1\|^2 + \|v'_2\|^2 + \|v'_3\|^2$.
   b) Déterminer la valeur m_0 de m pour laquelle cette quantité atteint son maximum ; ce maximum est noté λ_1.

2) Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que λ_1 est une valeur propre de $\Phi_{X\,{}^tX}$; $u_1 + m_0u_2$ étant un vecteur propre associé à λ_1.
   b) Déterminer l'autre valeur propre de $\Phi_{X\,{}^tX}$ et la comparer à λ_1.

Partie II. Les axes principaux d'inertie d'un nuage

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite du problème.
On définit la matrice $X = \left(x_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *appartenant à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *appelée* nuage *; ses colonnes* $c_1, \dots, c_n$ *sont appelées* points du nuage *;* X *est donc un nuage de* n *points dans un espace de dimension* p.

On définit la matrice $V = X\ {}^tX$.
On appelle F *le sous-espace vectoriel de* E_p *engendré par les vecteurs colonnes* $c_1, \dots, c_n$ *et on suppose que* $\dim F = r$ *et* $p > r \geqslant 1$.
Pour tout vecteur v *non nul de* E_p*, on pose* $I(v) = \sum_{j=1}^{n} \|P_{D_v}(c_j)\|^2$ *; cette quantité s'appelle* l'inertie *du nuage* X *sur la droite* D_v.
Pour tout couple de vecteurs (v, w) *appartenant à* E_p^2*, on pose :* $J(v,w) = \sum_{j=1}^{n} \langle v, c_j\rangle\langle w, c_j\rangle$.

1) a) Montrer que la matrice V est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *les valeurs propres de* V *et on suppose que* $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$.
Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de E_p telle que : $\forall i \in \{1, \dots, p\},\ Ve_i = \lambda_i e_i$.

b)
- Montrer que le noyau de Φ_V est égal à celui de $\Phi_{{}^tX}$.
- En déduire que le rang de V est égal à r.
- Montrer que : $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$.
- Que peut-on dire de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$?
- Montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F.

2) a) Montrer, pour tout vecteur v de norme 1 appartenant à E_p, l'égalité : $I(v) = {}^tv\ V\ v$.

b) Déterminer, pour tout i appartenant à $\{1, \dots, p\}$, $I(e_i)$ à l'aide des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

c) On définit les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E_p par :
$$F_1 = F,\ F_2 = F_1 \cap (D_{e_1}^{\perp}),\ \dots,\ F_r = F_{r-1} \cap (D_{e_{r-1}}^{\perp})$$
- Montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, r\},\ F_i = \mathrm{Vect}(e_i, \dots, e_r)$.
- Montrer que : $I(e_1) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\} = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in F_1 \text{ et } \|v\| = 1\}$.
- Montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, r\},\ I(e_i) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in F_i \text{ et } \|v\| = 1\}$.

3) Soit w un vecteur unitaire de E_p tel que $I(w) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in E_p \text{ et } \|v\| = 1\}$. Montrer que w appartient à F.

4) On suppose dans cette question que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ sont r vecteurs de norme 1 appartenant à E_p et que $G_1, \dots, G_r$ sont r sous-espaces vectoriels de E_p tels que :

$$(\mathcal{S})\qquad \begin{cases} G_1 = F \\ \varepsilon_1 \in G_1 \text{ et } I(\varepsilon_1) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in G_1 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_2 \in G_2 = G_1 \cap (D_{\varepsilon_1}^{\perp}), \text{ et } I(\varepsilon_2) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in G_2 \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r-1} \in G_{r-1} = G_{r-2} \cap (D_{\varepsilon_{r-2}}^{\perp}), \text{ et } I(\varepsilon_{r-1}) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in G_{r-1} \text{ et } \|v\| = 1\} \\ \varepsilon_r \in G_r = G_{r-1} \cap (D_{\varepsilon_{r-1}}^{\perp}), \text{ et } I(\varepsilon_r) = \mathrm{Max}\{I(v);\ v \in G_r \text{ et } \|v\| = 1\} \end{cases}$$

Les droites vectorielles $D_{\varepsilon_1}, \dots, D_{\varepsilon_r}$ *sont appelées axes principaux d'inertie du nuage.*

a) Vérifier que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormale de F et que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots e_p)$ est une base orthonormale de E_p.

b) Montrer que pour tout couple de vecteurs (v, w) appartenant à E_p^2 , $J(v, w) = {}^tv\ V\ w = \langle v, \Phi_V(w)\rangle$.

c) On se donne deux vecteurs v_1 et v_2, unitaires, orthogonaux et appartenant à F.
Pour tout réel t, on pose $\varphi(t) = I(\cos t\ v_1 + \sin t\ v_2)$.
- Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de $I(v_1)$, $I(v_2)$, $J(v_1, v_2)$ et t.
- Montrer que φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un maximum.
- On suppose que le maximum de φ est atteint en 0. Montrer que $J(v_1, v_2) = 0$.

d)
- Montrer que pour tout (i,j) appartenant à $\{1, \dots, r\}^2$, $J(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ dès que $i \neq j$.
- Déterminer la forme de la matrice de Φ_V dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$.
- En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, ε_i est un vecteur propre de V associé à λ_i.

5) *Dans le langage des statisticiens les colonnes* c_j *de* X *représentent des individus d'une population statistique où* p *variables statistiques* $x_i, (1 \leqslant i \leqslant p)$ *ont respectivement pris les valeurs* $x_{i\,1}, x_{i\,2} \dots, x_{i\,n}$*,* $(1 \leqslant i \leqslant p)$, *valeurs fixées de telle sorte que leur moyennes sont nulles, c'est à dire :* $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant p$.

Calculer la covariance $\operatorname{cov}(x_k, x_\ell)$ des variables x_k et x_ℓ lorsque k et ℓ appartiennent à $\{1, \dots, p\}$ puis comparer la matrice V et la matrice $\big(\operatorname{cov}(x_k, x_\ell)\big)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$.

Partie III. Une décomposition de la matrice X

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on note Π_i la matrice dans la base canonique de E_p, de la projection orthogonale de E_p sur D_{e_i} ; les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ ont été définis au II 1 a.

1) Montrer que : $\sum_{i=1}^{p} \Pi_i = I_p$, (où I_p est la matrice appartenant à $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté les éléments diagonaux qui valent 1).

2) Déterminer $\Pi_i \Pi_j$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ tel que $i \neq j$.

3) Calculer pour tout $i \in \{r+1, \dots, p\}$, $\Pi_i X$ et en déduire que : $X = \sum_{i=1}^{r} \Pi_i X$.

4) Pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$, on pose $X_s = \sum_{i=1}^{s} \Pi_i X$.

- **a)** Montrer que : $\operatorname{Im} \Phi_{X_s} \subset \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s)$.
- **b)** Calculer $X_s\, {}^tX e_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et déterminer le rang de X_s.

Partie IV. Une norme euclidienne de matrices carrées

Pour tout entier naturel q non nul et toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ appartenant à $\mathbb{M}_q(\mathbb{R})$, on pose $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{q} a_{ii}$.

On sait que Tr *définit une application linéaire de $\mathbb{M}_q(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que si A et B appartiennent respectivement à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ alors* $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$. *On sait également que si deux matrices A et B sont semblables alors* $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$.

Pour tout M et N appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ on pose : $\Theta(M, N) = \operatorname{Tr}(M\, {}^tN)$.

1) Montrer que $(M, N) \longmapsto \Theta(M, N)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on note $|||M||| = \sqrt{\operatorname{Tr}(M\, {}^tM)}$, *appelé ici norme euclidienne de M.*

2) Calculer pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, $\Theta(\Pi_i X, \Pi_j X)$. On distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$, et on exprimera les résultats en fonction des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

3) Calculer $|||X - X_s|||^2$, en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, pour tout s appartenant à $\{1, \dots, r\}$.

Partie V. La meilleure approximation du nuage

On rappelle que si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E_p, alors :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim\big(H_1 \cap H_2\big)$$

On considère un entier naturel s appartenant à $\{1, \dots, r-1\}$ et une matrice N appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que rang(N) $\leqslant s$.

1) Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormale $(a_1, \dots, a_p)$ de E_p formée de vecteurs propres de $(X - N)\, {}^t(X - N)$. On note $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ les valeurs propres de $(X - N)\, {}^t(X - N)$ associées respectivement aux vecteurs $a_1, \dots, a_p$ et on suppose que $\gamma_1 \geqslant \dots \geqslant \gamma_p$.

2) Soit i un entier appartenant à $\{1, \dots, r - s\}$ et un sous-espace G de E_p de dimension supérieure ou égale à i.

- **a)** Montrer que : $\dim\Big(G \cap \operatorname{Vect}(a_i, \dots, a_p)\Big) \geqslant 1$.
- **b)** En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u appartenant à G tel que $\|\, {}^t(X - N)\, u\|^2 \leqslant \gamma_i$.
- **c)** On considère l'espace vectoriel $H = \big(\operatorname{Ker} \Phi_{\,{}^tN}\big) \cap \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{s+i})$.
  - Montrer que : $\dim H \geqslant i$.
  - En déduire : $\lambda_{s+i} \leqslant \gamma_i$.

3) **a)** Montrer que : $|||X - N|||^2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$.

b) En déduire que : $|||X-N|||^2 \geqslant \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$.

c) En déduire que X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de rang inférieur ou égal à s au sens de la norme euclidienne définie plus haut sur $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

4) Soit G un sous-espace vectoriel de E_p.

On note P_G la projection orthogonale de E_p sur G, Π_G sa matrice dans la base canonique de E_p et $K(G) = \sum_{j=1}^{n} \|P_G(c_j)\|^2$.

La quantité $K(G)$ s'appelle l'inertie *du nuage X sur le sous-espace G, et dans le cas où $G = E_p$, $K(G)$ est* l'inertie totale *du nuage X.*

a) Montrer que : $K(G) = |||\Pi_G X|||^2$.

b) Montrer que : $K(G) = |||X|||^2 - |||X - \Pi_G X|||^2$.

c) On suppose toujours que s est un entier appartenant à $\{1, \ldots, r-1\}$ et $\dim G \leqslant s$.

- Montrer que : $K(G) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$.
- Montrer que $K\big(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_s)\big)$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s.

d) On suppose dans cette question que s appartient à $\{1, \ldots, p\}$, on ne suppose donc plus que $s \leqslant r-1$. Montrer que $K\big(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_s)\big)$ est le maximum des nombres $K(G)$, lorsque G parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E_p dont la dimension est inférieure ou égale à s.

Partie VI. Non multa, sed multum

Dans cette partie, on propose une interprétation pratique des résultats théoriques précédents à propos d'une enquête de consommations.

On a étudié les « consommations » annuelles de 8 denrées alimentaires (ce sont les 8 variables statistiques x_i, $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ que l'on suppose centrées), par différentes catégories socio-professionnelles, à savoir : celles des exploitants agricoles (AGRI) représentées par la colonne c_1, des salariés agricoles $\big(\mathrm{SAAG}(=c_2)\big)$, des professions indépendantes $\big(\mathrm{PRIN}(=c_3)\big)$, les cadres supérieurs $\big(\mathrm{CSUP}(=c_4)\big)$, des cadres moyens $\big(\mathrm{CMOY}(=c_5)\big)$, des employés $\big(\mathrm{EMP}(=c_6)\big)$, des ouvriers $\big(\mathrm{OUV}(=c_7)\big)$, des inactifs $\big(\mathrm{INAC}(=c_8)\big)$. Dans notre exemple un individu est donc une catégorie socio-professionnelle.

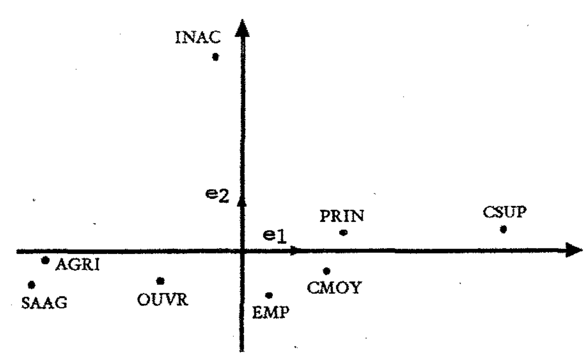
On a consigné les résultats de l'enquête dans une matrice $X = (x_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ 1\leqslant j\leqslant 8}}$. Par exemple x_{12} représente la consommation moyenne de la denrée 1 par la catégorie SAAG.

Les valeurs propres de la matrice $V = X\,{}^tX$ sont approximativement 70, 20, 5, 3, 2, 0, 0 et 0 associées respectivement à $e_1, \ldots, e_8$.

1) Quelle part de l'inertie totale est contenue dans l'inertie du nuage de points sur le sous-espace de base (e_1, e_2) ?

On a représenté dans le dessin ci-contre les projetés orthogonaux dans le plan de base (e_1, e_2) des 8 individus $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant 8}$, c'est-à-dire des 8 colonnes représentant les consommations moyennes de chaque catégorie socio-professionnelle.

2) Que représente le nuage de points du dessin pour le nuage X de l'enquête ?



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

**BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL**

Concepteur : ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Vendredi 14 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

SUR LA TRANSMISSION DE MESSAGES

Le but de ce problème est de construire un système permettant de détecter et de corriger automatiquement des erreurs apparues lors de la transmission de messages binaires.
Dans tout le problème, m, n, p désignent des entiers naturels non nuls.

Partie I. L'opération Δ sur les parties d'un ensemble

Dans cette partie on considère un ensemble $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ayant n éléments.
La différence symétrique de deux parties quelconques A et B de E, notée $A\Delta B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'une et pas à l'autre. On admet que l'opération Δ est commutative et associative.
On sait que pour toute partie A de E :

$$(\mathscr{G}) \qquad A\Delta\emptyset = A, \ A\Delta A = \emptyset$$

Pour toutes parties A et B de E, on pose $d(A,B) = \text{Card}(A\Delta B)$.

1) a) Pour une partie A de E, déterminer $d(A,\emptyset)$ et $d(A,E)$.
b) Montrer que pour toutes parties A et B de E : $d(A,B) = d(A\Delta B, \emptyset)$.

2) *On sait qu'on peut représenter une partie A de E par le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ en posant :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = 1 \textit{ si } e_i \textit{ appartient à } A \textit{ et } 0 \textit{ sinon}$$

a) Les parties A, B, $A\Delta B$ étant représentées respectivement par $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$, construire pour un entier i fixé appartenant à $\{1, \ldots, n\}$, une table à deux lignes et deux colonnes donnant les valeurs de z_i en fonction des valeurs de x_i et y_i.
Comparer z_i et $|x_i - y_i|$.
b) Montrer que pour toutes parties A, B et C de E, $d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$.

Partie II. Une autre algèbre linéaire

On considère l'ensemble $\mathbb{K} = \{0,1\}$ et $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$.
On définit sur $\mathbb{K}$ l'addition $\dot{+}$ et la multiplication . à l'aide des tables suivantes :

$\dot{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

On remarque que la multiplication sur $\mathbb{K}$ est la multiplication des réels, que ces opérations sont associatives, commutatives et que la multiplication sur $\mathbb{K}$ est distributive par rapport à l'addition sur $\mathbb{K}$; ces propriétés ne sont pas à démontrer.

On définit également :

1) la somme $A \dot{+} B$ *de deux matrices* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *appartenant à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *par :*

$$A \dot{+} B = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}, \text{ où } c_{ij} = a_{ij} \dot{+} b_{ij}$$

2) le produit $\varepsilon.A$ *d'une matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *et d'un élément* ε *appartenant respectivement à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{K}$ *par :*

$$\varepsilon.A = (\varepsilon.a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

3) le produit $A \dot{\times} B$ *de deux matrices* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *et* $B = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ *appartenant respectivement à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*, par :*

$$A \dot{\times} B = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}, \text{ où } c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{in}.b_{nj}$$

Pour toute matrice A *appartenant à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et toute colonne* X *appartenant à* $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, le produit* $A \dot{\times} X$ *est ainsi bien défini.*

On admet que la loi $\dot{+}$ *ainsi définie sur* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *est une opération commutative, associative, qu'elle admet un élément neutre à savoir la matrice nulle ayant* p *lignes et* n *colonnes et dont tous les éléments sont nuls ; on note* O *cette matrice et cela quelles que soient les valeurs de* n *et* p.

On admet également que $\dot{\times}$ *est distributive par rapport à* $\dot{+}$.

Dans leur copie les candidats pourront omettre les points sur les signes $+$ *et* $\times$.

On remarque que pour toute matrice A *appartenant à* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *:*

$$(\mathscr{C}') \qquad A \dot{+} O = A, \ A \dot{+} A = O$$

On appelle **code** *toute partie non vide* $\mathscr{C}$ *de* $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{C}^2, \ x \dot{+} y \in \mathscr{C}$$

1) On considère les quatre colonnes $x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{M}_{5,1}(\mathbb{K})$

puis l'ensemble $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1.x_1 \dot{+} \varepsilon_2.x_2 \dot{+} \varepsilon_3.x_3 \dot{+} \varepsilon_4.x_4, \ (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) \in \mathbb{K}^4\}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{C}$ est un code.
  Déterminer tous les éléments de $\mathscr{C}$ à l'aide de x_1, x_2, x_4.
- **b)** Existe-t-il une famille (u_1, u_2) d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que $\{\varepsilon_1.u_1 \dot{+} \varepsilon_2.u_2, \ (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \mathbb{K}^2\}$ soit égal à $\mathscr{C}$?
- **c)** Montrer que : $\varepsilon_1.x_1 \dot{+} \varepsilon_2.x_2 \dot{+} \varepsilon_4.x_4 = O \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$.

On dit qu'une famille $(u_1,\ldots,u_q)$ *d'éléments de* $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *est* $\mathbb{K}$*-libre lorsque :*

$$\forall (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_q) \in \mathbb{K}^q, \ \varepsilon_1.u_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varepsilon_q.u_q = O \Rightarrow \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_q = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1,\ldots,u_q)$ *est* $\mathbb{K}$*-liée.*

On dit qu'une famille $(u_1,\ldots,u_p)$ *dont les éléments appartiennent à un code* $\mathscr{C}$ *est une* $\mathbb{K}$*-base de* $\mathscr{C}$ *lorsqu'elle est une famille* $\mathbb{K}$*-libre et lorsque pour tout élément* x *de* $\mathscr{C}$ *il existe* $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$ *appartenant à* $\mathbb{K}^p$ *tel que* $x = \varepsilon_1.u_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varepsilon_p.u_p$.

(Dans leur copie, les candidats pourront omettre la lettre $\mathbb{K}$ *dans les expressions manipulées* $\mathbb{K}$*-libre,* $\mathbb{K}$*- base, sans en oublier le sens particulier.)*

Dans la suite de cette partie n *désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

2) Pour tout $x = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $d(x,y)$ est le nombre d'entiers i appartenant à $\{1,\ldots,n\}$ tels que $x_i \neq y_i$.

- **a)** Montrer que : $\forall (x,y) \in \left(M_{n,1}(\mathbb{K})\right)^2, \ d(x,y) = d(x \dot{+} y, O)$.
- **b)** Montrer que : $\forall (x,y,z) \in \left(M_{n,1}(\mathbb{K})\right)^3, \ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

3) Soit $\mathscr{C}$ un code non réduit à $\{O\}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{C}$ admet une $\mathbb{K}$-base. On pourra considérer, après avoir justifié son existence, le cardinal maximum d'une famille $\mathbb{K}$-libre formée d'éléments de $\mathscr{C}$.
- **b)**
  - Montrer que si $(u_1,\ldots,u_p)$ est une $\mathbb{K}$-base d'un code $\mathscr{C}$, alors tout élément de $\mathscr{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\varepsilon_1.u_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varepsilon_p.u_p$.
  - En déduire le cardinal de $\mathscr{C}$ en fonction du cardinal d'une de ses $\mathbb{K}$-bases.

c) Montrer que toutes les $\mathbb{K}$-bases de $\mathscr{C}$ ont le même cardinal.

d) On suppose que p est le cardinal d'une $\mathbb{K}$-base de $\mathscr{C}$ et que $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille $\mathbb{K}$-libre de $\mathscr{C}$, montrer que $(v_1, \dots, v_p)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathscr{C}$.

4) On suppose dans cette question que $1 \leqslant p \leqslant n$ et on note I_p la matrice à p lignes et p colonnes dont tous les éléments sont nuls excepté les éléments diagonaux qui sont égaux à 1.
On suppose également que Q est une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que p colonnes de Q sont égales aux p colonnes distinctes de I_p.
On définit l'ensemble $\mathscr{C}_Q = \{x \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Q \dot{\times} x = O\}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}_Q$ est un code.

b) Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^n$ il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que : $Q \dot{\times} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & P \end{pmatrix} \dot{\times} \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ où P est une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.
(Dans la notation habituelle d'une matrice par blocs utilisée ci-dessus, la k-ième ligne de $\begin{pmatrix} I_p & P \end{pmatrix}$ est formée de la k-ième ligne de I_p suivie de la k-ième ligne de P.)

c) En déduire le nombre d'éléments de $\mathscr{C}_Q$ et le cardinal d'une de ses $\mathbb{K}$-bases.

d) On suppose dans cette sous-question que Q est la matrice $\begin{pmatrix} B & I_p \end{pmatrix}$ où B est une matrice appartenant à $\mathbb{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. Montrer que les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} I_{n-p} \\ B \end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathscr{C}_Q$.

e) Si A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, $\operatorname{Min} A$ désigne le plus petit élément de A.
On suppose que r est un entier strictement supérieur à 1, que toute famille formée de $r-1$ colonnes de Q est une famille $\mathbb{K}$-libre de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et qu'il existe une famille $\mathbb{K}$-liée formée de r colonnes de Q.
Montrer que dans ces conditions $r = \operatorname{Min}\{d(x,O),\ x \in \mathscr{C}_Q \setminus \{O\}\}$.

Partie III. Un code correcteur d'erreurs

Dans cette partie, on suppose que l'entier p est supérieur ou égal à 2 et on pose $n = 2^p - 1$.
On considère une matrice H dont les colonnes sont les n éléments non nuls de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et on définit :

$$\mathscr{C}_H = \{u \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ H \dot{\times} u = O\}$$

1) Déterminer le cardinal des $\mathbb{K}$-bases de $\mathscr{C}_H$.

2) Montrer que : $\operatorname{Min}\{d(u,v),\ (u,v) \in \mathscr{C}_H^2 \text{ et } u \neq v\} = 3$.

3) Pour tout v appartenant à $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on définit $B_v = \{u \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ d(u,v) \leqslant 1\}$.

a) Déterminer le cardinal de B_v.

b) Montrer que si v et w sont deux éléments distincts de $\mathscr{C}_H$, alors $B_v \cap B_w = \emptyset$.

c) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{v \in \mathscr{C}_H} B_v = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4) Soit z appartenant à $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \mathscr{C}_H$.

a) Montrer qu'il existe un seul élément v appartenant à $\mathscr{C}_H$ tel que $d(z,v) = 1$; cet élément v est noté $\Phi(z)$.

b) Montrer qu'il existe un seul élément e appartenant à $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $d(e,O) = 1$ et $H \dot{\times} z = H \dot{\times} e$.
Comparer $\Phi(z)$ et $z \dot{+} e$.

5) *Dans cette question et dans celle-ci uniquement on suppose que $p = 3$, donc $n = 7$, et on choisit pour H la matrice* $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}_{H_1}$ a pour $\mathbb{K}$-base (c_1, c_2, c_3, c_4) où : $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) On suppose qu'on veut transmettre (par sémaphore, radio ou internet ...) un message consistant en la suite de quatre symboles égaux à 0 ou 1 : $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$.
Au lieu de transmettre dans l'ordre ces quatre symboles, on calcule $y = \eta_1.c_1 \dot{+} \eta_2.c_2 \dot{+} \eta_3.c_3 \dot{+} \eta_4.c_4$ et ce sont les sept éléments de cette colonne qui sont transmis dans l'ordre (de haut en bas).
On suppose que les composantes de la colonne y^* reçues sont dans l'ordre : 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0 et qu'il y a une seule erreur dans la transmission, c'est à dire qu'une seule composante de y^* est fausse.

Déterminer la valeur exacte des quatre nombres η_1, η_2, η_3, η_4, (on utilisera le produit $H_1 \dot{\times} y^*$).

c) On suppose qu'ayant transmis une colonne z, appartenant à $\mathscr{C}_{H_1}$, on a reçu la colonne z^* comportant deux erreurs. Montrer que le calcul de $H_1 \dot{\times} z^*$ permet de s'apercevoir qu'il y a effectivement des erreurs mais ne permet pas de connaître les deux composantes qui sont fausses.

