



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Le problème proposé a pour but la démonstration d'un théorème relatif aux contractions d'un espace de Banach et l'étude, grâce à ce théorème, d'une équation fonctionnelle.

Si X et Y sont des ensembles, Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y .

Si X est un ensemble non vide, $\mathcal{N}_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

I. Convergence uniforme dans $C([0,1], \mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, pour $\mathcal{N}_\infty$, de $C([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit f la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que f est bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$.

3. Justifier que $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1], \mathbb{R})$ définie par : $u_n(x) = e^{x^n}$ pour tout $x \in [0,1]$.

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$?

5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1], \mathbb{R})$ définie par : $v_n(x) = \int_0^x e^{t^n} dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers un élément v de $C([0,1], \mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

II. Théorème du point fixe de Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, soit A un sous-ensemble fermé non vide de E et soit $T \in A^A$ vérifiant : il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in A^2$ (on dit que T est contractante ou encore que T est une contraction).

1. Soit $(x, y) \in A^2$ tel que : $T(x) = x, T(y) = y$. Montrer que $x = y$.

2. Soit $a \in A$, on définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $a_0 = a, a_{n+1} = T(a_n)$.

2.1 Montrer que : $\|a_{n+1} - a_n\| \leq \alpha^n \|a_1 - a_0\|$. En déduire que si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_1 - a_0\| \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{n+i} \right).$$

2.2 Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est élément de A .

2.3 Montrer que T possède un unique point fixe qui est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On établit ainsi le théorème du point fixe de Banach « Toute contraction T d'un fermé non vide A d'un espace de Banach possède un point fixe unique, de plus si $a \in A$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a, a_{n+1} = T(a_n)$, converge vers ce point fixe ».

3. On suppose que $A = E$, soit alors, $U \in E^E$ définie par : $U(x) = x + T(x)$.

3.1 Montrer que U est une bijection continue de E sur E .

3.2 Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|x - y\|$ (U est donc un homéomorphisme de E sur E).

4. Soit $\mathcal{L}(E) = \{V \in E^E : (V \text{ linéaire}) \text{ et } (V \text{ continue})\}$, on note encore $\|V\| = \sup\{\|V(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ la norme subordonnée de V ($V \in \mathcal{L}(E)$) ; soit I l'identité de E .

4.1 Soit $V \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|V\| < 1$, montrer que V est contractante.

4.2 Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E)$ et soit $V \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\|V_n\| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|V\| < 1, \|V_n - V\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $y \in E$ alors, d'après 3. $I + V_n$ et $I + V$ sont des isomorphismes de E ; on peut donc définir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((I + V_n)^{-1}(y) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x = (I + V)^{-1}(y)$, montrer que :

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(on aura intérêt à écrire : $V(x) - V_n(x_n) = (V(x) - V_n(x)) + (V_n(x) - V_n(x_n))$).

III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dira que φ est de type $\mathcal{U}$ si :

φ est continue et, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait :

$$|\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z')| \leq r|z - z'| \text{ pour tout } (x, y, z, z') \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que s'il existe $(\Psi, M) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$ tel que : $\varphi = \Psi|_{[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}}$ et

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial z}(x, y, z) \right| \leq M \text{ pour tout } (x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}, \text{ alors } \varphi \text{ est de type } \mathcal{U}.$$

2. On suppose que φ est de type $\mathcal{U}$.

2.1 Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $(y \rightarrow \varphi(x, y, u(y))) \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2.2 Montrer que l'on peut définir $T_\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{[0,1]}$ par :

$$(T_\varphi(u))(x) = \int_0^1 \varphi(x, y, u(y)) dy.$$

Montrer que, pour tout $u \in C([0,1], \mathbb{R})$, $T_\varphi(u) \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2.3 Montrer que l'on a :

$$\mathcal{N}_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq r \mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2), \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in (C([0,1], \mathbb{R}))^2.$$

2.4 On définit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_{(\varphi, \lambda)} : C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ par : $S_{(\varphi, \lambda)}(u) = u + \lambda T_\varphi(u)$.

On suppose $r > 0$, montrer que l'on a : $\lambda \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[\Rightarrow S_{(\varphi, \lambda)}$ est un homéomorphisme de $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ sur lui même.

3. Soit $\mu \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x, y, z) = \mu(x, y)z$; on supposera $\mu \neq 0$.

3.1 Montrer que φ est de type $\mathcal{U}$ et que si $\lambda \in]-1/\mathcal{N}_\infty(\mu), 1/\mathcal{N}_\infty(\mu)[$, on a : $\mathcal{S}_{(\varphi, \lambda)}$ est un isomorphisme de $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$, sur lui même.

3.2 Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C([0,1]^2, \mathbb{R})$, telle que : $\mathcal{N}_\infty(\mu_n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme subordonnée, associée à $\mathcal{N}_\infty$, définie sur $\mathcal{L}(C([0,1], \mathbb{R}))$. Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de $C([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi_n(x, y, z) = \mu_n(x, y)z$ montrer que : $\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

IV. Etude d'une application

On considère l'équation intégrale de Fredholm : (E) $w(x) = x + \int_0^1 \sin(xy) w(y) dy$.

Une solution de (E) (s'il en existe) est donc un élément w de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $w(x) = x + \int_0^1 \sin(xy) w(y) dy$. On s'intéresse à la résolution de (E) dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant III) que (E) possède une solution unique $w \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2. Soit, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de $C([0,1]^2, \mathbb{R})$ définie par : $v_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} (xy)^{2i-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'équation intégrale (E_n) par : $w_n(x) = x + \int_0^1 v_n(x, y) w_n(y) dy$.

2.1 Montrer que (E_1) possède une solution unique $w_1 \in C([0,1], \mathbb{R})$ et expliciter w_1 .

2.2 Montrer que, pour tout $n \geq 2$, la résolution de (E_n) se ramène à celle d'un système linéaire que l'on explicitera.

2.3 Montrer, en utilisant III.3) que, si $n \geq 2$, (E_n) possède une solution unique $w_n \in C([0,1], \mathbb{R})$. (on aura intérêt à montrer que : $-1 \in]-1/\mathcal{N}_\infty(v_n), 1/\mathcal{N}_\infty(v_n)[$ si $n \geq 2$).

2.4 Montrer que $\mathcal{N}_\infty(w_n - w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Fin de l'énoncé



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-018 du 01.02.99.

Préambule

Dans ce problème, on se propose d'étudier des familles de matrices que l'on rencontre lors de la résolution numérique de problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles de type elliptique par des méthodes de différences finies.

Matrices irréductibles - Matrices à diagonales faiblement ou fortement dominantes.

Notations :

Dans tout le problème, on suppose que N est un entier supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles à N lignes et N colonnes, $\mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à N lignes et P colonnes.

I_N est la matrice unité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques à N lignes et N colonnes. Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $(A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A)$.

Si A appartient à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ on pourra écrire $A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, N$.

a_{ij} étant l'élément de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de A .

$(u, v) \mapsto (u | v)_N$ de $(\mathbb{R}^N)^2$ dans $\mathbb{R}$ désigne le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^N$. On identifiera $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on écrira par exemple $(Av | v)_N$ le produit scalaire des éléments de $\mathbb{R}^N$ correspondants : on a donc, en raison de l'identification $(Av | v)_N = {}^t v A v$.

W_N est l'ensemble des N premiers entiers strictement positifs.

Rappel : une matrice réelle symétrique est dite positive (définie positive) si ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

Tournez la page S.V.P.

Définition 1 :

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. On appellera matrice de permutation P_σ associée à σ , la matrice P_σ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$. Alors $P_\sigma = \left(\delta_{i\sigma(j)} \right)$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Définition 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ est irréductible si pour tout couple (S, T) de parties de W_N telles que $S \cap T = \emptyset$ et $S \cup T = W_N$, il existe un élément $a_{ij} \neq 0$ avec $i \in S$ et $j \in T$.

Dans le cas contraire on dira que A est réductible.

Définition 3 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})$ est à diagonale faiblement dominante si :

$$\left| \begin{array}{l} 1) \text{ pour tout indice } i \in W_N, |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \\ 2) \text{ pour au moins un indice } i \in W_N, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \end{array} \right|$$

Définition 4 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est à diagonale fortement dominante si, pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$

Première partie**Question 1-1**

a) Soient σ et σ' deux permutations de l'ensemble W_N .

a.1) Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.

a.2) Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

a.3) Montrer que $P_\sigma^{-1} = {}^t P_\sigma$.

3b) Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $P_\sigma \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice associée à la permutation σ . On définit $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$. Exprimer b_{ij} à l'aide de σ .

c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$$

où F et H sont des matrices appartenant respectivement à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$ et O une matrice dont tous les éléments sont nuls.

Question 1-2

a) Soit $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $C = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$ où F et H appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-p}(\mathbb{R})$ et sont inversibles. Résoudre le système linéaire $CX = U$ où $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est la matrice des inconnues et $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est donnée. On utilisera pour cela une décomposition convenable de X et de U en blocs $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

b) On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est réductible. Proposer une méthode de résolution du système $AX = U$.

Question 1-3

On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

(P) pour tout couple (i, j) d'indices distincts de W_N , $a_{ij} \neq 0$ ou alors il existe un entier s et des indices $i_1, i_2, \dots, i_s$ tels que le produit $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j}$ soit non nul.

a) Etablir que la condition est suffisante.

b) On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible. Pour chaque indice $i \in W_N$, on définit X_i comme l'ensemble des indices j de W_N tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) j \neq i \\ 2) \text{ soit } a_{ij} \neq 0 \\ \quad \text{soit il existe } i_1, \dots, i_s \text{ tels que le produit } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j} \text{ soit différent de 0.} \end{array} \right.$$

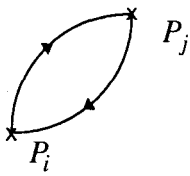
Montrer que $X_i = W_N \setminus \{i\}$ et en déduire que la condition est nécessaire.

Tournez la page S.V.P.

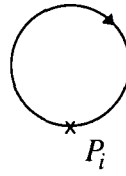
Question 1-4

Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement.

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ et $\{P_i \mid i \in W\}$ un ensemble de N points distincts du plan. Pour chaque couple $(i, j) \in (W_N)^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$, on trace une flèche allant du point P_i vers le point P_j . Si a_{ij} et a_{ji} sont non nuls, il y aura une flèche du point P_i vers le point P_j et une autre de P_j vers P_i . Si $a_{ii} \neq 0$ on pourra tracer une boucle allant de P_i vers lui-même.



$a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$



$a_{ii} \neq 0$

On associe ainsi à chaque matrice ce que l'on appelle un graphe orienté.

En étudiant les graphes associés aux deux matrices suivantes :

$$A_1 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donner une interprétation graphique du caractère réductible ou irréductible de chacune d'elles.

Deuxième partie

Question 2-1

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ à diagonale fortement dominante ; soit $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = 0$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$; soit i , un indice tel que $|u_i| = \max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$. En considérant la i -ème ligne du produit AU montrer que l'on a nécessairement $U = 0$. Que peut-on en déduire pour $\det A$?

Question 2-2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible et à diagonale faiblement dominante.

a) Montrer qu'alors pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > 0$.

- b) Montrer que $\det A \neq 0$. Pour cela, on raisonnera comme dans la question 2-1 et on montrera d'abord que si $AU = 0$, tous les éléments de la matrice colonne U sont nécessairement égaux en valeur absolue.

Question 2-3

- a) Si $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une matrice dont les éléments diagonaux sont ≥ 0 et si, de plus, elle est à diagonale faiblement dominante, montrer que toutes les valeurs propres de A sont ≥ 0 .
- b) Si, de plus, A est irréductible ou inversible, on montrera que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Troisième partie

Définition 5 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une L -matrice si :

- 1) pour tout indice $i \in W_N$, on a $a_{ii} > 0$
- 2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 6 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S -matrice si :

- 1) A est définie positive,
- 2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 7 :

Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une M -matrice si :

- 1) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$,
- 2) A est inversible,
- 3) tous les éléments de A^{-1} sont ≥ 0 .

Question 3-1

- a) Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ définie positive, montrer qu'alors $a_{ii} > 0$ pour tout indice $i \in W_N$. En déduire que $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S -matrice si et seulement si A est une L -matrice définie positive.
- b) Montrer que toute M -matrice est une L -matrice.

c) Montrer que si $A \in S_N(\mathbb{R})$ est une L -matrice

1) irréductible,

2) à diagonale faiblement dominante,

alors A est une S -matrice.

Question 3-2

Le spectre de Q est, par définition, l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de Q .
 $Sp(Q) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(Q - \lambda I_N) = 0\}$. On appelle alors rayon spectral de Q , $S(Q) = \max_{\lambda \in Sp(Q)} |\lambda|$.

a) Si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, montrer que la série $\sum_{k \geq 0} Q^k$ est convergente si et seulement si $S(Q) < 1$.

On admettra l'équivalence : $Q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow S(Q) < 1$.

Dans toute la suite de la question 3-2, on considère une L -matrice A d'ordre N et D la matrice diagonale ayant la même diagonale que A , donc définie par :

Pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $d_{ij} = 0$
 Pour tout indice $i \in W_N$, on a $d_{ii} = a_{ii}$

Soit $C = (c_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, telle que $A = D - C$ et soit $B = D^{-1}C$ (on justifiera l'existence de D^{-1}).

On suppose que $S(B) < 1$.

b) Justifier le fait que $I_N - B$ est inversible et montrer que tous les éléments de $(I_N - B)^{-1}$ sont positifs ou nuls.

c) Montrer que A est inversible et que A est une M -matrice.

Question 3-3

Si D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, on définit $D^{1/2}$ et $D^{-1/2}$ matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont respectivement $\sqrt{d_{ii}}$ et $\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}}$ pour tout indice $i \in W_N$.

Soit A une M -matrice.

On définit D , C , B comme à la question précédente et $\hat{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{A} = D^{-1/2} A D^{-1/2} = I_N - D^{-1/2} C D^{-1/2}$ et $\hat{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{B} = D^{1/2} B D^{-1/2}$.

a) Montrer que $\hat{A}$ est une M -matrice et que :

$$\left(\hat{A}\right)^{-1} = \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} = I_N + \hat{B} + \left(\hat{B}\right)^2 + \dots + \left(\hat{B}\right)^m + \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} \left(\hat{B}\right)^{m+1} \quad \text{pour tout entier } m \text{ strictement positif.}$$

b) Soit $G_m \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par : $G_m = I_N + \hat{B} + \dots + \left(\hat{B}\right)^m$. Montrer que tous les éléments de G_m sont positifs et majorés indépendamment de m .

c) En déduire que $S(B) < 1$.

Question 3-4

Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ une S -matrice.

On utilise les mêmes notations qu'en 3-2 et 3-3.

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = (I_N - B)^{-1} D^{-1}$.

b) On veut maintenant montrer que $S(B) < 1$ ce qui suffira pour établir que toute S -matrice est une M -matrice.

b1) Montrer que $\hat{A}$ est définie positive.

b2) En supposant $S(B) \geq 1$, montrer que l'on est conduit à une contradiction et que donc toute S -matrice est une M -matrice. On admettra que si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ a tous ses éléments positifs ou nuls, alors, il existe $\mu \in Sp(Q)$ tel que $\mu = S(Q)$.

Fin de l'énoncé.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

But du problème

Dans la partie I, on étudie les solutions d'une équation différentielle

$$(E) \quad y'' - \alpha y = f(x),$$

solutions vérifiant en outre des conditions aux limites.

Dans la partie II, on introduit une fonction K de deux variables, fonction qui est définie comme somme d'une série.

Dans la partie III, à chaque fonction f continue impaire 2π -périodique sur $\mathbf{R}$, on associe une fonction h grâce à la relation

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) f(t) dt$$

et on étudie quelques propriétés de la fonction ainsi obtenue.

PARTIE I

Lorsque $p \in \mathbf{N}$, on désigne par $\mathcal{L}^p([0, \pi], \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{L}^p$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$.

Lorsque $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{L}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - \alpha y = f(x).$$

On désigne par :

- $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions réelles sur l'intervalle $[0, \pi]$ de l'équation différentielle (E) ;
- $\mathcal{S}^0(E)$ l'ensemble des fonctions F appartenant à $\mathcal{S}(E)$ et vérifiant en outre :

$$F(0) = F(\pi) = 0.$$

I.1/ On suppose, dans cette question, que f est la fonction nulle.

I.1.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ lorsque $\alpha = 0$.

Tournez la page S.V.P.

I.1.2/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ (selon la valeur de $\omega \in \mathbf{R}_+^*$)

I.1.2.1/ lorsque $\alpha = \omega^2$,

I.1.2.2/ lorsque $\alpha = -\omega^2$.

I.2./ On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$.

I.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$

I.2.1.1/ lorsque $f(x) = \cos x$,

I.2.1.2/ lorsque $f(x) = \sin(nx)$ (où n désigne un entier naturel non nul fixé).

I.2.2/ On suppose que $f(x) = |\cos x|$.

I.2.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}(E)$.

I.2.2.2/ Montrer que $\mathcal{S}^0(E)$ contient un seul élément, (seule fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi]$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$; $F''(x) = |\cos x|$ et $F(0) = F(\pi) = 0$) ; expliciter $F(x)$ et indiquer l'allure de son graphe.

I.3/ On suppose toujours que $\alpha = 0$ et on désigne par f une fonction quelconque appartenant à $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$.

Montrer que $F \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait :

$$F(x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du + Ax + B.$$

En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ l'ensemble $\mathcal{S}^0(E)$ contient un seul élément que l'on notera F_1 .

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ l'application de $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ dans lui même qui à f associe l'élément F_1 , unique solution sur l'intervalle $[0, \pi]$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = f(x) \\ \text{vérifiant en outre } y(0) = y(\pi) = 0.$$

I.4/ Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$.

I.5/ L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

I.6/ Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ .

I.7/ Pour tout $x \in [0, \pi]$ on désigne par T_x l'ensemble des couples $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ tels que $0 \leq t \leq u \leq x$.

I.7.1/ Représenter l'ensemble T_x dans le plan euclidien pour un x fixé, ($0 < x < \pi$).

I.7.2/ Justifier les égalités suivantes, pour $x \in [0, \pi]$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$:

$$\iint_{T_x} f(t) du dt = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du = \int_0^x (x-t) f(t) dt.$$

I.7.3/ Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ et $F_1 = \varphi(f)$.

I.7.3.1/ Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbf{R}$ (β que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt + \beta x \int_0^\pi (\pi-t) f(t) dt$.

I.7.3.2/ En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ (γ que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0, \pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \gamma \left[\int_0^x t(\pi-x) f(t) dt + \int_x^\pi x(\pi-t) f(t) dt \right]$.

PARTIE II.

Etude d'une fonction de deux variables

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on note $K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(ny)}{n^2}$, lorsque la série converge.

II.1/ Montrer que la fonction K est définie sur $\mathbf{R}^2$.

II.2/ Soit y un réel fixé, étudier la continuité de l'application $x \mapsto K(x, y)$.

II.3/ Développement en série de Fourier d'une fonction E_x .

On considère un nombre réel x fixé, $x \in [0, \pi]$ et on désigne par E_x l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ 2π -périodique et impaire, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$E_x(t) = t(\pi-x) \text{ lorsque } 0 \leq t \leq x$$

et

$$E_x(t) = x(\pi-t) \text{ lorsque } x \leq t \leq \pi.$$

II.3.1/ Indiquer l'allure du graphe de $t \mapsto E_x(t)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (pour un x fixé, $x \in]0, \pi[$) ; justifier la convergence de la série de Fourier réelle de E_x et préciser sa somme.

(Rappel : la série de Fourier réelle de E_x est : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$)

$$\text{où } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) \cos(nt) dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) \sin(nt) dt$$

sont les coefficients de Fourier réels de E_x).

II.3.2/ Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction E_x .

II.3.3/ Exprimer $K(x, t)$ en fonction de $E_x(t)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, \pi]$.

II.4/ On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$:

le carré C ensemble des couples $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$,

le triangle U ensemble des couples $(x, t) \in C$ tels que $0 < t < x < \pi$,

le triangle $\bar{U}$ ensemble des couples $(x, t) \in C$ tels que $0 \leq t \leq x \leq \pi$.

II.4.1/ Déduire de II.3.3 l'existence d'un minimum et d'un maximum pour la fonction K sur le carré C et préciser la valeur du minimum.

II.4.2/ La fonction K possède-t-elle un maximum relatif sur le triangle U ?

Tournez la page S.V.P.

II.4.3/ Etudier les extremums de la fonction K sur l'ensemble $\overline{U} \setminus U$ (bords du triangle de $\overline{U}$).

II.4.4/ En déduire la valeur du maximum de K sur le carré C .

II.4.5/ Si $\delta \in \mathbf{R}$ on note Γ_δ l'ensemble des $(x,t) \in C$ tels que $K(x,t) = \delta$,

(Γ_δ est la ligne de niveau δ).

Représenter (sur un même croquis) l'ensemble C , Γ_0 et la ligne Γ_δ passant par le point $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

PARTIE III

Dans cette partie on désigne par :

- $\mathcal{J}_{2\pi}$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications continues, impaires 2π -périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- K la fonction introduite dans la partie II $\left(K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(ny)}{n^2} \right)$.