Partie IV. Distinguere falsum vero

Dans cette partie on utilise les mêmes notations que dans la partie III, en particulier p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $n = 2^p - 1$.

1) Pour tout k appartenant à $\{1, \ldots, n\}$, on considère l'écriture de k en base deux : $k = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_{ik} 2^{i-1}$ et on prend alors pour matrice H la matrice $H_2 = (\varepsilon_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.

On considère $n - p$ éléments $\eta_1, \ldots, \eta_{n-p}$ appartenant à $\mathbb{K}$. On veut transmettre le message formé par la ligne $(\eta_1 \quad \ldots \quad \eta_{n-p})$. Comme dans la question précédente, on commence par calculer la colonne $y = \eta_1.d_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \eta_{n-p}.d_{n-p}$ où $(d_1, \ldots, d_{n-p})$ est une base de $\mathscr{C}_{H_2}$ et c'est cette colonne qui est transmise. On désigne le message reçu par la colonne y^* et on suppose qu'il y a une seule erreur pendant la transmission.

On calcule alors $H_2 \dot{\times} y^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et on pose $k = \sum_{i=1}^{p} x_i 2^{i-1}$.

Montrer que l'erreur s'est produite à la composante numéro k de y.

2) On suppose dans cette question que $p = 3$ et $n = 7$.

a) On pose :

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice H_2 et montrer que (d_1, d_2, d_3, d_4) est une $\mathbb{K}$-base de $\mathscr{C}_{H_2}$

b) Les deux célèbres mathématiciens Primus et Secundus concourent au calcul d'une nouvelle constante universelle qu'ils appellent ζ. Primus pense avoir trouvé les trois premiers chiffres significatifs x, y et z (en base dix) de ζ et s'empresse de les transmettre à Secundus. Afin de minimiser les risques d'erreur au cours de la transmission et de s'assurer la possibilité de les détecter et les corriger, Primus et Secundus adoptent la démarche suivante :

1°) Chacun des chiffres $0, \ldots, 9$ a été écrit en base deux à quatre positions. Ainsi 5 est représenté par 0101 et 9 par 1001. Donc le chiffre x est écrit $x_4x_3x_2x_1$, y est écrit $y_4y_3y_2y_1$, z est écrit $z_4z_3z_2z_1$, ainsi par exemple $x = x_1 + x_2.2 + x_3.2^2 + x_4.2^3$.

2°) Primus transmet les 3 colonnes :

$$x_1.d_1 \dot{+} x_2.d_2 \dot{+} x_3.d_3 \dot{+} x_4.d_4, \qquad y_1.d_1 \dot{+} y_2.d_2 \dot{+} y_3.d_3 \dot{+} y_4.d_4, \qquad z_1.d_1 \dot{+} z_2.d_2 \dot{+} z_3.d_3 \dot{+} z_4.d_4$$

(d_1, d_2, d_3 et d_4 ont été définies ci-dessus et sont bien sûr connues de Secundus).

Évidemment Primus ne se trompe pas dans ses calculs mais la transmission est sujette à erreurs : on a constaté dans la pratique qu'il y a une erreur au plus par colonne transmise.

Secundus réceptionne une liste où les trois colonnes reçues sont écrites bout à bout, soit le message suivant :

111011010000110010111

Quel est probablement le nombre que Primus et Secundus semblent en fait sur le point de découvrir ?

c) Secundus décide d'écrire un programme en Pascal qui permet de retrouver à partir des colonnes reçues les chiffres envoyés par Primus. Comment Secundus peut-il procéder ?

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280
HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

On rappelle que :

- pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t}e^{-t}dt$ est convergente ;
- la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et associe à tout réel x strictement positif, le réel strictement positif $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$;
- pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul, et pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction f. Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f''.

Dans les parties II et III du problème, exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ.

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel u tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

Établir, pour tout réel t de $[\ 0, \sqrt{n}\ ]$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

c) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$$

2. a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\int_0^1 y^{x-1}dy$ et $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ sont convergentes.

On pose alors $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1}dy$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$$

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \sim n^x(n-1)!$, lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

b) Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a,b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)g_1(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t}dt$$

c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}) e^{-t}dt \leqslant \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t}dt$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leqslant 1$.

b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

3. a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] = \exp(-x\gamma_n) \times \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!}$$

b) On pose $v_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$. Montrer que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$$

4. a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, est convergente.

b) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

5. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}[\ln(\Gamma(x))]$.

Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$U_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

a) Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, exprimer pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x), \Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

b) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \text{ et } A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(x)$$

7. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n - \psi(n))$.

8. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}$.

Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}$.

a) Montrer que sur $\mathbb{R}^{+*}$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)dt$ est convergente.

b) En déduire la double inégalité : $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)dt < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

c) Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$. Conclure.

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

On considère une variable aléatoire X, qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des réels strictement positifs. Une densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)\theta^r} \times x^{r-1}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère un p-échantillon *i.i.d.* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ de la loi de X : les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_p$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_p$, un p-échantillon de réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_p$, respectivement ; les réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont fixés, strictement positifs et non tous égaux.

Soit L la fonction (appelée *fonction de vraisemblance*) définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout couple (θ, r) de réels strictement positifs, associe :

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^{p} f(x_i)$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

1. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.

2. a) Établir l'existence sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction F. Les calculer.

b) Montrer que les éventuels points critiques $(\theta^\star, r^\star)$ vérifient le système (S) d'équations suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} \theta^\star r^\star = \overline{x} & (1) \\ \ln r^\star - \dfrac{\Gamma'(r^\star)}{\Gamma(r^\star)} = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i & (2) \end{cases}$$

dans lequel $\overline{x} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

3. On pose $K_p = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i$.

a) Justifier, pour tout réel $x > 0$ et différent de 1, l'inégalité : $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.

b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p$$

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation (2) admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une unique solution $r^\star$. En déduire que le système d'équations (S) admet une unique solution $(\theta^\star, r^\star)$.

4. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point $(\theta^\star, r^\star)$.
En déduire qu'au point $(\theta^\star, r^\star)$, la fonction L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point, on obtient en fait un maximum global de L. On dit que le couple $(\theta^\star, r^\star)$ est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ ; le paramètre réel inconnu σ est strictement positif.

1. Montrer que la variable aléatoire $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ de paramètre $1/2$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2. Pour n entier naturel non nul, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *i.i.d.* (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X.

a) On désigne par S_n la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$. Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

b) En déduire que la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, est un estimateur sans biais de σ^2.

3. a) Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie : $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

b) Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.

c) Montrer que la variable aléatoire $\widehat{\sigma_n}$ définie par :

$$\widehat{\sigma_n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}$$

où λ_n a été défini dans la question I.2.d, est un estimateur sans biais du paramètre σ.

4. a) Calculer la variance $V(\widehat{\sigma_n})$ de l'estimateur $\widehat{\sigma_n}$ en fonction de n et σ.

b) La suite $(\widehat{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280
HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

Pour tout couple (p, q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A.

Dans tout le problème, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs X et Y étant noté $\langle X, Y\rangle$ ou $Y^T X$.

Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $||X|| = \sqrt{X^T X} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\right)^{1/2}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe z sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté i.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{k+j-1}$, les entiers k et j décrivant $[\![1, n]\!]$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice H_n s'écrit donc :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note $(\arctan)'$ sa dérivée.

1. a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de x.

b) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, l'encadrement : $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$.

2. a) Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ. On note F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle $[0, 1]$ suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction `Cauchy` simulant la variable aléatoire U.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, n]\!]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}dt$.

En déduire, pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale P telles que : $H_n = PDP^T$.

b) On désigne par α_n (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de H_n.
Montrer, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$\alpha_n ||X||^2 \leqslant X^T H_n X \leqslant \beta_n ||X||^2$$

3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
a) Soit Y un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$.

b) Réciproquement, soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$. Montrer que Y appartient à $\mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_0.

a) Établir l'inégalité : $|X_0|^T H_n |X_0| \geqslant X_0^T H_n X_0$.

b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathcal{V}$.

c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur X_0 n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

On rappelle que β_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice H_n.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n. Soit Z le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i\int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$ et $\int_0^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$.

b) Montrer, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'égalité : $\int_{-1}^{1} x^p dx = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta}d\theta$.

c) En déduire, pour tout polynôme P à coefficients complexes, l'égalité : $\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

d) Dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. a) Établir l'encadrement : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que l'on a : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_{n-1}e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$.

4. a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(\theta) = \left|\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta}\right|^2$.

Montrer que φ est 2π–périodique et paire ; en déduire l'égalité : $\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$.

b) Établir l'inégalité : $X^T H_n X \leqslant \pi||X||^2$.

c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, le vecteur W de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,p[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.

b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geqslant \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. a) Montrer que $||W||^2$ est équivalent à $\ln n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
280
HEC_M1_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION : SCIENTITIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I la matrice identité, et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne. On confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Préliminaire

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *norme* sur E, toute application ν de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
i) $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) pour tout λ réel, pour tout x de E : $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
iii) pour tout couple (x, y) de E^2 : $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$.

Montrer que l'application $|| \ ||_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par : pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, $||X||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Partie I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le réel $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$, définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme de A sera notée $||A||$.

2. a) Établir pour tout X de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité : $||AX||_\infty \leqslant ||A|| \times ||X||_\infty$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^n$, non nul, tel que $||AX_0||_\infty = ||A|| \times ||X_0||_\infty$.
En déduire que $||A|| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty}$.

c) Établir alors que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\lim\limits_{m\to+\infty} ||A_m - A|| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3. a) Montrer que $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$: $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

b) Montrer que si $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A et $(B_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers B, alors $(A_mB_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers AB.

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $||A|| < 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

c) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} A^k\right)_m$ converge, et exprimer sa limite en fonction de la matrice A.

Soit $(A_m)_{m\geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la série de terme général A_m (qu'on notera $\sum\limits_{m\geqslant 0} A_m$) converge, si la suite $\left(\sum\limits_{m=0}^{p} A_m\right)_p$ converge. Dans ce cas, sa limite est notée $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m$.

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} N^k$ converge. On note $M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$.

b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n / (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / NX = 0\}$.

6. a) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k$ converge.

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge, et exprimer sa somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ en fonction de P et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$.

On admet **jusqu'à la fin du problème** *que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge, et on note : $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.*

7. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $A_m = \left(I + \frac{1}{m} A\right)^m$.

a) Établir l'inégalité :

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{||A||^k}{k!}$$

b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que si A et B sont éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$, alors, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A) - I = A(I + S_A)$.

b) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \longmapsto e^x - 1 - 2x$.

c) En déduire que si $||A|| < 1$, alors $||S_A|| < 1$.

d) On suppose que $||A|| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n, et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que si A est un élément de $\mathcal{S}_n$, alors $\exp(A)$ est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Montrer que l'application exp restreinte à $\mathcal{S}_n$ est une surjection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. B), et $\exp(u)$ (resp. $\exp(v)$) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $\exp(A)$ (resp. $\exp(B)$).

a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

b) Montrer que $A \times \exp(B) = \exp(B) \times A$.

c) Soit F un sous-espace propre de v.

i) Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.

ii) Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.

d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v, montrer alors que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Partie II

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_1) = 0$, et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $f(e_i) = e_{i-1}$.

On note N la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, la matrice N^k.

2. Soit p un réel de $]0, 1[$. On définit les matrices R_p et Q_p par : $R_p = (1-p)I + pN = I + Q_p$.

a) Établir l'égalité : $\exp(Q_p) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j$.

b) Calculer $||R_p||$ et $||Q_p||$. Montrer que $||\exp(Q_p)|| \leqslant 1$.

3. a) Soit m un entier supérieur ou égal à 1, et $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des réels de l'intervalle $]0, 1[$.
On pose pour tout i de $[\![1, m]\!]$, $R_i = R_{p_i}$ et $Q_i = Q_{p_i}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} Q_k\right) = \exp\Big(\Big[-\sum_{k=1}^{m} p_k\Big](I - N)\Big)$$

b) Établir la relation suivante :

$$\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)]\,(R_2 \times \cdots \times R_m) - \exp(Q_1)\,[\exp(Q_2) \times \cdots \times \exp(Q_m) - R_2 \times \cdots \times R_m]$$

c) En déduire la majoration suivante : $\left\| \displaystyle\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) \right\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{m} ||R_k - \exp(Q_k)||$.

4. a) Montrer l'égalité : $||\exp(Q_1) - R_1|| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1|e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{p_1^k}{k!}$.

b) En déduire successivement les deux inégalités :

$$||\exp(Q_1) - R_1||| \leqslant 2p_1^2 \quad \text{et} \quad \left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m}\exp(Q_k)\right\| \leqslant 2\sum_{k=1}^{m} p_k^2$$

Partie III.

Les notations sont celles de la partie II.

On considère m pièces de monnaie ($1 \leqslant m < n$), telles que pour tout i de $[\![1, m]\!]$, la i-ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i, et Face avec la probabilité $1 - p_i$. On pose $\lambda = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, etc. jusqu'à la m-ième pièce, cette expérience étant modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout k de $[\![1, m]\!]$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. a) Montrer que pour tout k de $[\![1, m]\!]$, les $k+1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ représentent la loi de S_k.

b) Montrer la relation suivante : $\left\|\prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m}\exp(Q_i)\right\| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|P([S_m = k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|$.

c) En déduire l'inégalité suivante : $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P([S_m = k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2$.

2. Dans un programme Pascal sont faites les déclarations suivantes :

```
const m =... ;
Type tab = array[1..m] of real ;
Var prob : tab ;
```

On suppose que `prob` contient les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (ainsi `prob[1]` contient p_1 etc.)

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Sm(prob : tab) : integer` qui simule la variable aléatoire S_m.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
280
HEC_M1_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 30 avril 2008, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$. Lorsqu'une matrice A est inversible, on note A^{-1} son inverse.
Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$) et $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur (point) de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$).
On munit $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) de sa structure euclidienne canonique, et pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), on note $\langle u, v\rangle = {}^tuv$ leur produit scalaire, et $||u||$ la norme de u associée.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note f_i une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelles, et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles, par : $F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)]^2$.

Autrement dit, si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est un point de $\mathbb{R}^p$, on a : $F(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2(X) = \dfrac{1}{2}||f(X)||^2$, en notant $f(X)$ le vecteur $(f_1(X), \ldots, f_n(X))$.

Le problème a pour objet l'étude de quelques aspects mathématiques liés à la recherche du minimum de la fonction F.

Partie I. Gradient et hessienne

Pour tout point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on rappelle que :

- le *gradient* de F au point X, noté $\nabla F(X)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ suivant :

$$\nabla F(X) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_p}(X))$$

- la *matrice hessienne* de F au point X, notée $\nabla^2 F(X)$, est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivante :

$$\nabla^2 F(X) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(X)\right)_{1\leqslant k,j\leqslant p}$$

Pour tout point $X = (x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note $J(X)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

dans laquelle i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne. On pose : $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

Si X est un point de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\nabla F(X) \neq 0$, on dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^p$ est *une direction de décroissance* de F en X, si on a : $\langle \nabla F(X), h\rangle < 0$.

Dans les trois exemples suivants, on suppose que p est égal à 2.

1. *Un premier exemple.*

On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 + 1$, et $f_2(x_1,x_2) = x_1 + x_2^2 + 1$.

a) Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer, en tout point (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1,x_2)$.

b) Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de F, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \\ (x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

c) Établir, pour tout (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$. En déduire que l'unique point critique de F est $(-1/2, -1/2)$.

d) Déterminer, en tout point (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1,x_2)$. En déduire que F admet un minimum local en $(-1/2,-1/2)$.

e) On note pour tout point X de $\mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f_1(X)$ et $\nabla^2 f_2(X)$ respectivement, les matrices hessiennes de f_1 et f_2 au point X. Préciser la matrice $J(X)$. Exprimer ${}^tJ(X)f(X)$ et $G(X) + \sum_{i=1}^{2} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$ en fonction de $\nabla F(X)$ et $\nabla^2 F(X)$ respectivement.

2. *Un deuxième exemple.*

Soit $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ trois vecteurs non nuls donnés de $\mathbb{R}^n$, tels que la famille (a,b) soit libre.

Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1,x_2) = a_ix_1 + b_ix_2 - c_i$.

a) Exprimer, pour tout point (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1,x_2)$ à l'aide de $x_1, x_2, ||a||, ||b||, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle$ et $\langle b,c\rangle$.

b) Justifier l'inégalité : $||a||^2 \times ||b||^2 - \langle a,b\rangle^2 > 0$. En déduire que la fonction F possède un unique point critique $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

Exprimer $\widehat{x_1}$ et $\widehat{x_2}$ en fonction de $||a||, ||b||, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle$ et $\langle b,c\rangle$.

c) Calculer, en tout point (x_1,x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1,x_2)$; en déduire que F admet un minimum local en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

d) En utilisant la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$, montrer que F admet un minimum global en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

3. *Un troisième exemple.*

On suppose que $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont n réels donnés non tous égaux. On note $\bar{c}$ et s^2 respectivement, la moyenne arithmétique et la variance de la série statistique $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - c_i$.

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Soit $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ un point critique de F. Exprimer $F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ en fonction de s^2. Montrer, pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'égalité : $F(x_1, x_2) - F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \dfrac{n}{2}(x_1 + x_2 - \overline{c})^2$.

c) En déduire la nature des points critiques de F. Ce résultat était-il prévisible ?

4. *Retour au cas général.*

Soit $X = (x_1, \ldots, x_p)$ un point de $\mathbb{R}^p$.

a) Exprimer $\nabla F(X)$ en fonction de ${}^tJ(X)$ et de $f(X)$.

b) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $\nabla^2 f_i(X)$ la matrice hessienne de f_i au point X.

Établir la formule : $\nabla^2 F(X) = G(X) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$.

Partie II. Une approximation de F

Dans cette partie, on conserve les définitions et les notations de la partie I, et on suppose que X est un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.

Pour tout vecteur $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on pose : $\ell(h) = f(X) + J(X)h$ et $L(h) = \dfrac{1}{2}||\ell(h)||^2$.

1. Établir, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, l'égalité : $L(h) = F(X) + {}^th\nabla F(X) + \dfrac{1}{2}{}^th\ G(X)h$.

2. Soit P une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Justifier que P est diagonalisable.

b) On note $\theta_1, \ldots, \theta_p$ les valeurs propres de P, et on pose : $\theta = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} |\theta_j|$. Montrer, pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, l'inégalité suivante : $|{}^thPh| \leqslant \theta||h||^2$.

3. a) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction F au point X.

b) En déduire, à l'aide de la question 2.b, que l'on a : $\lim\limits_{||h|| \to 0} \dfrac{F(X+h) - L(h)}{||h||} = 0$.

Pour X fixé de $\mathbb{R}^p$, on dit que $L(h)$ est une approximation à l'ordre 2 de $F(X+h)$ lorsque $||h||$ tend vers 0.

4. On note : $G(X) = (g_{i,j}(X))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ par : $\varphi_1(h) = {}^th\nabla F(X)$ et $\varphi_2(h) = {}^thG(X)h$.

a) Montrer que pour tout j de $[\![1, p]\!]$, on a : $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(X)$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial h_j}(h) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i$.

b) En déduire que le gradient $\nabla L(h)$ de L en h, est donné par : $\nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h$.

c) Soit $\nabla^2 L(h)$ la matrice hessienne de L en h. Établir la formule : $\nabla^2 L(h) = G(X)$.

5. Soit J une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la matrice ${}^tJJ$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

b) Montrer que lorsque la matrice ${}^tJJ$ est inversible, le rang de la matrice J est égal à p.

6. Montrer que si la fonction L admet des points critiques $\widehat{h}$, alors ceux-ci vérifient l'inéquation : $\langle \widehat{h}, \nabla F(X) \rangle \leqslant 0$.

7. On suppose que la matrice $G(X)$ est inversible.

a) Montrer que L admet un unique point critique $\widehat{h}$ donné par : $\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^tJ(X)f(X)$.

b) Établir que $\widehat{h}$ est une direction de décroissance de F en X. En déduire que L admet un minimum local en $\widehat{h}$.

Partie III. Une décomposition d'une matrice rectangulaire

Afin de réduire les inconvénients liés à l'inversion de la matrice $G(X)$, on remplace celle-ci par la matrice $G(X) + \mu I$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif, et I la matrice identité d'ordre p. Certains résultats d'algèbre linéaire permettent alors de substituer à l'inversion d'une matrice, le calcul plus simple d'une somme de matrices.

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p$, et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_q > 0$, qui vérifient l'égalité : ${}^tV{}^tJJV = D$, où $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est définie par : $d_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leqslant i \leqslant q$, et $d_{i,j} = 0$ sinon. Si $q < p$, on pose : $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_p = 0$.
Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on note V_i la i-ième colonne de V.

2. a) Montrer que le rang de ${}^tJJ$ est égal à q.

b) Montrer que, pour tout i de $[\![1,q]\!]$, JV_i est un vecteur propre de la matrice $J\,{}^tJ$ associé à la valeur propre λ_i. En déduire que les matrices ${}^tJJ$ et $J\,{}^tJ$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

c) Soit $(Y_1, \ldots, Y_r)$ une base du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associée à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(JY_1, \ldots, JY_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) En déduire que les sous-espaces propres de ${}^tJJ$ et de $J\,{}^tJ$ associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension, et que le rang de $J\,{}^tJ$ est égal à q.

3. On pose, pour tout i de $[\![1,q]\!]$: $U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} JV_i$.

a) Montrer que la famille $(U_1, \ldots, U_q)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

b) En déduire qu'il existe une base orthonormée $(U_1, \ldots, U_q, U_{q+1}, \ldots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

4. On note U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la i-ième colonne de U est la matrice-colonne U_i de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $s_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $s_{i,j} = 0$ sinon.

Établir l'égalité matricielle suivante : $S = {}^tUJV$. En déduire l'égalité : $J = US{}^tV$.

5. a) Montrer que la matrice $({}^tJJ + \mu I)$ est inversible.

b) On note $R = (r_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par : $r_{i,i} = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $r_{i,j} = 0$ sinon.
Établir la formule suivante : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = VR{}^tU$.

c) En déduire l'égalité : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu} V_i{}^tU_i$

6. Soit X un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.
Pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, on pose : $M(h) = L(h) + \dfrac{\mu}{2}||h||^2$.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{||h||\to 0} \frac{F(X+h) - M(h)}{||h||} = 0$.

b) Calculer, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, le gradient $\nabla M(h)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 M(h)$ de M en h.

c) En appliquant les résultats des questions précédentes à la matrice $J(X)$, montrer que M admet un unique point critique $h^\star$. Donner une expression de $h^\star$ qui utilise les résultats de la question 5.c.

d) Montrer que M admet un minimum local en $h^\star$.

À partir de ce minimum local $h^\star$ de M (ou du minimum local $\widehat{h}$ de L), on pourrait utiliser une méthode algorithmique permettant, sous certaines conditions, d'approcher avec une précision donnée un minimum local de la fonction F

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conception : HAUTES ETUDES COMMERCIALES

280

OPTION SCIENTIFIQUE

HEC_MATS

MATHEMATIQUES

Mardi 28 avril 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des suites récurrentes linéaires intervenant notamment dans l'analyse de processus aléatoires utilisés en prévision économique, ainsi que leur lien avec la notion de polynôme minimal.

Les parties II, III et IV sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Deux exemples

Exemple 1.

1. On considère la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $s_1 = 1, s_2 = \dfrac{4}{5}, s_3 = \dfrac{2}{5}$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $s_{n+3} = \dfrac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \dfrac{1}{4}s_n$.

a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `suite(s1,s2,s3 : real, n : integer) : real` qui, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, renvoie le n-ième terme de cette suite.

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité : $s_n = \dfrac{1}{5\times 2^{n-2}} + \dfrac{3}{5\times 2^{(n-2)/2}} \times \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + X - \dfrac{1}{4}$ admet une unique racine réelle λ_1, valant $\dfrac{1}{2}$; déterminer ses deux racines complexes λ_2 et λ_3 dont on précisera le module et un argument.

e) On admet qu'il existe trois nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $s_n = \dfrac{\alpha_1}{2^n} + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3\lambda_3^n$. Calculer α_1, α_2 et α_3. Retrouver la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 2.

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$ et P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P(X) = X^2 - xX - y$. On note r_1 et r_2 les racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues du polynôme P.

2. a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$ des points de coordonnées (x, y) défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |y| < 1 \text{ et } |x| < 1 - y\}$$

b) Distinguer sur le graphique la partie de $\mathcal{D}$ dans laquelle les racines de P sont réelles.