A toute fonction f appartenant à $\mathcal{J}_{2\pi}$ on associe la fonction $h = \psi(f)$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t) f(t) dt.$$

III.1/ Vérifier que si $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ et si $h = \psi(f)$ alors la fonction h est impaire, 2π -périodique.

Justifier l'égalité

$$h(x) = 2 \int_0^{\pi} K(x, t) f(t) dt.$$

III.2/ Déduire de II.3.3 et de la partie I que si $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ alors les fonctions $h = \psi(f)$ et $F_1 = \varphi(f)$ sont proportionnelles sur $[0, \pi]$; en déduire que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[$ et qu'elle vérifie les relations :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in]0, \pi[\\ h''(x) = -\pi f(x) \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases}$$

III.3/ En utilisant (en particulier) l'impairité de f et de h , montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite de cette partie, pour chaque application g 2π -périodique, continue par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on désigne par $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier réels de g :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N} : a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt.$$

Soient désormais $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ et $h = \psi(f)$.

III.4/ Etablir une relation entre $b_n(h)$ et $b_n(h'')$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

III.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (b_n(f))^2$ (respectivement $\sum_{n \geq 1} \frac{(b_n(f))^2}{n^4}$) et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n(f))^2$ (respectivement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b_n(f))^2}{n^4}$) en fonction d'une intégrale.

III.6/ Etablir l'inégalité :

$$\int_0^\pi (h(x))^2 dx \leq \pi^2 \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

III.7/ Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / -\pi \leq x \leq \pi \text{ et } -\pi \leq y \leq \pi\}$. On considère l'intégrale double :

$$J(f) = \iint_D K(x, y) f(x) f(y) dx dy.$$

III.7.1/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x) h(x) dx$.

III.7.2/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi (h'(x))^2 dx$.

III.7.3/ Montrer que :

$$0 \leq J(f) \leq 2\pi \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

III.7.4/ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{J}_{2\pi}$ telles que :

$$J(f) = 2\pi \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Une feuille de papier millimétré devra être distribuée avec le sujet.

Le problème est consacré à l'étude des courbes dites "courbes de Bézier", du nom de l'ingénieur français Bézier, l'un des créateurs, dans les années 1960, de cet outil très répandu aujourd'hui dans l'industrie automobile et plus généralement dans le vaste domaine d'applications que constitue la conception assistée par ordinateurs (CAO).

Notations utilisées dans le problème et quelques rappels

$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ le corps des réels. Les notations usuelles en découlent pour les ensembles construits à partir de ceux-là. Par exemple, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, etc.

Dans tout le problème, le plan vectoriel réel $\mathbf{R}^2$ est muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{i} = (1, 0) \\ \vec{j} = (0, 1) \end{cases}$$

Chaque vecteur $\vec{u} \in \mathbf{R}^2$ s'identifie ainsi au couple de ses coordonnées dans la base canonique.

Un point de vue différent mais cohérent avec ce qui précède permet que les éléments de $\mathbf{R}^2$ soient parfois appelés *points*, l'ensemble $\mathbf{R}^2$ étant alors muni de sa structure de plan affine et repéré par le repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où $O = (0, 0)$. Tout point du plan s'identifie alors au couple de ses coordonnées dans ce repère. On pourra ainsi écrire simplement :

$$M = (x, y)$$

pour exprimer que les coordonnées du point M dans le repère canonique sont (x, y) .

Etant donné deux points M et N , on posera $N - M = \overrightarrow{MN}$. Cette écriture est cohérente avec les conventions précédentes, comme le montre la relation existante entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et celles des points M et N .

De façon équivalente, on pourra écrire :

$$N = M + \overrightarrow{MN}.$$

Tournez la page S.V.P.

Plus généralement, si n désigne un entier naturel non nul, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de n scalaires et $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de n points, l'expression $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$ désignera le point (ou, selon le contexte, le vecteur) dont les coordonnées sont données conformément à cette expression.

En particulier, si le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifie $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, l'expression $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$ désigne le barycentre des points $(P_1, \dots, P_n)$ affectés respectivement des poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Le candidat remarquera qu'avec ces conventions, la propriété d'associativité du barycentre s'exprime d'une façon très simple et naturelle.

Pour tout entier n , on note L_n l'ensemble des n -uplets de points du plan.

Autrement dit, $L_n = (\mathbb{R}^2)^n$.

On ne fera pas de différence entre L_1 et le plan $\mathbb{R}^2$.

Par ailleurs, on note A l'ensemble des courbes paramétrées c de la forme

$$\begin{aligned} c : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

avec x et y fonctions continues du paramètre $t \in [0,1]$.

On définit par récurrence une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications en posant :

1) B_0 est l'application de L_1 dans A qui à tout point $P \in L_1$ associe la courbe paramétrée constante (de trajectoire réduite à un point)

$$\left\| \begin{aligned} B_0(P) : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow P \end{aligned} \right.$$

2) Pour tout $n \geq 1$, B_n est l'unique application de l'ensemble L_{n+1} dans l'ensemble A qui satisfasse la relation

$$\left\| \begin{aligned} &\forall (P_0, P_1, \dots, P_n) \in L_{n+1} \forall t \in [0,1] \\ B_n(P_0, P_1, \dots, P_n)(t) &= (1-t)B_{n-1}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})(t) + tB_{n-1}(P_1, \dots, P_n)(t) \end{aligned} \right.$$

L'arc paramétré

$$\left\| \begin{aligned} B_n(P_0, \dots, P_n) : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto B_n(P_0, \dots, P_n)(t) \end{aligned} \right.$$

est appelé la *courbe de Bézier associée aux $(n+1)$ pôles $P_0, P_1, \dots, P_n$* .

Afin d'alléger la notation, pour toute famille $F \in L_{n+1}$, la courbe de Bézier associée aux $(n+1)$ pôles F sera le plus souvent notée $B_{n,F}$ ou même B_F .

De façon générale, et sauf mention explicite du contraire dans l'énoncé, on ne fera pas appel aux coordonnées des points.

PARTIE I

I.1/ Cas $n = 1$.

Soit $F = (P_0, P_1) \in L_2$.

I.1.1/ Exprimer, en fonction du paramètre t et des points P_0 et P_1 , le point courant de la courbe de Bézier associée à la famille F , c'est-à-dire le point $B_F(t) = B_{1,F}(t)$.

I.1.2/ Quelle est la trajectoire de l'arc paramétré B_F ?

I.2/ Cas $n = 2$.

Soit $F = (P_0, P_1, P_2) \in L_3$.

I.2.1/ Soit, pour $i \in \{0, 1\}$, Q_i le milieu de P_i et P_{i+1} . Montrer que $B_F\left(\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de Q_0 et Q_1 .

I.2.2/ Déterminer $B_F(0)$ et $B_F(1)$.

I.2.3/ Exprimer en fonction de t le point courant $B_F(t)$ comme barycentre des trois pôles P_0 , P_1 et P_2 , avec des coefficients dont la somme fait 1.

I.2.4/ On suppose $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (0, 0)$ et $P_2 = (0, 1)$.

I.2.4.1/ Calculer $\frac{d^2(B_F(t))}{dt^2}$; en déduire la nature de la trajectoire de l'arc paramétré B_F .

I.2.4.2/ Tracer la trajectoire de B_F (on prendra $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé avec une unité de longueur de 4 cm).

PARTIE II

II.1/ On rappelle qu'une partie non vide K du plan est convexe si et seulement si

$$\forall (M, N) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)M + \lambda N \in K.$$

II.1.1/ Montrer qu'une partie non vide K du plan est convexe si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (M_1, \dots, M_n) \in K^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k \in K.$$

II.1.2/ Soit E une partie non vide du plan, et soit W un ensemble non vide de parties convexes du plan contenant E . Montrer que l'intersection de tous les convexes appartenant à W , c'est-à-dire $\bigcap_{K \in W} K$, est un convexe contenant E .

Dans la suite, pour toute partie non vide E du plan, on note $C(E)$ l'enveloppe convexe de E , c'est-à-dire l'intersection de toutes les parties convexes du plan contenant E .

II.1.3/ Soit E une partie non vide du plan. Montrer l'équivalence

$$E \text{ convexe} \Leftrightarrow E = C(E).$$

II.1.4/ Soient G et H deux parties non vides du plan. Prouver l'implication

$$(G \subset H) \Rightarrow (C(G) \subset C(H)).$$

II.1.5/ Soit E une partie non vide du plan. Montrer que

$$C(E) = \left\{ M \in \mathbf{R}^2, \exists n \in \mathbf{N}^*, \exists (M_1, \dots, M_n) \in E^n, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ et } M = \sum_{k=1}^n \lambda_k M_k \right\}$$

Dans la suite, pour tout entier naturel n et toute famille de points $F \in \mathbf{L}_n$, on notera encore $C(F)$ l'enveloppe convexe des points formant la famille F .

II.1.6/ Démontrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n et toute famille $F \in \mathbf{L}_{n+1}$, la trajectoire de $B_{n,F}$ est incluse dans $C(F)$.

II.2/

II.2.1/ Soit φ une transformation affine du plan. Démontrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n et toute famille $F \in \mathbf{L}_{n+1}$, on a

$$\forall t \in [0, 1], \varphi(B_{n,F}(t)) = B_{n,\varphi(F)}(t),$$

où $\varphi(F)$ désigne la famille obtenue en appliquant φ à chacun des points de la famille F .

II.2.2/ Soit un triangle quelconque $P_0P_1P_2$, non aplati ; en s'aidant de la question **I.2.4**, tracer à main levée la courbe de Bézier associée, et justifier le tracé. Dédurre également de la question **I.2.4** la nature de cette courbe.

PARTIE III

III.1/ Fonctions de mélange.

III.1.1/ Démontrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n il existe $n+1$ fonctions polynômes $b_{n,k}: [0,1] \rightarrow [0,1]$, de degré inférieur ou égal à n , telles que, pour toute famille $F = (P_0, \dots, P_n) \in \mathbf{L}_{n+1}$, on ait

$$B_{n,F}(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k}(t) P_k.$$

On ne cherchera pas dans cette question **III.1.1** à exprimer explicitement les fonctions $b_{n,k}$ (appelées fonctions de mélange).

Au cours de la démonstration demandée, le candidat mettra en évidence la relation entre $b_{n+1,k}$, $b_{n,k}$ et $b_{n,k-1}$ vérifiée lorsque $1 \leq k \leq n$, ainsi que la relation entre $b_{n+1,0}$ et $b_{n,0}$ et celle qui a lieu entre $b_{n+1,n+1}$ et $b_{n,n}$.

III.1.2/ Pour cette seule question, on prend $n = 3$. Déterminer les polynômes $b_{3,k}(t)$ pour $k \in \{0, \dots, 3\}$.

III.1.3/ n désigne à nouveau un entier naturel non nul quelconque. Déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, une formule simple exprimant $b_{n,k}(t)$ en fonction de t , de n et de k .

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $I_{n,k} = \int_0^1 b_{n,k}(t) dt$.

III.1.4/ Déterminer $\sum_{k=0}^n I_{n,k}$.

III.1.5/ Déterminer, en fonction de n et k , la valeur de $I_{n,k}$ (on pourra faire une intégration par parties).

III.2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = (P_0, \dots, P_n) \in \mathbf{L}_{n+1}$. On note $\tilde{F}$ la famille obtenue à partir de F en inversant l'ordre des pôles : $\tilde{F} = (P_n, P_{n-1}, \dots, P_0) \in \mathbf{L}_{n+1}$.

III.2.1/ Quelle relation a-t-on entre $B_{n,\tilde{F}}$ et $B_{n,F}$?

III.2.2/ Comparer les trajectoires respectives de $B_{n,\tilde{F}}$ et de $B_{n,F}$.

PARTIE IV

IV.1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = (P_0, \dots, P_n) \in \mathbf{L}_{n+1}$.

Soit $\mathbf{V}$ l'espace vectoriel réel des polynômes à deux variables notées S et T , de degrés partiels inférieurs ou égaux à n .

Autrement dit, les éléments de $\mathbf{V}$ sont de la forme $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} S^i T^j$, avec $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout

$(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$.

Les monômes de la forme $S^i T^j$ constituent une base de $\mathbf{V}$, dite base canonique de $\mathbf{V}$.

A tout $t \in [0, 1]$, on associe l'application linéaire $\Psi_t: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ caractérisée par l'image des vecteurs de la base canonique :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, \Psi_t(S^i T^j) = t^j P_i.$$

Par ailleurs, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) tel que $i + j \leq n$, on pose :

$$C_{i,j} = B_i(P_j, P_{j+1}, \dots, P_{j+i}).$$

IV.1.1/ Trouver un polynôme $Z \in \mathbf{V}$, dont on donnera l'expression en fonction de S et T , tel que pour tout couple d'entiers naturels (i, j) tel que $i + j \leq n$, on ait :

$$C_{i,j}(t) = \Psi_t(Z^i S^j).$$

On pourra faire une démonstration par récurrence sur i .

IV.1.2/ Utiliser le résultat précédent pour retrouver la formule de la question III.1.3.

IV.1.3/ Déterminer $B_F(0)$ et $B_F(1)$.

IV.1.4/ Soit $W \in \mathbf{V}$. Vérifier que $\frac{d}{dt} \Psi_t(W) = \Psi_t\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)$.

IV.1.5/ Exprimer le vecteur dérivé $\frac{d}{dt} B_{n,F}(t)$ à l'aide des points $C_{n-1,0}(t)$ et $C_{n-1,1}(t)$.

IV.1.6/ On suppose les pôles P_i deux à deux distincts. Déterminer la droite tangente à la trajectoire de B_F au point de paramètre $t = 0$; même question en $t = 1$.

IV.1.7/ Dérivée k -ième.

IV.1.7.1/ Z désignant le polynôme introduit à la question **IV.1.1**, déterminer, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial^k (Z^n)}{\partial T^k}$. On laissera l'expression demandée sous forme factorisée.

IV.1.7.2/ Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, exprimer en fonction des pôles le vecteur dérivé k -ième de $B_{n,F}$ en $t = 0$, c'est-à-dire le vecteur $B_{n,F}^{(k)}(0)$. Constater que ce vecteur ne dépend que des $k + 1$ premiers pôles de la famille F .

IV.2/ Dans cette question, on prend $n = 3$, $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (0, -2)$ et $P_3 = (1, 0)$.

Montrer que la courbe de Bézier associée à cette famille de pôles est symétrique par rapport à O (on pourra exploiter le résultat de la question **II.2.1**), puis tracer cette courbe.

On travaillera sur papier millimétré, avec une unité de 5 cm. Le tracé s'appuiera en particulier sur les tangentes à la courbe aux points de paramètres $t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

PARTIE V

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $(M_1, M_2, \dots, M_q)$ une famille de q points du plan et $(t_1, \dots, t_q)$ une famille de q réels deux à deux distincts pris dans l'intervalle $]0, 1[$. Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$ les coordonnées de M_k seront notées (α_k, β_k) .

Par ailleurs, soit $n \in \mathbb{N}^*$. La présente partie **V** vise à aborder le problème de la détermination d'une famille de pôles $F \in \mathbf{L}_{n+1}$ telle que la courbe de Bézier B_F s'approche au mieux des points M_k . Plus précisément, on pose

$$\left\| \begin{array}{l} g : \mathbf{L}_{n+1} \rightarrow \mathbf{R} \\ G \mapsto \sum_{k=1}^q [d(M_k, B_F(t_k))]^2 \end{array} \right\|$$

où d désigne la distance euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^2$, et l'on cherche F tel que :

$$g(F) = \min_{G \in \mathbf{L}_{n+1}} g(G).$$

Afin de travailler avec une fonction de plusieurs variables réelles, on identifie $\mathbf{L}_{n+1}$ et $\mathbf{R}^{2n+2}$ grâce à la bijection :

$$\left\| \begin{array}{l} \gamma : \mathbf{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbf{L}_{n+1} \\ (x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \mapsto ((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)) \end{array} \right\|$$

et la recherche d'un minimum pour g revient à celle d'un minimum de f , où l'on a posé :
$$f = g \circ \gamma.$$

V.1/ Montrer que f est une application de classe C^1 sur $\mathbf{R}^{2n+2}$.

V.2/ Exprimer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en fonction des variables $(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n)$, de l'indice $i \in \{0, \dots, n\}$, des données du problème et des fonctions de mélange (voir question **III.1**).

Donner de même l'expression de $\frac{\partial f}{\partial y_i}$.

V.3/ Déterminer une matrice carrée non nulle $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \{0, \dots, n\}^2}$ d'ordre $n+1$, un vecteur colonne $U = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ et un vecteur colonne $V = (v_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que si $F = ((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$ minimise la

fonction g , alors les vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vérifient les systèmes linéaires

$$\begin{cases} AX = U \\ AY = V \end{cases}$$

Bien entendu, l'expression de A , U et V ne doit faire intervenir ni les x_j ni les y_j .

CONCLUSION

Dans le cas où A est inversible, on dispose ainsi d'un procédé pour déterminer la famille F cherchée, car on peut alors démontrer par un argument topologique que cette famille F minimise effectivement la fonction g . En pratique, les choses sont en fait un peu plus complexes, car on ne dispose généralement que des points $(M_1, M_2, \dots, M_q)$ mais pas des valeurs $(t_1, \dots, t_q)$.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées et les parties I et II sont indépendantes

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour p entier supérieur ou égal à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, que l'on supposera muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot)$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ sont notés plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sont munis de leur structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n représenté par la matrice A dans une base donnée, on note $\text{Sp}(f)$ ou $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de f , χ_f ou χ_A son polynôme caractéristique et $\text{Tr}(f)$ ou $\text{Tr}(A)$ sa trace. En outre, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A , lorsque A est considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Partie I

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et M la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

a) Si A est non inversible, montrer sans recourir au déterminant, que M est non inversible.

b) Si A est inversible, on pose $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. Résoudre alors dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $XP = M$.

c) Retrouver le résultat connu : $\det M = \det A \cdot \det C$.

Dans toute la suite u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u . Si v désigne l'endomorphisme induit par u sur F , montrer que χ_v divise χ_u .

Tournez la page S.V.P.

I.3 Pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $F_u(x)$ par :

$$F_u(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], y = P(u)(x)\}$$

Montrer que $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u .

I.4 Dans cette question, on suppose que x est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel q pour lequel la famille de vecteurs $(x, u(x), \dots, u^q(x))$ est liée.

b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ une famille de nombres réels non tous nuls telle que $\sum_{j=0}^q a_j u^j(x) = 0$

et S le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $S(X) = \sum_{j=0}^q a_j X^j$. Montrer que a_q est non nul, puis que $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est une base de $F_u(x)$.

c) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, on pose $\alpha_i = \frac{a_i}{a_q}$ et on note u_0 l'endomorphisme induit par u

sur $F_u(x)$. Montrer que $\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^q \alpha_i X^i$, donner la valeur de $\chi_{u_0}(u)(x)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u .

Partie II

II.1 Vérifier les propriétés suivantes :

a) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AX \mid Y) = (X \mid {}^tAY)$

b) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(X^tY) = (X \mid Y)$

c) $\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3, (X^tY)Z = (Y \mid Z)X$

II.2 Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute la suite ce produit scalaire sera noté $((\cdot \mid \cdot))$.

II.3 A partir de cette question, r, s, l, m désignent des entiers naturels inférieurs ou égaux à n .

a) Evaluer le produit par blocs $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} (I_r \mid 0_{r,n-r})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r . Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$.

c) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X^tY$.

d) Montrer que la décomposition $A = X^tY$ de la question précédente n'est pas unique et déterminer les relations vérifiées par des matrices colonnes X, Y, Z, T telles que

$$A = X^tY = Z^tT$$

II.4 a) Soit $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(T_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille de matrices $(Z_i {}^tT_j)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ est de rang égal à rs .

b) Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de la famille de matrices $(X_i^t Y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$?

c) Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $(W_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de rangs respectifs r et s . Déterminer le rang de la famille de matrices $(V_i^t W_j)_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$.

II.5 Montrer que si les bases $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, la famille $(X_i^t Y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini en II.2.

La réciproque est-elle vraie ?

II.6 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

a) Montrer que $A^2 = (\text{Tr } A)A$.

b) Soit X et Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X^t Y$. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i) $(X|Y) = 0$.

ii) $\text{Tr } A = 0$.

iii) $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$.

iv) A est non diagonalisable.

II.7 Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et de rang 1 engendrent $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), h_{A,B}(M) = AM - MB$$

et $\bar{h}_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \bar{h}_{A,B}(M) = AM - MB$$

III.1 Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)$.

b) On considère la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note H_0 la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme h_{A_0, B_0} . Déterminer H_0 , puis $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0)$ et vérifier que :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)\}$$

c) Montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En est-il de même de H_0 ?

Soit maintenant A et B quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$.

III.2 Soit $a \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $b \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. Montrer qu'il existe $(V, W) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$ tel que :

$$AV = aV, \quad {}^tWB = b^tW \quad \text{et} \quad V^tW \quad \text{est vecteur propre de } \bar{h}_{A,B}$$

En déduire l'inclusion : $\{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} \subset \text{Sp}(\bar{h}_{A,B})$.

Tournez la page S.V.P.