3. En étudiant séparément le cas où les racines r_1 et r_2 sont réelles et le cas où elles sont complexes, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

i) $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.
ii) $P(-1) > 0, P(1) > 0$ et $|r_1 r_2| < 1$.
iii) $|y| < 1$ et $|x| < 1 - y$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On note $E(A)$ et $V(A)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A de $\mathcal{E}$. Si A et B appartiennent à $\mathcal{E}$, leur covariance est notée $\text{cov}(A, B)$.
On appelle *processus aléatoire* $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, toute application Y définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$.
Soit $W = (W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire constitué de variables aléatoires mutuellement indépendantes, vérifiant pour tout t de $\mathbb{Z}$, les égalités suivantes : $E(W_t) = 0$ et $V(W_t) = \sigma^2$, avec σ strictement positif fixé.
Soit (a_1, a_2) un élément de $\mathbb{R}^2$. On considère un processus aléatoire $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ formé de variables aléatoires *centrées, de même variance strictement positive* et qui vérifient, pour tout t de $\mathbb{Z}$:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + W_t$$

On suppose que :

- pour tout couple (t, k) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\text{cov}(W_t, Y_{t-k}) = 0$;
- pour tout couple (t, k) de $\mathbb{Z}^2$, $\text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ ne dépend que de k.

On pose alors, pour tout k de $\mathbb{Z}$: $\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ et $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$.

4. a) Que représente γ_0 pour le processus Y ?

b) Établir, pour tout k de $\mathbb{Z}$, l'égalité : $\gamma_{-k} = \gamma_k$.

c) Montrer, pour tout t de $\mathbb{Z}$, l'égalité : $\text{cov}(W_t, Y_t) = \sigma^2$.

5. *On suppose dans cette question que le couple* (a_1, a_2) *appartient à l'ensemble* $\mathcal{D}$ *défini dans la question 2.a.*

a) Exprimer γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0, a_1 et a_2. En déduire l'expression de ρ_1 et ρ_2 en fonction de a_1 et a_2.

b) Établir les deux inégalités : $a_1\rho_1 + a_2\rho_2 \geqslant 0$ et $|\rho_1| < 1$, ainsi que l'encadrement : $0 \leqslant a_1\rho_1 + a_2\rho_2 < 1$.

c) Exprimer γ_0 en fonction de $\sigma^2, a_1, a_2, \rho_1$ et ρ_2.

6. a) Montrer que la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

b) Soit r_1 et r_2 les racines du polynôme $P(X) = X^2 - a_1 X - a_2$. Montrer que la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ (on distinguera trois cas : r_1 et r_2 réels avec $|r_1| < |r_2|$, r_1 et r_2 réels avec $|r_1| = |r_2|$, r_1 et r_2 complexes conjugués).

Partie II. Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Dans cette partie, p est un entier de $\mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbb{C}^p$ vérifiant $a_p \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes et $\mathcal{S}_p$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ récurrentes linéaires d'ordre p, c'est-à-dire, qui vérifient pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$s_{n+p} = a_1 s_{n+p-1} + a_2 s_{n+p-2} + \cdots + a_p s_n$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

8. Soit Φ l'application de $\mathcal{S}_p$ dans $\mathbb{C}^p$ qui, à toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, associe le p-uplet $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ de $\mathbb{C}^p$. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_p$.

9. On note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et Φ^{-1} l'application réciproque de Φ. Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on considère la suite $v^{(i)} = (v_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v^{(i)} = \Phi^{-1}(e_i)$.

a) Justifier que la famille $(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)})$ constitue une base de $\mathcal{S}_p$. Préciser les coordonnées de toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)})$.

b) Calculer, pour tout j de $[\![1,p]\!]$, $v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \dots, v_j^{(p)}$. Montrer que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on a : $v_{p+1}^{(i)} = a_{p-i+1}$.

10. Soit δ l'application définie sur $\mathcal{S}_p$ par : pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, $\delta(s) = (s_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

b) Déterminer la matrice Δ de δ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)})$.

11. Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^p - a_1X^{p-1} - \dots - a_{p-1}X - a_p$.

a) Montrer que λ est une valeur propre de δ si et seulement si λ est une racine de P.

b) Soit λ une valeur propre de δ. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ, et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour que δ soit diagonalisable.

c) On suppose que P admet p racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Établir, pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, l'existence d'un unique p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait : $s_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^n$.

Partie III. Polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire

Le contexte et les notations de cette partie sont ceux du préambule de la partie II et de la question 10.
On considère une suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$. On dit qu'un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ est un *polynôme générateur de la suite* s, si $[Q(\delta)](s) = 0_{\mathcal{S}_p}$. On note J l'ensemble des polynômes générateurs de la suite s.

12. Montrer que J n'est pas réduit au polynôme nul.

13. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

14. Montrer que, si Q est un polynôme de J et A un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, alors $Q \times A$ appartient à J.

15. On note N l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de J.

a) Justifier l'existence d'un polynôme Π de J tel que son degré soit le plus petit élément de N. On note d le degré de Π.

b) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que J est l'ensemble des polynômes de la forme $\Pi \times L$, avec L élément de $\mathbb{C}[X]$.

c) En déduire qu'il existe un unique polynôme de J, noté Π^*, de coefficient dominant égal à 1 et de degré d.
On dit que Π^* *est le polynôme générateur minimal de* s *et que son degré* d *est le degré de la suite* s.

16. *Un exemple.* Déterminer le polynôme générateur minimal et le degré de la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ récurrente linéaire d'ordre 3 définie par $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $s_{n+3} = 2s_{n+1} + s_n$.

17. Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré d ($d \geqslant 1$) et soit k un entier strictement supérieur à d. On note H la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ définie par :

$$H = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on note U_j la j-ième colonne de H. On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ canoniquement associé à H et, pour tout j, on note u_j le vecteur de $\mathbb{C}^k$ canoniquement associé à U_j.

a) Montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_d)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(h)$.

b) Établir que, pour tout j de $[\![d+1, k]\!]$, la famille $(u_1, u_2, \dots, u_d, u_j)$ est liée. En déduire le rang de h et la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$.

c) Montrer qu'un polynôme $Q(X) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j X^j$ de $\mathbb{C}[X]$ appartient à J, si et seulement si l'élément $(q_0, q_1, \dots, q_{k-1})$ de $\mathbb{C}^k$ appartient à $\mathrm{Ker}(h)$.

d) *Un exemple.* Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré inférieur ou égal à 3 dont les premiers termes sont : $-1, 7, 5, 19, 29, 67, 125$. Déterminer le polynôme générateur minimal de cette suite.

Partie IV. Un algorithme de calcul d'un polynôme générateur d'une suite récurrente linéaire

Soit d et k deux entiers tels que $1 \leqslant d \leqslant k$ et soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe récurrente linéaire de degré d dont on connaît les $2k$ premiers termes ; on pose : $S(X) = \sum_{i=0}^{2k-1} s_{2k-i} X^i$. On note $\mathbb{C}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k. Soit $Q(X) = \sum_{j=0}^{k} q_j X^j$ un polynôme de $\mathbb{C}_k[X]$. Le degré d'un polynôme T est noté $\deg(T)$.

18. On note $(\star)$ la relation suivante : pour tout n de $[\![1, k]\!]$, on a $\sum_{j=0}^{k} q_j s_{n+j} = 0$.
Montrer que Q est un polynôme générateur de la suite s si et seulement si la relation $(\star)$ est vérifiée.

19. a) On pose, pour tout n de $[\![0, 3k-1]\!]$: $t_n = \sum_{\substack{i\in[\![0,2k-1]\!],\, j\in[\![0,k]\!] \\ i+j=n}} q_j s_{2k-i}$. Établir l'égalité : $QS = \sum_{n=0}^{3k-1} t_n X^n$.

b) On suppose la relation $(\star)$ vérifiée. Montrer, pour tout n de $[\![k, 2k-1]\!]$, l'égalité : $t_n = 0$. En déduire l'existence de deux polynômes A et B de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$. Montrer que la relation $(\star)$ est vérifiée.

20. Dans l'algorithme suivant, les variables A, B, C, D, E, F, R, S sont des polynômes, k une constante entière. L'entier k et le polynôme S ont les valeurs données précédemment.

Initialisation : $A := X^{2k}$, $B := S$, $C := 0$, $D := 1$.
Corps :
Tant que $\deg(B) \geqslant k$
effectuer la division euclidienne de A par B, $A = BF + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$.
$E := C - DF$.
$C := D$, $D := E$, $A := B$, $B := R$.
Fin de Tant que.
Sortie : Rendre D et B.

Si U et V sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe un polynôme W de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant $U = V + X^{2k}W$, on notera : $U \equiv V$.

a) Montrer que cet algorithme se termine, c'est-à-dire que l'on sort de la boucle.

b) Montrer qu'à l'initialisation, on a :
$\deg(C) \leqslant 2k - \deg(A)$, $\deg(D) \leqslant 2k - \deg(A)$, $k \leqslant \deg(B) \leqslant \deg(A)$, $CS \equiv A$, $DS \equiv B$.

c) On suppose qu'à l'issue du j-ième passage dans la boucle, les relations précédentes sont vérifiées. Montrer qu'elles le sont encore à l'issue du $(j+1)$-ième passage.

d) Montrer que lorsque l'algorithme se termine, l'une des variables contient un polynôme générateur de la suite s. Quelle est cette variable ?

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE **280**

OPTION SCIENTIFIQUE **HEC__MATS**

MATHEMATIQUES

Mardi 4 mai 2010, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $\langle\ ,\ \rangle$ et $||\ ||$. Pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $x \geqslant y$ si pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $x_i \geqslant y_i$.
Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $\overrightarrow{0}$ et le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 est noté $\overrightarrow{1}$.

On rappelle ou on admet les deux résultats suivants :

- une partie K non vide de $\mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout couple (u, v) de vecteurs de K^2 et pour tout réel t de $[0, 1]$, le vecteur $tu + (1-t)v$ appartient à K ;
- l'image réciproque par une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ *sépare* deux convexes K_1 et K_2, s'il existe un réel c qui vérifie, pour tous vecteurs u de K_1 et v de K_2, l'encadrement : $\langle h, u\rangle < c < \langle h, v\rangle$.
Si K est une partie non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on appelle *projection de x sur K* et on note $p(x)$ s'il existe, tout vecteur y de K qui vérifie, pour tout vecteur z de K : $||x - y|| \leqslant ||x - z||$, c'est-à-dire tel que $||x - y|| = \min\limits_{z\in K} ||x - z||$.

Partie I. Projection sur un convexe fermé

1. *Exemple 1.* Soit K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 / z_1 \leqslant 1 \text{ et } z_2 \leqslant 1\}$, et $x = (x_1, x_2)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.
   a) Montrer que l'ensemble K est convexe et fermé. K est-il borné ?
   b) Établir l'existence et l'unicité de la projection $p(x)$ de x sur K. Déterminer cette projection.
   c) Faire une figure représentant le convexe K, un vecteur x et la projection $p(x)$.
   d) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `distance(x1,x2 : real) : real` qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K et tel que $x_1 > 0, x_2 > 0$, associe le réel $||x - p(x)||$.
   e) Vérifier que pour tout vecteur z de K, on a : $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0$.
   f) Montrer qu'il existe un réel c qui vérifie, pour tout vecteur z de K : $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$.

2. *Exemple 2.* Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, différent de $\{\overrightarrow{0}\}$ et de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. On admet qu'elle est fermée.

b) Dans cette question, E est l'ensemble des vecteurs $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient l'équation : $w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à E. Déterminer $\min\limits_{w\in E} ||x - w||$ et le vecteur $p(x)$.

Cas général : soit K une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à K.

3. Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : pour tout z de K, $f(z) = \|x - z\|$.

a) Justifier la continuité de la fonction f.

b) Soit z_0 un vecteur quelconque de K. On considère la boule fermée B_0 de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose : $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

c) En déduire que f admet un minimum sur K'. Soit $\hat{z}$ tel que $f(\hat{z}) = \min\limits_{z\in K'} f(z)$.

d) Montrer que l'inégalité $\|x - z\| \geqslant \|x - \hat{z}\|$ est satisfaite pour tout vecteur z de K. Conclure.

4. a) Vérifier pour tous vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$, l'identité : $\left\|x - \dfrac{a+b}{2}\right\|^2 + \dfrac{1}{4}||a-b||^2 = \dfrac{1}{2}||x-a||^2 + \dfrac{1}{2}||x-b||^2$.

b) On pose : $d = \min\limits_{z\in K} ||x - z||$. Soit u et v deux vecteurs de K vérifiant $d = ||x - u|| = ||x - v||$.

À l'aide de la question précédente, montrer que $u = v$. Conclure.

5. On rappelle que $p(x)$ désigne la projection du vecteur x sur K.

a) Établir pour tout vecteur z de K et pour tout réel t de $[0, 1]$, l'inégalité :

$$||x - p(x)||^2 \leqslant ||x - (tz + (1-t)p(x))||^2$$

b) En déduire pour tout z de K, l'inégalité : $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0$.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe un vecteur y de K tel que pour tout vecteur z de K, on a : $\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0$. Montrer que $y = p(x)$. Conclure.

d) Établir l'inégalité : $\langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle$. Montrer que $x - p(x)$ sépare les ensembles K et $\{x\}$.

Partie II. Un cas particulier

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, des réels strictement positifs. On pose : $K = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n / \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 \leqslant 1\}$.

6. Montrer que K est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K et vérifiant pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $x_i > 0$. On pose : $K_0 = \{z \in K / \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 = 1\}$ et $K_1 = \{z \in K / \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 < 1\}$.

7. Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : $f(z) = ||x - z||^2$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert K_1.

b) La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques ? En déduire que $p(x)$ appartient à K_0.

c) Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles.

8. On définit l'ouvert Ω par : $\Omega = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) / \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ z_i > 0 \text{ et } (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$.

Soit Ψ et H les fonctions à valeurs réelles définies sur Ω par : $\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha_n}\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\right)}$ et

$$H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}))^2.$$

On suppose que $(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H.

On note $z_n^* = \Psi(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*, z_n^*)$.

a) Montrer que z_n^* est strictement positif et que le vecteur z^* appartient à K_0.

b) On pose : $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_n}\left(\dfrac{x_n}{z_n^*} - 1\right)$. Montrer que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $z_i^* = \dfrac{x_i}{1+\lambda\alpha_i}$.

c) On pose : $\beta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\dfrac{-1}{\alpha_i}\right)$. Montrer que $\lambda > \beta$.

d) Étudier la fonction définie sur $]\beta,+\infty[$ par $y \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2}$. En déduire l'existence d'un unique réel λ_0 vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\lambda_0\alpha_i)^2} = 1$. Montrer que λ_0 est strictement positif.

Expliciter les coordonnées du vecteur z^* en fonction de λ_0 et des réels α_i et x_i ($i \in [\![1,n]\!]$).

9. a) Établir pour tout z de K, l'inégalité : $\langle z - z^*, x - z^*\rangle \leqslant 0$. En déduire que $z^* = p(x)$.

b) Montrer que le réel $c = \dfrac{\lambda_0}{2}\left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i^2}{1+\lambda_0\alpha_i}\right)$ vérifie pour tout z de K : $\langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle$.

Partie III. Une séparation de deux convexes

On admet la proposition suivante : si K_1 et K_2 sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que $K_1 \cap K_2 = \{x_0\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$), alors il existe un vecteur h non nul de $\mathbb{R}^n$ et un réel c tels que, pour tout x de K_1, pour tout y de K_2, on a : $\langle h, x\rangle \leqslant c \leqslant \langle h, y\rangle$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties K de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

i) K est convexe, fermée, bornée et contenue dans $\{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \overrightarrow{0}\}$;

ii) il existe un vecteur x de K dont toutes les coordonnées sont strictement positives ;

iii) pour tout x de K et tout y de $\mathbb{R}^n$, on a : $[x \geqslant y \geqslant \overrightarrow{0}] \Rightarrow y \in K$.

10. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un exemple d'élément K de $\mathcal{B}_2$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne un élément K de $\mathcal{B}_n$.

11. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est *strictement concave* si, pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $a < b$, pour tout réel t de $]0,1[$, on a : $f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$.
Montrer que la fonction ln est strictement concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

12. Soit g la fonction à valeurs réelles définie sur K par : $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i$.

a) Justifier que g admet un maximum sur K.

b) Soit u un vecteur de K tel que $g(u) = \max\limits_{x\in K} g(x)$. Montrer que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $u_i > 0$.

c) Établir l'unicité du vecteur u de K tel que $g(u) = \max\limits_{x\in K} g(x)$.
(on pourra raisonner par contraposée et utiliser la question 11)

13. On note $\phi^*(K) = (\phi_1^*(K), \phi_2^*(K), \ldots, \phi_n^*(K))$ l'unique vecteur de K en lequel la fonction g atteint son maximum.
On pose : $F = \left\{\left(\dfrac{x_1}{\phi_1^*(K)}, \dfrac{x_2}{\phi_2^*(K)}, \ldots, \dfrac{x_n}{\phi_n^*(K)}\right) \in \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\right\}$.

a) Montrer que F est un élément de $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que pour tout vecteur y de F, on a : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} y_i \leqslant 1$.

14. On pose : $A = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \overrightarrow{0}$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \geqslant 1\}$.

a) Montrer que A est fermé.

b) En utilisant la question 11, montrer que A est convexe.

15. Établir l'égalité : $A \cap F = \{\overrightarrow{1}\}$. En déduire l'existence d'un vecteur non nul h de $\mathbb{R}^n$ vérifiant, pour tout x de A et tout y de F : $\langle h, y\rangle \leqslant \langle h, \overrightarrow{1}\rangle \leqslant \langle h, x\rangle$.

16. On veut montrer dans cette question que les coordonnées de h sont toutes strictement positives.

a) On fait l'hypothèse selon laquelle $\overrightarrow{0} \geqslant h$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $v_k = \langle h, k\overrightarrow{1}\rangle$.

Montrer que $\lim_{k\to+\infty} v_k = -\infty$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'il existe donc un entier i_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que $h_{i_0} > 0$.

b) On suppose qu'il existe un entier i_1 de $[\![1,n]\!]$ tel que $h_{i_1} \leqslant 0$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $w^{(k)}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par : $w_{i_0}^{(k)} = \dfrac{1}{k}$, $w_{i_1}^{(k)} = k$ et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ avec $i \neq i_0$ et $i \neq i_1$, $w_i^{(k)} = 1$.

Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $z_k = \langle h, w^{(k)}\rangle$.

Étudier la convergence de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'en conséquence, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $h_i > 0$.

17. En utilisant un raisonnement semblable à celui des questions précédentes, montrer que toutes les coordonnées du vecteur h sont égales. En déduire que pour tout x de A et tout y de F, on a : $\sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Partie IV. La solution de Nash

Un élément K de $\mathcal{B}_n$ est interprété comme un problème de négociation. Les éléments de K représentent différents accords auxquels sont susceptibles d'aboutir n personnes. Pour x dans K, x_i est une mesure du « gain » de la personne i. Le statu quo en cas de désaccord est le vecteur nul.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $x[i,j]$ le vecteur déduit de x en échangeant les coordonnées de rangs i et j : $x[i,j]_i = x_j$, $x[i,j]_j = x_i$ et $x[i,j]_k = x_k$ si $k \notin \{i,j\}$.

Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $K[i,j]$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / x[i,j] \in K\}$.

Pour $(a,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(a_1x_1, \ldots, a_nx_n)$. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes K$ l'ensemble $\{a \otimes x / x \in K\}$.

Une *règle de partage* est une application $\phi : \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout problème de négociation K de $\mathcal{B}_n$, un vecteur $\phi(K)$ de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux règles ϕ qui vérifient les propriétés suivantes :

P1 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K) \in K$ et il n'existe pas de point $x \in K$ tel que $x \neq \phi(K)$ et $x \geqslant \phi(K)$.

P2 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K)$.

P3 : Pour tous $K \in \mathcal{B}_n$ et $K' \in \mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ et $\phi(K') \in K$, on a : $\phi(K') = \phi(K)$.

P4 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $[\![1,n]\!]^2$, on a : $\phi(K[i,j]) = (\phi(K))[i,j]$.

18. Les quatre propriétés P1, P2, P3 et P4 ont chacune une interprétation en terme de symétrie, ou d'optimalité, ou d'invariance par changement d'échelle ou d'invariance par élimination d'options non pertinentes (dans le désordre).

Quelle interprétation peut-on associer à chacune d'elles ? Justifier très brièvement votre réponse.

19. Montrer que ϕ^*, définie dans la question 13, vérifie les propriétés P1, P2, P3 et P4.

20. Soit ϕ une règle satisfaisant à P1, P2, P3 et P4.

a) On pose : $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geqslant \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n\}$. A l'aide de P1 et P4, montrer que $\phi(K_0) = \overrightarrow{1}$.

b) Soit K un élément de $\mathcal{B}_n$. On considère l'ensemble F défini dans la question 13.

À l'aide de P3 et de la question 17, montrer que $\phi(F) = \overrightarrow{1}$. En déduire que $\phi(K) = \phi^*(K)$. Conclure.

C 529

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. / EUROPE

Code épreuve :

280

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai 2011, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Pour tout couple (p,q) d'entiers de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels (resp. complexes) et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$) cet ensemble lorsque $q=p$.
On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Dans tout le problème :

- pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on identifie les espaces vectoriels $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que l'on identifie tout élément de $\mathbb{C}^p$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$;
- on note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $|z|$ le module d'un nombre complexe z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et on admet que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 si et seulement si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 ;
- pour toute matrice $A=(a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et on pose : $\rho(A)=\max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}|\lambda|$ et $N(A)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant p}\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{k,j}|$;
- le vecteur nul de $\mathbb{C}^p$ est noté 0. Si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on note $X<Y$ (resp. $X\leqslant Y$) si pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on a : $x_k<y_k$ (resp. $x_k\leqslant y_k$). En particulier, si les coordonnées de X sont toutes positives (resp. strictement positives), on note $X\geqslant 0$ (resp. $X>0$) ;
- pour tout vecteur V de $\mathbb{C}^p$, on note $|V|$ le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont les modules de celles de V.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $M_n=(m_{k,j}(n))_{1\leqslant k,j\leqslant p}$.
On dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $M=(m_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, si pour tout couple (k,j) de $[\![1,p]\!]^2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}m_{k,j}(n)=m_{k,j}$; on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n=M$.
On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers des matrices A et B, alors la suite $(A_n+B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $A+B$, la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice AB et, pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice αA.

Une matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si pour tout couple (k, j) de $[\![1,p]\!]^2$, on a : $a_{k,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{k,j} > 0$).

Le problème a pour objet l'étude des relations entre les valeurs propres de module maximal d'une matrice et la limite éventuelle de la suite des puissances entières de cette matrice. Ces relations, appliquées aux matrices positives et strictement positives, interviennent notamment dans la théorie des processus markoviens et dans les questions relatives à l'existence et la stabilité de l'équilibre général d'une économie.

Partie I. Deux exemples

1. *Exemple 1.* Soit A et J les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^2 et déterminer les valeurs propres de J.

b) Exprimer A en fonction de I_3 et J, et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$ et $\rho(A)$.

c) Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, A^n en fonction de I_3, J et n. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $N(A^n)$.

d) Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice M que l'on explicitera et dont on précisera le rang. Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

2. *Exemple 2.* Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer $N(A)$ et $\rho(A)$.

b) Déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A.

c) Expliciter pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la matrice A^n. Comparer $\rho(A^n)$ et $(\rho(A))^n$.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $N(A^n) = 2^{\frac{n}{2}}(1 + |\sin(n\pi/4)|)$. Comparer $\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n}$ et $\rho(A)$.

Partie II. Un critère de convergence vers la matrice nulle

Dans cette partie , on note $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, λ une valeur propre **complexe** *de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$ un vecteur propre de A associé à λ.*

3. Soit k_0 un entier de $[\![1,p]\!]$ pour lequel on a : $0 < |x_{k_0}| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$.

Établir les encadrements suivants : $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}| \leqslant N(A)$ et $0 \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

4. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et μ une valeur propre de A^n telle que $|\mu| = \rho(A^n)$.

a) Montrer que λ^n est une valeur propre de A^n. En déduire l'inégalité : $\rho(A^n) \geqslant (\rho(A))^n$.

b) Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les n racines n-ièmes de μ. Établir l'égalité : $A^n - \mu I_p = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(A - \alpha_j I_p)$.

c) Montrer qu'il existe un entier j_0 de $[\![0, n-1]\!]$ pour lequel α_{j_0} est une valeur propre de A.

d) En déduire l'égalité : $\rho(A^n) = (\rho(A))^n$. Établir l'encadrement : $0 \leqslant \rho(A) \leqslant (N(A^n))^{1/n}$.