III.3 Montrer que si A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de $h_{A,B}$. Calculer dans ce cas $\text{Tr}(h_{A,B})$.

III.4 On note $a_1, a_2, \dots, a_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A dans $\mathbb{C}$. En exprimant χ_A en fonction des a_i , montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

III.5 Soit $\lambda \in \text{Sp}(\bar{h}_{A,B})$ et M un vecteur propre associé.

a) Montrer que pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on a la relation :

$$P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$$

b) Montrer que $\chi_A(B + \lambda I_n)$ est non inversible.

c) En déduire en utilisant **III.2** et **III.4** : $\text{Sp}(\bar{h}_{A,B}) = \{a - b \mid (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\}$.

III.6 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.

Dans toute la suite du problème, on suppose $B = A$ et on considère l'endomorphisme $h_{A,A}$ que l'on notera plus simplement h_A .

III.7 On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A , chaque vecteur V_i étant associé à la valeur propre λ_i . Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on définit la matrice M_{ij} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, M_{ij}V_k = \delta_{jk}V_i \quad \text{où} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

a) Montrer que la famille de matrices $(M_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{N}_n^3$:

$$h_A(M_{ij})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k$$

et en déduire que les matrices M_{ij} sont des vecteurs propres de h_A .

c) On note $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A , $m_1, m_2, \dots, m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs et $J = \{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 \mid \lambda_i = \lambda_j\}$. Montrer que :

$$\text{Ker } h_A = \text{Vect}\{M_{ij} \mid (i, j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker } h_A = \sum_{i=1}^p m_i^2$$

d) Montrer que $\dim \text{Ker } h_A \geq n$ et que l'égalité a lieu si et seulement si A admet n valeurs propres distinctes.

e) On note $\mathbb{R}[A] = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists P \in \mathbb{R}[X], Q = P(A)\}$. Montrer que si les n valeurs propres de A sont distinctes, $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ constitue une base de $\mathbb{R}[A]$ et en déduire que dans ce cas $\text{Ker } h_A = \mathbb{R}[A]$.

III.8 On suppose h_A diagonalisable et on note $(P_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de h_A , chaque matrice P_{ij} étant associée à la valeur propre λ_{ij} . Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , la famille $(P_{ij}X)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que A est diagonalisable.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.
Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

PARTIE I

I.1 On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ de la variable complexe z .

I.1.1 Déterminer son rayon de convergence.

I.1.2 Calculer sa somme $S(z)$. On distinguera les cas $z = 0$ et $z \neq 0$.

I.2 Soit la fonction f de la variable complexe z définie sur $\mathbb{C} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}^*\}$ par :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \text{ pour } z \notin 2i\pi\mathbb{Z},$$

$$f(0) = 1.$$

Nous admettrons qu'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme sur son disque ouvert de convergence est égale à $f(z)$.

I.2.1 Montrer que $R \leq 2\pi$. Nous admettrons que $R = 2\pi$.

I.2.2 Calculer B_0 .

I.2.3 Donner pour tout $n \geq 1$ l'expression de B_n en fonction de $B_0, \dots, B_{n-1}$ (on pourra remarquer que pour $|z| < 2\pi$, on a l'égalité $S(z)f(z) = 1$). En déduire que B_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.4 Calculer B_1, B_2, B_3, B_4 .

I.2.5 Calculer $f(z) - f(-z)$. En déduire que $B_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Tournez la page SVP

I.3

I.3.1 Exprimer $1 + \frac{f(4z) - f(2z)}{z}$ en fonction de e^{2z} .

I.3.2 En déduire l'expression en fonction des B_n des développements en série entière des fonctions $\text{th}x$ et $\text{tan}x$ de la variable réelle x . Quel est le rayon de convergence des séries entières obtenues ?

I.4 On considère la fonction h des deux variables complexes x et z définie par :

$$h(x, z) = f(z) e^{xz}.$$

I.4.1 Montrer qu'il existe une suite $(\beta_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels telle que, pour tout couple (x, z) de nombres complexes tel que $|z| < 2\pi$, on ait :

$$(1) \quad h(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Déterminer le degré de $\beta_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer $\beta_n(0)$ en fonction de B_n .

I.4.2 Calculer $\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x)$ pour $k \geq 0$. En déduire une expression de la somme $1^k + 2^k + 3^k + \dots + N^k$ en fonction de $\beta_{k+1}(N+1)$, $\beta_{k+1}(0)$ et k .

I.4.3 Comparer $h(1-x, -z)$ à $h(x, z)$. En déduire que l'on a $\beta_n(1-x) = (-1)^n \beta_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\beta_n(1)$ en fonction de B_n .

I.4.4 On suppose dorénavant que x est réel. On admettra que l'on peut alors dériver terme à terme le deuxième membre de l'égalité (1) par rapport à x .

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta'_{n+1}(x) = (n+1)\beta_n(x)$.

En déduire que $\int_0^1 \beta_n(x) dx = 0$ pour tout $n \geq 1$.

PARTIE II

Les résultats de la question I.4 permettent de définir la suite de polynômes $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ introduite à la question I.4.1 par la récurrence suivante :

$$(i) \quad \beta_0(x) = 1,$$

$$(ii) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \beta'_{k+1}(x) = (k+1)\beta_k(x) \text{ et } \int_0^1 \beta_{k+1}(x) dx = 0.$$

Pour tout nombre entier $k \geq 0$, on note $\phi_k(x)$ la fonction 2π -périodique de la variable réelle x qui coïncide avec $\beta_k\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

II.1 Calculer $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ et $\beta_3(x)$. On vérifiera en particulier que $\beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

II.2

II.2.1 Vérifier que ϕ_2 est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2.2 Développer ϕ_2 en série de Fourier réelle.

II.3

II.3.1 Montrer que pour tout $k \geq 3$ la fonction ϕ_k est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\begin{aligned}\phi'_k &= \frac{k}{2\pi} \phi_{k-1}, \\ \phi_k^{(k-2)} &= \frac{k!}{2^{k-1} \pi^{k-2}} \phi_2.\end{aligned}$$

II.3.2 En déduire le développement en série de Fourier réelle de ϕ_{2p} pour p entier supérieur ou égal à 1.

II.3.3 Exprimer, pour p entier supérieur ou égal à 1, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de $\beta_{2p}(0)$ et p .

PARTIE III

On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$, où x est un nombre réel.

III.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 1$.

III.2 Montrer que la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

III.3 On suppose x fixé, strictement supérieur à 1.

III.3.1 Vérifier que pour tout $t > 0$ on peut écrire $\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}$.

III.3.2 Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt$.

III.3.3 Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma_n(x)$ en fonction de n , x et $\Gamma(x)$.

III.3.4 En déduire que pour tout $x > 1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$.

III.4 Soit k un nombre entier supérieur ou égal à 2.

III.4.1 Exprimer $\Gamma(k)$ en fonction de k et $\Gamma(k-1)$.

III.4.2 En déduire la valeur de $\Gamma(k)$ et l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ en fonction de k et $\Gamma(k)$.

Fin de l'énoncé



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

*Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.
On pourra admettre un résultat pour traiter les questions suivantes.*

Dans tout ce devoir les matrices seront des matrices carrées 3×3 , ou des matrices colonnes 3×1 , à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pourra identifier matrice carrée avec application linéaire dans une base canonique, et matrice colonne avec vecteur.

Rappels et Définitions

- λ^n , avec λ complexe et n entier naturel, admet une limite lorsque n tend vers l'infini si et seulement si $\lambda=1$ ou $|\lambda|<1$.
- On note $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A .
- On dit que la matrice carrée T de terme général t_{ij} est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall i>j \quad t_{ij}=0$.
- On dit que la matrice carrée N est nilpotente si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^n = 0$ (0 est la matrice nulle et N^n est le produit de N par elle-même n fois, par convention $N^1 = N$ et $N^0 = I$ la matrice unité).
- Soit A une matrice de dimension quelconque, de terme général a_{ij} . On pose $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.
On admet que l'application $A \rightarrow \|A\|$ est une norme sur l'espace des matrices ayant même dimension que A .
- On appelle suite de matrices complexes une application de $D \subset \mathbb{N}$ dans $M_{n,p}(\mathbb{C})$; l'image de k est notée A_k ou $A(k)$, l'élément général de $A(k)$ est noté $a_{ij}(k)$.

Tournez la page S.V.P.

On dit que la suite $A(k)$ converge vers B (ou admet B pour limite) si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A(k) - B\| = 0$, et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B$ ou $\lim A(k) = B$.

- A toute suite $A(k)$ de matrices, on associe la suite dite "des sommes partielles" $U(k) = \sum_{i=0}^k A(i)$.

Si cette nouvelle suite converge, on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} U(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} A(i)$ que l'on appelle *somme de la série de terme général $A(k)$* .

- On note, si cette limite existe, $\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}$.

Le but de ce problème est, pour quelques matrices A , de calculer, lorsque c'est possible, $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i$ et

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

PARTIE I

Dans cette partie vous démontrerez des propriétés générales sur des limites, des suites et des séries de matrices. Les matrices sont, sauf indication du contraire, dans $M_3(\mathbb{C})$.

1. Le terme général de $A(k)$ est $a_{ij}(k)$ et celui de B est b_{ij} .

- a. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si $\forall i, j \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{ij}(k) = b_{ij}$.

A-t-on le même type de propriété pour les matrices colonnes ?

- b. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si pour toute matrice colonne 3×1 notée X , $A(k)X$ converge vers BX .

- c. Montrer que $A(k)$ converge vers B si et seulement si pour toute matrice 3×3 notée C inversible, $A(k)C$ converge vers BC .

- d. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} C(k) = D$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A(k) + C(k)) = B + D$.

2.

- a. Montrer que $\|A B\| \leq 3 \|A\| \|B\|$. En déduire que $\|A^k\| \leq 3^{k-1} \|A\|^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que, si A est inversible, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{3\|A^{-1}\|}$.

En déduire que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$, alors A n'est pas inversible.

3.

a. Simplifier l'expression $(I - A) \left(\sum_{i=0}^k A^i \right)$, où I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{C})$.

b. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$, alors pour toute matrice colonne 3×1 notée X , on a
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (A^k X) = 0.$$

En déduire que $A - I$ est inversible et exprimer son inverse comme somme d'une série.

En déduire l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i$.

4. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = B$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{-1}A(k)P = P^{-1}BP$, avec P une matrice inversible.

En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = B$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} (P^{-1}AP)^k = P^{-1}BP$, avec P une matrice inversible.

5. Soit A telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = B$.

a. Si B est inversible, montrer que A est égale à I .

b. Montrer que les valeurs propres de A valent 1 ou ont un module strictement inférieur à 1.

c. On suppose que A est diagonalisable et que $A \neq I$.

Montrer que si $1 \notin \text{Sp}(A)$ alors B est nulle,

et que si $1 \in \text{Sp}(A)$ alors B est diagonalisable avec $\text{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$.

6. Soit A quelconque.

Montrer que si $A = PBP^{-1}$ et si $\exp(B)$ existe,

alors $\exp(A)$ existe et $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$.

PARTIE II

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices triangulaires supérieures ou diagonales.

On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c complexes.

remarque: a, b et c ne sont pas forcément différents.

1.

a. Calculez M^2 , M^3 , Q^2 et Q^3 .

b. Déterminer la forme générale de D^k , M^k et Q^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2.

a. Déterminer les a , les b et les c pour que D^k , M^k et Q^k convergent.

Calculer dans ce cas $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q^k$.

b. Si on suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = 0$, calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} D^i$.

c. Si on suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = 0$, calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} M^i$.

d. Si on suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q^k = 0$, calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} Q^i$.

3. Montrer que $\exp(D)$, $\exp(M)$ et $\exp(Q)$ existent et déterminer leur valeur.

PARTIE III

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices nilpotentes. Dans toute cette partie, sauf indication du contraire, on considère N une matrice carrée 3×3 nilpotente non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1.

a. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) N est nilpotente

(ii) $\text{Sp}(N) = \{0\}$

(iii) N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle

(iiii) $N^3 = 0$.

Application : En déduire que l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue A une matrice carrée 3×3

n'admet pas de solution .

b. Montrer que $\det(I-N) = 1$.

En déduire que I-N est inversible. Que vaut l'inverse de I-N?

Quelles sont les valeurs propres de I-N ? En déduire que I-N n'est pas diagonalisable.

c. Montrer que si $N^2 \neq 0$ et N nilpotente alors

il existe $X \in \mathbb{C}^3$ telle que (X, NX, N^2X) est une base de $\mathbb{C}^3$.

En déduire que :

A commute avec N $\Leftrightarrow$ A combinaison linéaire de I, N, et N^2 .

En déduire que si A commute avec N alors $\det(A-N) = \det(A)$.

A-t-on encore $\det(A-N) = \det(A)$ si A ne commute pas avec N ?

2. Soient N_1 et N_2 deux matrices nilpotentes telles que $N_1N_2 = N_2N_1$.

a. Montrer que N_1N_2 et que N_1+N_2 sont nilpotentes.

(vous pourrez calculer $(N_1 + N_2)^5$).

b. En développant $(N_1 + N_2)^3$ et $(N_1 + N_2)^4$, montrer que $N_1N_2^2 + N_1^2N_2 = 0$ et que $N_1^2N_2^2 = 0$.

c. Montrer que $\exp(N_1+N_2) = \exp(N_1)\exp(N_2)$.

d. En déduire que si N est nilpotente alors $\exp(N)$ est inversible ;
vous donnerez l'inverse de $\exp(N)$.

3. Application: Dans cette question (et dans cette question seulement) on considère

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que N est nilpotente.

b. Calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} N^i$. En déduire l'inverse de I-N.

c. Calculer $\exp(N)$ et $\exp(-N)$.

PARTIE IV

Dans cette partie nous calculerons l'exponentielle d'une matrice dans deux cas particuliers.

1. On considère $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer les valeurs propres de R.
- b. Déterminer les espaces propres de R. R est-elle diagonalisable?
En déduire que $\exp(R)$ existe. Calculer $\exp(R)$.

2. On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer les valeurs propres de M.
- b. Déterminer les espaces propres de M. M est-elle diagonalisable?
Déterminer U et V, deux matrices colonnes 3×1 propres de M, avec U associée à la valeur propre 1 et V associée à la valeur propre -1.
- c. Déterminer W matrice colonne 3×1 telle que $(M+I)W = V$.
En déduire que M et T sont deux matrices semblables.
Déterminer une matrice 3×3 notée P inversible telle que $M = PTP^{-1}$.
Montrer que $\exp(M)$ existe. Calculer $\exp(M)$.

Fin de l'énoncé



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 3 heures

*Les calculatrices sont interdites.**Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.*

L'objet du problème est la résolution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_{a,b}): y'' + (a + be^{2ix})y = 0$$

pour certaines valeurs des nombres complexes a et b , ainsi que la recherche d'éventuelles solutions de période 2π .Une solution de $\mathcal{E}_{a,b}$ est une application à valeurs réelles ou complexes, de classe C^2 (au moins), de la variable réelle x et définie sur $\mathbb{R}$.On pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue, de période 2π , et pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.

1. Préliminaires: soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, de période 2π .
 - 1.1. Exprimer $c_n(f)$ en fonction des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de l'application f , si $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer de même $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$, si $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer enfin $c_0(f)$ en fonction de $a_0(f)$.
 - 1.2. Prouver que la convergence absolue des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(f)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n(f)$ est équivalente à la convergence absolue des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(f)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_{-n}(f)$.
 - 1.3. Montrer que la série de Fourier de f peut s'écrire sous la forme:

$$c_0(f) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}).$$
2. On suppose dans cette question que b est nul et que a est réel.
 - 2.1. Pour quelles valeurs de a l'équation $\mathcal{E}_{a,0}$ admet-elle des solutions non nulles dont 2π est une période?
 - 2.2. Pour quelles valeurs de a l'équation $\mathcal{E}_{a,0}$ admet-elle des solutions réelles non nulles?

Tournez la page S.V.P.

3. Soit f une application de période 2π , indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et $f^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) sa dérivée k -ème, avec par convention $f^{(0)} = f$.
- 3.1. Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
- 3.2. En déduire une relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f^{(k)})$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
- 3.3. Dans le cas où f est à valeurs réelles, montrer que pour tout entier k strictement positif, $|c_n(f)|$ et $|c_{-n}(f)|$ sont négligeables devant $\frac{1}{n^k}$, quand l'entier naturel n tend vers l'infini.
- 3.4. Dans le cas où f est à valeurs réelles, justifier pour tout x réel et tout k entier naturel la convergence absolue, et donner la somme des séries:

$$c_0(f^{(k)}) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(f^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx}).$$

Vérifier que l'on peut passer de la série de $f^{(k)}$ à la série de $f^{(k+1)}$ par dérivation terme à terme.

4. On suppose dans cette question que $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et $a \in \mathbb{C}$.
- 4.1. Prouver que toute solution de $\mathcal{E}_{a,b}$ est indéfiniment dérivable.
- 4.2. Prouver que toute solution réelle de $\mathcal{E}_{a,b}$, de période 2π , est développable en série de Fourier, ainsi que ses dérivées successives.
- 4.3. Exprimer les coefficients $c_n(g)$ de l'application $g: x \mapsto (a + be^{2ix})f(x)$ en fonction des coefficients $c_m(f)$ pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.
- 4.4. Montrer que les coefficients $c_n(f)$ d'une solution f de $\mathcal{E}_{a,b}$, de période 2π , vérifient:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

5. On suppose dans cette question et la suivante que $a = 0$, $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, et que f est une solution indéfiniment dérivable et de période 2π de $\mathcal{E}_{0,b}$.

- 5.1. Exprimer $c_{2p+1}(f)$ en fonction de $c_{2p-1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Si $c_1(f)$ est nul, calculer $c_{2p+1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Si $c_1(f)$ n'est pas nul, prouver qu'alors la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} c_{-2p+1}(f)$ n'est pas absolument convergente.

- 5.2. Prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{-2p}(f) = 0$.

- 5.3. Prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, c_{2p}(f) = \frac{b}{4p^2} c_{2p-2}(f)$.

6. On définit une suite complexe $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\gamma_0 = 1$ et pour tout entier n strictement positif, $\gamma_n = \frac{b}{4n^2} \gamma_{n-1}$, et on définit une fonction φ , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{2inx}$.

6.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n$.

6.2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n$, et, pour tout x réel, la convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n e^{2inx}$.

6.3. En admettant que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et que l'on peut dériver deux fois sa série terme à terme pour trouver φ'' , vérifier que φ est une solution non nulle, de période 2π , de l'équation différentielle $E_{0,b}$.

7. ALGORITHMIQUE: *Préciser, au début de cette partie, le logiciel de calcul formel que vous avez étudié, et utiliser son langage de programmation pour traiter la question ci-dessous:*

Ecrire un algorithme (ou une procédure, ou un programme) qui,

en fonction a) d'un complexe b non nul,
b) d'un entier $m \geq 1$,
c) d'un réel $x \in [0, 2\pi]$,

calcule a) le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $|\gamma_n| \leq 10^{-m}$ (γ_n est défini en question 6),
b) la fonction somme partielle correspondante $S_n: \begin{cases} t \mapsto \sum_{k=0}^n \gamma_k e^{2ikt} \\ [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \end{cases}$,
c) une valeur numérique approchée de $S_n(x)$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x à coefficients réels. Dans ce problème, si k est un nombre entier naturel quelconque, on note E_k le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $\mathcal{B}_k$ la base canonique $(1, x, \dots, x^k)$ de E_k .

I

On considère l'application u de E_k dans E qui à tout polynôme $P \in E_k$ associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par $Q(x) = P''(x) - 2xP'(x)$.

1°) Montrer que $u(E_k) \subset E_k$ et que u définit un endomorphisme de E_k .

2°) Calculer l'image par u du monôme x^n , pour $0 \leq n \leq k$. En déduire que la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}_k$ est triangulaire supérieure.

3°) Déterminer les valeurs propres de u , et en déduire que u est diagonalisable.

4°) On considère la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer que la dérivée d'ordre $n \geq 0$ de f est le produit de f par un polynôme à coefficients entiers H_n de degré n . Calculer H_0 , H_1 , H_2 et H_3 .

b) Montrer que $H_{n+1}(x) = H'_n(x) - 2xH_n(x)$ pour tout $n \geq 0$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (on pourra utiliser la relation $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[e^{-x^2}] = \frac{d^n}{dx^n}[-2xe^{-x^2}]$).

En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $H'_n(x) = -2nH_{n-1}(x)$.

d) Montrer que pour tout n , $0 \leq n \leq k$, H_n est un vecteur propre de u .

Déterminer la valeur propre correspondante.

5°) a) Montrer que pour tout polynôme à coefficients réels R , la fonction $e^{-x^2}R(x)$ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

b) On considère l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P_1, P_2) d'éléments de E associe le nombre réel $\langle P_1 | P_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_1(x) P_2(x) dx$.

Montrer que cette application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E .

6°) Soient p et q deux nombres entiers naturels tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

a) Montrer que $\langle H_p | H_q \rangle = 2p \langle H_{p-1} | H_{q-1} \rangle = 2q \langle H_{p-1} | H_{q-1} \rangle$.