5. On suppose que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} N(A^n) = 0$. En déduire que $\rho(A) < 1$.

6. Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On pose pour tout réel ε strictement positif : $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$.

a) Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $N(A_\varepsilon^n) \leqslant 1$.

c) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation : $N(A^n) = (\rho(A) + \varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$.

d) À l'aide des questions précédentes, établir pour tout $n \geqslant n_0$, l'encadrement : $0 \leqslant (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leqslant \varepsilon$.
En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$.

Dans la suite du problème, on admet que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$ et que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si on a $\rho(A) < 1$.

Partie III. Matrices positives – Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A

Dans cette partie, on considère une matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive et non nulle.

7. Soit $B = (b_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout couple (k,j) de $[\![1,p]\!]^2$: $b_{k,j} \leqslant a_{k,j}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $N(B^n) \leqslant N(A^n)$. En déduire l'inégalité : $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

8. On suppose dans cette question qu'il existe une constante s vérifiant pour tout k de $[\![1,p]\!]$: $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} = s$.

Établir l'égalité : $\rho(A) = s$.

9. On pose : $\sigma = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}$. À l'aide des questions 7 et 8, établir l'encadrement : $\sigma \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

10. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $X > 0$ et soit Δ_X la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de X.
a) Après avoir justifié l'existence de l'inverse Δ_X^{-1} de Δ_X, calculer la matrice $\Delta_X^{-1} A \, \Delta_X$.

b) Établir l'encadrement : $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \dfrac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j \leqslant \rho(A) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \dfrac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$.

c) En déduire que s'il existe un réel positif β vérifiant $\beta X < AX$, il vérifie également $\beta < \rho(A)$.

Partie IV. Matrices strictement positives

Dans cette partie, la matrice $A = (a_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est strictement positive, λ est une valeur propre **complexe** *de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, et $X \in \mathbb{C}^p$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

11. a) Montrer que $\rho(A) > 0$.
b) Établir la relation : $|AX| \leqslant A|X|$. En déduire que l'on a : $\rho(A)|X| \leqslant A|X|$.
c) On pose : $Z = A|X|$. Montrer que $Z > 0$.
d) On pose : $Y = A|X| - \rho(A)|X|$ et on suppose $Y \neq 0$. Établir les relations : $AY > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$.
e) En déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que $|X|$ est un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$.

12. On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls et vérifiant $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
On pose : $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$, avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$.
a) Montrer que $\theta_1 = \theta_2$.
b) On considère p nombres complexes $(p \geqslant 2)$ $z_1, z_2, \ldots, z_p$ tous non nuls et vérifiant $\left| \sum\limits_{j=1}^{p} z_j \right| = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|$.

Établir l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ vérifiant pour tout j de $[\![1,p]\!]$: $z_j = |z_j| e^{i\theta}$.

13. Montrer que $|X| > 0$ et que $|AX| = A|X|$. En déduire l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ tel que $X = |X| e^{i\theta}$.

14. a) Montrer que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

b) On suppose qu'il existe deux vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ de la matrice A associés à la valeur propre $\rho(A)$, linéairement indépendants.
En considérant le vecteur $u_1 V - v_1 U$, aboutir à une contradiction. En déduire la dimension du sous-espace propre associé à $\rho(A)$.

15. a) Montrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

b) Soit Z un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A)$. Justifier que les coordonnées de Z sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

c) Soit U un vecteur propre de A vérifiant $U > 0$, associé à la valeur propre $\rho(A)$. On pose : $Y = \dfrac{1}{{}^tZU}Z$.
Établir les relations suivantes : $Y > 0, {}^tAY = \rho(A)Y$ et ${}^tYU = 1$.

16. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $M = U{}^tY$, où U a été défini dans la question 15.c).
a) Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^p$ dont on précisera l'image et le noyau.

b) Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation : $\left(\dfrac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$.

17. Soit μ une valeur propre non nulle de $(A - \rho(A)M)$ et W un vecteur propre de $(A - \rho(A)M)$ associé à μ.
a) Montrer que $MW = 0$. En déduire que μ est également une valeur propre de A et que $|\mu| \leqslant \rho(A)$.

b) En raisonnant par l'absurde et en utilisant la question 14.a), montrer que $|\mu| < \rho(A)$.

c) Déduire des résultats précédents que $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M$.

Partie V. Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique. On note $||\ ||$ la norme euclidienne associée.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive, symétrique, admettant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_p|$. Soit V_0 un vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $V_0 > 0$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de A tels que pour tout k de $[\![1,p]\!]$, $Ae_k = \lambda_k e_k$.

On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ converge vers un vecteur L de $\mathbb{R}^p$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||X_n - L|| = 0$, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.
On définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ par : V_0, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

18. a) Soit $V_0 = \sum\limits_{k=1}^{p} s_k e_k$, la décomposition de V_0 dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Montrer que $s_1 \neq 0$.

b) Établir la relation : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||V_{n+1}||}{||V_n||} = \lambda_1$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{||V_n||}$ (on distinguera deux cas suivant le signe de s_1).

19. On suppose déjà définis en Pascal les objets suivants :
```
Const p = ...
Type vecteur=array[1..p] of real ;
     matrice=array[1..p,1..p] of real ;
```
ainsi que les fonctions et procédures suivantes :
`Function norme(V : vecteur) : real`; (calcul de la norme du vecteur V)
`Procedure prodmat(A : matrice ; V : vecteur ; var W : vecteur)`; ($W = AV$)
`Procedure affecte(V : vecteur ; var W : vecteur)`; (W prend la valeur V)

a) Écrire une procédure d'en-tête `puissance(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur ; var V : vecteur)` qui calcule pour tout entier naturel n non nul, le vecteur V_n défini ci-dessus.

b) Écrire une procédure d'en-tête `vectpropre(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur ; var V : vecteur)` qui calcule la valeur approchée d'un vecteur propre associé à λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée, et une fonction d'en-tête `valpropre(A : matrice ; n : integer ; V0 : vecteur) : real` qui calcule la valeur approchée de λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée.
On expliquera les différentes étapes des procédures proposées.

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Conception : H.E.C.

Code épreuve : 280

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 2 mai 2012, de 8 h. à 12 h.

Le problème a pour objet la mise en évidence de quelques propriétés de l'entropie de variables aléatoires discrètes ou à densité. La partie IV utilise dans un exemple, certaines des propriétés établies dans le problème.

On suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La notation exp désigne la fonction exponentielle.

Partie I. Quelques inégalités de concavité

1. Soit h la fonction de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.
   a) Montrer que la fonction h est positive et concave sur $]0,1[$.
   b) Montrer que h est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.
   Ce prolongement est-il de classe C^1 sur $[0,1]$?
   c) Tracer la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Justifier pour tout réel $u > 0$, l'inégalité : $\ln u \leqslant u - 1$. Pour quelles valeurs de u a-t-on : $\ln u = u - 1$?
3. Soit d la fonction de $(]0,1[)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d(x,y) = x\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + (1-x)\ln\left(\dfrac{1-y}{1-x}\right)$.

   Montrer que $d(x,y) \leqslant 0$ et préciser les couples (x,y) de $(]0,1[)^2$ pour lesquels $d(x,y) = 0$.
4. On considère trois fonctions ℓ, r et f vérifiant les hypothèses suivantes :
   - ℓ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et concave sur $\mathbb{R}$ (on note ℓ' la fonction dérivée de ℓ) ;
   - r est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ;
   - f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
   - les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell\big(r(x)\big)f(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes.

a) Établir pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $\ell(x) - \ell(y) \leqslant \ell'(y)(x - y)$.

b) Montrer pour tout réel y, l'inégalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell\big(r(x)\big) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ell(y) + \ell'(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) f(x)\,\mathrm{d}x - y\right)$.

c) En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell\big(r(x)\big) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ell\left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r(x_n)\,p_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ell\big(r(x_n)\big)\,p_n$ soient convergentes.

Établir l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ell\big(r(x_n)\big)\,p_n \leqslant \ell\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(x_n)\,p_n\right)$.

Partie II. Entropie dans le cas continu

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ soit convergente.

Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité un élément f de $\mathcal{F}$, on définit l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

6. On note Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et φ sa densité continue.
   a) Justifier l'existence de l'entropie $H(Z)$ de Z et la calculer.
   b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire qui admet pour densité un élément f de $\mathcal{F}$. Montrer que la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une densité appartenant à $\mathcal{F}$ et que $H(Y) = H(X) + \ln a$.
   c) En déduire l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.

7. Dans cette question, on considère les couples (f, g) de $\mathcal{F}^2$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ est convergente. On pose alors : $\displaystyle D(f, g) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$.
   a) Montrer que $D(f, g) \geqslant 0$.
   b) On suppose que $D(f, g) = 0$. Établir l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) + 1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   En déduire que $f = g$.

Partie III. Entropie dans le cas discret

8. Dans cette question, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On pose pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $p_k = P([X = k])$.
   L'entropie $H(X)$ de X est définie par : $\displaystyle H(X) = -\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(p_k)$.
   S'il existe un entier k de $[\![1, N]\!]$ tel que $p_k = 0$, on pose par convention : $p_k \ln(p_k) = 0$.
   On note h_N la fonction de $(]0, 1[)^N$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\displaystyle h_N(x) = h_N(x_1, \ldots, x_N) = -\sum_{k=1}^{N} x_k \ln(x_k)$.
   a) Calculer en tout point x de $(]0, 1[)^N$, le gradient $\nabla h_N(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 h_N(x)$ de h_N.
   b) Montrer que pour l'optimisation de h_N sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_k = 1$, il existe un unique point critique x^* que l'on précisera.

c) En utilisant la question 5 ou l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer que h_N admet en x^* un maximum global sous la contrainte $\sum_{k=1}^{N} x_k = 1$.

d) Parmi les variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, quelle est la loi de celles qui ont la plus grande entropie ?

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles strictement positives $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = p_n$ avec $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}$.
On appelle entropie de X, le réel $H(X)$ défini sous réserve de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n|\ln(p_n)|$, par :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n|\ln(p_n)|$$

9. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{S}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,p_n$ est convergente.

a) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\sqrt{p_n}\,|\ln(p_n)| \leqslant 1$.

b) Établir pour tout $n \geqslant n_0$ tel que $p_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$, l'inégalité : $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

c) En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \max\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln n\right\}$.

d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n|\ln(p_n)|$ est convergente.

Que peut-on en conclure sur l'entropie d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ possédant une espérance ?

10. Soit θ un réel de $]0, 1[$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de $\mathcal{S}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $p_n = \theta(1-\theta)^{n-1}$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = p_n$.

a) Reconnaître la loi de X ; préciser son espérance, puis calculer son entropie.

b) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function X(theta :real) :integer ;` permettant de simuler X.

c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant une espérance égale à celle de X. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $q_n = P([Y = n])$. On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} q_n \ln\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ est convergente.

Établir l'égalité : $H(Y) - H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$.

d) Déterminer le signe de $H(Y) - H(X)$. Conclusion.

Partie IV. Entropie et taux de rendement asymptotique

11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'application Z_n définie sur Ω par $Z_n : \omega \longmapsto \exp\left(X_n(\omega)\right)$ est une variable aléatoire. De même, on note Z la variable aléatoire $Z : \omega \longmapsto \exp\left(X(\omega)\right)$.

Soit ε et α deux réels strictement positifs.

b) Justifier l'existence d'un réel s tel que $P([|X| \geqslant s]) < \alpha$.

c) Soit K_1, K_2 et K_3 trois éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $P(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \leqslant P(K_1) + P(K_2) + P(K_3)$; en déduire l'inégalité : $P([|Z_n - Z| \geqslant \varepsilon]) \leqslant P([|X| \geqslant s]) + P([|X_n - X| \geqslant 1]) + P([|X_n - X| \geqslant \varepsilon\,\exp(-1-s)])$.

d) Conclure.

On considère une succession de courses hippiques entre N chevaux participants ($N \geqslant 2$) numérotés $1, 2, \ldots, N$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note G_n la variable aléatoire égale au numéro du cheval gagnant de la n-ième course.

On suppose que les variables aléatoires $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose qu'il n'y a qu'un seul gagnant par course.
On pose pour tout k de $[\![1, N]\!]$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $p_k = P([G_n = k])$, avec $0 < p_k < 1$.

Pour tout k de $[\![1, N]\!]$, on note c_k ($c_k > 1$) la cote du cheval k ; ainsi, un parieur qui a misé un montant m_k sur le cheval k perdra sa mise quelle que soit l'issue de la course, mais recevra la somme $m_k\, c_k$ si le cheval k est gagnant. On suppose que les cotes $c_1, c_2, \dots, c_N$ sont fixes au cours du temps.

À l'occasion de la première course, un parieur dispose d'une somme monétaire $r_0 > 0$ qu'il souhaite répartir en totalité entre les N chevaux dans les proportions respectives $f_1, f_2, \dots, f_N$, où pour tout k de $[\![1, N]\!], 0 < f_k < 1$.
À l'issue de cette première course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_1 = r_0 M_1$ avec $M_1 > 0$.

À l'occasion de la deuxième course, ce parieur réinvestit en totalité la somme R_1 entre les N chevaux dans les mêmes proportions $f_1, f_2, \dots, f_N$. À l'issue de cette deuxième course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_2 = R_1 M_2$ avec $M_2 > 0$, et ainsi de suite...

La richesse monétaire R_n acquise au terme de n courses est donc : $R_n = r_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} M_i$.

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le taux de rendement moyen des paris par : $T_n = \left(\dfrac{R_n}{r_0}\right)^{1/n} - 1$.

12. a) Justifier que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs strictement positives et de même loi.

  b) On suppose que la variable aléatoire $\ln(M_1)$ admet une espérance $E\big(\ln(M_1)\big)$ et une variance $V\big(\ln(M_1)\big)$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine τ que l'on exprimera en fonction de $E\big(\ln(M_1)\big)$. Le réel τ est le taux de rendement asymptotique des paris.

13. La stratégie du parieur consiste à choisir les proportions $f_1, f_2, \dots, f_N$ qui maximiseraient τ.
  On rappelle que les proportions $f_1, f_2, \dots, f_N$ sont constantes au cours du temps.

  a) Montrer que : $\tau = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(f_k\, c_k)\right) - 1$.

  b) En déduire la stratégie optimale du parieur et la valeur optimale de τ associée à ses paris.

  c) On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{c_k} = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(p_k\, c_k) \geqslant 0$.
  Dans quel cas le parieur ne dispose-t-il d'aucune stratégie lui permettant de s'assurer un taux de rendement asymptotique optimal strictement positif ?

BCE

Code épreuve : 280

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 30 avril 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$:

- on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$;
- la matrice transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$;
- on note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour toute matrice A, même nulle, de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose par convention : $A^0 = I_p$;
- la matrice inverse d'une matrice inversible A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée A^{-1}.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n = \big(m_{i,j}(n)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

On dit que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $M = \big(m_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{i,j}(n) = m_{i,j}$. On note alors : $M = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers les matrices A et B, et si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$ ($s \geqslant 1$) qui converge vers $C \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{R})$, alors la suite $(A_n + B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$, la suite $(A_nC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers AC, et pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers αA.

Le problème étudie quelques aspects mathématiques du contrôle de systèmes linéaires.

Partie I. Quelques propriétés de suites matricielles

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{A,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}(xA)^k$.

1. *Exemple.* Dans cette question, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,j} = 1\,.$$

Tournez la page S.V.P.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Soit V la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Calculer le produit AV et en déduire une valeur propre de A.

c) Montrer que 0 est une valeur propre de A et trouver la dimension du sous-espace propre associé.

d) Exprimer A^2 en fonction de A.
Montrer que pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{A,n}(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}(I_p, A)$.

e) En déduire que pour tout x réel, la suite de matrices $\big(T_{A,n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice $T_A(x)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par : $T_A(x) = I_p + \dfrac{e^{px}-1}{p}A$.

f) Calculer $T_A(0)$. Exprimer pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le produit $T_A(x)T_A(y)$ en fonction de $T_A(x+y)$.
En déduire que pour tout x réel, la matrice $T_A(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \big(a_{i,j}^{(k)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $\mu_k = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \big|a_{i,j}^{(k)}\big|$.

a) À l'aide de l'identité $A^{k+1} = A\,A^k$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mu_{k+1} \leqslant p^k\,\mu_1^{k+1}$.

b) En déduire que pour tout x réel, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{\mu_k}{k!}\,x^k$ est convergente.

c) Montrer que pour tout réel x et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{a_{i,j}^{(k)}}{k!}\,x^k$ est convergente.

d) Montrer que pour tout x réel, la suite $\big(T_{A,n}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $T_A(x)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Que vaut $T_A(x)$ lorsque $p = 1$ et que l'unique coefficient de A est un réel a ?

3. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Vérifier que pour tout x réel et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $T_{D,n}(x)$ est diagonale.

b) En déduire que pour tout x réel, la matrice $T_D(x)$ est diagonale et donner l'expression de ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de D.

c) On pose pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $D_r = r\left(T_D\left(\dfrac{1}{r}\right) - I_p\right)$. Montrer que la suite $(D_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers D.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A' = P^{-1}AP$.

a) Établir pour tout x réel, l'égalité : $T_{A'}(x) = P^{-1}T_A(x)P$.

b) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{r\to+\infty} r^{n+1}\left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}. \quad (*)$$

(On pourra traiter dans un premier temps le cas où A est diagonale)

On admet dans la suite du problème que la relation $(*)$ reste valable pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie II. Polynômes annulateurs et matrices de Kalman

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et φ un élément de $\mathcal{L}(E)$. On note id_E l'endomorphisme identité de E.

5.a) Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(E)$ et justifier l'existence d'une suite finie $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant p^2}$ de nombres complexes tels que le polynôme $\prod\limits_{k=1}^{p^2}(X - z_k)$ de $\mathbb{C}[X]$ soit un polynôme annulateur de φ.

b) En considérant, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, les endomorphismes $(\varphi - z_k\,\mathrm{id}_E)$, montrer que φ possède au moins une valeur propre.

6. On suppose l'existence d'un entier k vérifiant $1 \leqslant k < p$ et d'un sous-espace vectoriel F de dimension k stable par φ. Soit H un supplémentaire de F dans E et π le projecteur de E sur H parallèlement à F.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $v \in H$ et un nombre complexe λ vérifiant la relation : $\pi \circ \varphi(v) = \lambda v$.
   b) Montrer que la somme des deux sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{Vect}(v)$ est directe et stable par φ.
7. À l'aide des questions précédentes, établir par récurrence sur p l'existence d'une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(v_k) \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.
8. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. On pose pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.
   a) Montrer que pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, on a : $(\varphi - m_{k,k}\,\mathrm{id}_E)(F_k) \subset F_{k-1}$.
   b) En déduire que le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - m_{k,k})$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice M.
9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. En utilisant la question 8.b, montrer que A admet un polynôme annulateur appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré p.
10. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et B une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
    Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{G}_q$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ engendré par $B, AB, A^2B, \ldots, A^{q-1}B$ et K_q la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont les colonnes successives sont $B, AB, A^2B, \ldots, A^{q-1}B$.
    La matrice K_q est appelée matrice de Kalman d'ordre q associée au couple (A, B).
    a) Montrer que pour tout entier $q > p$, on a : $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_p$.
    b) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : pour qu'une matrice G de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ appartienne à $\mathcal{G}_p$, il faut et il suffit que pour tout élément S de $\mathcal{S}$, on ait : ${}^tSG = 0$.
    c) En déduire que si une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{G}_p$ est convergente, sa limite G appartient à $\mathcal{G}_p$.
    d) À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x réel, la matrice-colonne $T_A(x)B$ appartient à $\mathcal{G}_p$, où $T_A(x)$ a été définie dans la question 2.d.

Partie III. Contrôle de systèmes linéaires

On conserve dans cette partie les définitions et notations de la question 10. Dans les questions 12, 13 et 14, on note p un entier supérieur ou égal à 2. Les questions 13 et 14 sont indépendantes des questions 11 et 12.
On note $\mathcal{C}^0$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

11. *Exemple :* $p = 1$. Soit (a, b) un couple de réels.
    a) Soit $u \in \mathcal{C}^0$. On cherche une fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée f', vérifiant $f(0) = 0$ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = af(t) + b\,u(t)$.
    Calculer la dérivée de la fonction $h : t \mapsto h(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-at}$, et en déduire que f est donnée par :
$$\forall t \in [0, 1],\ f(t) = b\int_0^t u(x)\,\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}x\,. \quad (**)$$
    b) On dit que le couple (a, b) est *contrôlable*, si pour tout réel y (appelé *cible*), il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ (appelée *contrôle*) telle que toute fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(t) = af(t) + b\,u(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, atteint la cible en 1, c'est-à-dire vérifie $f(1) = y$.
    Donner l'expression de la fonction f définie par $(**)$ lorsque la fonction u est constante sur $[0, 1]$.
    En déduire que le couple (a, b) est contrôlable si et seulement si $b \neq 0$.
12. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose : $W(x) = T_A(1 - x)B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $W(x) = \big(W_k(x)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p}$, où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $W_k(x)$ est le coefficient de la k-ième ligne de $W(x)$.
    On admet que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la fonction $x \mapsto W_k(x)$ appartient à $\mathcal{C}^0$ et on définit alors, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0$, la matrice-colonne $\displaystyle\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :
$$\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 u(x)W_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{1 \leqslant k \leqslant p}.$$

Par analogie avec la question 11.b, on dit que le couple (A, B) est *contrôlable*, si pour toute matrice-colonne $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (*cible*), il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ (*contrôle*) vérifiant l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x = Y$.

a) Soit $u \in \mathcal{C}^0$. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, $u(x)W(x)$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 u(x)W(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à $\mathcal{G}_p$.

b) Soit Z un élément non nul de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^0$, on ait : $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,{}^tZ\,W(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : ${}^tZ\,W(x) = 0$.

c) En déduire, à l'aide de la relation $(*)$ (question 4.b), que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a : ${}^tZA^{k-1}B = 0$.

d) Déduire des résultats précédents que le couple (A, B) est contrôlable, si et seulement si la matrice de Kalman K_p est inversible.

Dans les questions 13 et 14, on suppose que K_p est inversible et on cherche à optimiser le contrôle s d'un système linéaire discret en minimisant une fonction de coût quadratique J.

13. Soit q un entier vérifiant $q \geqslant p$. Pour tout q-uplet $s = (s_1, s_2, \ldots, s_q)$ de $\mathbb{R}^q$, appelé *contrôle discret*, on définit la suite finie $\left(X_{s,k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant q}$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{cases} X_{s,0} = 0 \ \text{(matrice-colonne nulle)} \\ \forall k \in [\![1,q]\!],\ X_{s,k} = A\,X_{s,k-1} + s_k\,B \end{cases}$$

a) Calculer $X_{s,q}$ et trouver une matrice-colonne $C_s \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que : $X_{s,q} = K_q\,C_s$.

b) Établir pour toute matrice-colonne $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (*cible*), l'existence d'un contrôle discret s tel que $X_{s,q} = Y$.

14. On cherche ici à déterminer un *contrôle discret optimal* permettant d'atteindre une cible $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Soit J la fonction de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $J(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} s_k^2$.

a) On admet sans démonstration que la matrice $K_q\,{}^tK_q$ est inversible.
Montrer que le problème de minimisation de J sous la contrainte $X_{s,q} = Y$ admet un unique point critique s^* donné par : $C_{s^*} = {}^tK_q\left(K_q\,{}^tK_q\right)^{-1}Y$.

b) Montrer que s^* réalise un minimum global de J sous la contrainte $X_{s,q} = Y$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1223 – D'après documents fournis

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 280

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mercredi 30 avril 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible.

Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Sous réserve d'existence, on note $E(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z.
- Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{E}_N$ l'ensemble des applications de $[\![1, N]\!]$ dans $[\![1, N]\!]$.

Préliminaire

1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_N$?
   b) Parmi les éléments de $\mathcal{E}_N$, quel est le nombre d'applications injectives et parmi celles-ci, combien sont strictement monotones ?
   (les réponses aux questions 1.a) et 1.b) seront données sans démonstration)
2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
   On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \lfloor p\,X(\omega) \rfloor$, où $\lfloor \quad \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
   a) Vérifier que Y est une variable aléatoire discrète. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $P\big([Y = n]\big)$.
   b) Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   c) Établir les inégalités strictes : $0 < E(Y) < p$.