(on pourra calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_p(x) H_q(x) dx$ en intégrant par parties)

b) En déduire la valeur de $\langle H_p | H_q \rangle$ pour $p \neq q$.

c) Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calculer $\|H_p\|^2 = \langle H_p | H_p \rangle$ pour tout nombre entier naturel p .

7°) Soit P un polynôme de degré k . Montrer qu'il existe $k+1$ nombres réels $c_0, c_1, \dots, c_k$ tels que $P = c_0 H_0 + c_1 H_1 + \dots + c_k H_k$, et exprimer c_p , pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq k$, en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P^{(p)}(x) dx$.

II

On considère l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad y'' - 2xy' + \lambda y = P(x),$$

où λ est un paramètre réel, et P une fonction polynôme de degré k .

Soit $(\mathcal{E}'_\lambda)$: $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, l'équation linéaire homogène associée à $(\mathcal{E}_\lambda)$.

1°) On se propose de déterminer les solutions de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ sous forme de sommes de séries entières de x .

a) On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Etablir la relation qui doit exister entre a_{n+2} et a_n pour que y soit solution de $(\mathcal{E}'_\lambda)$.

b) Soient $f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) x^n$ et $g_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda) x^n$ les solutions de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ développables en série entière au voisinage de 0 qui vérifient les conditions initiales $f_\lambda(0) = 1$, $f'_\lambda(0) = 0$, $g_\lambda(0) = 0$, $g'_\lambda(0) = 1$.

Calculer les coefficients $a_n(\lambda)$ et $b_n(\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda) x^n$?

c) Déterminer la solution générale de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ en fonction de f_λ et g_λ .

d) Pour quelles valeurs de λ l'équation $(\mathcal{E}'_\lambda)$ admet-elle des solutions polynômiales non identiquement nulles ?

2°) On suppose que $\lambda = 2p$, où p est un nombre entier naturel.

Montrer que H_p est solution de $(\mathcal{E}'_\lambda)$.

Déterminer les valeurs de $H_p(0)$ et $H'_p(0)$. On pourra utiliser le développement en série entière de e^{-x^2} pour le calcul de $H_p(0)$, et la question I.4°.c pour le calcul de $H'_p(0)$. On distinguera les cas selon la parité de p .

3°) Soit q un nombre entier naturel. Exprimer $H_{2q}(x)$ en fonction de $f_{4q}(x)$ et $H_{2q+1}(x)$ en fonction de $g_{4q+2}(x)$.

4°) On suppose que λ n'est pas un nombre entier naturel pair.

a) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = H_p(x),$$

où p est un nombre entier tel que $0 \leq p \leq k$. En déduire, à l'aide de la question I.7°, une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$.

b) En déduire la solution générale de $(\mathcal{E}_\lambda)$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Après une première partie consacrée à l'étude de la projection sur les convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ on établira (dans $\mathbb{R}^2$) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $(\mid)$

et $\|$, donc si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ on a : $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et

$\|x\| = (x|x)^{1/2}$. Si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ on notera $\overset{\circ}{X}$ son intérieur, soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ on dira que $u \in X$ est un point fixe de f si $f(u) = u$; si $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i désigne la composante de rang i de f , donc : $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$.

I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a : $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (inégalité de Schwarz). Montrer que $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Montrer que si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$ vérifie :

$$b \neq c \text{ et } \|a - b\| = \|a - c\|, \text{ on a alors : } \left\| a - \frac{b+c}{2} \right\| < \|a - b\|.$$

2. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u \in F$ tel que : $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$ (on supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général).

3. Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $u \in A$ tel que $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in A$.

Ceci établit le théorème de la projection sur les convexes de $\mathbb{R}^n$: soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique application, notée P , de $\mathbb{R}^n$ dans A qui vérifie : $\|x - P(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in A\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. $P(x)$ s'appelle la projection de x sur A .

4. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que : $(x - \alpha | y - \alpha) \leq 0$ pour tout $y \in A$, on a : $\alpha = P(x)$.
5. Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que : $(x - P(x) | y - P(x)) > 0$. Soit alors $\mathcal{S} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{S}(t) = \|(x - P(x)) - t(y - P(x))\|^2$. Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que : $\mathcal{S}(t) < \|x - P(x)\|^2$.
6. Dédire de 4. et 5. que $u = P(x)$ si et seulement si : $u \in A$ et $(x - u | y - u) \leq 0$ pour tout $y \in A$.
7. Soit $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$ montrer que : $(x - y | P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$. En déduire que P vérifie les propriétés suivantes : P est continue, $P(\mathbb{R}^n) = A$, $P(x) = x$ si $x \in A$.
8. Montrer que si $x \notin A$, alors $P(x) \notin \overset{\circ}{A}$ (raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une boule de centre $P(x)$, de rayon strictement positif, incluse dans A).

II. Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

Pour toute la suite du problème, on se place dans $\mathbb{R}^2$; si $r > 0$, $\overline{B}(O, r)$ désigne le disque fermé de centre O et de rayon r et $S(O, r)$ le cercle correspondant, on note $B = \overline{B}(O, 1)$ et $S = S(O, 1)$. On entend par application dérivable (ou C^1 ou C^2) de B (ou de $B \times \mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$), la restriction à B (ou à $B \times \mathbb{R}$) d'une application dérivable (ou C^1 ou C^2) définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), contenant B (ou $B \times \mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$).

A. Cas particulier d'une application de classe C^2

Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, on suppose que f est de classe C^2 et que $f(B) \subset B$ et on se propose de montrer que f possède au moins un point fixe. On va raisonner par l'absurde et supposer que : $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$.

9. Montrer qu'il existe $\rho: B \rightarrow \mathbb{R}_+$, unique, telle que : $x + \rho(x)(x - f(x)) \in S$ pour tout $x \in B$.
 Expliciter ρ , montrer qu'elle est de classe C^2 et que $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$. On pose : $\alpha(x) = \rho(x)(x - f(x))$ et $\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(x)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et $\varphi(x) = x + \alpha(x)$.

10. Montrer que, pour tout $x \in B$, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$ est singulière (on pourra, à cet effet, caractériser géométriquement l'image de l'application linéaire correspondante).

11. Soit $\psi: B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\psi(x, t) = \begin{vmatrix} 1+t \alpha_{11}(x) & t \alpha_{21}(x) \\ t \alpha_{12}(x) & 1+t \alpha_{22}(x) \end{vmatrix}$.

- a) Montrer que : $\psi(x, t) = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x)$ où β et γ sont des applications continues de B dans $\mathbb{R}$ que l'on explicitera à l'aide des applications $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$. Vérifier que $\psi(x, 1) = 0$ pour tout $x \in B$.

- b) Soit $J: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $J(t) = \iint_B \psi(x, t) dx_1 dx_2$. Justifier l'existence de J et calculer $J(0)$ et $J(1)$.

- c) Montrer, grâce au théorème de Fubini que $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$.

- d) Soit $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 ,

$$\text{soient } I_1(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2, \quad I_2(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2.$$

Montrer que :

$$I_1(g) = \int_{-1}^{+1} \left[g_1(\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) - g_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \right] ds - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2$$

On obtient alors, de façon analogue :

$$I_2(g) = \int_{-1}^{+1} \left[g_1(s, \sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, \sqrt{1-s^2}) - g_1(s, -\sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, -\sqrt{1-s^2}) \right] ds - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) dx_1 dx_2$$

Montrer que : $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$ et donc, que J est constante ; montrer que ceci est impossible.

On a ainsi démontré le théorème de Brouwer particulier : toute application de classe C^2 , de B dans B , a au moins un point fixe.

B. Forme générale du théorème de Brouwer

On admettra la généralisation suivante du théorème de Weierstrass : soit F un fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, soit $g: F \rightarrow \mathbb{R}$. Si g est continue, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une application $g_{(\varepsilon)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 , telle que : $\sup \left\{ \left| g_{(\varepsilon)}(x) - g(x) \right| : x \in F \right\} \leq \varepsilon$.

12. Montrer que si F est un fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, et si $g: F \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ une application $g_{(\varepsilon)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^2 , telle que : $\sup \left\{ \left\| g_{(\varepsilon)}(x) - g(x) \right\| : x \in F \right\} \leq \varepsilon$.

13. Soit $f: B \rightarrow B$, f continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe, d'après 12. une application $f_{(\varepsilon)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^2 , telle que : $\sup \left\{ \left\| f_{(\varepsilon)}(x) - f(x) \right\| : x \in B \right\} \leq \varepsilon$.

Soit $h_{(\varepsilon)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_{(\varepsilon)}(x) = \frac{f_{(\varepsilon)}(x)}{1+\varepsilon}$. Montrer que $h_{(\varepsilon)}(B) \subset B$ et que :

$$\sup \left\{ \left\| h_{(\varepsilon)}(x) - f(x) \right\| : x \in B \right\} \leq 2\varepsilon.$$

14. Montrer que si $f: B \rightarrow B$ est continue, elle possède au moins un point fixe.

15. Soit $r > 0$, soit $f: \overline{B}(O, r) \rightarrow \overline{B}(O, r)$, montrer que si f est continue elle possède au moins un point fixe (considérer $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{r} f(rx)$).

16. Soit A un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, f continue telle que : $f\left(A \setminus \overset{\circ}{A}\right) \subset A$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $A \cup f(A) \subset \overline{B}(O, r)$.

b) On associe au convexe fermé non vide A la projection P , comme cela a été défini en question 3. Soit alors $h: \overline{B}(O, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = f(P(x))$. Dédurre de l'étude de h que f possède au moins un point fixe dans A . On a donc le théorème de Brouwer général : si A est un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, et si $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue et vérifie : $f\left(A \setminus \overset{\circ}{A}\right) \subset A$, alors f possède au moins un point fixe dans A .

III. Quelques conséquences du théorème de Brouwer

17. Soit $f: B \rightarrow S$, telle que : $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Montrer, en étudiant $(-f)$, que f ne peut être continue (ceci constitue le théorème de non rétraction).

18. Soit $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : f continue et $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Soit alors $y \notin f(B)$, montrer, en étudiant $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $g(x) = \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$, que $y \notin B$. En déduire que : $B \subset f(B)$.

19. Soit $h: S \times [0,1] \rightarrow S$ telle que : h continue et $h(x,0) = x$ pour tout $x \in S$. Supposons qu'il existe $y \in S$ tel que : $h(x,1) = y$ pour tout $x \in S$; soit alors f , de B dans S , définie par :

$$f(x) = \begin{cases} h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) & \text{si } x \neq O. \\ y & \text{si } x = O \end{cases}$$

Montrer que f est continue et que cela contredit le théorème de non rétraction ; en déduire que $(x \rightarrow h(x,1))$ ne peut être constante (on dit que S n'est pas contractile).

20. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : f continue, $(f(x)|x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $y \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$, on définit, si $y \notin f(\overline{B}(O,r))$, l'application $g_{(r)}: \overline{B}(O,r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ par : $g_{(r)}(x) = r \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$.

a) Montrer qu'il existe $u_{(r)} \in S(O,r)$ tel que l'on ait :

$$\left(f(u_{(r)}) | u_{(r)} \right) = (y | u_{(r)}) - r \|y - f(u_{(r)})\|.$$

b) Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Fin de l'énoncé.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont **autorisées**, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-186 du 16/11/99.

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.

Si u est un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E , on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$.

On note $K_n[X]$ la K -algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n , $\mathcal{M}_n(K)$ la K -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$; les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{ij})$.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, on note tA la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(A - X I_n)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\text{la matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{ij})$ est définie par $c_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{in} = -a_{i-1}$ et $c_{ij} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II, III, et IV, utilisent les résultats de la partie I, et sont indépendantes entre elles.

Tournez la page S.V.P.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ de $K_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = k P$.
3. Soit Q un polynôme de $K_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = Q$.
4. On note ${}^t C_P$ la transposée de la matrice C_P .
 - a. Justifier la proposition : $\text{Sp}(C_P) = \text{Sp}({}^t C_P)$.
 - b. Soit λ élément de $\text{Sp}({}^t C_P)$, déterminer le sous-espace propre de ${}^t C_P$ associé à λ .
 - c. Montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.
 - d. On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^t C_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdot & \cdot & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdot & \cdot & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ est non nul.}$$

5. Exemples :

- a. Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n.$$
- b. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1 \leq i \leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ et } D_i = \{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i \}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

6. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ .

Montrer que pour tout entier $1 \leq i \leq n$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$.

7. Démontrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$.

8. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|, \dots, 1+|a_{n-1}|\}$.

9. Application :

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E , on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u .

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \dots - a_0u(n).$$

Tournez la page S.V.P.

- 10.** Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F .
- 11.** Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?
- 12.** Pour tout entier $0 \leq i \leq p-1$ on définit les éléments e_i de F par :
 $e_i(i) = 1$ et, lorsque $0 \leq j \leq p-1$ et $j \neq i$, $e_i(j) = 0$.
- a. Déterminer pour $0 \leq i \leq p-1$, $e_i(p)$.
- b. Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est une base de F .
- c. Soit u un élément de F , établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.
- 13.** Si u est un élément de E , on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f .
- 14.** Si g est l'endomorphisme de F induit par f , montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est ${}^t C_p$.
- 15.** On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$.
- a. Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g .
- b. En déduire que, si u est élément de F , il existe des constantes complexes $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0 \lambda_0^n + k_1 \lambda_1^n + \dots + k_{p-1} \lambda_{p-1}^n$.
- 16. Exemple :** (On revient à la notation usuelle u_n)

Soit a, b et c trois réels distincts.

Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a + b + c) u_{n+2} - (ab + ac + bc) u_{n+1} + abc u_n.$$

IV. Matrices vérifiant : $\text{rg}(U - V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A , on notera C_A la matrice compagnon du polynôme $(-1)^n \chi_A$.

- 17.** Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?

Pour tout couple (U, V) de matrices de $GL_n(K)$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

$$(*) : \text{rg}(U - V) = 1$$

$$(**) : \text{Il existe une matrice inversible } P \text{ telle que } U = P^{-1}C_U P \text{ et } V = P^{-1}C_V P.$$

18. Montrer qu'un couple (U, V) de matrices distinctes de $GL_n(K)$ vérifiant $(**)$ vérifie $(*)$.

19. Déterminer un couple (U, V) de matrices de $GL_2(K)$ ($n = 2$) vérifiant $(*)$ mais ne vérifiant pas $(**)$ et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V .

Dans la suite de cette partie, (U, V) est un couple de matrices de $GL_n(K)$ vérifiant $(*)$ et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et de base B , on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B .

Enfin on pose $H = \text{Ker}(u - v)$.

20. Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E .

21. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et par v c'est-à-dire :

$$u(F) \subset F \text{ et } v(F) \subset F.$$

On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F .

On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u .

a. Montrer que F n'est pas inclus dans H .

b. On suppose que $F \neq E$, montrer que $F + H = E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E . En utilisant les matrices de u et v dans la base B' montrer que l'on aboutit à une contradiction.

c. Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?

22. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $G_j = \{x \in E, u^j(x) \in H\}$.

a. Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E .

b. Montrer que $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

c. Soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leq j \leq n-1$: $e_j = u^j(y)$.

Montrer que $B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de E .

(On pourra considérer $F = \text{vect} \{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre).

d. Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).

e. Conclure.

23. Application :

Soit u et v deux automorphismes d'un K -espace vectoriel E de dimension n vérifiant :

$$\text{rg}(u - v) = 1, \quad \chi_u(X) = (-1)^n (X^n + 1) \quad \text{et} \quad \chi_v(X) = (-1)^n (X^n - 1).$$

En utilisant une action de groupe, montrer que le groupe engendré par u et v est fini de cardinal inférieur ou égal à $(2n)!$.

Fin de l'énoncé.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99 – BOEN n°42 du 25.11.99.

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

PROBLÈME 1

Etant donné une série convergente $\sum_{k \geq 0} u_k(x)$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ son reste d'ordre n , pour $n \in \mathbb{N}$ et on se propose d'étudier la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$.

PARTIE I

I.1. On suppose que $u_k(x) = (-1)^k x^k$, où $x \in \mathbb{R}$.

I.1.1. Déterminer l'ensemble I des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k$ converge et préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ pour $x \in I$.

I.1.2. En supposant que $x \in I$, expliciter $R_n(x)$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ converge et calculer sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$.

I.2. On conserve les notations du I.1 :

$u_k(x) = (-1)^k x^k$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$. On considère par ailleurs la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on pose : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ et de calculer sa somme.

I.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et par suite l'existence de r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq m$ et $I_0 = [0, 1[$.

I.2.2.1. En remarquant que $\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x)$, montrer que pour tout $x \in I_0$ on a

l'inégalité :
$$\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right| \leq 2.$$

I.2.2.2. L'entier n étant fixé, déduire en particulier de I.2.2.1 que :

$$\int_{I_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m \int_{I_0} (-1)^k x^k dx$$

et par suite que $r_n = \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$.

I.2.2.3. Retrouver ainsi la valeur (bien connue !) de r_0 .

I.2.2.4. Montrer que pour tout couple $(m, x) \in \mathbb{N} \times I_0$ on a l'inégalité :

$$\left| \sum_{n=0}^m R_{n-1}(x) \right| \leq 2.$$

I.2.2.5. Déduire en particulier de I.2.2.4 que la somme $\sum_{n=0}^m \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$ admet une limite lorsque m tend vers $+\infty$.

En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

PARTIE II

Une égalité sur les restes ; quelques applications.

II.1. Egalité sur les restes.

Lorsque la série numérique $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge, on note toujours $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n .

Soit $\sum_{k \geq 1} u_k$ une série convergente ; exprimer pour $n \in \mathbb{N}$ la différence $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$ en fonction de n et de R_n .

II.2. Application à une suite.

Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\sum_{k=1}^n (n-k) \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \alpha n + \beta + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.3. Application à une série à termes positifs.

On suppose de plus que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II.3.1. Montrer que la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} R_k$ entraîne la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} k u_k$.

II.3.2. On suppose que la série $\sum_{k \geq 1} k u_k$ est convergente. Quelle est la limite de la suite $(n+1)R_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

II.3.3. Dédurre de ce qui précède que les deux séries $\sum_{k \geq 0} R_k$ et $\sum_{k \geq 1} k u_k$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent comparer alors leurs sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

II.4. Application à la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$.

On suppose maintenant que $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D =]1, +\infty[$.

On note toujours $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ le reste d'ordre n et on pose $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ pour $x \in D$.

Préciser l'ensemble D_1 des $x \in D$ tels que la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ soit convergente et exprimer,

pour $x \in D_1$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de la fonction ζ .

II.5. Application à une série entière.

On suppose maintenant que $u_k(x) = a_k x^k$, où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels et où $x \in \mathbb{R}$. On désigne par ρ le rayon de convergence de cette série entière, on suppose $\rho > 0$ et on note $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in]-\rho, \rho[$.

II.5.1. Soit $x \in]-\rho, \rho[$; justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} k a_k x^k$; en déduire que la suite $(n+1)R_n(x)$ admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ (et préciser cette limite).

II.5.2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ est convergente pour $x \in]-\rho, \rho[$ et exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ à l'aide de x et de la fonction f .

II.5.3. Exemple : on suppose que $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

II.5.3.1. Déterminer alors le rayon de convergence ρ de cette série entière.

II.5.3.2. Expliciter la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ pour $x \in]-\rho, \rho[$ (en justifiant le résultat).

PROBLÈME 2

Notations :

Pour $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq k$, on note $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ le coefficient binomial (avec $0! = 1$).

Si $n \in \mathbb{N}$ on note $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$; on désigne par $M_{n+1}(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Si $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ on note $M = (m_{i,j})$ avec $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ou $m_{i,j}$ désigne l'élément de la ligne i et de la colonne j .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $W_n = (w_{i,j}) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$, $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ avec $w_{i,j}$ définie par :

$$\text{si } i+j \text{ est pair : } i+j = 2p \text{ alors } w_{i,j} = \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p$$

$$\text{si } i+j \text{ est impair alors } w_{i,j} = 0$$

On se propose de calculer le déterminant de W_n noté $\det W_n$.

PARTIE I

I.1. Expliciter la matrice W_3 .

I.2. Calculer $\det W_3$.

I.3. Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $J_m = \int_0^\pi \cos^m t \, dt$.

I.3.1. Calculer J_0 et J_1 .

I.3.2. Etablir une relation entre J_{m+2} et J_m pour $m \in \mathbb{N}$.

Quelle est la valeur de J_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$?

I.3.3. Expliciter J_{2p} en fonction de p et du coefficient binomial C_{2p}^p pour $p \in \mathbb{N}$.

I.3.4. Exprimer $w_{i,j}$ en fonction de J_{i+j} , de i et de j pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

PARTIE II

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbf{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On considère sur E le produit scalaire $\langle \cdot / \cdot \rangle$ défini par :

$$\text{pour } (f, g) \in E^2 : \langle f / g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) g(t) dt.$$

On définit deux suites $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E par :

$$\text{pour tout } t \in [0, \pi] \quad e_0(t) = v_0(t) = 1 \quad \text{et pour } k \geq 1 \quad e_k(t) = \sqrt{2} \cos(kt), \quad v_k(t) = \cos^k(t).$$

Pour $m \in \mathbf{N}$ on note $H_m(e)$ le sous-espace vectoriel $\text{vect}(e_0, e_1, \dots, e_m)$ (sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_j)_{j \in [0, m]}$).

On note, de même, $H_m(v)$ le sous-espace vectoriel $\text{vect}(v_0, v_1, \dots, v_m)$.

II.1. Calculer les produits scalaires $\langle e_j / e_k \rangle$ pour $(j, k) \in [0, m]^2$.

II.2. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}$ la famille $(e_j)_{j \in [0, m]}$ est une base de $H_m(e)$.

II.3. Soit $m \in \mathbf{N}$; montrer que $v_m \in H_m(e)$, c'est-à-dire que $v_m = \sum_{i=0}^m q_{i,m} e_i$; expliciter $q_{m,m}$ (on ne cherchera pas à calculer $q_{i,m}$ pour $0 \leq i \leq m-1$).

II.4. Démontrer l'égalité $H_m(e) = H_m(v)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

II.5. Pour $m \in \mathbf{N}$ on note d_m la distance de v_{m+1} au sous-espace vectoriel $H_m(e)$ (pour la distance associée au produit scalaire défini au début de la partie II).
Déduire de ce qui précède la valeur de d_m .

II.6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$; pour $(i, j) \in [0, n]^2$ on note $v_j = \sum_{i=0}^n q_{i,j} e_i$ et on pose alors :

$$Q_n = (q_{i,j})_{(i,j) \in [0, n]^2} \in M_{n+1}(\mathbf{R})$$

avec $(i, j) \in [0, n]^2$.

II.6.1. Calculer $\det Q_n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

II.6.2. Calculer $\det W_n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Fin de l'énoncé.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99 – BOEN n°42 du 25.11.99.

L'objet de ce problème est de définir un algorithme de calcul approché d'une intégrale, utilisant la méthode des trapèzes.

Dans la première partie, on étudie le procédé d'extrapolation de Richardson.

Dans une deuxième partie, on établit la formule d'Euler - Mac Laurin.

La troisième partie utilise les deux premières parties pour définir la méthode de Romberg, qui est une méthode d'intégration basée sur l'accélération de la convergence à partir de la méthode des trapèzes.

La deuxième partie est indépendante de la première partie.

De nombreuses questions de ce problème sont simples ; le candidat s'attachera à les résoudre avec soin et complètement.

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Etant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on note $C^\infty(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$, indéfiniment dérivables.

Etant donné un entier $s \in \mathbf{N}$ et une fonction φ , on utilise la notation $\varphi(t) = O(t^s)$ lorsque $t \rightarrow 0$, qui signifie que le quotient $\frac{\varphi(t)}{t^s}$ est borné lorsque $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$.

t_n étant le terme général d'une suite qui ne s'annule pas et qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, on note $u_n = O(t_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, le terme général d'une suite telle que le quotient $\frac{u_n}{t_n}$ est borné lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

PREMIÈRE PARTIE

Procédé d'extrapolation de Richardson

On désigne par A une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, et on suppose que A admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

On note $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + O(t^{k+1})$ son développement limité à l'ordre k au voisinage de 0, les coefficients a_p étant des réels.

I.1.1 Etant donné un réel ρ non nul et un entier $s \in \mathbf{N}$, on suppose que φ est une fonction qui vérifie $\varphi(t) = O((\rho t)^s)$ lorsque $t \rightarrow 0$. Montrer que $\varphi(t) = O(t^s)$ lorsque $t \rightarrow 0$.

I.1.2 Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on suppose que $\varphi(t) = O(t^k)$ lorsque $t \rightarrow 0$. Déterminer la limite lorsque $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$, du quotient $\frac{\varphi(t)}{t^{k-1}}$.

I.2.1. Montrer que $A(t)$ admet une limite lorsque $t \rightarrow 0$ et déterminer cette limite.

Soit r un réel vérifiant $r > 1$. On définit la suite des fonctions A_n par :

pour t réel, $A_0(t) = A(t)$ puis, pour t réel et $n \in \mathbf{N}^*$, $A_n(t) = \frac{r^n A_{n-1}(t) - A_{n-1}(rt)}{r^n - 1}$.

I.2.2. Montrer qu'il existe un réel $a_{1,2}$, que l'on déterminera, tel que le développement limité de A_1 à l'ordre k au voisinage de 0 soit $A_1(t) = a_0 + a_{1,2} t^2 + \dots + O(t^{k+1})$.

I.2.3. En déduire qu'il existe un réel $a_{n,n+1}$, que l'on ne demande pas de déterminer, tel que le développement limité de A_n à l'ordre k au voisinage de 0 soit $A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + \dots + O(t^{k+1})$.

I.2.4. Soit t_0 un réel non nul fixé. Montrer que la suite de terme général $A(r^{-m} t_0)$ converge vers a_0 lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Dans la suite de la première partie, on suppose que pour tout $t_0 \neq 0$ fixé et $r > 1$ fixé, on sait calculer les premiers termes $A(t_0)$, $A(r^{-1} t_0)$, ..., $A(r^{-m} t_0)$ de la suite.

Le procédé de Richardson consiste à extrapoler ces valeurs pour obtenir, grâce à un procédé d'accélération de convergence, la valeur de a_0 .

Pour $p \in \mathbf{N}$, on note $A_{p,0} = A_0(r^{-p} t_0)$ puis, pour q entier vérifiant $1 \leq q \leq p$, on note $A_{p,q} = A_q(r^{-p} t_0)$.

I.3.1. Justifier l'égalité $A_{p,0} = a_0 + O(r^{-p})$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

I.3.2. Déterminer un entier naturel $\alpha(p,q) > 0$, que l'on explicitera, tel que $A_{p,q} = a_0 + O(r^{-\alpha(p,q)})$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

I.3.3. Pour $p \geq 1$, justifier l'égalité : $A_{p,1} = \frac{r A_{p,0} - A_{p-1,0}}{r - 1}$.

I.3.4. Pour $1 \leq q \leq p$, justifier l'égalité :

$$A_{p,q} = \frac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \frac{1}{r^q - 1} (A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}).$$

Dans la pratique on range les valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq m$ dans un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & A_{0,0} \\ & & & & & & A_{1,0} & A_{1,1} \\ & & & & & A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & A_{m,0} & A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{array}$$

I.4. Déterminer la plus petite valeur et la plus grande valeur de $\alpha(p,q)$ pour $0 \leq q \leq p \leq m$.

Lorsque $m \rightarrow +\infty$, de laquelle des valeurs $A_{p,q}$ du tableau peut-on attendre la meilleure approximation de a_0 (on pourra utiliser I.1.2 pour justifier la réponse) ?

On écrira cette valeur sous la forme $a_0 + O(r^{-\sigma(m)})$ lorsque $m \rightarrow +\infty$ et on précisera la valeur de l'entier naturel $\sigma(m) > 0$.

On considère une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note $g(\alpha+h) = c_0 + c_1 h + \dots + c_{2k} h^{2k} + O(h^{2k+1})$ son développement limité à l'ordre $2k$ au voisinage de α .

I.5.1. Exprimer les coefficients c_p pour $0 \leq p \leq 2k$, en fonction de g et de ses dérivées successives.

Pour $h \neq 0$, on note $G(h) = \frac{g(\alpha+h) - g(\alpha-h)}{2h}$.

I.5.2. Montrer que la fonction G est paire.

Montrer que G se prolonge par continuité en 0 par une valeur que l'on déterminera.

On note $\tilde{G}$ la fonction G prolongée en 0 par cette valeur.

I.5.3. Exprimer à l'aide des coefficients c_p le développement limité de $\tilde{G}$ à l'ordre $2k-1$ au voisinage de 0.

Pour t réel positif, on note $A(t) = \tilde{G}(\sqrt{t})$.

I.6.1. On choisit $h > 0$ et on considère la suite de valeurs $G(h), G\left(\frac{h}{2}\right), \dots, G\left(\frac{h}{2^m}\right)$.

Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit $A(t_0), A(r^{-1} t_0), \dots, A(r^{-m} t_0)$.

On utilise les notations des questions précédentes avec $A_0(t) = A(t)$, $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis $A_{p,q}$, pour les valeurs r et t_0 déterminées dans I.6.1.

I.6.2. Quelle est la limite ℓ de $A_{p,0}$ lorsque $p \rightarrow +\infty$? On exprimera ℓ à l'aide de la fonction g et de α .

Dans ce qui suit, on prend $g(x) = \ell n x$, $\alpha = 3$ et $h = 0,8$.

I.7.1. Calculer les valeurs $A_{p,0}$ pour $0 \leq p \leq 3$.

Donner le tableau des valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq 3$.

I.7.2. Quelle est la valeur exacte de ℓ ?

Parmi les valeurs $A_{p,q}$ trouvées, quelle est la meilleure approximation de ℓ ?

DEUXIÈME PARTIE

Formule d'Euler -Mac Laurin

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite B_p de polynômes par :

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_0(t) = 1$

(ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $B'_p(t) = pB_{p-1}(t)$ et $\int_0^1 B_p(t) dt = 0$,

et on note $b_p = B_p(0)$.

II.1.1. Déterminer les polynômes B_1 , B_2 , B_3 .

II.1.2. Pour $0 \leq p \leq 3$, calculer b_p et comparer b_p à $B_p(1)$.

II.1.3. Montrer que pour $p \geq 2$, on a $b_p = B_p(1)$.

II.2.1. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\tilde{B}_p(t) = (-1)^p B_p(1-t)$.

Montrer que la suite de polynômes $\tilde{B}_p$ vérifie les relations (i) et (ii). En déduire que $\tilde{B}_p = B_p$.

II.2.2. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{2p+1} = 0$.

Soit $f \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})$; on note $f^{(p)}$ la dérivée d'ordre p de la fonction f .

II.3.1. Montrer l'égalité $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 B_0(t) f(t) dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 B_1(t) f'(t) dt$.

II.3.2. Pour $n \geq 2$, montrer l'égalité

$$\frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=2}^n (-1)^p \frac{b_p}{p!} (f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} f^{(n)}(t) dt.$$

II.3.3. En déduire que pour $n = 2k$ on a l'égalité

$$(1) \quad \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)) - \int_0^1 \frac{B_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t) dt.$$

Pour $t \in \mathbf{R}$, on note $E(t)$ la partie entière de t .

Pour $p \in \mathbf{N}$, on définit la fonction D_p par : pour $t \in \mathbf{R}$, $D_p(t) = B_p(t - E(t))$.

II.4.1. Montrer que D_p est une fonction périodique de période 1.

Montrer que D_p est une fonction de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite la fonction f appartient à $C^\infty([0, N], \mathbf{R})$ où $N \in \mathbf{N}$ avec $N \geq 2$.

Pour q entier vérifiant $1 \leq q \leq N$, on définit les fonctions f_q de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ par $f_q(t) = f(t + q - 1)$.

II.4.2. Montrer que les fonctions f_q appartiennent à $C^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ et qu'elles vérifient les égalités : pour $m \in \mathbf{N}$ et q entier tel que $2 \leq q \leq N$,

$$f_1^{(m)}(0) = f^{(m)}(0), \quad f_q^{(m)}(0) = f_{q-1}^{(m)}(1), \quad f_N^{(m)}(1) = f^{(m)}(N).$$

II.4.3. En appliquant (1) aux fonctions f_q , en déduire la formule d'Euler -Mac Laurin sur $[0, N]$:

$$(2) \quad \frac{1}{2}f(0) + \sum_{q=1}^{N-1} f(q) + \frac{1}{2}f(N) = \int_0^N f(t) dt + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(N) - f^{(2p-1)}(0)) - \int_0^N \frac{D_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t) dt.$$

TROISIÈME PARTIE

Méthode de Romberg

Dans cette partie on note $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction de $C^\infty([a, b], \mathbf{R})$.

Etant donné $N \in \mathbf{N}^*$ et $h = \frac{b-a}{N}$, on note $T_f(h) = h \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{q=1}^{N-1} f(a+qh) + \frac{1}{2}f(b) \right]$ si $N \geq 2$,

$T_f(h) = h \left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \right]$ si $N = 1$, la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ obtenue par la méthode des trapèzes pour le pas h .

III.1. On suppose $N \geq 2$. En appliquant la formule (2) à la fonction $g(t) = f(a + ht)$ définie sur $[0, N]$, montrer la formule

$$(3) \quad T_f(h) = \int_a^b f(t) dt + \sum_{p=1}^k h^{2p} \frac{b_{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)) - h^{2k} \int_a^b \frac{D_{2k}\left(\frac{t-a}{h}\right)}{(2k)!} f^{(2k)}(t) dt.$$

III.2. Montrer que la formule (3) peut s'écrire : (4) $T_f(h) = \int_a^b f(t) dt + \sum_{p=1}^{k-1} d_p h^{2p} + O(h^{2k})$ où les d_p désignent des nombres réels.

Pour $t > 0$, on définit $A(t) = T_f(\sqrt{t})$.

III.3.1. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$.

III.3.2. On prend $N = 1$ et donc $h = b - a$, et on calcule la suite de valeurs

$$T_f(h), T_f\left(\frac{h}{2}\right), \dots, T_f\left(\frac{h}{2^m}\right).$$

Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit

$$A(t_0), A(r^{-1}t_0), \dots, A(r^{-m}t_0).$$

On utilise les notations de la première partie avec $A_0(t) = A(t)$, $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis, $A_{p,q}$, t_0 et r étant les valeurs trouvées en **III.3.2**. On note $h_p = \frac{b-a}{2^p}$.

III.4.1. Exprimer $A_{p,0}$ et $A_{p-1,0}$ à l'aide de T_f et de h_p .

III.4.2. Pour $p \geq 1$, on définit $A'_{p,0} = h_p \sum f(a + (2q+1)h_p)$, la somme étant étendue aux entiers q tels que $a < a + (2q+1)h_p < b$.

Exprimer $A_{p,0}$ en fonction de $A_{p-1,0}$ et $A'_{p,0}$. Quel est l'intérêt de cette expression ?

III.5. On choisit $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$, $a = 0$, $b = \pi$, $h = b - a = \pi$.

III.5.1. Montrer que f appartient à $C^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$.

III.5.2. Calculer les valeurs $A_{p,0}$ pour $0 \leq p \leq 3$ et les valeurs $A'_{p,0}$ pour $1 \leq p \leq 3$. Indiquer dans quel ordre vous calculez ces sept valeurs.

III.5.3. Donner le tableau des valeurs $A_{p,q}$ pour $0 \leq q \leq p \leq 3$.

De laquelle de ces valeurs peut-on attendre la meilleure approximation de $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$?

III.6. Que donne cette méthode lorsque f est une fonction périodique de période $b - a$?

Fin de l'énoncé.



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_p$. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.

On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, tA désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

$\text{Ker } A$ est le noyau de A défini par

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$$

$\text{Im } A$ est l'image de A définie par

$$\text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

Enfin, on adopte la notation $F^\perp$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

I.1 Montrer que tAA est nulle si et seulement si A est nulle.

Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.

I.2 Montrer que les matrices tAA et $A{}^tA$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

I.3 a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X | Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

Tournez la page S.V.P.

b) Si W est un vecteur propre de tAA associé à la valeur propre λ , exprimer $\|AW\|_n^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de tAA sont réelles, positives ou nulles.

I.4 a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices tAA et $A{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices tAA et $A{}^tA$ ont même rang.

I.5 Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^tA$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de tAA .

I.6 On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de tAA , chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \dots, p\}$.

Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A .

On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \dots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de tAA sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.

Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de tAA respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \dots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p , $V_{r+1}, \dots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\text{Ker } A{}^tA$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $U_i = \frac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\text{Ker } A{}^tA$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p , pour tout $i \in \{r+1, \dots, p\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, ${}^tAU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$, ${}^tAU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^tA$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i .

I.7 On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i , U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^tUAV)_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice tUAV .

a) Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}, ({}^tUAV)_{ij} = \mu_j \delta_{ij} \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments Δ_{ij} sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta^t V$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8 Montrer que le rang de A est égal à r .

I.9 a) Montrer que $V = \sum_{i=1}^p V_i^t E_i$.

b) En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^r \mu_i U_i^t V_i, \quad {}^t A A = \sum_{i=1}^r \lambda_i V_i^t V_i, \quad A^t A = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i^t U_i$$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\text{Ker } A$, $\text{Ker } {}^t A$, $\text{Im } A$, $\text{Im } {}^t A$.

d) Montrer que $\text{Ker } {}^t A A = \text{Ker } A$ et $\text{Ker } A^t A = \text{Ker } {}^t A$

Partie II

Avec les notations de la partie I, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta^t V$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments Δ_{ij}^+ sont nuls sauf $\Delta_{11}^+, \Delta_{22}^+, \dots, \Delta_{rr}^+$ respectivement égaux à $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \dots, \frac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+)^t U$

Δ^+ (resp. A^+) est appelée *pseudo-inverse* de Δ (resp. de A). *A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A , mais il sera montré à la question II.9 qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A .*

II.1 Déterminer les matrices A_0^+ , $A_0 A_0^+$, $A_0^+ A_0$, $A_0 A_0^+ A_0$ et $A_0^+ A_0 A_0^+$.

II.2 Déterminer $(A_0^+)^+$.

II.3 Evaluer $\Delta^+ \Delta$ et $\Delta \Delta^+$.

II.4 Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

II.5 Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} V_i^t U_i, \quad A A^+ = \sum_{i=1}^r U_i^t U_i, \quad A^+ A = \sum_{i=1}^r V_i^t V_i$$

II.6 a) Evaluer $A A^+ U_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et en déduire que $A A^+$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im } A$.

b) Montrer de même que $A^+ A$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\text{Ker } A)^\perp$.

II.7 Etablir les identités suivantes :

$$AA^+ = {}^t(AA^+), A^+A = {}^t(A^+A), AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+ \quad (1)$$

II.8 Etablir les résultats suivants :

$$\text{i) } \text{Im } A = \text{Im } AA^+, \text{Ker } A^+ = \text{Ker } AA^+, \text{Im } A^+ = \text{Im } A^+A, \text{Ker } A = \text{Ker } A^+A.$$

$$\text{ii) } \mathbb{R}^n = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A^+, \mathbb{R}^p = \text{Im } A^+ \oplus \text{Ker } A.$$

II.9 Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = {}^t(AB), BA = {}^t(BA), ABA = A, BAB = B$$

a) Montrer que B vérifie les identités suivantes :

$$\text{i) } B = B^t B^t A = {}^t A^t B B$$

$$\text{ii) } A = A^t A^t B = {}^t B^t A A$$

$$\text{iii) } {}^t A = {}^t A A B = B A {}^t A$$

b) En déduire que $B = A^+$, autrement dit que A^+ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations (1).

II.10 Montrer que $(A^+)^+ = A$ et ${}^t(A^+) = ({}^t A)^+$.

II.11 Evaluer $(A_0 B_0)^+$ et $B_0^+ A_0^+$. A-t-on l'égalité ?

II.12 Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\overline{H} = A^+ H$. On note $d(H, \text{Im } A)$ la distance de H au sous-espace vectoriel $\text{Im } A$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX - AA^+ H$ et $H - AA^+ H$ sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|A\overline{H} - H\|_n \leq \|AX - H\|_n$$

Que vaut alors $d(H, \text{Im } A)$?

b) Montrer que s'il existe $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|A\tilde{H} - H\|_n = \|A\overline{H} - H\|_n$ avec $\tilde{H} \neq \overline{H}$, alors $\|\overline{H}\|_p < \|\tilde{H}\|_p$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $\inf_{X \in \mathbb{R}^2} \|A_0 X - H\|_3$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Pour tout nombre entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction J_n de la variable réelle x par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt .$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

PARTIE I

I.1 Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair.

I.2 Exprimer $J_{-n}(x)$ en fonction de $J_n(x)$.

On supposera dorénavant que n est un nombre entier positif ou nul.

I.3 Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.4 Montrer que l'on a $J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cdot [(n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t)] dt$.

En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_n) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 .$$

PARTIE II

II.1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2pt \cdot \cos(x \sin t) dt ,$$

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin(x \sin t) dt .$$

II.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$ tout entier (on utilisera les développements en série entière des fonctions cosinus ou sinus, selon la parité de n).

II.3 Soit p un nombre entier naturel.

II.3.1 Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \cos 2pt \cdot \sin^{2k} t \cdot dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k} t$ comme combinaison linéaire des $\cos 2qt$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.

En déduire les coefficients $\alpha_{2k}(p)$ du développement en série entière

$$J_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}(p) x^{2k} \text{ de } J_{2p} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

II.3.2 Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin^{2k+1} t \cdot dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k+1} t$ comme combinaison linéaire des $\sin(2q+1)t$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \leq k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.

En déduire les coefficients $\alpha_{2k+1}(p)$ du développement en série entière

$$J_{2p+1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1}(p) x^{2k+1} \text{ de } J_{2p+1} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

II.4

II.4.1 On fixe $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction des valeurs des $J_n(x)$ les coefficients de Fourier des fonctions $\cos(x \sin t)$ et $\sin(x \sin t)$ de la variable t . Ces deux fonctions sont-elles égales à la somme de leurs séries de Fourier ?