3.a) Pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^r (\ln x)^s \, \mathrm{d}x$ est convergente.

(on pourra utiliser le changement de variable $u = -\ln x$ après avoir justifié précisément sa validité)

b) Établir pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 x^r (\ln x)^s \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X, s'il existe une application $T : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y.
L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y.
On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par : $C(T) = E\Big(\big(X - T(X)\big)^2\Big)$.

Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0, 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout réel $a \in [0, 1-p]$, on note dans cette question, T_a la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, a+p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Calculer la probabilité $P\big([T_a(X) = 1]\big)$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.

b) Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\dfrac{1}{3} + p(1-p) - 2ap$.

c) En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p.

5. Soit T_1 et T_2 les applications définies sur $]0, 1[$ par $T_1(x) = -\ln x$ et $T_2(x) = -\ln(1-x)$.

a) Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.

b) En utilisant les résultats de la question 3, comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.

c) À l'aide de la question 2, montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

6. Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

a) Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

b) On note F_Y^{-1} la bijection réciproque de F_Y.

Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

7. *Cas particulier : on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite.*

On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de Y.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y \, F_Y(y) \, \varphi(y) \, \mathrm{d}y$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y \, F_Y(y) \, \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y - F_Y(y)\right)^2 \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ est convergente et la calculer.

c) En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère N réels $d_1, d_2, \ldots, d_N$ (appelés points de départ) et N réels $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (appelés points d'arrivée) vérifiant $d_1 < d_2 < \cdots < d_N$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$.
On pose : $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_N\}$ et $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$.

8.a) Montrer que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$, on a : $d_k a_k \geqslant d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$.

b) En déduire à l'aide d'une double sommation que pour tout N-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}_+^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k\, d_k\, a_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N} p_k\, d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k\, a_k\right) \qquad (1)$$

9. Soit $t \in \mathcal{E}_N$. On réordonne la liste $\big(t(1), t(2), \ldots, t(N)\big)$ selon les valeurs croissantes et on note alors $\big(\widehat{t}(1), \widehat{t}(2), \ldots, \widehat{t}(N)\big)$ la liste ordonnée obtenue. On a donc : $\widehat{t}(1) \leqslant \widehat{t}(2) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{t}(N)$.

a) Justifier pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{\,t(k)} \leqslant \sum_{k=n}^{N} a_{\,\widehat{t}(k)}$.

b) On pose $d_0 = 0$. Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n\, a_{\,t(n)} = \sum_{n=1}^{N}\left((d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{\,t(k)}\right)$.

c) Établir l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n\, a_{\,t(n)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} d_n\, a_{\,\widehat{t}(n)}$. $\qquad (2)$

On appelle *programme de transport*, toute bijection T de D sur A, et *coût* d'un programme de transport T, la somme $c(T)$ définie par : $c(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\big(d_k - T(d_k)\big)^2$.

10. Soit $\widehat{T}$ le programme de transport défini par : pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\widehat{T}(d_k) = a_k$.

Déduire des questions précédentes que le programme $\widehat{T}$ est optimal, c'est-à-dire que pour tout programme de transport T, on a : $c(T) \geqslant c(\widehat{T})$.

11. *Interprétation probabiliste des inégalités (1) et (2).*

Soit h une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) En utilisant l'inégalité (1), établir pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, l'inégalité : $E\big(X\,h(X)\big) \geqslant E(X)\,E\big(h(X)\big)$.

b) Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire de X et $h(X)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives ?

c) En utilisant l'inégalité (2), montrer que si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et t un élément de $\mathcal{E}_N$, on a : $E\big(h(X)\,t(X)\big) \leqslant E\big(h(X)\,\widehat{t}(X)\big)$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire

Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I.

Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0,1]$ et suivant la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors d'un segment $[\alpha,\beta]$ $(\alpha < \beta)$ et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On suppose l'existence d'une fonction g de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs dans $[\alpha,\beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y.

12. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \lfloor 1 + N\,U(\omega) \rfloor & \text{si } 0 \leqslant U(\omega) < 1 \\ N & \text{si } U(\omega) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right).$$

a) Trouver la loi de la variable aléatoire X_N.

b) Établir l'existence d'une constante $\lambda > 0$, indépendante de N telle que : $\forall \omega \in \Omega$, $|Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leqslant \dfrac{\lambda}{N}$.

c) Montrer que pour tout réel y, on a : $F_Y\left(y - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leqslant P([Y_N < y])$.

13. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on pose : $t_N(k) = g\left(\dfrac{k}{N}\right)$. On définit alors $\widehat{t}_N$ à partir de t_N, comme $\widehat{t}$ à partir de t dans la question 9.

a) Établir pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, les inégalités : $F_Y\left(\widehat{t}_N(k) - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leqslant P([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) < \dfrac{k}{N}$.

b) On note F_Y^{-1} la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha,\beta]$ de la fonction F_Y.

Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a : $\displaystyle \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\, g\left(\frac{k}{N}\right) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N}\right)$.

c) En déduire l'inégalité : $E\big(U\,g(U)\big) \leqslant E\big(U\,F_Y^{-1}(U)\big)$.

14.a) Parmi les fonctions de transport de classe C^1 de U vers la loi de Y, trouver une fonction de transport T^* de coût minimal.

b) On suppose que $Y = |4\,U - 2|$. Déterminer T^* et $C(T^*)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1217 – D'après documents fournis

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENTIFIQUE

Mercredi 29 avril 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptibles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc.).

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème :

- On note p un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, on note B la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
- La transposée d'une matrice A est notée A^T. La matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée I_p.
- Pour toute application $x : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big) \end{array}$, on note :
  - $\star$ $x'(t) = \big(x_1'(t), \dots, x_p'(t)\big)$ en tout point $t \in \mathbb{R}_+$ où les fonctions $x_1, \dots, x_p$ sont dérivables ;
  - $\star$ $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \big(\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t), \dots, \lim\limits_{t \to +\infty} x_p(t)\big)$ lorsque les fonctions $x_1, \dots, x_p$ admettent des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$.
- Pour toute suite $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_1(n), \dots, x_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ pour laquelle les suites $\big(x_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \big(x_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, on définit la limite de la suite $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  - $\star$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x(n) = \big(\lim\limits_{n \to +\infty} x_1(n), \dots, \lim\limits_{n \to +\infty} x_p(n)\big)$.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire.

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Soit $x_1, \dots, x_p$ p fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
On dit qu'une application $x : t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est *pilotée par le couple* (A, b), si pour tout réel $t \geqslant 0$, les matrices colonnes $X(t)$ et $X'(t)$ de $x(t)$ et $x'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vérifient le système : $\forall t \geqslant 0$, $X'(t) = AX(t) + B$.
On appelle *équilibre du système piloté par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* \in \mathbb{R}^p$ vérifiant : $AX^* + B = 0$.

On dit qu'un équilibre x^* est *attractif* si pour toute application x pilotée par (A,b), on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

1. *Le cas p=1.*

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, vérifiant : $\forall t \geqslant 0,\ x'(t) = ax(t) + b$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $y : t \longmapsto \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a\,t}$.

   b) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{a\,t}$.

   c) On identifie a à la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dont l'unique coefficient est a. Montrer que le système piloté par le couple (a,b) admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si $a < 0$.

2. *Exemple 1.* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = (1,1)$. Soit $x : t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ une application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, pilotée par le couple (A,b).

   a) Déterminer l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (A,b).

   b) Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.
   Pourquoi peut-on choisir la matrice Q de telle manière que $Q^{-1} = Q^T$?

   c) Trouver deux réels λ et μ $(\lambda \leqslant \mu)$ et une matrice inversible Q vérifiant : $Q^{-1} = Q^T$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   d) Pour tout $t \geqslant 0$, on pose : $W(t) = Q^T X(t)$.

   (i) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $W'(t) = DW(t) + Q^T B$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   (ii) À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre x^* est attractif.

3. On suppose $p \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et u_p l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ tel que $u_p(e_1) = e_p$ et pour tout $k \in [\![2,p]\!]$, $u_p(e_k) = e_{k-1}$.

   a) Écrire la matrice A_p de l'endomorphisme u_p dans la base $\mathcal{B}_p$. Quel est son rang ?

   b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ une racine p-ième de l'unité et G la matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.
   Montrer que G est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre complexe associée.

   c) Montrer que l'endomorphisme u_p est diagonalisable.

   d) Montrer que le polynôme $X^p - 1$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de u_p.
   L'endomorphisme u_p admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p ?

   e) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. L'endomorphisme $P(u_p)$ de $\mathbb{C}^p$ est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. *Exemple 2.* Soit α et β deux réels tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta \neq 1$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) On note A la matrice A_p de la question 3 dans le cas où $p = 3$.

   (i) Déterminer un polynôme P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que $M = P(A)$.

   (ii) En déduire les valeurs propres complexes de M ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.

   b) Soit $c = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

   (i) Trouver l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (M,c).

   (ii) Vérifier que l'application $x : t \longmapsto x(t) = x^* + \mathrm{e}^{(\alpha+\beta-1)t} c$ est pilotée par le couple (M,c).

   (iii) En déduire une condition nécessaire portant sur α et β pour que l'équilibre x^* soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

   c) On pose : $N = M^T + M$.

   (i) Quelles sont les valeurs propres de la matrice N ?

   (ii) Déterminer un réel $\theta > 0$ tel que toutes les valeurs propres de N soient inférieures ou égales à $-2\,\theta$.

d) On rappelle que $c = (1, 1, 1)$. On considère une application x pilotée par le couple (M, c).

On note y l'application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que $y : t \longmapsto x(t) - x^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{2\theta t} \|Y(t)\|^2$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(i) Vérifier que l'application y est pilotée par le couple $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$.

(ii) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) = \mathrm{e}^{2\theta t} \times Y(t)^T (N + 2\,\theta I_3) Y(t)$.

(iii) Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) En déduire que l'équilibre x^* est attractif.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire.

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissance du stock de connaissances sont représentés, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions x_1 et x_2 respectivement.

Dans ce modèle où ρ désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions x_1 et x_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall t \geqslant 0, \begin{cases} x_1'(t) = F_1\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ x_2'(t) = F_2\big(x_1(t), x_2(t)\big) \end{cases} \qquad (S)$$

dans lequel les deux fonctions F_1 et F_2 définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = \big(-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1\big)\, u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = \big(-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1\big)\, u_2 \end{cases} .$$

5.a) Pour tout réel $\nu > -1$, on pose : $\forall t \geqslant 0,\ x_1(t) = x_2(t) = \dfrac{1}{1 + \nu\,\mathrm{e}^{-t}}$.

Vérifier que l'application $x : t \longmapsto \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est solution du système (S).

b) En déduire que pour tout réel $c \in]0, 1[$, il existe une solution de (S) à valeurs dans $[c, +\infty[^2$.

c) Quel est l'unique couple $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$?

d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers x^* lorsque t tend vers $+\infty$?

6. Pour tout réel r, on note q_r la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice symétrique $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{C}_r$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2;\ q_r(u_1, u_2) = 1\}$.

a) Pour quelles valeurs de r la forme quadratique q_r est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie $\mathcal{C}_r$ de $\mathbb{R}^2$?

Dans toute la suite de cette question, r et s sont deux réels vérifiant les inégalités : $0 < s < r < 1$.

b) Justifier que l'ensemble $\{q_s(u_1, u_2);\ (u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r\}$ admet une borne inférieure, notée $m_{r,s}$, et une borne supérieure, notée $M_{r,s}$, et que ces deux bornes sont atteintes.

c) Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est non critique.

d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.

e) En déduire les valeurs de $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ et établir l'existence d'un réel μ tel que :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ q_s(u_1, u_2) \leqslant \mu\, q_r(u_1, u_2).$$

7. On conserve les notations de la question 6.

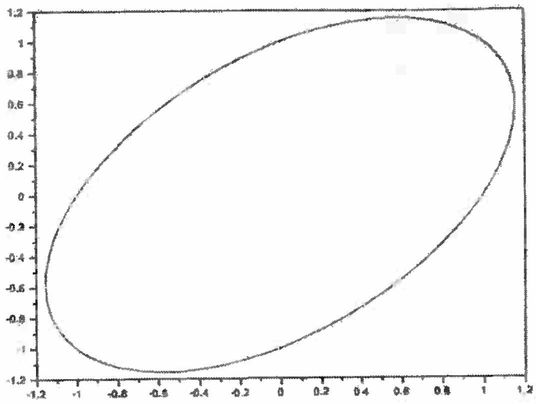
a) Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$.

Vérifier que $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r$ si et seulement si on a : $(1 - r)\,(v_1)^2 + (1 + r)\,(v_2)^2 = 1$.

On se place désormais dans le cas où $r = \dfrac{1}{2}$ et $s = \dfrac{1}{4}$.

b) Pour faire tracer par *Scilab* le domaine C_r, on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

```
(1) n=100;
(2) theta=linspace(0,2*%pi,n);
(3) ct=cos(theta);
(4) st=sin(theta);
(5) Cr=[ct-(1/sqrt(3))*st;ct+(1/sqrt(3))*st];
(6) plot(Cr(1, :),Cr(2, :))
```

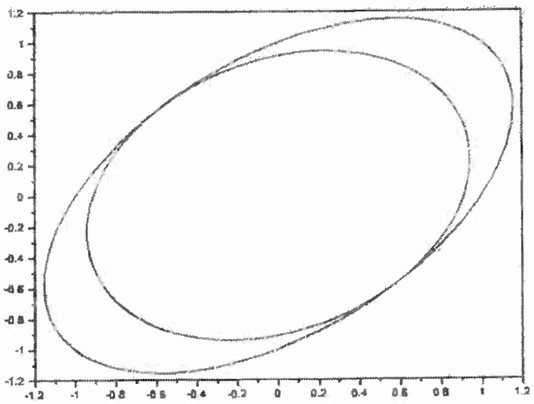


En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a), expliquer la méthode employée.
On précisera la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu des matrices `Cr` et `Cr(1,:)`.

c) Soit $z_0 > 0$ une valeur affectée à la variable `z` utilisée ci-dessous. Compléter la ligne (7) afin de tracer la ligne de niveau z_0 de la fonction q_s.

```
(7) Csz=[sqrt(z)*(?? *ct+?? *st) ; sqrt(z)*(?? *ct+?? *st)];
(8) plot(Csz(1, :),Csz(2, :))
```

d) Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur z_0 affectée à la variable `z`. Laquelle ?
On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit c un réel de $]0,1[$ et x une solution de (S) à valeurs dans $[c,+\infty[^2$.
On pose pour tout $t \geqslant 0$: $y_1(t) = x_1(t) - 1$ et $y_2(t) = x_2(t) - 1$. Pour $s = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $f(t) = q_s\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.
a) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $f'(t) = -2(1+\rho)\Big(x_1(t)\big(y_1(t) - s\,y_2(t)\big)^2 + x_2(t)\big(y_2(t) - s\,y_1(t)\big)^2\Big)$.
b) En déduire que pour $r = \dfrac{2s}{1+s^2}$, on a pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) \leqslant -2\,c \times \dfrac{1-s}{1-r} \times q_r\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.
c) Justifier pour tout $t \geqslant 0$, l'inégalité : $f'(t) \leqslant -2\,c\,f(t)$. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire.

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose $p \geqslant 2$. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Soit $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ définie par son terme initial $x(0)$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X(n+1) = A\,X(n) + B\,.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie : $X^* = AX^* + B$.
On suppose qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de D appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, +1[$.

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple (A, b) admet un unique équilibre x^*.

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de x^* sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires $y(n) = \big(y_1(n), \ldots, y_p(n)\big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soumis au système perturbé.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = V(U_n)$ la variance de U_n.
Soit $x(0) \in \mathbb{R}^p$ et $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = \big(A + U_1 I_p\big)\,X(0) + B \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y(n+1) = \big(A + U_{n+1} I_p\big)\,Y(n) + B \end{cases}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y(n)$ est la matrice colonne $\big(y_k(n)\big)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{E}\big(y(n)\big)$ le vecteur $\Big(E\big(y_1(n)\big), \ldots, E\big(y_p(n)\big)\Big) \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{E}\big(Y(n)\big)$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
   a) Calculer $\mathbf{E}\big(Y(1)\big)$ et justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\mathbf{E}\big(Y(n+1)\big) - X^* = A\Big(\mathbf{E}\big(Y(n)\big) - X^*\Big)$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\big(y(n)\big) = x^*$.

12. Soit $\big(z(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z(n) = Q^{-1}Y(n)$.
   a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, que : $V\big(z_k(n+1)\big) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\Big(E\big(z_k(n)\big)\Big)^2$.
   b) En déduire que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel $c_k \in]0, 1[$, un entier naturel N et un réel $M_k > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ \ V\big(z_k(n+1)\big) \leqslant c_k V\big(z_k(n)\big) + M_k\, v_{n+1}$.

13. On suppose que la série de terme général v_n est convergente. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.
   Avec les notations de la question 12.b), on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\alpha_m = V\big(z_k(N+m)\big)$ et $w_m = M_k\, v_{N+m+1}$.
   a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha_{m+1} \leqslant (c_k)^{m+1}\alpha_0 + \sum\limits_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V\big(z_k(n)\big) = 0$.
   c) Montrer que la suite $\big(y_k(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers x_k^*.

Grâce aux résultats des questions 11.b) et 13.c), on peut dire que $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite d'estimateurs de* x^* *asymptotiquement sans biais et convergente.*

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 280

Conception : HEC Paris

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 27 avril 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème :

- On note n et k deux entiers vérifiant $2 \leqslant k \leqslant n$ et E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_E$ qui en fait un espace euclidien.
- On note 0_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ respectivement, le vecteur nul et l'endomorphisme nul de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. L'endomorphisme identité de E est noté id_E.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F et p_F le *projecteur orthogonal d'image* F, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in F,\ p_F(x) = x$ et $\forall x \in F^\perp,\ p_F(x) = 0_E$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes ($m \geqslant 1$) à cœfficients réels. La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est notée ${}^tA$.
- Pour tout $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k) \in \mathbf{R}^k$, on note $\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ dont les cœfficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.
- On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que la *somme* de k sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de E est le sous-espace vectoriel de E, noté $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i$, défini par : $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i = \left\{\sum_{i=1}^k x_i;\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k\right\}$.

On rappelle aussi que les sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont en *somme directe* si chaque vecteur de $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i$ n'admet qu'une seule décomposition de la forme précédente. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, la somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ est notée $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^k F_i$.

L'objet de ce problème est la mise en évidence de quelques propriétés algébriques dont les conséquences probabilistes fondent les tests statistiques qui permettent de mesurer l'influence effective d'une ou plusieurs variables explicatives sur une variable endogène.

La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Partitions de l'identité.

Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ constituent une *partition de l'identité de* E si : $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_E$.

1. *Exemple 1.* Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbf{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

   a) Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

   b) Montrer que le polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q(X) = X^3 + X^2$ est un polynôme annulateur de A.

   c) Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?

   d) Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbf{R}[X]$ pour lesquels les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbf{R}^3$.

2. *Exemple 2.* On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

   Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note :

   - $L_i(X)$ le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{j \in [\![1,k]\!] \\ j \neq i}} \left(\frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$;
   - $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
   - v_i l'endomorphisme de E défini par $v_i = L_i(f)$.

   a) Justifier l'égalité : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f.

   b) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'inclusion : $\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

   c) Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, calculer la somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j)$. En déduire que les endomorphismes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E.

   d) Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'égalité : $\mathrm{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme v_1.

3. Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E.

   Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note r_i le rang de u_i.

   a) Établir les relations : $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$ et $n \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$.

   b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \mathrm{Im}(u_2), \ldots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a : $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$.

   c) Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3) suivantes :

   (1) $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$.

   (2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des projecteurs.

   (3) Pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

   (i) En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1).

   (ii) À l'aide de la question 3.b) et en écrivant, pour $x \in E$, les vecteurs $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication (1) $\Longrightarrow$ (3).

   (iii) Conclure en établissant une troisième implication.

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal.

4.a) Soit p un endomorphisme de E et P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a : $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

b) Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Établir l'existence d'un réel α et d'un projecteur orthogonal p tels que $f = \alpha\, p$, si et seulement si on a : $\mathrm{tr}(M)\, M^2 = \mathrm{tr}(M^2)\, M$ et ${}^tM = M$, où $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{tr}(M^2)$ sont les traces respectives de M et M^2.

5.a) Écrire en *Scilab* une fonction "`function t=tr(A)`" qui calcule la trace d'une matrice carrée A.

b) La fonction "`issym`" suivante permet de tester si une matrice carrée A de taille n donnée est symétrique.

```
(1)  function b=issym(n,A)
(2)    b=%T ;  // affectation de la valeur booléenne True à la variable b.
(3)    for i=1:n-1
(4)        for j=i+1:n
(5)            b=b & A(i,j)==A(j,i)
(6)        end ;
(7)    end ;
(8)  endfunction
```

Préciser la signification de la ligne (5) du code et donner un exemple d'utilisation de la fonction "`issym`" en indiquant les valeurs d'entrée ainsi que la valeur de sortie obtenue.

c) La fonction "`orthoproj`" suivante, dont une ligne de code est incomplète, permet de tester si, pour une matrice carrée M de taille n donnée, il existe un réel α et un projecteur orthogonal p pour lesquels M est la matrice de l'endomorphisme $\alpha\, p$ dans une base orthonormale. Cette fonction utilise les deux fonctions précédentes (questions 5.a) et 5.b)) et s'appuie sur la condition nécessaire et suffisante de la question 4.b).

```
(1)  function b=orthoproj(n,M)
(2)    A=tr(M)*M^2 ;
(3)    B=tr(M^2)*M ;
(4)    b=issym(n,M) ;
(5)    if b then
(6)        for i=1:n
(7)            for j=i:n
(8)                b=......
(9)            end ;
(10)       end ;
(11)    end ;
(12) endfunction
```

Compléter la ligne (8) du code et donner les valeurs de sortie obtenues par application de cette fonction aux deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les définitions et notations suivantes concernent les questions 6 à 9.

Pour tout vecteur $x \in E$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{F} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ une famille de k vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.
On note S la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $S_1, S_2, \ldots, S_k$.
On rappelle que p_F est le projecteur orthogonal d'image F.

6.a) Montrer que les deux matrices S et ${}^tSS$ ont le même rang.

b) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F$ si et seulement si il existe une matrice $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ telle que $Y = S\, Z$.

c) Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F^{\perp}$ si et seulement si la matrice colonne ${}^tS\, Y$ est nulle.

d) Soit $x \in E$ et $y = p_F(x)$. Établir l'existence d'une matrice $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ telle que $Y = S\,Z$ et ${}^tSX = {}^tSSZ$.

e) En déduire l'expression de la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de S lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.

7. Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On appelle *inverse de Penrose-Moore de M* toute matrice N de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$MNM = M \; ; \qquad NMN = N \; ; \qquad {}^t(MN) = MN \; ; \qquad {}^t(NM) = NM \, .$$

a) Établir l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ et de réels $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ qui vérifient la relation suivante :

$$M = Q\,\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)\,{}^tQ \, .$$

b) On note h l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que : $\forall t \in \mathbf{R}$, $h(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. On note $M^{(-)}$ la matrice définie par : $M^{(-)} = Q\,\mathrm{Diag}\big(h(\rho_1), h(\rho_2), \dots, h(\rho_k)\big)\,{}^tQ$.

Montrer que $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose-Moore de M.

c) Soit N une inverse de Penrose-Moore de M.

(i) Justifier les égalités : $N = M\,{}^tNN$ et $M^2N = M$.

(ii) Soit U une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On suppose que M^2U est nulle. Montrer que $M\,U$ est nulle.

(iii) On pose : $U = N - M^{(-)}$. Justifier que $M^{(-)}$ est l'unique inverse de Penrose-Moore de M.

8. On note $({}^tSS)^{(-)}$ l'unique inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$ et on pose : $P = S\,({}^tSS)^{(-)}\,{}^tS$.

a) Montrer que les matrices P et S ont le même rang.

b) Justifier que P est la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ et que son expression généralise la formule trouvée dans la question 6.e) lorsque la famille $\mathcal{F}$ est libre.

9. *Exemple.* On suppose que : $k = 2$, $s_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $s_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $s_1 \neq 0_E$ et ${}^tSS$ non inversible.

a) Établir l'existence d'un réel θ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\beta_i = \theta\,\alpha_i$.

b) Déterminer une matrice carrée Q pour laquelle la matrice ${}^tQ\,{}^tS\,SQ$ est diagonale.

c) En déduire l'inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$.

d) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E. Calculer $p_F(x)$.

Partie III. Application probabiliste.