II.4.2 En déduire la valeur des sommes $J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(x)$, $J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x)$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(x) \text{ et } J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(x)^2.$$

PARTIE III

On considère l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_\lambda) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 .$$

où λ est un nombre réel donné.

III.1

III.1.1 Montrer que, pour que $x^\lambda z(x)$ soit solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$, il faut et il suffit que z soit solution de l'équation :

$$(B'_\lambda) \quad xz'' + (2\lambda + 1)z' + xz = 0 .$$

III.1.2 Dans le cas où $\lambda = -\frac{1}{2}$, déterminer la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$, et en déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.1.3 En déduire la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

On se propose à présent de chercher les solutions de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $y(x) = x^\lambda z(x)$, où $z(x)$ est la somme d'une série entière.

III.2 On cherche les solutions de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

III.2.1 Etablir la relation qui doit exister pour tout $k \geq 1$ entre a_{k+1} et a_{k-1} pour que z soit solution de (B'_λ) .

On suppose dorénavant que λ n'est pas un entier strictement négatif.

III.2.2 Montrer qu'il existe une unique solution z_λ de (B'_λ) de la forme

$z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, et telle que $a_0(\lambda) = 1$. Calculer $a_{2p}(\lambda)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Quel est le

rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2p}(\lambda)x^{2p}$?

III.3 On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction j_λ par $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$.

III.3.1 On suppose que λ n'est pas un nombre entier.

Montrer que les fonctions j_λ et $j_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

En déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.3.2 Soit n un nombre entier strictement positif.

Comparer j_n à la fonction J_n définie au début du problème.

Vérifier que la fonction z_{-n} définie par $z_{-n}(x) = x^{2n} z_n(x)$ est solution de l'équation (B'_{-n}) .

Fin de l'énoncé



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Dans tout le problème, α désigne un réel de l'intervalle $]0;1[$. Lorsque cela a un sens, on pose

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

Preliminaires

1 : Soit f la fonction 2π -périodique qui coïncide sur $]-\pi, \pi]$ avec $x \mapsto \cos(\alpha x)$. Montrer qu'elle est développable en série de Fourier, puis donner son développement (on pourra linéariser le produit $\cos p \cos q$).

2 : En considérant $f(\pi)$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha} \cot(\alpha \pi).$$

Pourtant, à l'instruction :

$$\text{sum}(1/(k^2 - \alpha^2), k=1..infinity).$$

Le logiciel de calcul formel MAPLE retourne la formule apparemment compliquée :

$$\frac{1}{2\alpha} (\Psi(1 + \alpha) - \Psi(1 - \alpha)).$$

Seules des options spécifiques de MAPLE permettraient de transformer cette formule. On observe des phénomènes analogues sur MATHEMATICA.

L'objet de ce problème est d'éclaircir ce comportement inattendu. Après l'étude d'un endomorphisme sur l'espace des suites, la fonction Ψ est définie en partie II. Les parties I, II et III sont indépendantes.

I L'opérateur différence Δ

On désigne par E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. On notera u_n le terme général d'une suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ de E . A toute suite u de E , on associe la suite $\Delta(u)$ définie par :

$$\forall n \geq 1, [\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n.$$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(A_n)_{n \geq 1} = (n)_{n \geq 1}$, on a $[\Delta(A)]_n = A_{n+1} - A_n = (n+1) - n = 1$. La suite $\Delta(A)$ est ici la suite constante de valeur 1.

1 : Un autre exemple : On définit la suite dite harmonique H par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

Déterminer $\Delta(H)$.

2 : a) Montrer que Δ définit un endomorphisme de E .

b) Soient u une suite de E et a un réel. Montrer qu'il existe une unique suite U de E satisfaisant

$$\Delta(U) = u \text{ et } U_1 = a$$

et donner une expression de U_n en fonction de a et de termes successifs de la suite u .

c) En utilisant ce résultat, préciser ce que sont respectivement $\text{Im}(\Delta)$ et $\text{Ker}(\Delta)$, et en déduire que la dimension de E est infinie.

3 : Soient u et v deux suites de E . Montrer la formule, dite de sommation par parties, valable pour tous p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $q > p$:

$$\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_q v_q - u_p v_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} [\Delta(v)]_k.$$

4 : Application : Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} H_k$ en fonction de n et de H_n pour $n \geq 2$.

II Les fonctions Γ et Ψ d'Euler

1 : Justifier que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ existe et que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2 : Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, la relation valable pour tout réel $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 : a) Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et $t > 0$.

Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon la valeur de t . Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a; b]$:

$$0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

b) En déduire que Γ est de classe C^2 , d'abord sur tout segment $[a; b]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner les expressions intégrales de Γ' et Γ'' .

4 : On pose $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ pour tout $x > 0$. Vérifier que, pour tout $x > 0$:

$$\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln x.$$

Quelle relation différentielle très simple relie les applications $\ln(\Gamma)$ et Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$? En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}.$$

Déterminer alors $\Delta((\Psi(n+\alpha))_{n \geq 1})$ et $\Delta((\Psi(n-\alpha))_{n \geq 1})$.

III Formule des compléments

1 : Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi} \tan^{2x-1} \theta d\theta$ converge. On admet que sa valeur est $\frac{\pi}{2 \sin(\pi x)}$.

2 : Soit x donné dans $]0;1[$. On définit la fonction de deux variables $h(u,v) = \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-(u^2+v^2)}$ où (u,v) appartient au quart de plan $u > 0$ et $v > 0$. On pose : $F(a,b) = \iint_{C(a,b)} h(u,v) du dv$ et $G(\rho, \varphi) = \iint_{S(\rho, \varphi)} h(u,v) du dv$ où :

- $0 < a < b$ et $C(a,b)$ est le carré limité par les quatre droites d'équations cartésiennes : $u = a$, $u = b$, $v = a$ et $v = b$.
- $1 < \rho$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ et $S(\rho, \varphi)$ est le secteur du quart de plan supérieur droit bordé extérieurement par les deux cercles centrés en O et de rayons respectifs $\frac{1}{\rho}$ et ρ , et les deux

droites passant par O et d'angles polaires respectifs φ et $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Faire un dessin de C , puis un dessin de S dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

3 : Transformer $G(\rho, \varphi)$ en utilisant les coordonnées polaires. En déduire $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\varphi \rightarrow 0} G(\rho, \varphi) \right)$.

4 : Montrer que : $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\varphi \rightarrow 0} F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right) \right)$ (on pourra poser $\mu = u^2$ et $V = v^2$).

5 : Soit ρ donné, $\rho > 0$. Justifier les inclusions : $C\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \subset S(\rho, \varphi) \subset C\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right)$ pour φ suffisamment petit (on s'aidera d'un dessin). Quelles inégalités en résultent pour les intégrales $F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$, $G(\rho, \varphi)$ et $F\left(\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho\right)$?

6 : En déduire la formule, dite des compléments, valable pour tout $x \in]0;1[$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Conclusion

1 : Montrer que pour tout $x \in]0;1[$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x).$$

2 : a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $\frac{1}{X^2 - \alpha^2}$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha} (\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha)).$$

3 : a) Montrer que Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales en reprenant les expressions de Γ' et Γ'' calculées en II).

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

4 : Conclure.

Fin de l'énoncé



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 3 heures

*Les calculatrices sont interdites**Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.***Notations et définitions**

On appelle base canonique de $\mathbf{R}^n$ la base $(e_1, \dots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Si un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ vérifie $x_i \geq 0$ (respectivement $x_i > 0$) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $x \geq 0$ (respectivement $x > 0$). Si y est un élément de $\mathbf{R}^n$, $x \geq y$ signifie $x - y \geq 0$, et de même $x > y$ signifie $x - y > 0$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, et par $\mathcal{L}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ si $a_{i,j}$ est le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de A .

On note I_n la matrice unité de $\mathbf{R}^n$ et Id_n l'application identité de $\mathbf{R}^n$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et u l'élément de $\mathcal{L}_n(\mathbf{R})$ admettant A comme matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on note parfois Ax au lieu de $u(x)$ l'image de x par u : $Ax = ((Ax)_1, \dots, (Ax)_n)$, avec $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, est à termes positifs (respectivement strictement positifs) si $a_{i,j} \geq 0$ (respectivement $a_{i,j} > 0$) pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$. On note alors $A \geq 0$ (respectivement $A > 0$).

Les deux parties sont indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

I 1 Dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, donner un exemple de matrice A telle que ni A ni $-A$ ne soient à termes positifs, et pour laquelle il existe un vecteur $x \geq 0$ tel que ni Ax ni $-Ax$ ne soient positifs.

On se place maintenant en dimension n quelconque.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

I 2 Montrer que A est à termes positifs si et seulement si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x \geq 0$, on a $Ax \geq 0$.

I 3 Montrer que A est à termes strictement positifs si et seulement si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x \geq 0$ et $x \neq 0$, on a $Ax > 0$.

I 4

I 4.1 Montrer que tout vecteur $x \geq 0$ est limite d'une suite de vecteurs strictement positifs de $\mathbf{R}^n$.

I 4.2 Montrer réciproquement que si x est limite d'une suite de vecteurs strictement positifs de $\mathbf{R}^n$, on a $x \geq 0$.

I 4.3 Montrer que si, pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$ tel que $x > 0$, on a $Ax > 0$, alors A est à termes positifs. La matrice A est-elle nécessairement à termes strictement positifs ?

I 5 Soient a, b, c trois nombres réels > 0 , et A la matrice (en dimension 3 de nouveau)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

I 5.1 Montrer que $\lambda_1 = a + b + c$ est valeur propre de A , et trouver un vecteur propre associé.

I 5.2 Montrer que le sous-espace propre associé à λ_1 est une droite vectorielle.

I 5.3 Montrer que si λ est une valeur propre de A autre que λ_1 , alors $\lambda \in \mathbf{R}$ et $|\lambda| < \lambda_1$.

Deuxième partie

Soit A une matrice inversible, à termes strictement positifs et symétrique, de valeurs propres réelles distinctes ou non $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rangées par ordre décroissant des valeurs absolues :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

On admettra que :

i) λ_1 est positive et simple : on note $\lambda_1 = r$ et $s = |\lambda_2|$, $s < r$;

ii) les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = r$ sont tous colinéaires à un vecteur $z > 0$: quitte à multiplier z par un scalaire positif, on suppose en outre que $\|z\| = 1$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbf{R}^n$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la norme.

II 1 Soit P la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par z dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, et $Q = I_n - P$. Montrer que, pour tout x élément de $\mathbf{R}^n$, on a les relations suivantes :

$$\text{II 1.1} \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 = \langle x, z \rangle^2 + \|Qx\|^2;$$

$$\text{II 1.2} \quad APx = PAx \text{ et } AQx = QAx;$$

$$\text{II 1.3} \quad \|Ax\|^2 = r^2 \|Px\|^2 + \|AQx\|^2;$$

$$\text{II 1.4} \quad \|AQx\|^2 \leq s^2 \|Qx\|^2.$$

II 2 On pose $t_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$, élément de $\mathbf{R}^n$, et on définit la suite $(t_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} t_{k+1} = \frac{At_k}{\|At_k\|} & \text{si } t_k \neq 0, \\ t_{k+1} = 0 & \text{si } t_k = 0. \end{cases}$$

(Il résulte de l'inversibilité de A que $At_k \neq 0$ si $t_k \neq 0$, de sorte que cette définition a bien un sens.)

II 2.1 Vérifier que, si $t_0 = z$, alors $t_k = z$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On suppose $t_0 \neq z$ dans la suite de la question **II.2**.

II 2.2 Montrer que $t_k > 0$ et $t_k \neq z$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

II 2.3 Prouver que $\langle t_k, z \rangle \in]0,1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que

$$\langle t_{k+1}, z \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} \langle t_k, z \rangle.$$

En déduire que la suite $(\langle t_k, z \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente, puis que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|At_k\| = r.$$

II 2.4 Vérifier que, pour tout $k \geq 0$,

$$\|Qt_{k+1}\| \leq \frac{s}{\|At_k\|} \|Qt_k\|,$$

$$1 - \langle t_{k+1}, z \rangle^2 \leq \left(\frac{s}{\|At_k\|} \right)^2 (1 - \langle t_k, z \rangle^2).$$

En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = z$.

II 2.5 Prouver les identités

$$\langle t_{k+1}, t_k \rangle = \langle Pt_{k+1}, Pt_k \rangle + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle = \frac{r}{\|At_k\|} (1 - \|Qt_k\|^2) + \langle Qt_{k+1}, Qt_k \rangle,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

II 3 A partir des résultats précédents, proposer un algorithme itératif de calcul approché de r et de z .

En supposant disponibles les routines de calcul effectuant un produit matrice $\times$ vecteur et calculant la norme d'un vecteur, on décrira l'initialisation de l'algorithme proposé, le contenu d'une boucle d'itération et la procédure d'arrêt des itérations. On demande de justifier les choix effectués, notamment dans la procédure d'arrêt. En revanche, la description des programmes (organigramme, déclaration des variables, etc) est hors-sujet.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Autour des produits infinis

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite

$(P_n)_{n \geq n_0}$ définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ par : $P_n = \prod_{p=n_0}^n u_p = u_{n_0} \cdot u_{n_0+1} \cdot \dots \cdot u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$, de terme général u_n , converge si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers

un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0 on dit que le produit $\prod_{n \geq n_0} u_n$ diverge.

I. Généralités et exemples

1. En considérant le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que, pour que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.

- 2.** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 1.
- Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$.
 - Montrer que les produits infinis $\prod_{n \geq 0} u_n$ et $\prod_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.
- 3.** On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs.
- Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \ln u_n$ converge.
 - Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
 - Si, de plus, pour tout entier naturel n on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 - u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- 4.** Déterminer la nature des produits infinis suivants :
- $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{4n^2})$.
 - $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$ pour x réel, $x \in]-\pi, \pi[$.
 - $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{x}{n}) e^{-\frac{x}{n}}$ pour x réel, $x \in]0, +\infty[$.
- 5. Application :** Un peu d'histoire...
- Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
 - Si p est entier naturel $p \geq 2$, que vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}$?
 - On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11 \dots$.

Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler (mathématicien suisse) en 1737 (« Introduction à l'analyse infinitésimale ») :

« ...Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs infinis ou finis.

Par exemple, on aura $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$ série où se trouvent tous les

nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux ; c'est-à-dire toutes les puissances de deux.

On aura ensuite $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \text{etc.}$ On ne

retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3. Donc, si au lieu de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ etc.}$, on écrit l'unité divisée par

tous les nombres premiers, et qu'on suppose $P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\text{etc.}}$, on

aura $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$, série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs... »

Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

II. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

Pour α réel et non entier, on définit l'application $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période 2π par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

Pour t réel tel que $\sin t \neq 0$, on pose $\cotan t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

6. Développer f_α en série de Fourier et en déduire que $\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$.

7. Soit $x \in]0, \pi[$, on définit la fonction g sur $[0, x]$ par :

$$g(t) = \cotan t - \frac{1}{t} \text{ si } t \in]0, x] \text{ et } g(0) = 0.$$

a. Montrer que la fonction g est continue sur $[0, x]$ et calculer $\int_0^x g(t) dt$.

b. Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, $g(t) = 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$.

c. Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}) = \frac{\sin x}{x}$ et en déduire le développement eulérien de $\sin x$:

$$\text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[: \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}).$$

8. *Application* : Déterminer $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ (Formule de Wallis).

III. Formule de Weierstrass et constante d'Euler

9. Soit $x \in]0, +\infty[$.

- a. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \cdot t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ (Fonction Gamma d'Euler).

- b. Calculer $\Gamma(1)$.

- c. Montrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

10. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall t \in]0, n] , & f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \\ \forall t \in]n, +\infty[, & f_n(t) = 0 \end{cases}$$

- a. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[: 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$.

- b. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[: \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cdot t^{x-1} dt$.

11. On pose pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[: I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n \cdot u^{x-1} du$.

- a. Déterminer, pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.
 b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x)$.
 c. Démontrer la formule de Gauss :

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[: \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

12. *Application* :

- a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[: \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.
 b. Déterminer alors, pour tout $x \in]0, 1[$, une expression simple de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. (Formule des compléments).

c. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-3t^2} dt$.

13. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n+1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

a. Expliquer simplement pourquoi la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge. Sa limite notée γ est la constante d'Euler.

14. Démontrer la formule de Weierstrass :

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[: \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

(Cette formule permet, par un produit infini complexe, de définir la fonction Γ pour tout

$$z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \text{ par : } \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

15. Application :

a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$: $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$.

b. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \ln t \, dt$.

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Introduction

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On appelle **algèbre** tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{A}$ qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall c \in \mathbb{A}, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca$$

ainsi que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté **1** ou $1_{\mathbb{A}}$ et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \quad a1 = 1a = a$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite **commutative**. La **dimension** d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une **sous-algèbre** de $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{A}$ qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que $\mathbb{A}$. Pour que $\mathbb{B}$ soit une sous-algèbre de $\mathbb{A}$, il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$, qu'il contienne **1** et que :

$$\forall b \in \mathbb{B}, \forall b' \in \mathbb{B}, \quad bb' \in \mathbb{B}$$

On appelle **morphisme d'algèbre** entre deux algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, toute application linéaire f de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ qui vérifie en plus :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall a' \in \mathbb{A}, \quad f(aa') = f(a)f(a') \text{ et } f(1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{B}}$$

Tournez la page S.V.P

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé **isomorphisme** d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n . La **trace** d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A . Une matrice **scalaire** est une matrice de la forme λI_n , où λ est un réel. Une matrice **diagonale** est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

I. Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que :

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$

2. Soit A une matrice non scalaire ; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que

$$B^2 = -I_2 \text{ si, et seulement si, } (\text{tr } A)^2 < 4 \det A$$

4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre $\mathbb{A}$ et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
5. On suppose que A est non scalaire et vérifie :

$$(\text{tr } A)^2 = 4 \det A$$

Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans I.2. Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.
7. On suppose que A est telle que :

$$(\text{tr } A)^2 > 4 \det A$$

Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?

II. Quelques résultats généraux

Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie n .

1. Soit a un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application ϕ_a définie par :

$$\begin{aligned}\phi_a : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ x &\longmapsto ax\end{aligned}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

2. On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{D}$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme ϕ_a dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a)\end{aligned}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z)$.
4. Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.
 - (a) On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ . Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A .
 - (b) En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.
 - (c) On suppose que $\mathbb{A}$ est **intègre**, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme **de l'espace vectoriel** $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = 0 \quad (*)$$

1. Démontrer que n ne peut pas être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n , A , B et AB est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

4. En déduire :

- (a) que les quatre matrices I_n, A, B et AB sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$;
- (b) que $\mathbb{H}$ est un corps.

5. On suppose **dans toute la suite du problème** que $n = 4$ et, en notant J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également $C = AB$.

- (a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition (*). On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base (I_4, A, B, C) de $\mathbb{H}$ sera notée $\mathcal{B}$.
- (b) Soit M une matrice non nulle de $\mathbb{H}$, vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$; quel lien y a-t-il entre M^{-1} et tM ?

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. On appelle **quaternion pur** un élément M de $\mathbb{H}$ tel que $M = -{}^tM$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension trois et de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$. On le note $\mathbb{L}$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathbb{H}$?
2. On munit $\mathbb{L}$ de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base $\mathcal{C}$ soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments M et N de $\mathbb{L}$ est noté $(M|N)$, la norme de M s'écrit $\|M\|$. Vérifier que :

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$$

3. Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.
4. Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de ϕ à $\mathbb{L}$ est un endomorphisme orthogonal.
5. Soient M et N deux quaternions purs. On veut démontrer que si M et N ont même norme, alors il existe $P \in \mathbb{H}$, non nulle, telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

- (a) Commencer par examiner le cas où M et N sont colinéaires.

- (b) On suppose maintenant que M et N ne sont pas colinéaires. Vérifier que si M et N ont même norme :

$$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2(M - N)$$

et en déduire une matrice P non nulle telle que $MP = PN$.

6. Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec α réel et $Q \in \mathbb{L}$, Q est orthogonal à M et à N .
 7. En déduire que tout isomorphisme d'algèbre ϕ de $\mathbb{H}$ dans lui-même est défini par :

$$\phi(M) = P^{-1}MP$$

où P est un élément non nul de $\mathbb{H}$. On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de A et de B , et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent A invariante.

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Cette épreuve comporte deux problèmes totalement indépendants l'un de l'autre.

PROBLEME 1

Dans ce problème, on désigne par :

E la fonction partie entière,

I l'intervalle $]0, +\infty[$,

$\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient la condition : pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ $|f(t)| \leq t$.

Si $f \in \mathcal{A}$ et $x \in I =]0, +\infty[$, on considère
$$F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f(t) dt.$$

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de F .

Préliminaire – Etude de deux fonctions :

On considère pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$: $u_n(x) = e^{-nx}$ et $v_n(x) = ne^{-nx}$.

P.1/ Déterminer l'ensemble de convergence simple D de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ (resp. D' de la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$).

On note désormais $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in D$ et $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ pour $x \in D'$.

P.2/ Expliciter $g(x)$ pour $x \in D$.

P.3/ Etablir (en la justifiant) une relation entre les fonctions g et h .
En déduire l'expression explicite de $h(x)$ pour $x \in D'$.

1/ Une étude de $\mathcal{A}$.

1.1/ On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_0(t) = t$.

Montrer que si $x \in I$ alors l'application $t \mapsto e^{-xt} f_0(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et expliciter $F_0(x) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f_0(t) dt$.

1.2/ Vérifier que si $f \in \mathcal{A}$ et si $x \in I$, alors la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{A}$, la fonction $F : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} f(t) dt$ est bien définie sur I et on

note désormais $F = \mathcal{L}(f)$.

1.3/ Soit $f \in \mathcal{A}$ et $F = \mathcal{L}(f)$.

1.3.1/ Dédurre de ce qui précède que $xF(x)$ admet une limite que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$.

1.3.2/ On suppose de plus que f est continue sur $\mathbf{R}^+$. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I .

2/ Exemple 1 : fonction partie entière.

On considère dans cette question la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_1(t) = E(t)$ (partie entière de t) et soit $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$.

2.1/ Vérifier que la fonction f_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

2.2/ Montrer que la fonction F_1 peut s'exprimer à l'aide de l'une des deux fonctions g ou h , et expliciter $F_1(x)$ pour $x \in I$.

3/ Un deuxième exemple.

On considère dans cette question la fonction f_2 définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_2(t) = E(t) + (t - E(t))^2$ et soit $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$.

3.1/ Montrer que la fonction f_2 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

- 3.2/ La fonction F_2 est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I ?
- 3.3/ Indiquer l'allure du graphe de F_2 sur l'intervalle I .
- 3.4/ Expliciter $F_2(x)$ pour $x \in I$.

PROBLEME 2

Dans tout ce problème, $n \in \mathbf{N}^*$; si $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ avec $p \leq q$ on note $[[p, q]]$ l'ensemble des $k \in \mathbf{N}$ tels que $p \leq k \leq q$.

On désigne par :

$m_{n+1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{R}$,

O_{n+1} l'ensemble des matrices orthogonales de $m_{n+1}(\mathbf{R})$,

D_{n+1} l'ensemble des matrices diagonales de $m_{n+1}(\mathbf{R})$;

si $M \in m_{n+1}(\mathbf{R})$ on note :

$M = (\mu_{i,j})$ avec $(i, j) \in [[1, n+1]] \times [[1, n+1]]$, où $\mu_{i,j}$ désigne l'élément de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice M ,

M^t la matrice transposée de M ,

$\det M$ le déterminant de M ,

f_M l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ est la matrice M ,

M^* la transposée de la comatrice de M (on rappelle la relation $MM^* = M^*M = (\det M)I_{n+1}$, où I_{n+1} désigne la matrice unité de $m_{n+1}(\mathbf{R})$).

Etant donné deux éléments de $\mathbf{R}^n$: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, on associe au couple (a, b) la matrice $A_n(a, b) \in m_{n+1}(\mathbf{R})$ définie par $A_n(a, b) = (\alpha_{i,j})$ avec

$$\alpha_{i,j} = 0 \text{ lorsque } |i - j| \neq 1$$

$$\alpha_{i+1,i} = a_i, \quad \alpha_{i,i+1} = b_i \quad \text{pour } i \in [[1, n]].$$

Par exemple pour $n = 2$ $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$

$$A_2(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \in m_3(\mathbf{R})$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, n fixé, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices $A_n(a, b)$ pour $(a, b) \in (\mathbf{R}^n)^2$.

On se propose d'étudier quelques propriétés des matrices $A_n(a, b)$ et de l'ensemble $\mathcal{E}_n$.

PARTIE I

Etude de $\mathcal{E}_1$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des matrices $A_1 = A_1(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $a_1 \in \mathbf{R}$ et $b_1 \in \mathbf{R}$.

~~I.1/~~ soit $G = A_1(1, 0)$ $H = A_1(0, 1)$

Calculer G^2 , H^2 , GH , HG .

L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est-il stable pour la multiplication ?

~~I.2/~~ Expliciter l'ensemble $\mathcal{E}_1 \cap O_2$ (c'est à dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_1$ qui sont orthogonales).

I.3/ Montrer que toute matrice $A = A_1(a_1, b_1)$ appartenant à $\mathcal{E}_1$ peut s'écrire sous la forme $A = U\Delta$ avec $U \in \mathcal{E}_1 \cap O_2$ et $\Delta \in D_2$; préciser le nombre de décompositions.

I.4/ On considère une matrice $A = A_1(a_1, b_1) \in \mathcal{E}_1$.

I.4.1/ On suppose $a_1 b_1 \neq 0$. Justifier l'existence de A^{-1} ; la matrice A^{-1} appartient-elle à $\mathcal{E}_1$?

I.4.2/ La matrice A est-elle diagonalisable dans $m_2(\mathbf{R})$

- lorsque $a_1 b_1 < 0$?

- lorsque $a_1 b_1 > 0$?

I.4.3/ On suppose que $a_1 b_1 = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a_1 et b_1 pour que la matrice A soit diagonalisable dans $m_2(\mathbf{R})$.

I.5/ On considère deux matrices de $\mathcal{C}_1$:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & t \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$$

I.5.1/ Les deux matrices K et L sont-elles semblables dans $m_2(\mathbf{R})$ lorsque $xy \neq zt$?

I.5.2/ On suppose que $xy = zt \neq 0$.

Les deux matrices K et L sont-elles semblables dans $m_2(\mathbf{R})$?

PARTIE II

Etude de $\mathcal{C}_n$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$; dans le but de simplifier, on notera $d_n(a, b)$ ou simplement d_n le déterminant de la matrice $A = A_n(a, b)$.

II.1/ Calcul de d_n .

II.1.1/ Calculer d_2 .

II.1.2/ Pour $n \geq 3$ exprimer d_n fonction de a_n, b_n et d_{n-2} .

II.1.3/ Quelle est la valeur de d_{2p} pour $p \in \mathbf{N}^*$?

II.1.4/ Calculer d_{2p+1} pour $p \in \mathbf{N}$, en fonction des a_i et des b_i , $i \in \llbracket 1, 2p+1 \rrbracket$.

II.2/ Liens entre $\mathcal{C}_n$, O_{n+1} et D_{n+1} .

II.2.1 On suppose qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{C}_n \cap O_{n+1}$. Soit $\Delta \in D_{n+1}$, on pose $A = U\Delta$; vérifier que $A \in \mathcal{C}_n$ et que $A^t A \in D_{n+1}$.

II.2.2/ Soit $A \in \mathcal{C}_{2p}$; existe-t-il $U \in \mathcal{C}_{2p} \cap O_{2p+1}$ et $\Delta \in D_{2p+1}$ telles que $A = U\Delta$?

II.2.3/ Pour $n = 3$ on considère la matrice $A = A_3(a, b) \in \mathcal{C}_3$ avec $a = (1, 3, 5)$ $b = (2, 4, 6)$. Existe-t-il $U \in \mathcal{C}_3 \cap O_4$ et $\Delta \in D_4$ telles que $A = A_3(a, b) = U\Delta$?

II.2.4/ On suppose que $n = 2p + 1$ et que $A = A_{2p+1}(a, b) \in \mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$.

~~II.2.4.1/~~ Quelles sont les valeurs possibles pour a_1, b_1, a_2, b_2 ?

~~II.2.4.2/~~ Préciser l'ensemble $\mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$ et son cardinal.

~~II.2.4.3/~~ Soit $A \in \mathcal{E}_{2p+1}$ telle que $A^t A \in D_{2p+2}$ et $\det A \neq 0$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{E}_{2p+1} \cap O_{2p+2}$ et $\Delta \in D_{2p+2}$ telles que $A = U\Delta$.

II.3/ Matrices symétriques de $\mathcal{E}_n$.

On considère dans cette question la matrice $A = A_n(a, a)$ pour $a \in \mathbf{R}^n$.

II.3.1/ Justifier l'affirmation :

Pour tout $a \in \mathbf{R}^n$ la matrice A est diagonalisable dans $M_{n+1}(\mathbf{R})$.

Si $\lambda_j, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ désignent les valeurs propres de f_A , préciser la valeur de $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j$.

II.3.2/ Pour $(x, y) \in (\mathbf{R}^{n+1})^2$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de x et y . On associe à $A = A_n(a, a)$ la forme bilinéaire φ_A (notée simplement φ) définie par :

$$\text{pour tout } (x, y) \in (\mathbf{R}^{n+1})^2 \quad \varphi(x, y) = \langle x, f_A(y) \rangle.$$

La forme bilinéaire φ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{n+1}$? (on pourra considérer $\varphi(x, x)$ pour x vecteur propre de l'endomorphisme f_A).

II.4/ Comatrices et ensemble $\mathcal{E}_n$.

~~II.4.1/~~ Montrer que pour toute matrice $A = A_1(a_1, b_1) \in \mathcal{E}_1$ la matrice A^* est élément de $\mathcal{E}_1$.

Dans la suite on suppose que $n \geq 2$.

~~II.4.2/~~ Si $A \in \mathcal{E}_n \cap O_{n+1}$ la matrice A^* appartient-elle à $\mathcal{E}_n$?

II.4.3/ Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que pour toute matrice $A \in \mathcal{E}_n$ la matrice A^* soit élément de $\mathcal{E}_n$?

Fin de l'énoncé.



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Etant donné un entier naturel n , on note $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$.

Cette épreuve comporte trois parties.

Dans la première partie, on étudie les solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Dans la deuxième partie, qui est indépendante de la première partie, on étudie des suites numériques définies par des relations de récurrence.

La troisième partie utilise les résultats des parties précédentes pour obtenir un encadrement de $\frac{1}{th(1)}$ par des nombres rationnels (th désignant la fonction tangente hyperbolique).

PARTIE I

Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère les équations différentielles (E_n) $x^2 y'' + (n - n^2 - x^2) y = 0$, où x désigne une variable réelle et $y = y(x)$ une fonction deux fois dérivable.
On remarque que (E_0) et (E_1) sont les mêmes équations.

I.1. On prend $n = 0$ et on étudie l'équation différentielle (E_0) .

I.1.1. Déterminer les solutions de (E_0) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$.

I.1.2. L'équation (E_0) a-t-elle des solutions sur $\mathbf{R}$?

I.2. On prend $n \geq 2$ et on suppose que l'équation différentielle (E_n) a une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$, de rayon de convergence $R > 0$.

I.2.1. Calculer u_0 et u_1 .

I.2.2. Pour $k \geq 2$, donner une relation entre u_k et u_{k-2} .

I.2.3. Calculer les coefficients u_k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

I.2.4. Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer les coefficients u_{n+2p+1} .

I.2.5. Peut-on calculer u_n ? On justifiera la réponse.

I.2.6. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

Pour k et n dans $\mathbf{N}$, on note $C_{k,n} = \frac{2^n (k+n)!}{k! (2k+2n)!}$ et on considère les fonctions

φ_n définies pour x réel par $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k,n} x^{2k+n}$ lorsque la série converge.

I.3.

I.3.1. Exprimer $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

I.3.2. Montrer que les fonctions φ_n sont indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$.

I.4.

I.4.1. Calculer le quotient $\frac{C_{k,n+1}}{C_{k,n}}$.

I.4.2. En déduire l'expression de $C_{k,n} - (2n+1) C_{k,n+1}$ en fonction de k et de $C_{k,n+1}$.

I.4.3. Pour $x \neq 0$, exprimer $\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x} \varphi_{n+1}(x)$ en fonction de $\varphi_{n+2}(x)$.

I.4.4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_n) . En reprenant la notation de I.2, on écrit $\varphi_n(x) = y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$.

Quelle est la valeur de u_n ?

I.5. Dans cette question on suppose $x \neq 0$.

I.5.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_n(x) \neq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on définit $\gamma_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}$. Dans la suite de la question, on pourra utiliser I.4.3.

I.5.2. On suppose $0 < x \leq 1$, montrer l'inégalité $\gamma_n(x) > 1$.

I.5.3. Montrer la relation $\gamma_n(x) = \frac{2n+1}{x} + \frac{1}{\gamma_{n+1}(x)}$.

PARTIE II

On note S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.

Etant donné une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de S , on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$$

puis, pour $n \geq 2$, par :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

II.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q_n \geq n$.

II.2. Relations entre les p_n et les q_n .

II.2.1. Pour $n \geq 1$, calculer $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$.

II.2.2. Pour $n \geq 2$, calculer $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_n = \frac{p_n}{q_n}$.

II.3. Etude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.3.1. Pour $n \geq 1$, calculer $x_n - x_{n-1}$ et pour $n \geq 2$, calculer $x_n - x_{n-2}$ en fonction des a_k et des q_k .

II.3.2. En déduire que les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

II.3.3. On note α la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On se propose de démontrer par l'absurde que α est un nombre irrationnel.

En supposant que $\alpha = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, et en utilisant l'encadrement

$0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n}$, déterminer un entier k_n vérifiant $0 < k_n < \frac{d}{q_{2n+1}}$. En déduire que α n'est pas rationnel.

Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul fixé ; on considère la fonction f définie pour tout t réel par $f(t) = t^2 - \lambda t - 1$.

II.4. Etude de la fonction f .

II.4.1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-1, \lambda + 1]$.

II.4.2. On note r_1 et r_2 , avec $r_1 < r_2$, les deux racines de f . Déterminer le signe et la partie entière de chacune des racines.

II.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend $a_n = \lambda$ et on considère la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

II.5.1 pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, calculer p_i , et q_i .

II.5.2. Pour $n \geq 1$, exprimer q_n en fonction des p_k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de x_n en fonction des q_k pour $k \in \mathbb{N}$.

II.5.3. Exprimer q_n en fonction de r_1 , r_2 et n .

II.5.4. Dédurre des questions précédentes une expression de x_n en fonction de r_1 , r_2 et n .

II.5.5. En déduire la valeur de la limite α de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de r_1 et r_2 .

II.5.6. On prend $\lambda = 3$. Calculer q_n pour $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$. En déduire deux nombres rationnels qui encadrent α à 10^{-4} près.

PARTIE III

Etant donné une suite de nombres réels $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $b_n > 0$, on définit la suite dont le terme général d'indice n est noté $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ par :

$$[b_0] = b_0, [b_0, b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1}, \text{ puis pour } n \geq 1, \left[b_0, \dots, b_n, b_{n+1} \right] = \left[b_0, \dots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}} \right].$$

En particulier $\left[b_0, b_1, b_2 \right] = \left[b_0, b_1 + \frac{1}{b_2} \right].$

III.1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de S . On lui associe les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies dans II.

III.1.1 Ecrire $[a_0, a_1]$ et $[a_0, a_1, a_2]$ sous forme de fractions en fonction des a_i .

III.1.2 On suppose que, pour un entier $n \geq 2$ fixé, on a $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$.

Quel nombre rationnel obtient-on en remplaçant dans $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n]$, le terme a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$?

III.1.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $[a_0, \dots, a_n] = x_n$.

III.1.4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$.

Dans II.3, on a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre irrationnel α . On note $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$ et on note F l'application de S dans l'ensemble des nombres irrationnels définie par : $F(a) = \alpha = [a_0, a_1, \dots]$. On admet que F est surjective.

III.2. Soit α un nombre irrationnel et soit $a \in S$ une suite telle que $\alpha = F(a) = [a_0, a_1, \dots]$.

III.2.1 Comparer x_0, x_1 et α . En déduire que a_0 est la partie entière de α .

III.2.2 Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \dots]$. Montrer l'égalité $\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$.

Donner une relation entre α_k, α_{k+1} et a_k .

III.2.3 Décrire un algorithme qui donne la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire que F est bijective.

III.2.4 On prend $\alpha = \sqrt{3}$ et on note $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ la suite vérifiant $F(a) = \sqrt{3}$. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et exprimer α_1, α_2 , et α_3 en fonction de $\sqrt{3}$. Déterminer la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III.3 Soit $\mu \in \mathbb{N}^*$. On note th la fonction tangente hyperbolique.

III.3.1 Déduire des parties précédentes qu'il existe une suite $a \in S$ telle que $F(a) = \frac{1}{th\left(\frac{1}{\mu}\right)}$ et expliciter les termes de cette suite (on pourra utiliser les résultats du I).

III.3.2 On choisit $\mu = 1$. Pour $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ donner le tableau des entiers a_n, p_n, q_n .
En déduire deux nombres rationnels qui donnent un encadrement de $\frac{1}{th(1)}$ à 10^{-4} près.

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1
Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX .

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la convergence a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme quelconque.

Partie I

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ tels que $T = P^{-1}AP$.

I.1 Pour n fixé, on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et on considère une matrice M de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M admet au moins une valeur propre.

b) Soit λ une valeur propre de M . Montrer qu'il existe $Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}$$

c) En déduire qu'il existe $H \in GL_n(\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & HSH^{-1} \end{pmatrix}$$

d) On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H \end{pmatrix}$. Montrer que R est inversible et exprimer R^{-1} .

e) Calculer $R^{-1}Q^{-1}MQR$ et en déduire que M est trigonalisable.

I.2 Déduire de la question précédente que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I.3 Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La matrice G est-elle diagonalisable ?

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Montrer que G admet un unique vecteur propre u dont la première composante dans la base $\mathcal{B}$ est égale à 1 et vérifier que $\mathcal{B}_1 = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$. Calculer $Q^{-1}GQ$ et en déduire, en s'inspirant de la méthode décrite aux questions **I.1** et **I.2**, $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}GP = T$.

I.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si T est une matrice triangulaire supérieure semblable à A , que représentent les éléments diagonaux de T ?

I.5 Soit $S = (s_{ij})$ et $T = (t_{ij})$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que ST est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_{11}t_{11}, s_{22}t_{22}, \dots, s_{nn}t_{nn}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de T^k ?

I.6 Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$.

I.7 Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \rightarrow \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.8 En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(AB) \leq C N(A)N(B)$$

I.9 Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $(P^{-1}A_kP)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

I.10 a) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $(T^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $(\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

II.1 a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X)$$

c) Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite :

$$\tilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}$$

d) Montrer que : $\widetilde{N_\infty}(A) \leq M_A$.

e) On reprend dans cette question la matrice G introduite en **I.3**. Déterminer un vecteur X_0 de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(G)$.

II.2 Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} \text{ si } a_{i_0 j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0 j} = 0$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

II.3 Montrer :

a) $\widetilde{N}(A) = 0 \iff A = 0_n$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$.

c) En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$.

d) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.

e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$.

f) Déduire de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N .

II.4 a) En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)$$

b) Donner un exemple simple de matrice A non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N}_\infty(A)$.

c) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte :

$$\rho(A) < \widetilde{N}(A)$$

II.5 Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$.

II.6 a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k \geq k_\varepsilon \implies \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k \right)$$

d) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\widetilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B, A > B, A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0, A - B > 0, B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

III.1 Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

III.2 A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.

b) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.

c) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B)$.

d) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.

e) Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.

III.3 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à α . Montrer que α est valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A)$$

III.4 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note α_i la somme des termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$. On définit la matrice $B = (b_{ij})$ par $B = 0_n$, si $\alpha = 0$ et

$b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} a_{ij}$, si $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la matrice B ainsi construite que :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$$

III.5 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)$ un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$. On note D_x la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour termes diagonaux $x_1, x_2, \dots, x_n$. Calculer les éléments de la matrice $D_x^{-1}AD_x$ et en déduire :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}$$

III.6 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :

$$\rho(A) = \sup_{X > 0} \left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{X > 0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right)$$

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

★★★★

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

★★★★

La partie IV peut être traitée indépendamment des autres.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction polynôme de la variable réelle x définie par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$

I.1 Donner une expression explicite des fonctions polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 .

I.2 Exprimer $P_n(-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

I.3 Calculer $P_n(0)$ et $P'_n(0)$.

I.4 En effectuant de deux façons différentes le calcul de $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \left[(x^2 - 1)^{n+1} \right]$, montrer que l'on a :

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

I.5 Soit k un nombre entier compris au sens large entre 0 et $n-1$. Préciser l'ordre de multiplicité de $+1$ et -1 en tant que racines de la dérivée d'ordre k de $(x^2 - 1)^n$.

Tournez la page SVP

En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de $(x^2 - 1)^n$, montrer que P_n admet n racines réelles distinctes, toutes comprises strictement entre -1 et $+1$.

PARTIE II

Soit f la fonction de deux variables réelles x, y définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + x^2}}$$

II.1 Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels $f(x, y)$ est définie.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2|x||y| + |x|^2 < 1$.

On admettra que l'on a sur $\mathcal{E}$ un développement en série de f de la forme :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y) x^n \quad (E)$$

où les fonctions A_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que les dérivées partielles de f à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables x et y , peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égalité (E).

II.2 Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{E}$.

II.3 Calculer $A_n(0)$ et $A'_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4

II.4.1 Calculer $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

En déduire que l'on a $yA'_0(y) = 0$, et pour tout $n \geq 1$, $yA'_n(y) - A'_{n-1}(y) = nA_n(y)$ (1).

II.4.2 Calculer $(1 - 2xy + x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (x - y)f(x, y)$.

En déduire que l'on a $A_1(y) - yA_0(y) = 0$, et pour tout $n \geq 2$:

$$nA_n(y) - (2n - 1)yA_{n-1}(y) + (n - 1)A_{n-2}(y) = 0 \quad (2)$$

II.4.3 En dérivant les relations obtenues à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$, la relation $A'_n(y) - yA'_{n-1}(y) = nA_n(y)$ (3).