Dans cette partie, $E = \mathbf{R}^n$ et on suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier $d \geqslant 1$, on dit qu'une variable aléatoire C suit la *loi du khi-deux de paramètre d*, notée $\chi^2(d)$, si la variable aléatoire $\dfrac{C}{2}$ suit la loi $\gamma\Big(\dfrac{d}{2}\Big)$.

On appelle *variable gaussienne* toute variable aléatoire X qui suit une loi normale ou qui est certaine, et on note sa loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, où μ est l'espérance de X et σ l'écart-type de X.

Autrement dit, pour tout couple $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma > 0$ et X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma = 0$ et $\mathbf{P}\big([X = \mu]\big) = 1$.

10. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ et soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\Big)^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

Si $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\,G_i$ est une *variable gaussienne centrée*, alors on dit que le vecteur aléatoire $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est un *vecteur gaussien* et on note G la matrice colonne de composantes $G_1, G_2, \dots, G_n$.

11. Soit $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur gaussien, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vérifie : $H = M\,G$.

a) Montrer que $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ est un vecteur gaussien.

b) Justifier que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la variable aléatoire $G_i\,G_j$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(G_i\,G_j)$.

On note alors $\Lambda(G)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $\Lambda(G) = \big(\mathbf{E}(G_i\,G_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et *on admet* dans la suite que la loi d'un vecteur gaussien $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est caractérisée par la matrice $\Lambda(G)$.
Autrement dit, si $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ et $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ sont deux vecteurs gaussiens vérifiant $\Lambda(G) = \Lambda(R)$, alors ils ont la même loi, c'est-à-dire : $\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \ \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[G_i \leqslant x_i]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[R_i \leqslant x_i]\right)$.

12. On suppose que $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Montrer que $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est un vecteur gaussien. Déterminer $\Lambda(G)$.

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vérifie : $H = Q\,G$.
Montrer que les variables aléatoires $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

13. Soit $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur gaussien dont les composantes $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont mutuellement indépendantes et de variance égale à 1.
Soit $P_1, P_2, \ldots, P_k$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rangs respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_i = I_n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

a) Justifier que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des matrices de projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ dont les images sont deux à deux orthogonales.

b) En déduire l'existence d'une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle chacune des matrices $QP_1{}^tQ,\ QP_2{}^tQ, \ldots,\ QP_k{}^tQ$ est diagonale.

c) On suppose que $r_1 \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire ${}^tGP_1G$ suit la loi $\chi^2(r_1)$.

d) Montrer que les variables aléatoires ${}^tGP_1G,\ {}^tGP_2G, \ldots,\ {}^tGP_kG$ sont mutuellement indépendantes.

14. Soit q et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(X_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une famille de $q\times m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose : $\overline{X} = \dfrac{1}{q\times m}\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} X_{i,j}$ et pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $Z_j = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} X_{i,j}$.

a) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\overline{X}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j} - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

b) Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j} - Z_j)^2$ et $q\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(Z_j - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 280

Conception : HEC Paris

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 26 avril 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème :

- pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à n ;
- on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ de $\mathbf{R}_n[X]$ avec la fonction polynomiale $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec la convention $0^0 = 1$;
- on rappelle la formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Le problème a pour objet l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales.

Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein. Les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ et tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $A_k = X^k$ et on note $\mathcal{C}_n = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\big(T_n(P)\big)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k}(X)$.

1. *Dans cette question uniquement, on choisit* $n = 2$.
   a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $\big(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}\big)$ dans la base $\mathcal{C}_2$.
   b) En déduire que la famille $\big(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}\big)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

c) Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$; déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base $\mathcal{C}_2$.

Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de T_2.

2. *On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.*

a) Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre ; en déduire que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.

d) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k.

Pour établir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivante que *l'on ne demande pas de démontrer* :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \big(T_n(A_{k+1})\big)(X) = \frac{1}{n}X(1-X)\big(T_n(A_k)\big)'(X) + X\big(T_n(A_k)\big)(X)$$

où $\big(T_n(A_k)\big)'$ est le polynôme dérivé de $T_n(A_k)$.

e) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit α_k le cœfficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et n. L'automorphisme T_n est-il diagonalisable ?

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et $\forall z \in [0,1]$, $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k}(z)$.

Soit $z \in [0,1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace suivant la loi binomiale de paramètres n et z. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\overline{Z}_n = \dfrac{Z_n}{n}$.

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(\overline{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers le réel z.

b) Justifier l'existence de $M = \max\limits_{[0,1]} |f|$.

c) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit U_n l'événement : $U_n = \Big[\big|f(\overline{Z}_n) - f(z)\big| > \varepsilon\Big]$.

On note $\mathbf{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'événement U_n et $\overline{U}_n$ l'événement contraire de U_n.

Établir l'inégalité : $\big|f(\overline{Z}_n) - f(z)\big| \leqslant 2M \times \mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbf{1}_{\overline{U}_n}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) = f(z)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$.

4.a) Compléter le code *Scilab* suivant afin qu'un appel à la fonction `binom(n,z)` renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et z.

```
function Z=binom(n,z)
  Z= .........
endfunction
```

b) Soit une fonction *Scilab* `f` et une variable `z` définies par :

```
function y=f(x)
  if x==0 then y=0, else y=-x*log(x),end
endfunction
z=0.4
```

On considère le code *Scilab* suivant :

```
n=100 ; N=1000
S=0
for k=1:N
  S=S+f(binom(n,z)/n)
end
disp(S/N)
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ?

Cette valeur affichée est le résultat de la mise en œuvre de certaines méthodes. Lesquelles ?

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit Φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \Phi(P) = \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big)$.
   a) Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   b) On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec $e_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …… et $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note L_i le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$.
   Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$.
   c) Soit Ψ l'application définie sur $\big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2$ par : $\forall (P, Q) \in \big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2,\ \Psi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.
   Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbf{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
   Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.
   d) Expliciter la matrice A de passage de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathbf{R}_n[X]$.
   e) Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$, noté P_f, vérifiant les relations :
$$P_f(x_0) = f(x_0),\ P_f(x_1) = f(x_1), \ldots,\ P_f(x_n) = f(x_n).$$
   On dit que P_f *est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
   Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

6. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ tels que $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$.
   Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $\overline{x}$ un réel de $[a, b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
   On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}$. On pose : $w(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$.
   a) Établir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a, b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.
   b) Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par : $\forall t \in [a, b],\ h(t) = f(t) - Q_f(t)$.
   Montrer que la fonction h s'annule en les $(n + 2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ et en déduire l'existence d'un réel $\theta \in]a, b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.
   c) Établir l'égalité : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x})$.
   d) En déduire que pour tout $t \in [a, b]$, on a : $\big|f(t) - P_f(t)\big| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup\limits_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big|$.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

Dans cette partie, on suppose que l'entier n appartient à $\mathbf{N}^*$ et n'est plus fixé.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_{k,n} = -1 + \dfrac{2k}{n}$.

Pour tout réel $\rho > 0$, on note f_ρ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\rho(x) = \dfrac{1}{x^2 + \rho^2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $\rho > 0$, on note $P_{f_\rho, n}$ le polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ de la fonction f_ρ.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $w_n(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_{k,n})$.

Cette partie se propose de mettre en évidence des conditions suffisantes de convergence de la suite $\left(P_{f_\rho,n}(x)\right)_{n\geqslant 1}$ vers $f_\rho(x)$ pour x appartenant à un intervalle $I \subset \mathbf{R}$.

7.a) Justifier que la fonction f_ρ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| = \left|f_\rho^{(n)}(-x)\right|$.

c) Montrer que pour tout réel x vérifiant $|x| < \rho$, on a : $\dfrac{1}{x^2+\rho^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}\, x^{2k}$.

8. Dans cette question, **on admet** le résultat qui suit.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit A_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $A_k(t) = t^k$. Soit R un réel strictement positif. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout $t \in]-R, R[$, la série de terme général $u_k \times A_k(t)$ est convergente ; on note $\varphi(t)$ sa somme.

Alors, la fonction φ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et $\forall t \in]-R,R[$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\varphi^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \times A_k^{(n)}(t)$.

Soit $\rho > 0$. On pose : $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ v(x) = \dfrac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$.

a) Déterminer les réels p et q pour lesquels on a : $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ v(x) = \dfrac{p}{\rho - x} + \dfrac{q}{\rho + x}$.

b) Comparer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, $\left|v^{(n)}(x)\right|$ et $\left|v^{(n)}(-x)\right|$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-\rho,\rho[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2} \times \left|v^{(n)}(x)\right|$.

d) On suppose que $\rho > 1$. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho-1)^{n+1}}.$$

9. Pour $x \in [-1,1]$ avec $x \notin \{x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}\}$, soit k l'entier de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in]x_{k,n}, x_{k+1,n}[$.

a) Établir les inégalités : $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times (k+1)!\,(n-k)! \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times n!$.

b) À l'aide de la formule de Stirling (rappelée dans le préambule du problème), montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a pour tout $x \in [-1,1]$: $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.

c) Déduire des questions 6.d), 8.d) et 9.b) qu'une *condition suffisante* pour que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, est : $\rho > 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

10.a) On pose : $\forall \rho > 0$, $H(\rho) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,\mathrm{d}t$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $H(\rho)$.

Montrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction prolongée.

b) Montrer que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.

c) Montrer qu'il existe un unique réel $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$. Montrer que $\rho_0 < 1$ (on donne $\ln 2 \simeq 0.693$).

d) On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et $|i\rho|$ le module du nombre complexe $i\rho$.

Vérifier que pour tout $\rho > 0$, on a : $|w_n(i\rho)| > 0$. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = H(\rho)$.

11. La fonction Arctan est codée dans le langage *Scilab* par atan.

Le programme suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0.001 près.

```
function z=G(x) ; z=(1/2)*(log((1+x^2)/4))+x*(atan(1/x)) ; endfunction
u=0.25 ; v=1 ;
while (v-u)> 0.001 do
    if G((u+v)/2)> 0 then v=(u+v)/2 ; end
    if G((u+v)/2)< 0 then u=(u+v)/2 ; end
    if G((u+v)/2)==0 then v=(u+v)/2 ; u=(u+v)/2 ; end
end
disp ((u+v)/2)
```

a) Quelle est la méthode mise en œuvre dans ce programme ? Donner une équation vérifiée par s_0.

b) Comparer s_0 et ρ_0.

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n(X) = 1 - (X^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(X)$.

a) Montrer que le polynôme w_n divise le polynôme S_n.

b) Montrer que le polynôme $P_{f_\rho,n}$ est pair.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}\cdot$ Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n.

Trouver un équivalent de $|w_n(y_n)|$ lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\tau}{n}\times\sigma^n$, où τ et σ sont des réels strictement positifs que l'on déterminera.

d) *On admet sans démonstration* que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)\big) = 0$.

Déduire de ce résultat admis et de la question 12.c), un équivalent de $\left|\dfrac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans les questions 13 et 14, on suppose que n est impair.

13.a) Montrer que $w_n(i\rho) \in \mathbf{R}^*$ et exprimer $S_n(X)$ en fonction de $w_n(X)$ et $w_n(i\rho)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = f_\rho(x)\times\left|\dfrac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|$.

14. On suppose que $0 < \rho < \rho_0$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\right|$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ \sup\limits_{[-1,1]}\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = +\infty$ (*phénomène de Runge*).

Code sujet : 280

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Hormis le résultat de la question 12.b), la partie IV est indépendante du préliminaire et des parties I, II et III.

Préliminaire

1.a) Établir pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On pose alors, $A_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $A_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer A_0, A_1 et A_2.

2. Déduire de la question 1.a) la convergence, pour tout x réel, des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2\,x\,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2\,x\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

On note F et G respectivement, les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2\,x\,t)\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ G(x) = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2\,x\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dans cette partie, on veut montrer d'une part, que la fonction F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et d'autre part, donner pour tout réel x, l'expression de $F(x)$.

3.a) À l'aide d'une formule de Taylor, établir pour tout réel u, l'inégalité : $|\sin(u)| \leqslant |u|$.

b) Pour tous réels u et v, justifier la formule trigonométrique : $\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\sin\left(\dfrac{v-u}{2}\right)$.

c) En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}$.

4. a) Pour tout réel u, justifier à l'aide d'une formule de Taylor, l'inégalité : $|u - \sin(u)| \leqslant \frac{u^2}{2}$.

b) Pour tous réels x et h, établir l'inégalité :

$$|F(x+h) - F(x) + 2h\,G(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \Big(\big|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)\big| + \big(1 - \cos(2ht)\big)\big|\cos(2xt)\big| \Big)\,\mathrm{d}t$$

(On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire)

c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (x,h) \in \mathbf{R}^2,\ |F(x+h) - F(x) + 2h\,G(x)| \leqslant Ch^2.$$

5.a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa fonction dérivée F' à l'aide de la fonction G.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel x, on a : $F'(x) = -2\,x\,F(x)$.

c) En déduire que pour tout réel x, on a : $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Partie II. Fonction de Dirichlet

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit φ_n la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\,k\,\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$ par :

$$\forall u \in \mathcal{D},\ \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

(L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des multiples de 2π)

a) Montrer que la fonction φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ et prolongeable par continuité en 0.

b) En déduire que la fonction φ_n admet un prolongement continu sur $\mathbf{R}$.
On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée sur $\mathbf{R}$.

c) Montrer que la fonction φ_n est paire.

7. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Pour tout réel u, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iku}$.

b) En déduire la relation : $\forall u \in \mathbf{R},\ \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,u) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$.

8. Soit ψ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et périodique de période T. Établir pour tout réel x, l'égalité :

$$\int_x^{x+T} \psi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T \psi(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note θ un réel strictement positif fixé *et on considère la fonction f définie sur* $\mathbf{R}$ *à valeurs réelles telle que :* $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-\theta x^2}$.

9.a) Montrer que pour tout réel x, les deux séries $\sum_{k\geqslant 1} f(x + 2k\,\pi)$ et $\sum_{k\geqslant 1} f(x - 2k\,\pi)$ sont convergentes.

On pose alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ H(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\,\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2k\,\pi)$.

On définit ainsi une fonction H sur $\mathbf{R}$ et on admet sans démonstration dans toute la suite du problème que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

b) Préciser la parité de la fonction H et de sa fonction dérivée H'.

10. Dans cette question, on note n un entier naturel **fixé**.

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, soit H_N la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{N} f(x - 2k\pi).$$

a) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire que l'on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$.

c) Établir pour tout réel x, l'inégalité : $\displaystyle|H(x) - H_N(x)| \leqslant 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\theta\pi^2k^2}$.

d) En déduire les égalités :

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big).$$

11. Soit x un réel appartenant au segment $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\displaystyle a_n = \int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

a) Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u + x)\,\mathrm{d}u + \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u - x)\,\mathrm{d}u,$$

où la fonction φ_N a été définie dans la question 6.

b) En déduire l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{H(v+x) + H(v-x)}{2\sin(v/2)}\Big) \times \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v.$$

c) Justifier la continuité sur le segment $[0, 2\pi]$ de la fonction K_x définie par :

$$K_x(v) = \begin{cases} \dfrac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2\sin(v/2)} & \text{si } v \in\,]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi \end{cases}.$$

d) À l'aide de la question 7.c), établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \times \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v.$$

12.a) Soit g une fonction définie et de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque le réel λ tend vers $+\infty$.

On admet plus généralement que si g est une fonction continue sur un segment $[\alpha,\beta]$ $(\alpha<\beta)$, alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t=0\,.$$

b) Établir pour tout réel $x\in[0,2\pi]$ et pour tout réel $\theta>0$, la relation (*formule sommatoire de Poisson*) :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{4\,\theta}\Big)\cos(nx)\right)=\mathrm{e}^{-\theta x^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\theta(x+2k\pi)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\theta(x-2k\pi)^2}\,.$$

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Soit p un réel vérifiant $0<p<1$.
Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie.
Le jet de la pièce donne «Pile» avec la probabilité p et «Face» avec la probabilité $1-p$.
Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient «Pile» le premier, auquel cas la partie s'arrête.
Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A.
Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs 2, 3 et 4) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs 5, 6, 7, 8 et 9) par le joueur A, et ainsi de suite.
Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer (au maximum) deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur.
On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

13.a) Compléter la fonction *Scilab* suivante qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
function v=jeu(p)
    i=1 ;
    v=1 ;
    s=1 ;
    j=1 ;
    while rand()> p
        i=i+1 ;
        j=j+1 ;
        if j>s then v=-v ; // changement de main
                    s= ............ ;
                    j= ............ ;
                    end ;
    end ;
    if v==1 then disp("A vainqueur") ; else disp("B vainqueur") ;
    end ;
endfunction
```

b) Que représente la valeur de i après l'exécution de la fonction «jeu» ?

c) Préciser la signification de la variable v.

d) Compléter le code de la fonction «jeu» pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par le joueur A.

e) Écrire un code *Scilab* permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit le joueur A.

14. On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$.
On note :

- X le nombre de lancers effectués par le joueur A et I l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $1, 5, 6, \ldots$;
- Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et J l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $2, 3, 4, \ldots$;
- H l'événement aléatoire « le vainqueur est A » ;
- K l'événement aléatoire « le vainqueur est B ».

a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{p \to 1} P_p(H) = 1$.

15.a) Justifier que l'ensemble I est inclus dans la réunion $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!]$.

b) Démontrer que : $P_p(H) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1}\right)$. Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

16.a) En utilisant le résultat de la question 12.b), établir l'inégalité **stricte** suivante : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \dfrac{1}{2}$.

b) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?

FIN

J. 19 1197

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conception : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 30 avril 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte cinq parties.
Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices ${}^tAA$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $B_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe la matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base B_0.

- $< \mid >$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \ \|$.
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne sa transposée et $\operatorname{tr} A$ désigne sa trace.
- I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

Tournez la page S.V.P.

• **Endomorphisme adjoint** Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tA$. On notera aussi $s_f = f^* \circ f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tAA$.

• Si λ est un nombre réel, on définit

$$\mathsf{E}_\lambda(f) = \mathsf{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_\lambda(A) = \mathsf{Ker}(A - \lambda I_n).$$

• **Liste étendue des valeurs propres** Lorsqu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de A, une liste de nombres réels où chaque valeur propre λ de A se trouve répétée $\dim \mathsf{E}_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

admet $(1, 4, 4)$ pour liste étendue des valeurs propres.

• $S(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$).

• $S^+(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$) à valeurs propres positives ou nulles.

• On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Si $P \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que P est une matrice orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.

• **Matrices définies par bloc** Considérons $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

où

$$(A_1, B_1) \in \left(M_r(\mathbb{R})\right)^2 \quad ; \quad (A_4, B_4) \in \left(M_{n-r}(\mathbb{R})\right)^2,$$

et

$$(A_2, B_2) \in \left(M_{r,n-r}(\mathbb{R})\right)^2 \quad ; \quad (A_3, B_3) \in \left(M_{n-r,r}(\mathbb{R})\right)^2.$$

On utilisera sans démonstration les égalités suivantes

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ {}^tA_2 & {}^tA_4 \end{bmatrix}.$$

Partie I - Un premier exemple

Soit a un réel différent de 1 et

$$A = \frac{1}{1-a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

1) Quel est le rang de A ? Calculer A^2. Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?

2) Calculer $M = {}^tAA$. La matrice M est-elle diagonalisable ? Comparer $\mathsf{Ker}\, f$ et $\mathsf{Ker}(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f ?

3) À quelle condition nécessaire et suffisante, M est-elle la matrice d'un projecteur ?

Partie II - Généralités

4) Produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

a - Soit

$$A = \left[a_{ij}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad \text{et} \quad B = \left[b_{ij}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $\mathrm{tr}({}^tAB)$ en fonction des coefficients de A et de B.

b - Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite du problème, on notera

$$(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

la norme euclidienne associée.

c - Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis vérifier que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}\, A^2 \leqslant \mathrm{tr}({}^tAA).$$

Montrer également que

$$\mathrm{tr}\, A^2 = \mathrm{tr}({}^tAA) \quad \Leftrightarrow \quad A \in S_n(\mathbb{R}).$$

Dans la suite, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

5) Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée

Soit $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de B_0 vers B' et A' la matrice de f dans la base B'.

a - Rappeler la relation liant A et A'.

b - Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale.

c - En déduire que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B'.

6) Réduction de s_f

a - Vérifier que, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$.

b - Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(s_f)$ et $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}\, f$.

c - Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

d - Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

On note $r = \mathrm{rg}\, f$ et on suppose pour la fin de la question 6) que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

e - Justifier qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, \ldots \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est de la forme

$$\begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}$, $0_{n-r,r}$ et $0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.

f- Montrer que la matrice de f dans la base C est de la forme

$$\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in M_r(\mathbb{R})$ et $A_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Vérifier que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$.

7) Étude des valeurs propres de $A\,{}^tA$

On note $\tau_f = f \circ f^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A\,{}^tA$.

a - Montrer que $\mathrm{rg}(s_f) = \mathrm{rg}(\tau_f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(s_f)) = \dim(\mathrm{Ker}(\tau_f))$.

b - Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ en est un vecteur propre associé. Montrer alors que

$$\dim(\mathrm{E}_\lambda(s_f)) \leqslant \dim(\mathrm{E}_\lambda(\tau_f)).$$

c - Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ, on a

$$\dim(\mathsf{E}_\lambda(s_f)) = \dim(\mathsf{E}_\lambda(\tau_f)).$$

d - En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tA = \Omega({}^tAA)^t\Omega$.

8) Une inégalité

Dans cette question, on note

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n\} \quad \text{et} \quad U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in]0, +\infty[^n\},$$

et φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

a - Montrer que

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

b - En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W.

c - Calculer $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ lorsque $(x_1, \ldots, x_n) \in V \setminus U$.

d - En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

e - Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.

f - Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S. Déduire de ce qui précède que

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} S}{n}\right)^n.$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité ?

g - Dans cette question, on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n} (x + \lambda_i).$$

Montrer alors que pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\Delta(x) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}\right)^n.$$

Partie III - Étude de deux cas particuliers

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A.

9) On suppose dans cette question que f est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$.

a - Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est r.

b - On reprend les notations de la question 6) selon lesquelles

$$\mathtt{Mat}_C(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $\mathtt{tr}(A_1) = r$, et en déduire la matrice A_1.

c - Montrer alors que les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ sont supérieures ou égales à 1 et que $\mathtt{tr}({}^tAA) \geqslant r$.

d - Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $\mathtt{tr}({}^tAA) = r$?

10) On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \mathrm{Id}$.

a. Justifier que ${}^tAA$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ${}^tA$.

b - Montrer que si λ est une valeur propre de ${}^tAA$, alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre de ${}^tAA$ et que

$$\dim \mathsf{E}_\lambda({}^tAA) = \dim \mathsf{E}_{1/\lambda}({}^tAA).$$

c - Vérifier que pour tout x réel strictement positif on a

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

puis établir l'équivalence logique

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

d - On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de ${}^tAA$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geqslant 2^n.$$

e - Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $\mathsf{E}_1(f)$ et $\mathsf{E}_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Partie IV - Décomposition polaire

Dans cette partie encore, $A \in M_n(\mathbb{R})$, f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.

11) Montrer qu'il existe une base orthonormée $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i,$$

et on pose alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\varepsilon_i.$$

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

12) Soit w un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $w \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $w^2 = s_f$.

Montrer que, pour toute valeur propre μ de w, on a $\mathsf{E}_\mu(w) \subset \mathsf{E}_{\mu^2}(s_f)$, et montrer ensuite que

$$\mathsf{E}_\mu(w) = \mathsf{E}_{\mu^2}(s_f) \quad \text{et} \quad \mathsf{Sp}(w) = \left\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathsf{Sp}(s_f)\right\}.$$

13) En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f, la matrice de v est diagonale.

14) En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^2 = {}^tAA$.

15) Vérifier que la matrice $A\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple

$$(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$$

tel que $A = \Omega S$. C'est ce que l'on appelle la décomposition polaire de A.

Partie V - Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $d(M)$ la distance de M à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$d(M) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

16) Justifier que $d(M)$ est bien définie.

17) Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall N \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$$

Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. En déduire que

$$d(M) = d(RM) = d(MR).$$

18) On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A. On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = PD\,{}^tP.$$

Vérifier que $d(A) = d(D)$.

19) Soit $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note

$$W = \frac{1}{2}(V + {}^tV),$$

et v l'endomorphisme canoniquement associé à V.

a - Justifier que W est diagonalisable. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à W.

b - Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $< w(x) \mid x > = < v(x) \mid x >$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que

$$|< w(x) \mid x >| \leqslant \|x\|^2 \quad \text{et} \quad < x - w(x) \mid x > \geqslant 0.$$

c - Montrer alors que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles.

d - On note $W = [w_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Montrer aussi que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $1 - w_{ii} \geqslant 0$.

e - Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $w_{ii} = 1$ si, et seulement si, $W = I_n$.

20) On conserve les notations des questions 18) et 19).

a - Montrer que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\,(\,I_n - V \mid D\,) = 2\,(\,I_n - W \mid D\,).$$

b - En déduire que

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geqslant 0.$$

c - Montrer alors que

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \|\sqrt{{}^tAA} - I_n\|_2,$$

et montrer aussi que I_n est l'unique élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$.

Conceptions : HEC Paris – ESSEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2020, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les équations étudiées dans ce problème sont utilisées en sciences sociales et en théorie dynamique des jeux pour décrire des processus influencés par un facteur d'imitation.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Partie I : résolution d'une équation différentielle scalaire

Dans cette partie, r désigne un nombre réel, et on détermine les fonctions f à valeurs dans $]0,1[$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = r\,\big(f(t)\big)^2\,\big(1 - f(t)\big)\,. \tag{1}$$

1. On note u l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ u(t) = \frac{t}{1-t}\,\mathrm{e}^{-1/t} \tag{2}$$

a) Justifier que la limite à droite de la fonction u en 0 est nulle. Quelle est la limite à gauche de la fonction u en 0 ?

b) Démontrer qu'il existe un polynôme P, que l'on précisera, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ u'(t) = \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{e}^{-1/t}\,.$$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction u et donner l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2. Soit φ l'application de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{3}$$

a) Justifier que l'application φ est bijective.
b) L'application φ est-elle de classe C^1 sur $[0,1[$?
c) L'application φ^{-1} est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?
d) Donner un script *Scilab* fournissant une représentation graphique de φ^{-1}.

3. a) Démontrer que, pour toute fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$, la fonction composée $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f et de f'.

b) Démontrer que, pour tout réel $a \in]0,1[$, l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,1[$ vérifiant (1) et $f(0) = a$ est la fonction f_a donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(a)\,\mathrm{e}^{rt}\big) \tag{4}$$

4. *Dans cette question*, r est supposé strictement positif et a est un élément de $]0,1[$.

a) Démontrer que la fonction f_a est monotone. Quelles en sont les limites en $-\infty$ et $+\infty$?

b) Donner une expression de la dérivée seconde f''_a à l'aide de f'_a et f_a. En déduire que la courbe représentative de f_a admet un unique point d'inflexion.

c) Trouver l'ensemble de ces points d'inflexion lorsque a décrit l'intervalle $]0,1[$. Que peut-on dire des tangentes aux courbes représentatives des fonctions f_a en ces points ?

Partie II : étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \quad K(x,y) = x\,\ln\Big(\frac{x}{y}\Big) + (1-x)\,\ln\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) \tag{5}$$

5. a) Justifier que K est de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$.

b) Calculer la dérivée partielle $\partial_2(K)$.

c) Étudier le signe de $\partial_2(K)$ et en déduire que la fonction K admet un minimum global, égal à 0.

d) La fonction K est-elle majorée ?

6. Pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, on note $q_{(x,y)}$ la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2(K)(x,y)$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux de K.

b) Justifier, pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, l'inégalité : $q_{(x,y)}(1,0) \geq 4$.

7. Pour un élément (x,y) de $]0,1[\times]0,1[$, on note : $\begin{cases} z = (y,y) \\ w = (x-y,0) \end{cases}$.

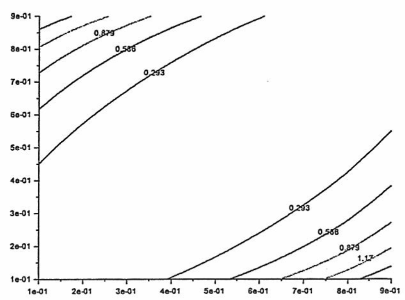
a) En utilisant une formule de Taylor, établir l'égalité :

$$K(x,y) = \int_0^1 (1-t)\,q_{z+tw}(w)\,\mathrm{d}t\ .$$

b) En déduire l'inégalité :

$$K(x,y) \geq 2(x-y)^2 \tag{6}$$

8. a) Écrire un script *Scilab* permettant de donner une représentation graphique de la fonction K.
b) La figure suivante représente des lignes de niveau de la fonction K.



Chaque ligne de niveau présente un centre de symétrie. Lequel et pourquoi ?

Partie III : divergence de Kullback

Dans cette partie, Q^* et Q désignent deux probabilités distinctes sur l'espace probabilisable $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q^*(\{n\})\, Q(\{n\}) > 0 \; .$$

Pour toute variable aléatoire X sur $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, on note :

$$d(X) = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} Q^*([X = x]) \ln\left(\frac{Q^*([X = x])}{Q([X = x])}\right) \tag{7}$$

sous réserve que cette somme ait un sens.

9. Un exemple
Dans cette question (et seulement dans cette question), λ^* et λ sont deux réels strictement positifs distincts, et on suppose que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ^* pour la probabilité Q^*, la loi de Poisson de paramètre λ pour la probabilité Q.

a) Justifier l'existence de $d(X)$ et vérifier l'égalité :

$$d(X) = -\lambda^* \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \lambda - \lambda^* \cdot$$

b) Préciser le signe de $d(X)$ et prouver que $d(X)$ est négligeable devant $\lambda - \lambda^*$ lorsque λ tend vers λ^*.

10. Dans cette question, ψ désigne une fonction à valeurs réelles, de classe C^1 et convexe sur $]0, +\infty[$. Soit U une variable aléatoire discrète strictement positive, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que les deux variables aléatoires U et $\psi(U)$ admettent chacune une espérance.

a) Justifier que l'espérance $E(U)$ est strictement positive.
b) Pour tout $x > 0$, comparer les deux nombres $\psi(x) - \psi\big(E(U)\big)$ et $\psi'\big(E(U)\big)\,\big(x - E(U)\big)$.
c) En déduire l'inégalité :

$$\psi\big(E(U)\big) \leq E\big(\psi(U)\big) \tag{8}$$

d) En utilisant la concavité de la fonction ln et l'inégalité (8), démontrer que, lorsqu'il existe, le réel $d(X)$ est positif ou nul.

Dans les questions 11 et 12, on suppose que l'ensemble $X(\mathbb{N})$ est fini.

11. Soit g une application de $X(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. On note Y la variable aléatoire sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y(n) = g\big(X(n)\big)\ .$$

a) Pour tout $y \in Y(\mathbb{N})$, on note $g^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ tels que $g(x) = y$. Établir l'égalité :

$$d(X) = d(Y) + \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} \Big(Q^*([Y = y]) \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} Q^*_{[Y=y]}([X = x]) \ln \big(\frac{Q^*_{[Y=y]}([X = x])}{Q_{[Y=y]}([X = x])} \big) \Big)\ .$$

b) En déduire l'inégalité :

$$d(X) \geq d(Y)\ .$$

12. Soit B l'ensemble des réels $x \in X(\mathbb{N})$ pour lesquels $Q([X = x])$ est inférieur ou égal à $Q^*([X = x])$.

a) Justifier que $Q^*([X \in B])$ et $Q([X \in B])$ sont strictement compris entre 0 et 1, et démontrer que :

$$\Big(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big| Q([X = x]) - Q^*([X = x]) \big| \Big)^2 = 4 \Big(Q([X \in B]) - Q^*([X \in B]) \Big)^2\ .$$

b) Vérifier que, si Y est la variable aléatoire sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(n) \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $d(Y) = K\big(Q^*([X \in B]), Q([X \in B])\big)$, où K est la fonction de deux variables définie dans la partie II par (5).

c) Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$d(X) \geq \frac{1}{2} \Big(\sum_{x \in X(\mathbb{N})} \big| Q([X = x]) - Q^*([X = x]) \big| \Big)^2 \tag{9}$$

Partie IV : trajectoires d'une équation différentielle vectorielle.

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de fonctions qui vérifient une équation qui généralise (1), dans un contexte multidimensionnel.

Pour un entier n donné, supérieur ou égal à 2, on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour lequel la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormée.

On considère une matrice carrée $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application $f : t \longmapsto \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dont les composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(0) = 1 \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(0) > 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_i'(t) = \langle e_i - f(t), Rf(t) \rangle\ f_i(t) \end{cases} \tag{10}$$

où $Rf(t)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est $R \times \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

13. Soit v une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et V une primitive de v sur $\mathbb{R}$.
On considère une fonction $y : t \longmapsto y(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) = v(t)\, y(t) \; .$$

a) Calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto y(t)\, \mathrm{e}^{-V(t)}$.

b) En déduire que si $y(0)$ est nul, alors $y(t)$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du signe de la fonction y si $y(0)$ n'est pas nul ?

14. a) En appliquant ce qui précède à la fonction $y : t \longmapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} f_i(t)$, justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1 \; .$$

b) Justifier que, pour tout réel t et tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(t)$ est strictement positif.

On note :

$$\left\{ \begin{aligned} & T = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \; / \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\} \\ & T^* = T \cap (\mathbb{R}_+^*)^n \end{aligned} \right. \tag{11}$$

On suppose désormais qu'il existe un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in T^*$ tel que :

$$\forall x \in T \setminus \{x^*\}, \quad \langle x^* - x, Rx \rangle > 0 \tag{12}$$

où Rx est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice-colonne dans la base canonique est $R \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On note H la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[^n$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in]0, 1[^n, \quad H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \, \ln\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) \tag{13}$$

15. a) En utilisant le résultat de la question 12, justifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H\big(f(t)\big) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(t) - x_i^*| \right)^2 .$$

b) Justifier que la fonction composée $H \circ f$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée à l'aide de f, R et x^*.

c) En déduire que $H \circ f$ admet une limite en $+\infty$, que l'on notera ℓ.

16. Pour tout $x \in T^*$, établir les inégalités :

$$H(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{x_i} (x_i^* - x_i) \leq \frac{1}{\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 \right)^{1/2} .$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif c tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(t) \geq c \tag{14}$$

a) Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i(t) - x_i^*)^2 \geq c^2\ell^2 \ .$$

b) Justifier que, pour tout réel strictement positif p, il existe $q > 0$ tel que :

$$\forall x \in T, \quad \Big(\langle x - x^*, x - x^*\rangle \geq p\Big) \Longrightarrow \Big(\langle x^* - x, Rx\rangle \geq q\Big) \ .$$

c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite ℓ de $H \circ f$ en $+\infty$ est nulle et en déduire que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lim_{t \to +\infty} f_i(t) = x_i^* \ .$$

18. Un exemple

On note U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On suppose que

$$R = \lambda I + A \tag{15}$$

où λ est un nombre réel strictement négatif, I la matrice-identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AU = 0 \tag{16}$$

a) Justifier que le vecteur $x^* = \dfrac{1}{n}\,(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$ vérifie (12).

b) Démontrer que la fonction $t \longmapsto f_1(t)f_2(t)\ldots f_n(t)$ est croissante.

c) Justifier que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(t)$ tend vers $\dfrac{1}{n}$ quand t tend vers $+\infty$.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conceptions : HEC Paris – ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 28 avril 2021, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème étudie la transformée de Fourier discrète des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ où l'entier n est une puissance de 2. Dans la première partie, on découvre la matrice de Fourier-Vandermonde. Dans la seconde, on utilise les résultats obtenus pour les matrices circulantes et, dans la troisième partie, on s'intéresse à un algorithme d'obtention de la transformée de Fourier discrète que l'on applique ensuite au calcul d'un produit de convolution.

Dans tout le problème :

- N désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $n = 2^N$.
- On note ω_n le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
- Si $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ est un nombre complexe, on note son conjugué $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$. Ainsi, $\overline{\omega_n} = \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{n}}$.
- $\mathscr{B}_n = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et e_Σ est le vecteur $e_\Sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_k$.
- Si $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in \mathbb{C}^n$, on pourra identifier x et la matrice colonne

  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}_n$.

Tournez la page S.V.P.

- Si $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_{n-1}} \end{pmatrix}$.

  Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

  On utilisera sans démonstration la formule $\overline{MX} = \overline{M}\,\overline{X}$.
- Si $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, on remarquera que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 = ({}^t\overline{X})X$$

  où ${}^t\overline{X}$ est la matrice ligne $\begin{pmatrix} \overline{x_0} & \overline{x_1} & \cdots & \overline{x_{n-1}} \end{pmatrix}$.
- Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$, on note $E_\lambda(g) = \mathrm{Ker}(g - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.
- Un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{C}^n$ est dit **stable** par un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ si, pour tout $x \in G$, $g(x) \in G$.

  On note alors $g_{|G} : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$. On utilisera sans démonstration le fait que $g_{|G}$ est un endomorphisme de G.

  Cet endomorphisme $g_{|G}$ est appelé endomorphisme de G **induit** par g.

On s'intéresse, dans ce problème, à l'étude de l'application :

$$F_n : x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j \right) e_k$$

On acceptera sans le démontrer que F_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.
On notera A_n la matrice de F_n dans la base $\mathscr{B}_n$; on a donc $A_n = (\omega_n^{kj})_{(k,j)\in[\![0,n-1]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

(on prendra bien garde que dans tout le problème, les indexations des coefficients de vecteurs et de matrices sont réalisées à l'aide de l'ensemble d'entiers $[\![0, n-1]\!]$)

Partie I - Premières propriétés de l'application F_n

1. Préliminaires :

   (a) Que vaut ω_n^n ? Et plus généralement, que vaut $(\omega_n^k)^n$ pour $k \in \mathbb{Z}$?

   Montrer que : $\forall (k,k') \in [\![0,n-1]\!]^2$, $k \neq k' \Longrightarrow \omega_n^k \neq \omega_n^{k'}$.

Justifier alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_n^k)$.

(b) Soit $s \in \mathbb{Z}$; montrer que $\sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{sq} = \begin{cases} n & \text{si } s \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Cas particulier $n = 2$:
   (a) Expliciter la matrice A_2. Est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
   (b) A_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
3. Cas particulier $n = 4$:
   (a) Expliciter la matrice A_4 et calculer la matrice $A_4\overline{A_4}$. En déduire que A_4 est inversible et donner son inverse.
   (b) Calculer la matrice A_4^2 puis A_4^4. En déduire un polynôme annulateur non nul de A_4.
   (c) Quelles sont les valeurs propres possibles de A_4 ?
   (d) On note $P = \text{vect}(e_0, e_\Sigma)$; montrer que P est stable par F_4.
   Écrire la matrice C_4 de l'endomorphisme induit $F_{4|P}$ dans la base (e_0, e_Σ) de P.
   Déterminer les valeurs propres de C_4 ainsi qu'une base de vecteurs propres de C_4.
   En déduire que 2 et -2 sont valeurs propres de F_4 et déterminer des vecteurs propres de F_4 associés à ces deux valeurs propres.
   (e) Calculer $F_4(e_0 + e_2)$ ainsi que $F_4(e_1 - e_3)$.
   En déduire le spectre de F_4 ainsi que ses espaces propres. F_4 est-il diagonalisable ?
4. Exemples de transformées de Fourier discrètes :
   Soient $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in \mathbb{C}^n$ et $y = F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k$.
   (a) Déterminer y dans les trois cas suivants :
      i. $x = e_\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$.
      ii. $x = \sum_{k=0}^{n-1} a^k e_k$ où $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \neq 1$.
      iii. $x = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_k$.
   (b) On suppose que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $y_k = \overline{y_{n-k}}$.
5. Inversibilité de A_n dans le cas général et formule de Parseval :
   (a) Calculer la matrice $A_n\,\overline{A_n}$.
   Justifier alors que A_n est inversible et préciser A_n^{-1}.
   (b) Justifier que F_n est inversible et préciser F_n^{-1}.
   (c) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\quad n\,({}^t\overline{X})X = {}^t(\overline{A_n X})A_n X$.
   (d) En déduire la formule de Parseval : pour tout $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, $\quad \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j\right|^2 = n\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2$.

6. Valeurs propres de A_n :

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A_n ; montrer que $|\lambda| = \sqrt{n}$ (on pourra utiliser la question 5. (c)).

   (b) Montrer que la matrice A_n^2 est la matrice de terme général $b_{k,j}$ où $(k,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que :
   $$b_{0,0} = n \qquad b_{k,n-k} = n \text{ pour } k \in [\![1, n-1]\!] \quad \text{et} \quad b_{k,j} = 0 \text{ sinon}$$
   $$\text{Autrement dit, } A_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Préciser alors A_n^4.
   En déduire un polynôme annulateur non nul de A_n et les valeurs propres possibles de A_n.

7. Construction de vecteurs propres de F_n :
   on suppose dans cette question que $n \geq 8$.
   On note $e_{\cos} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) e_k$ et $e_{\sin} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) e_k$.

   (a) Calculer $F_n(e_1 + e_{n-1})$ et $F_n(e_1 - e_{n-1})$ en fonction des vecteurs $e_{\cos}$ et $e_{\sin}$.

   (b) On note G_n l'endomorphisme canoniquement associé à A_n^2.
   Préciser $G_n(e_1 + e_{n-1})$ et $G_n(e_1 - e_{n-1})$ et en déduire que :
   $$F_n(e_{\cos}) = \frac{n}{2}(e_1 + e_{n-1}) \quad \text{et} \quad F_n(e_{\sin}) = i\,\frac{n}{2}(e_1 - e_{n-1})$$

   (c) On note $Q = \mathrm{vect}(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$.
   Vérifier que Q est de dimension 2 et montrer que Q est stable par F_n.
   Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit $F_{n|Q}$ dans la base $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$ de Q ?
   Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres de cette matrice.
   En déduire que $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ sont valeurs propres de F_n et déterminer des vecteurs propres de F_n associés à ces deux valeurs propres.

   (d) Procéder de la même façon avec $R = \mathrm{vect}(e_1 - e_{n-1}, e_{\sin})$.

   (e) En déduire les valeurs propres de F_n.

Partie II - Lien avec les matrices circulantes

Soit $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$; on appelle **matrice circulante** associée à a et on note $C(a)$ la matrice :

$$C(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

On note en particulier, $J_n = C(0,1,0,0,\dots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c'est-à-dire $a_1 = 1$ et $a_j = 0$ si $j \neq 1$).
On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_n$ est J_n.
Enfin, on note $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices circulantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

8. Puissances successives de J_n :

   (a) Pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, déterminer $\varphi_n(e_j)$, puis $\varphi_n^2(e_j)$ et en déduire la matrice J_n^2.

   (b) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Montrer que :

   $$\forall j \in [\![k,n-1]\!] \quad \varphi_n^k(e_j) = e_{j-k} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![0,k-1]\!] \quad \varphi_n^k(e_j) = e_{n-k+j}$$

   (c) Enfin, pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, calculer $\varphi_n^n(e_j)$.
   Que vaut φ_n^n ?

   (d) Déduire de ce qui précède l'expression des matrices J_n^k pour $k \in [\![1,n]\!]$.

9. Réduction de J_n :

   (a) Déduire de la question 8., les valeurs propres possibles de J_n.

   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $F_n(e_k)$ est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre ω_n^k.

   (c) Donner alors tous les sous-espaces propres de φ_n.
   En déduire que J_n est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que $J_n = \frac{1}{n} A_n D_n \overline{A_n}$ où D_n est la matrice diagonale de taille n dont les coefficients diagonaux sont les complexes ω_n^k où $k \in [\![0,n-1]\!]$.

10. Structure de $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$:

    (a) Justifier que $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
    En donner une base et la dimension.

    (b) Montrer que $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$ est stable pour la multiplication.

11. Réduction des matrices circulantes :
    Soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $C(a)$ la matrice circulante associée.

    (a) Vérifier que $C(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k$.

    (b) Montrer alors que $C(a)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres.

    (c) *Exemple :* soit $\alpha = (0,1,0,0,\dots,0,1) \in \mathbb{C}^n$, c'est-à-dire :

    $$\alpha_1 = \alpha_{n-1} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i = 0 \quad \text{si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n-1$$

    On note $S_n = C(\alpha)$.
    Quelles sont les valeurs propres de S_n ?
    La matrice S_n est-elle inversible ?

Tournez la page S.V.P.

12. Caractérisation des matrices circulantes :

On se propose dans cette question, de montrer que $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec J_n. On note $\Omega = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid J_n M = M J_n\}$.

(a) Vérifier que $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C}) \subset \Omega$.

Dans la suite de cette question, on considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $J_n M = M J_n$ et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est M.

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $g\big(F_n(e_k)\big) = \lambda_k F_n(e_k)$.

(c) En déduire une explicitation simple de $\dfrac{1}{n}\overline{A_n} M A_n$.

(d) Démontrer que Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n, et que Ω est égal à $\mathrm{Circ}_n(\mathbb{C})$.

Partie III - Construction algorithmique

13. Algorithme de calcul de $F_n(x)$:
algorithme de Cooley-Tukey ou algorithme «papillon».
On rappelle que l'entier n est égal à 2^N avec N entier supérieur ou égal à 1.

On se propose dans cette question, de construire un algorithme de calcul de $F_n(x)$, pour un vecteur $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $[F_n(x)]_k$ la composante d'indice k de $F_n(x)$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
À x, on associe les vecteurs $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n/2-1}) \in \mathbb{C}^{n/2}$ et $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n/2-1}) \in \mathbb{C}^{n/2}$ tels que pour tout $k \in \left[\!\!\left[0, \frac{n}{2}-1\right]\!\!\right]$, $y_k = x_{2k}$ et $z_k = x_{2k+1}$.
Ainsi, pour $n = 8$, pour $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in \mathbb{C}^8$, on a $y = (x_0, x_2, x_4, x_6) \in \mathbb{C}^4$ et $z = (x_1, x_3, x_5, x_7) \in \mathbb{C}^4$.

(a) Vérifier que pour tout $k \in \left[\!\!\left[0, \frac{n}{2}-1\right]\!\!\right]$:

$$[F_n(x)]_k = [F_{n/2}(y)]_k + \omega_n^k [F_{n/2}(z)]_k \quad \text{et} \quad [F_n(x)]_{k+n/2} = [F_{n/2}(y)]_k - \omega_n^k [F_{n/2}(z)]_k$$

(b) On suppose déjà calculés $F_{n/2}(y)$ et $F_{n/2}(z)$ et on considère l'algorithme suivant :

A **prend la valeur** 1
pour k **allant de** 0 **à** $\frac{n}{2}-1$ **faire**
  B **prend la valeur** $A \times [F_{n/2}(z)]_k$
  α_k **prend la valeur** $[F_{n/2}(y)]_k + B$
  $\alpha_{k+n/2}$ **prend la valeur** $[F_{n/2}(y)]_k - B$
  A **prend la valeur** $\omega_n \times A$
fin

Comparer le vecteur $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ obtenu après exécution de cet algorithme au vecteur $F_n(x)$.

(c) On s'intéresse, dans cette question, à l'efficacité de l'algorithme précédent en terme de rapidité de calcul. Pour ceci, la procédure habituelle consiste à évaluer le nombre d'opérations arithmétiques (additions, soustractions, multiplications et divisions de deux nombres complexes) nécessaires à l'obtention du résultat final.

L'implémentation de ce type d'algorithmes, dits **récursifs** (pour calculer des images par la fonction F_n, on commence par calculer des images par la fonction $F_{n/2}$), nécessite une gestion particulière dans la mémoire de la machine, du stockage des variables et de l'adressage des instructions exécutées, gestion dont nous ne tiendrons pas compte dans ce sujet.

On note u_N le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $F_n(x)$ avec $n = 2^N$.

Les calculs de $F_{n/2}(y)$ et de $F_{n/2}(z)$ nécessitent donc chacun u_{N-1} opérations.

On convient que $u_0 = 0$.

Justifier alors que la suite (u_N) vérifie la relation de récurrence $u_N = 2u_{N-1} + 2^{N+1}$.

(d) En déduire pour tout $N \in \mathbb{N}$, la valeur de u_N en fonction de N, puis de n.

(on pourra d'abord s'intéresser à la suite (v_N) définie par : $\forall N \in \mathbb{N},\ v_N = \dfrac{u_N}{2^N}$)

14. Produit de convolution de deux vecteurs de $\mathbb{C}^{n/2}$:

Soient $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n/2-1}) \in \mathbb{C}^{n/2}$ et $z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n/2-1}) \in \mathbb{C}^{n/2}$;

on pose, pour tout $k \in \left[\!\left[\dfrac{n}{2}, n-1\right]\!\right]$, $y_k = z_k = 0$;

on construit ainsi deux vecteurs notés $\tilde{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\tilde{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On pose alors $x = y * z = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} y_j z_{k-j}$.

Le vecteur x est appelé **produit de convolution** des vecteurs y et z.

(a) Vérifier que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $[F_n(x)]_k = [F_n(\tilde{y})]_k \cdot [F_n(\tilde{z})]_k$.

(b) On calcule le produit de convolution $x = y * z$ en calculant successivement :

- les transformées de Fourier discrètes $F_n(\tilde{y})$ et $F_n(\tilde{z})$ par l'algorithme étudié dans la question 13.,
- les produits : pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $[F_n(x)]_k = [F_n(\tilde{y})]_k \cdot [F_n(\tilde{z})]_k$, donc $F_n(y * z)$,
- la transformée de Fourier discrète inverse $F_n^{-1}\big(F_n(y * z)\big)$.

Déterminer le nombre d'opérations nécessaires à la réalisation de chacune de ces trois étapes, et en déduire en fonction de n un équivalent du nombre d'opérations nécessaires au calcul du produit de convolution $x = y * z$ par cette méthode.

(c) Comparer, du point de vue du nombre d'opérations effectuées, cette méthode à la méthode du calcul du produit $x = y * z$ par la définition : pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} y_j z_{k-j}$.

❄ ❄ ❄
❄ ❄
❄

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 282

Conceptions : HEC Paris – ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 5 mai 2022, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un endomorphisme de E.

Dans tout le problème :

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- n est un entier supérieur ou égal à 2 ;
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ;
- $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
- on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda \mathrm{id}_E$ où λ appartient à $\mathbb{K}$ et id_E est l'application identique (ou identité) de E ;
- un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

  On note alors $u_{|F}$, l'endomorphisme de F définit par : $u_{|F} : \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$.

  Cet endomorphisme est appelé endomorphisme de F **induit** par u ;
- si u est un endomorphisme de E, on définit les puissances successives de u par récurrence : $u^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u^k = u \circ u^{k-1}$;
- si u est un endomorphisme de E et e un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_u(e) = \mathrm{vect}\big(u^k(e) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\big) = \mathrm{vect}\big(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e)\big)$$

Si k est un entier naturel non nul, $\mathscr{B}(e,k)$ désigne la famille $\left(e,u(e),u^2(e),\dots,u^{k-1}(e)\right)$

- soit $u \in \mathscr{L}(E)$; on dit que u est un **endomorphisme cyclique** s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on considérera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique ;
- soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; on dit que A est une **matrice de Frobenius** ou une **matrice compagnon** s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le polynôme $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ est appelé **polynôme caractéristique** de A ;

- on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier naturel non nul k tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$ est appelé **indice de nilpotence** de u.

Le problème comporte trois parties.
Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques, on traite quelques exemples, en particulier avec Scilab.
Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents.
Dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme appelée **décomposition de Frobenius** et on en déduit quelques propriétés élémentaires ; on montre en particulier que toute matrice carrée réelle est semblable à sa transposée.

Partie I - Premières propriétés

Soit u un endomorphisme de E et e un vecteur *non nul* de E.

Section A - Étude des sous-espaces $E_u(e)$

1. Justifier que la famille $\mathscr{B}(e, n+1)$ est liée.
2. On note $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid \mathscr{B}(e,k) \text{ est libre}\}$; justifier l'existence de $d(e)$.
3. Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + a_2 u^2(e) + \cdots + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

Montrer alors que pour tout entier k supérieur ou égal à $d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\left(e, u(e), u^2(e), \dots, u^{d(e)-1}(e)\right)$.
En déduire que $\mathscr{B}\left(e, d(e)\right)$ est une base de $E_u(e)$.

4. Montrer que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u.
   Montrer également que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par l'endomorphisme u contient $E_u(e)$.
5. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier $d(e)$, le vecteur e est-il un vecteur propre pour u ?
6. Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur *non nul* e de E, on a $d(e) = 1$.
7. Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur *non nul* e de E tel que $d(e) = n$.

Section B - Premières propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose dans cette section que u est un endomorphisme cyclique de E et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

8. On note A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$ de E ; vérifier que A est une matrice de Frobenius.
9. On note $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$ son polynôme caractéristique.
   Que vaut $\big(P_A(u)\big)(e)$?
   Calculer $\big(P_A(u)\big)\big(u^k(e)\big)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u.
10. Vérifier que la famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
11. En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
12. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A et vérifier que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
13. En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable.

Section C - Un premier exemple

On suppose dans cette section que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de E.
On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}_3$ sont respectivement

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Justifier que f est diagonalisable. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
15. Déterminer (V_1, V_2, V_3) une base de diagonalisation de f telle que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée du vecteur V_i dans la base $\mathscr{B}_3$ soit 1.
16. On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$; déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
17. Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.
    L'endomorphisme g est-il cyclique ?
18. Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g.

Section D - Avec Scilab

Dans cette section, on suppose que les polynômes sont à coefficients réels. On va étudier deux méthodes indépendantes qui vont implémenter en Scilab la caractérisation vue dans la question 13.
Les questions 22 et suivantes de cette section sont indépendantes des précédentes questions.
On pourra utiliser les quelques notions de Scilab données ci-dessous :

- on crée un polynôme `p` de la variable `x` à l'aide de la syntaxe
  `p = poly(coeff, 'x', 'c')` où `coeff` est le vecteur représentant les coefficients de `p`. Par exemple, le polynôme $p : x \mapsto 2 - 3x + x^3$ est défini par
  `p = poly([2, -3, 0, 1], 'x', 'c');`
- pour évaluer un polynôme `p` en une valeur `val`, on utilise `horner(p, val)`;
- le degré d'un polynôme `p` est obtenu sous Scilab par `degree(p)`;
- la dérivée d'un polynôme `p` est obtenue sous Scilab par `derivat(p)` qui renvoie un polynôme;
- on peut effectuer des tests de comparaison avec ==, <=, >=, <, > ou <>.
  Par exemple, si `x` est une variable de type numérique, l'instruction `x>=0` renvoie le booléen `T` (ou `vrai`) si `x` est positif ou nul et le booléen `F` (ou `faux`) si `x` est strictement négatif;
- les fonctions `max`, `sum`, `abs` permettent de calculer respectivement le maximum, la somme et la valeur absolue des éléments d'un vecteur (on renvoie un vecteur pour la fonction `abs`).

19. Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme Δ, diviseur commun à P et Q, de degré maximum et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Un tel polynôme Δ est appelé un **pgcd** de P et Q.
    Dans la suite, on pourra utiliser la fonction Scilab `bezout` qui appliquée à deux polynômes `p` et `q`, renvoie un pgcd de `p` et `q` sous forme d'un polynôme.

20. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que P admet une racine *complexe* de multiplicité strictement supérieure à 1 si et seulement si un pgcd de P et de sa dérivée P' est de degré supérieur ou égal à 1.

21. Compléter la fonction Scilab `racSimp` suivante qui appliquée au vecteur ligne `c` représentant les coefficients d'un polynôme P renvoie le booléen `T` ou `F` selon que le polynôme P n'a que des racines simples ou pas.

```
function b = racSimp(c)
    ...
    ...
    b = ...
endfunction
```

    Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non ?

Dans la suite de cette section, on propose une deuxième méthode approximative, valable seulement dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et permettant de tester si un polynôme *réel* de degré n admet exactement n racines réelles distinctes.
L'idée de la méthode est de partir d'un réel en deçà duquel on est sûr que le polynôme ne s'annule pas. Par un parcours de gauche à droite, on va tester le signe du polynôme et si l'on rencontre n changement de signes, on saura que le polynôme admet n racines réelles. Dans le cas contraire, on renverra une valeur d'indétermination.

22. Justifier que si un polynôme P de degré n est tel qu'il existe $n+1$ réels $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ tels que $P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, alors P admet n racines distinctes.

23. Montrer que si $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients réels et si z est un réel tel que $P(z) = 0$, alors $|z| \leq \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$ (on pourra montrer que si $|z| > 1$, alors $|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$).

    Dans la suite, on notera m le réel $\max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$.

24. Compléter la fonction Scilab `racSimpApprox` suivante qui appliquée au vecteur ligne `c` représentant les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ du polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et au réel `pas`, renvoie le booléen `T` si cette fonction Scilab détecte n changements de signe en partant de `m-pas/2` et en testant les valeurs de `pas` en `pas` jusqu'à dépasser `m+pas/2`.
    Dans le cas où l'on ne rencontre pas n changements de signe, la fonction renverra la chaîne de caractères `"ind"`.

```
function val = racSimpApprox(c,pas)
    ...
     .
     .
     .
    ...
    val = ...
endfunction
```

25. Comment utiliser cette fonction pour tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non ?
    Expliquer dans quel(s) cas la fonction renvoie la valeur indéterminée `"ind"`.

Partie II - Étude de deux cas particuliers

Section A - Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u est diagonalisable.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

26. En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u, établir que l'endomorphisme $(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \mathrm{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.

27. En déduire que la famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathscr{L}(E)$.

28. Quelle est la valeur de p si u est cyclique ?

    On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

29. Soit $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Montrer que la famille $\mathscr{B}(e,n)$ est libre et conclure que u est cyclique.

30. On reprend dans cette question seulement l'exemple de la section C de la partie I et, pour α réel, on note $u_\alpha = g + \alpha f$.

    Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, suivant les valeurs de α, les cas où u_α est cyclique.

Section B - Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence r.

31. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$; montrer que la famille $\big(e, u(e), \dots, u^{r-1}(e)\big)$ est libre dans E.
32. En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique.

    Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$.

Section C - Un second exemple

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$ de E et on rappelle que $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ constitue une base de E.

33. Soit $P \in E$; montrer que pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge et montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ appartient à E.

On note $u : P \in E \mapsto u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

34. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
35. Soit $P \in E$; à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$$

    où P' désigne la dérivée de P.

36. En déduire que pour tout $P \in E$, $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$ où, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.
37. Soit $P \in E$; à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds$$

38. Montrer que pour tout $P \in E$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(s)\,\mathrm{e}^{-s}\,ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

    Montrer alors que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\big(u(P)\big)' = u(P) - P$.

    En déduire que $\big(u(P)\big)' = u(P')$.

39. Déterminer la matrice de u dans la base $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ de E et en déduire le spectre de u.
40. On pose $v = u - \mathrm{id}_E$; montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E, constitué des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n-2$.
41. Montrer que v est nilpotent. L'endomorphisme v est-il cyclique ?

Partie III - Décomposition de Frobenius et applications

On se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathscr{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathscr{R})$:

$(\mathscr{R})$

> il existe $p \in [\![1,n]\!]$ et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels non nuls de E, stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ et vérifiant :
>
> pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i.

Section A - Cas d'une homothétie

42. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si u est une homothétie.

Section B - Cas où u n'est pas une homothétie

43. Justifier qu'il existe e vecteur *non nul* de E tel que $d(e) \neq 1$.

Pour le reste de cette section, on choisit un vecteur *non nul* e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geq 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$;
on note toujours $\mathscr{B}(e,d) = (e_0, e_1, \dots, e_{d-1})$ ainsi que $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ les scalaires tels que
$u^d(e) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(e)$. Enfin, on note $F_1 = E_u(e)$.

44. Justifier que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée si $d = n$.

Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geq 3$).
On complète la famille $\mathscr{B}(e,d)$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{d-1}, e_d, \dots, e_{n-1})$ de E.

45. Démontrer que l'application $\varphi : x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in E \mapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E.

On considère l'application $\Phi : x \in E \mapsto \Big(\varphi\big(u^{d-1}(x)\big), \varphi\big(u^{d-2}(x)\big), \dots, \varphi\big(u(x)\big), \varphi(x)\Big) \in \mathbb{K}^d$.

46. Vérifier que Φ est linéaire. On note $G = \mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\widetilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.
47. Calculer $\Phi(e_0) = \Phi(e)$ et $\Phi(e_1) = \Phi\big(u(e)\big)$.
    Plus généralement, justifier que pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe une famille de scalaires $(\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \dots, \beta_{k-1,k}) \in \mathbb{K}^k$ telle que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, \dots, \beta_{k-1,k}, 1, 0, \dots, 0)$.
48. Écrire alors la matrice de l'application $\widetilde{\Phi}$ dans les bases $\mathscr{B}(e,d)$ de F_1 et la base canonique de $\mathbb{K}^d$ et justifier que $\widetilde{\Phi}$ est bijectif.
49. Montrer alors que $E = F_1 \oplus G$ et justifier que G est stable par u.
50. Dire pourquoi $u_{|F_1}$ est bien un endomorphisme cyclique de F_1.
51. Justifier que pour tout vecteur *non nul* e' de G, $d(e') \leq d$.
52. Démontrer que la propriété $(\mathscr{R})$ est réalisée.

Section C - Première application : décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

53. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $p \in [\![1,n]\!]$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u, tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note $\mathscr{B}_{F_k}$ une base de F_k.
Soit $\mathscr{B}$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_{F_1}, \mathscr{B}_{F_2}, \ldots, \mathscr{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathscr{B}$ est une base de E.
Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$?

Dans la suite de cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E d'indice p.

54. Montrer, à l'aide de la propriété $(\mathscr{R})$, qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de u est triangulaire inférieure et telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0,1\}$, et tous les autres coefficients de T sont nuls.

Section D - Deuxième application : toute matrice carrée est semblable à sa transposée

Dans cette section, $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_n$ est M.
On se propose de montrer que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$:

$(\mathscr{S})$	il existe deux matrices symétriques V et W de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible telles que $M = VW$

55. *Cas où u est cyclique :* il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on note toujours $\mathscr{B}(e,n)$ la base $\left(e, u(e), u^2(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ de E et $A = M_{\mathscr{B}(e,n)}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}(e,n)$: il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \iddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \iddots & \iddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}(e,n)$. On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \qquad f\big(u(e)\big) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!] \qquad f\big(u^j(e)\big) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f\big(u^{n-1}(e)\big) = e$.

Calculer $u\big(f(e)\big)$, $u\Big(f\big(u(e)\big)\Big)$ et plus généralement, pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $u\Big(f\big(u^j(e)\big)\Big)$ et enfin $u\Big(f\big(u^{n-1}(e)\big)\Big)$.

56. En déduire que $AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera S_1 cette matrice AS.

57. Justifier que S est inversible ; on note $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques réelles.

58. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_n$ vers la base $\mathscr{B}(e,n)$;
vérifier que $M = PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}$ et conclure que M vérifie la propriété $(\mathscr{S})$.

59. Montrer alors que ${}^tM$ et M sont semblables ; plus précisément, déterminer une matrice symétrique réelle inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.

60. Cas général : en s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathscr{R})$, montrer que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.

❄ ❄ ❄
❄ ❄
❄

Code sujet : 282

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC – HEC PARIS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Jeudi 27 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont notés $(A)_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a. Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|V\|$ sa norme euclidienne.
- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance, si elle existe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k de X, s'il existe, le réel $\mathbb{E}(X^k)$. On le note $m_k(X)$ et on convient que $m_0(X) = 1$
- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables de classe C^2 et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on notera $\nabla g(x_1, x_2)$ et $\nabla^2 g(x_1, x_2)$, respectivement, le gradient et la matrice hessienne de g au point (x_1, x_2).

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction puissance α sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $f_{|J}$, la restriction de f à J :

$$f_{|J} : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'énoncé comporte trois grandes parties I, II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes.
Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Partie I : questions préliminaires, problème des moments

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

1. Montrer que dans les cas suivants, la variable X admet des moments de tout ordre et déterminer ces moments :
   (a) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite, on se donne une suite de réels $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et un intervalle J de $\mathbb{R}$.

On considère le problème suivant appelé **problème des moments** et qu'on note $\mathscr{M}^\star(J)$:

Trouver une variable aléatoire réelle X vérifiant les trois conditions suivantes :

- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et $m_k(X) = u_k$.*
- *X admet une densité f, avec $f_{|J}$ continue sur J.*
- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash J$, $f(x) = 0$.

Si X est une solution de ce problème et f une densité de X vérifiant les points précédents, on dit que f est une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^\star(J)$.

Dans ce problème, on s'intéressera uniquement à deux cas :
- Le cas $J = \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, $\mathscr{M}^\star(J)$ est appelé le *problème de Stieltjes.*
- Le cas $J = [0, 1]$. Dans ce cas, $\mathscr{M}^\star(J)$ est appelé le *problème de Hausdorff.*

Partie II : le problème de Stieltjes

II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On suppose dans cette partie II.1 que le problème $\mathscr{M}^\star(J)$ avec $J = \mathbb{R}_+$ admet une solution notée X. On note f une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^\star(J)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note H_n et G_n les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \qquad (H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}, \qquad (G_n)_{i,j} = u_{i+j-1}$$

2. Ecrire explicitement H_3 et G_3 en fonction de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $W = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$ {}^tWH_nW = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}, \tag{1} $$

puis que

$$ {}^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2} $$

où P est la fonction polynomiale définie par

$$ P(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. $$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de H_n sont positives.

5. Montrer de même que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de G_n sont positives.

6. On suppose uniquement dans cette question que $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}$.

   Montrer que nécessairement $u_3 \geqslant \dfrac{2}{9}$.

7. On suppose dans cette question seulement qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\exp(t^\theta)\,\mathrm{d}t$ converge.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

   $$ t^n \exp(-t^\theta) \leqslant \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right). $$

   (b) En déduire que la série de terme général $(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}$ diverge.

8. **Python**

   On se donne un entier naturel N. On pose : $N^* = 1 + \left\lfloor \dfrac{N}{2} \right\rfloor$.

   On voudrait vérifier numériquement que la condition suivante, portant sur les $N+1$ premiers termes $u_0, \cdots, u_N$, est vérifiée :

   $$ \forall n \in [\![0; N^*]\!], \quad \text{toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives} \tag{CS_N} $$

   On rappelle que cette condition est nécessaire d'après la question 4 ci-dessus.

   La fonction `test_stieltjes()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` (de type array) comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \cdots, u_N$.
   Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_stieltjes()` renvoie la valeur 1 si la condition (CS_N) est satisfaite et renvoie la valeur 0 sinon.
   On notera que la fonction `eigvalsh()` de la librairie `numpy.linalg` renvoie un tableau unidimensionnel contenant les valeurs propres d'une matrice symétrique donnée en paramètre.
   On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
    m = 1+ N // 2
    H = np.zeros((m, m))
    for n in range(1, m+1): # taille de la matrice H_n
      for i in range(_______, ________):
        H[i, n-1] = U[i+n-1]
        H[n-1, i] = ___________________________
      valp = al.eigvalsh(H)

      for k in range(0, _________):
        if (___________________):
             return ____
    return ____
```

II.2) Non unicité des solutions

On définit la fonction $g\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \exp(-x^{1/4})\sin(x^{1/4}) \text{ pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

existent (on convient que $t^0 = 1$).
On note dans la suite

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t, \quad T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad V_n = \begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),$$

10. Montrer que $S_0 = \dfrac{1}{2}$. On admet que $T_0 = S_0$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= (n+1)T_n, && (3)\\ S_{n+1} - T_{n+1} &= (n+1)S_n. && (4) \end{aligned}$$

12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$V_{n+1} = (n+1)MV_n, \quad \text{où } M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n!\,M^n V_0.$$

14. Calculer M^4 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{4n+3} = 0.$$

15. En utilisant le changement de variable $x = t^4$ dont on justifiera la validité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^n g(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

16. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2 positives, distinctes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^n g_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

existent et sont égales.

17. Que peut-on conclure par rapport au problème $\mathscr{M}^\star(J)$ quand $J = [0, +\infty[$?

Partie III : le problème de Hausdorff

Dans toute cette partie, on suppose que $J = [0, 1]$.

III.1) Une condition nécessaire d'existence

On suppose dans ce paragraphe III.1 que le problème $\mathscr{M}^\star(J)$ avec $J = [0, 1]$ admet une solution notée à nouveau X. On note f une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^\star(J)$.

18. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

19. Plus généralement, montrer que pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0. \tag{7}$$

20. On suppose dans cette question seulement que $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}$.
Montrer que $u_3 \in \left]\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right[$.

21. Revenons au cas général. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ est convergente.
Cette affirmation reste-t-elle vraie quand $\alpha = 0$?

III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

Revenons à la condition (7) ci-dessus. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0; n]\!]$ on pose

$$\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}. \tag{8}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la condition (7) est vraie à l'ordre n si

$$\forall j \in [\![0; n]\!], \quad \Delta_{n,j} > 0. \tag{CH_n}$$

22. Exprimer $\Delta_{n,0}$ en fonction de u_n.

23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0; n]\!]$ on a

$$\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} \tag{9}$$

24. **Python**

La fonction `test_hausdorff()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` (de type array) comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \cdots, u_N$. Ici N est calculé à partir de la taille de U en utilisant la fonction `len()` qui renvoie la taille du tableau.
Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hausdorff()` renvoie un couple comportant les deux éléments suivants :

→ un entier `info` tel que :

— `info = -1` si la condition (CH_n) est satisfaite pour tout $n \in [\![0; N]\!]$.

— `info` est égal au plus petit entier $n \in [\![0; N]\!]$ pour lequel CH_n n'est pas satisfaite sinon.

→ un tableau bidimensionnel `Delta` de taille $(N+1)\times(N+1)$ comportant les coefficients $\Delta_{n,j}$ pour $n \in [\![0; N]\!]$ et $j \in [\![0; N]\!]$ (on pose $\Delta_{n,j} = 0$ si $j > n$).

On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
  N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
  Delta  = np.zeros((N+1, N+1))
  info = -1
  for k in range(____,________):
       Delta[k, 0] = U[__]
       if ((_________________________) and (info == -1 )):
            info = k
       for j in range(______ , _________):
           Delta[k, j] = _______________________________________
           if ( (_______________________) and (________________)):
                  info = ______
  return (info, Delta)
```

25. **Python**

```
def test3():
  N = 10
  U = np.zeros(N+1)
  for k in range(0, N+1):
    U[k] = 1.0/(k+1) # correspond a une loi uniforme
  V=test_hausdorff(U)
  U[3] = 0.16
  W=test_hausdorff(U)
  return V,W
```

On tape dans la console

```
>>> V,W=test3()
```

Quelles seront les valeurs de $V[0]$ et $W[0]$ retournées ?

III.3) Unicité de solutions à densité de classe C^1.

On suppose dans ce paragraphe que X_1 et X_2 sont solutions du problème $\mathscr{M}^*(J)$ avec $J = [0, 1]$. On note f_1 et f_2 des densités de X_1 et X_2 respectivement adaptées au problème $\mathscr{M}^*(J)$. On suppose les restrictions de f_1 et f_2 sur $[0,1]$ de classe C^1 sur $[0,1]$. On pose $h = f_2 - f_1$ et on considère la suite de fonctions polynomiales $(\widehat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :

$$\widehat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

26. Montrer qu'il existe une constante réelle $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\quad |h(x) - h(y)| \leqslant K|x-y|.$$

27. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés tous les deux. Soit Y_n une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. On pose

$$Z_n = \frac{Y_n}{n}.$$

 (a) Montrer que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leqslant K\,\mathbb{E}(|Z_n - x|).$$

 (b) En déduire que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leqslant K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.$$

28. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|h(x) - \widehat{h}_n(x)| \leqslant K\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^1 \widehat{h}_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

30. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}\int_0^1 |h(x)|\,\mathrm{d}x.$$

31. En déduire que $f_1 = f_2$. Conclure.

III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit trois fonctions

$$R_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 t^k \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\mathrm{d}t \end{array} \qquad F_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \dfrac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} \end{array}.$$

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \ln(R_0(\alpha_1,\alpha_2)) - u_1\alpha_1 - u_2\alpha_2 \end{array}$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction R_k est continue sur $\mathbb{R}^2$.

32. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in [-1,1], 0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant Cx^2.$$

33. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point et que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) \quad . \tag{10}$$

On admet que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable en tout point et que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_2 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2) \quad . \tag{11}$$

(b) Pour tout $i \in \{1, 2\}$, en déduire l'identité,

$$\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i. \tag{12}$$

(c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 \left(t^i - F_i(\alpha_1, \alpha_2)\right)\left(t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)\right) \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) \mathrm{d}t \ .$$

34. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Exprimer $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ en fonction des dérivées partielles des $F_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $k \geqslant 0$.

(b) En déduire que pour tout $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $v \neq 0$ on a

$${}^t v \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0.$$

(c) En déduire que les valeurs propres de la matrice $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ sont strictement positives.

(d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une variable aléatoire X solution de $\mathscr{M}^*(J)$ et de densité f adaptée à $\mathscr{M}^*(J)$ telle que

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que G admet alors un minimum (local) en (α_1, α_2).

FIN