II.4.4 Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - y^2)A''_n(y) - 2yA'_n(y) + n(n + 1)A_n(y) = 0.$$

Exprimer $A_n(y)$ en fonction de $P_n(y)$ pour tout $y \in]-1, +1[$.

PARTIE III

On considère les fonctions F , C et S des deux variables réelles x et θ définies pour $|x| < 1$ et θ quelconque par :

$$F(x, \theta) = \frac{1}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad C(x, \theta) = \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}, \quad S(x, \theta) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}.$$

III.1 Pour x fixé tel que $|x| < 1$, déterminer les développements en séries de Fourier

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$ de $C(x, \theta)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$ de $S(x, \theta)$ considérées comme fonctions de la

variable θ . On montrera que $C(x, \theta) + iS(x, \theta) = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$.

A-t-on les égalités $C(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \cos n\theta$ et $S(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \sin n\theta$ pour tout couple (x, θ)

appartenant à $]-1, +1[\times \mathbb{R}$?

III.2 Dédurre de la question précédente le développement en série de Fourier $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$ de $F(x, \theta)$ considérée comme fonction de la variable θ , ainsi que le développement en série entière $F(x, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(\theta) x^n$ de $F(x, \theta)$ considérée comme fonction de la variable x .

III.3 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=0}^n P_k(\cos \theta) P_{n-k}(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$, cette dernière fonction de θ étant supposée prolongée par continuité lorsque θ est multiple entier de π .

PARTIE IV

Soit λ un nombre réel non entier relatif. On considère l'équation différentielle linéaire en la fonction inconnue z de la variable réelle x , à valeurs réelles :

$$(L_\lambda) \quad (1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + \lambda(\lambda+1)z(x) = 0.$$

On se propose de déterminer les solutions de (L_λ) développables en série entière au voisinage de 0.

IV.1 Soit $z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Déterminer la relation qui doit lier α_{n+2} et α_n pour que z soit solution de (L_λ) .

IV.2 En déduire l'expression de α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.3 Quel est le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues ?

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations du problème

Soit n un entier naturel non nul, $M_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$.

i indique le numéro de la ligne de a_{ij} .

j indique le numéro de la colonne de a_{ij} .

On appelle trace de A et on note $tr(A)$ le nombre réel $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

tA désigne la transposée de la matrice A .

$GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques.

$A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$.

PARTIE I

1) Montrer que l'application tr est une application linéaire.

2) Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$.

Est-ce que l'on a $tr(AB) = tr(A) tr(B)$?

Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.

3) Soit P dans $GL_n(\mathbb{R})$ et A dans $M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

4) Soit A et B , 2 matrices semblables.

Que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ?

Que représente $tr(A)$ relativement aux coefficients du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A ?

Retrouver ainsi le résultat de la question 3).

Tournez la page S.V.P.

5) Existe-t-il des matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = 2I_n$?

6) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

PARTIE II

Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On définit $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$.

1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\rightarrow \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

On considérera l'espace vectoriel euclidien $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pour toute la suite et $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée.

On vérifiera que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

2) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle S, A \rangle = 0$.

En déduire que $A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = A' + A''$ l'unique décomposition de A selon la somme directe $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Justifier que $\forall M, M \in S_n(\mathbb{R}), \|A - M\|^2 \geq \|A - A'\|^2$.

En déduire que

$$\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \left\| \frac{A - A'}{2} \right\|^2.$$

5) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (1-x)^2 + (4-z)^2 + (2-y)^2 + (3-y)^2$.

Montrer que f a un minimum absolu que l'on calculera. On précisera en quel point ce minimum est atteint.

6) Soit A, B, C dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^t A = A^t A$ et $B^t B = B^t B$.

Calculer $\|AC - CB\|^2$ et $\|A^t C - C^t B\|^2$.

A l'aide de I. 2) vérifier que

$$\|A^t C - C^t B\|^2 - \|AC - CB\|^2 = 0$$

En déduire que $(AC = CB) \Leftrightarrow (A^t C = C^t B)$.

PARTIE III

L'objectif de cette partie est d'établir la propriété suivante par récurrence sur n .

$A(n)$: soit $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ un ensemble de p matrices carrées d'ordre n symétriques permutant 2 à 2 :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, S_i S_j = S_j S_i$$

Alors il existe une matrice orthogonale Ω d'ordre n telle que

$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \Omega^{-1} S_i \Omega$ soit une matrice diagonale.

1) Que peut-on dire de la propriété pour $n = 1$?

2) On suppose que n est supérieur ou égal à 2 et que la propriété est vraie jusqu'au rang $(n-1)$.

Les matrices symétriques $S_1, \dots, S_p$ d'ordre n permutent 2 à 2.

2.1) Que peut-on dire si toutes les matrices $S_1, \dots, S_p$ sont diagonales ?

2.2) On suppose dans toute la suite que S_1 n'est pas une matrice diagonale. Justifier l'existence d'un entier r , d'un réel λ , d'une matrice diagonale Δ d'ordre $n-r$ et d'une matrice orthogonale Ω_1

d'ordre n tels que : $1 \leq r \leq n-1, \Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{bmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$ où 0 désigne des blocs nuls et où λ ne figure pas sur la diagonale de Δ .

2.3) Pour $1 \leq i \leq p$, on écrit la matrice $\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{bmatrix}$ sous forme de 4 blocs où A_i est carré d'ordre r et C_i carré d'ordre $n-r$.

Montrer que $D_i = {}^t B_i$ et que A_i et C_i sont symétriques.

2.4) Pour $1 \leq i \leq p$, montrer que $S_1 S_i = S_i S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda B_i = B_i \Delta \\ \Delta C_i = C_i \Delta \end{cases}$.

En déduire que B_i et D_i sont des blocs nuls.

2.5) Montrer que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$

$$S_i S_j = S_j S_i \Leftrightarrow \begin{cases} A_i A_j = A_j A_i \\ C_i C_j = C_j C_i \end{cases}$$

2.6) En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\{A_1, \dots, A_p\}$ et à $\{C_1, \dots, C_p\}$ terminer la démonstration.

- 3) On considère les deux ensembles de matrices d'ordre deux $\{A_1, A_2, A_3\}$ et $\{C_1, C_2, C_3\}$ définis par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- 3.1) Vérifier que ces deux ensembles vérifient l'hypothèse figurant dans A(n) au début de la partie III et donner un exemple de matrices orthogonales Ω_2 et Ω'_2 telles que $\Omega_2^{-1}A_i\Omega_2$ et $(\Omega'_2)^{-1}C_i\Omega'_2$ soient des matrices diagonales à préciser.

- 3.2) Soit les matrices d'ordre 4 écrites par blocs $S_i = \begin{bmatrix} A_i & O \\ O & C_i \end{bmatrix}$, $1 \leq i \leq 3$.

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres communs à S_1, S_2, S_3 et indiquer les valeurs propres correspondantes pour chaque matrice.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème comprend quatre parties très largement indépendantes, autour de la Lemniscate de Bernoulli: étude d'une propriété angulaire et équation différentielle associée, représentation graphique, calcul de l'aire et expression de la longueur à l'aide de diverses intégrales, algorithme de calcul approché de la longueur par approximations polygonales.

PARTIE I

Dans cette partie, on cherche des courbes planes Γ birégulières dont les tangentes satisfont à une condition angulaire.

Les courbes seront définies par une équation polaire, $\rho = f(\theta)$ où f est de classe C^∞ sur un intervalle J , relativement à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct du plan. On utilise les notations usuelles suivantes :

$$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} ;$$

Le point $M(\theta)$ décrit la courbe ; il est défini par $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho \vec{u}(\theta)$.

$\vec{T}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire de la tangente en un point $M(\theta)$ quelconque de la courbe Γ ; les angles de vecteurs α et V sont définis par $\alpha = (\vec{i}, \vec{T}(\theta))$ et $V = (\vec{u}(\theta), \vec{T}(\theta))$.

Les courbes cherchées sont celles pour lesquelles, pour tout θ , la tangente au point $M(\theta)$ est orthogonale à la droite engendrée par le vecteur $\vec{u}(3\theta)$.

1. Vérifier que la condition imposée est équivalente à : $\forall \theta \in J, \quad V = 2\theta + \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi$.
2. En déduire que cette condition est vérifiée si et seulement si f est une solution non nulle de l'équation différentielle $\mathcal{E} : f'(\theta)\cos 2\theta + f(\theta)\sin 2\theta = 0$.

3. De quel type est l'équation différentielle $\mathcal{E}$? Citer précisément le théorème de résolution correspondant à ce type d'équation (structure et expression de l'ensemble des solutions). Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$.
4. On note f_λ la solution de $\mathcal{E}$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$ qui vérifie la condition initiale $f_\lambda(0) = \lambda$ (λ réel non nul), et on note C_λ la courbe d'équation polaire $\rho = f_\lambda(\theta)$. Par quelle transformation géométrique la courbe C_μ est-elle l'image de la courbe C_λ (λ et μ réels distincts non nuls) ?
5. L'équation différentielle $\mathcal{E}$ a-t-elle des solutions non nulles définies sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$?
6. On admet que toute solution de $\mathcal{E}$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$ est développable en série entière.
 - 6.1. Déterminer, par identification dans l'équation différentielle $\mathcal{E}$, les termes de degré inférieur ou égal à trois de la solution f_1 (telle que $f_1(0) = 1$).
 - 6.2. Donner les développements limités en 0 à tout ordre de $x \mapsto \cos 2x$ et de $u \mapsto (1+u)^{1/2}$, et retrouver les résultats de la question précédente par une autre méthode.
 - 6.3. Calculer les valeurs en 0 des trois premières dérivées de f_1 .

PARTIE II

1. Soit C_1 la courbe d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - 1.1. Étudier et représenter graphiquement la courbe C_1 (unité = 10 cm). Préciser les prolongements par continuité en $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ et l'existence d'une demi-tangente en ces points.
 - 1.2. Déterminer et dessiner les points à tangente horizontale ou verticale.
 - 1.3. Déterminer et dessiner le repère de Frénet, ainsi que le centre et le cercle de courbure au point d'angle polaire $\theta = 0$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.
3. On définit la longueur L de C_1 comme la limite, si elle existe, quand α tend vers $\frac{\pi}{4}$, de la longueur de la restriction de C_1 à l'intervalle $[-\alpha, +\alpha] \subset \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$. Démontrer que L existe et que $L = I$.

4. Montrer que L peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$4.1. L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}}.$$

$$4.2. L = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \text{ (on pourra poser } u = \sqrt{\cos(\varphi)} \text{)}.$$

5. Calculer l'aire A du domaine Δ intérieur à C_1 en utilisant la formule $A = \iint_{\Delta} dx dy$ et un passage en coordonnées polaires.

PARTIE III

1. Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ est-elle convergente?

2. Vérifier que $B(\beta, \alpha) = B(\alpha, \beta)$.

3. En posant $t = \sin^2(\theta)$, prouver que

$$\forall (\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2, B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1}(\theta) \cos^{2\beta-1}(\theta) d\theta.$$

4. Montrer que $L = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

PARTIE IV : algorithmique

Préciser quel est le logiciel de calcul formel que vous avez étudié pendant votre préparation au concours et utiliser son langage pour la question 2.

On se propose de calculer une valeur numérique approchée de $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}}$ par une méthode géométrique (approximations polygonales).

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, et tout entier k compris entre 0 et n , on note M_k^n le point de C_1 d'angle polaire $\frac{k\pi}{4n}$, et L_n la somme des longueurs des segments $M_{k-1}^n M_k^n$ pour k variant de 1 à n , c'est-à-dire $L_n = \sum_{k=1}^n \left\| \overrightarrow{M_{k-1}^n M_k^n} \right\|$, pour la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

1.1. Pour $n = 1$, calculer les coordonnées cartésiennes des deux points M_0^1 et M_1^1 , et dessiner le segment $M_0^1 M_1^1$. Calculer $2L_1$.

- 1.2. Pour $n = 2$, calculer les coordonnées cartésiennes des trois points M_k^2 , et dessiner les deux segments $M_0^2 M_1^2$ et $M_1^2 M_2^2$. Donner une valeur numérique approchée de $2L_2$.
- 1.3. Pour $n = 4$, dessiner les segments $M_{k-1}^4 M_k^4$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Écrire un algorithme (ou une procédure ou un programme) qui calcule et affiche les valeurs numériques approchées des premiers termes de la suite $(2L_{2^p})_{p \in \mathbb{N}}$, jusqu'au plus petit entier $p > 1$ vérifiant $|2L_{2^{p-1}} - 2L_{2^p}| \leq 10^{-3}$.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME I

On note I l'intervalle $] -1, +\infty[$ et on définit sur I la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)x} & \text{si } x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Etude de f

- 1) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur I .
- 2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I et donner l'allure de sa courbe représentative (on pourra être amené à dériver deux fois la fonction $x \mapsto (2x+1)\ln(1+x) - x$).
- 3) On définit sur I les fonctions g et h par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{1+x}$$

- a) Montrer que la fonction g est de classe C^∞ sur I .
En déduire que f l'est également.
- b) Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0)$ et $h^{(n)}(0)$.
- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j}$.

Partie II : Développement en série entière

Le but de cette partie est de montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

- 1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -\frac{3}{2} \\ \forall n \geq 2, u_n = -\frac{2n+1}{n+1} u_{n-1} - \frac{n}{n+1} u_{n-2} \end{cases}$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p}$.
- b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est égal à 1.

2) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x+1)^2 y' + (x+1)(2x+1)y = 1$$

- a) Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
- b) Montrer que (E) admet une unique solution sur I , et que cette solution est f .
- c) Montrer qu'il existe une unique série entière – que l'on précisera – de rayon de convergence $R > 0$, et solution de (E) sur $] -R, R[$.
- d) Dédurre de ce qui précède que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Partie III : Calcul d'une intégrale

A. 1) a) Etablir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)t} dt$.

b) On note J sa valeur. Vérifier que $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$.

2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x > 0$, la somme $\sum_{k=1}^n e^{-kx}$.

3) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $J_k = \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| J - \sum_{k=1}^n J_k \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.

5) En déduire que $J = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

(On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le fait que la courbe de la fonction exponentielle se situe au dessus de sa tangente en son point d'abscisse nulle.)

6) Déterminer n tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ soit une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

(On ne demande pas de déterminer effectivement cette valeur approchée.)

B. Soit θ la fonction de la variable réelle x , périodique de période 2π , telle que $\theta(x) = x^2$ pour tout x dans $[-\pi, \pi]$.

- 1) Déterminer la série de Fourier de θ .
- 2) Justifier que θ est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire la valeur exacte de J .

PROBLEME II

On munit ici $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\mathbf{B}$ et on identifie :

- Tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ à la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de ses composantes x et y dans $\mathbf{B}$.
- Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ à sa matrice M dans $\mathbf{B}$, ce qui donne un sens à des écritures comme $\text{Im } M$, $\text{Ker } M$...

Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $\varphi(V)$ (resp. $\psi(M)$) la somme des carrés des deux composantes de V (resp. des quatre coefficients de M) :

$$\varphi(V) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \psi(M) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

On note enfin T l'ensemble des matrices réelles M carrées d'ordre 2 vérifiant à la fois :

- M est symétrique.
- M est nulle ou est de rang égal à 1.
- M a des valeurs propres positives ou nulles.

Partie I : Exemples de matrices appartenant ou non à T

Etudier l'appartenance à T des trois matrices A , B et C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Etude des matrices appartenant à T

1) T est-il un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?

2) Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, on considère la matrice carrée d'ordre deux

$M = V'V$, où $'V$ désigne la transposée de V .

a) Comparer $\psi(M)$ et $[\varphi(V)]^2$ et montrer que M est nulle si et seulement si V est nul.

b) Montrer que $MV = \varphi(V)V$ et que $M^2 = \varphi(V)M$.

c) Déterminer en fonction de V les valeurs propres et les sous-espaces propres de M lorsque $V \neq 0$.

d) Etablir que, quel que soit $V \in \mathbb{R}^2$, M appartient à T .

3) On considère réciproquement une matrice M non nulle de T .

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul X appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $\text{Im } M = \text{Vect}(X)$, puis un vecteur non nul Y appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $M = X'Y$.

b) Montrer, en utilisant la symétrie de la matrice M , qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que $Y = kX$.

- c) Montrer enfin que k est strictement positif et en déduire l'existence d'un vecteur non nul V tel que $M = V'V$.
- 4) On considère l'application f associant à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ la matrice carrée $f(V) = V'V$.
- f est-elle linéaire ?
 - f est-elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans T ?
 - f est-elle surjective de $\mathbb{R}^2$ dans T ?

Partie III : Approximation d'une matrice symétrique d'ordre 2 par une matrice de l'ensemble T

On considère dans cette question deux nombres réels p et q tels que $0 < p < q < 1$ et $p + q = 1$ et la matrice symétrique A définie par $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. L'objectif de cette partie est de trouver les matrices M appartenant à T , qui minimisent l'expression $\psi(A - M)$.

- La matrice A appartient-elle à T ?
- On considère $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $A - V'V$, puis exprimer en fonction de x et y la quantité $F(x, y) = \psi(A - V'V)$.
- Calculer les dérivées partielles de F par rapport aux deux variables x et y , puis en déduire deux conditions nécessaires pour que F présente un extremum en (x, y) .
- Résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

En déduire les seuls points en lesquels F est susceptible de présenter un extremum.

- Donner un équivalent de $F(x, x) - F(0, 0)$ et de $F(x, -x) - F(0, 0)$ quand x tend vers 0. La fonction F présente-t-elle un extremum en $(0, 0)$?
- Etablir pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité suivante :

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2$$

En déduire le minimum de l'expression $\psi(A - V'V)$ lorsque V décrit $\mathbb{R}^2$, ainsi que les vecteurs V réalisant ce minimum.

- Montrer enfin qu'il existe une unique matrice M appartenant à T , qui minimise l'expression $\psi(A - M)$. Préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par cette matrice M .

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

UTILISATION DES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV EN ANALYSE**Notations :**

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.

On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

Si f est un élément de E , on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

Les parties II., III. sont indépendantes et utilisent les résultats de la partie I.

I. Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité

a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété (*):

$$(*) : \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

(on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$).

b) Montrer qu'un polynôme vérifiant (*) est unique.

On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n , on le note T_n .

On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Tournez la page S.V.P.

2. a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$
(on pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$).
- b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 .
- c) Donner le coefficient du terme de plus haut degré de T_n .
3. Racines et extrema
- a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k)$ où $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
- b) On pose pour k dans $\{0, 1, \dots, n\}$, $c_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$.
Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis montrer que :
 $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.
Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelés points de Tchebychev.
- c) Dessiner le graphe de T_3 , préciser sur le graphe les réels c_0, c_1, c_2, c_3 .

II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Orthogonalité des T_n

4. Montrer que pour toute fonction h de E , l'application $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$.
- Pour f et g éléments de E , on pose $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
5. a) Soit h une fonction positive de E , montrer que si $\int_{-1}^1 \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$ alors h est la fonction nulle.
- b) Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Ceci nous permet de définir une norme euclidienne sur E : pour tout élément h de E , on pose $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle}$.

6. Calculer $\langle T_n, T_m \rangle$ selon les valeurs des entiers naturels m et n . En déduire pour tout entier naturel n que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale (pour $\langle , \rangle$) de E_n .

Polynôme de meilleure approximation quadratique

Dans toute la suite de la partie II., f désignera un élément de E et n un entier naturel.

On pose $d_2(f, E_n) = \inf \left\{ \|f - Q\|_2, Q \in E_n \right\}$.

Le but de la suite de la partie II. est d'exprimer $\|f\|_2$ en fonction des $\frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2}$.

7. a) Enoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ dans E_n tel que $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$.
 b) Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.
 On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n .

8. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$.

9. a) En déduire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente.

- b) Que pensez-vous de la limite de $\int_{-1}^1 \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Convergence en norme quadratique

10. a) Soit h un élément de E , montrer que $\|h\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|h\|_{\infty}$.

- b) Montrer en utilisant un théorème de Weierstrass que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$.

11. a) En déduire que $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$.

- b) Application : un théorème des moments.

Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que pour tout entier naturel n ,

$$\int_{-1}^1 \frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 ?$$

III. Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel et f un élément de E .

On note $d_{\infty}(f, E_n) = \inf \left\{ \|f - Q\|_{\infty}, Q \in E_n \right\}$.

On dit qu'un élément P de E_n , est un polynôme de meilleure approximation (on notera en abrégé PMA) au sens de Tchebychev de f d'ordre n , s'il vérifie une des deux conditions équivalentes :

- (i) $\|f - P\|_{\infty} = d_{\infty}(f, E_n)$
 (ii) $\forall Q \in E_n, \|f - P\|_{\infty} \leq \|f - Q\|_{\infty}$.

Existence d'un PMA d'ordre n pour f

On pose $K = \left\{ Q \in E_n, \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty \right\}$

12. **a)** Montrer que K est une partie non vide fermée et bornée de E_n .
b) En déduire que K est une partie compacte non vide de E_n .
13. **a)** Montrer que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$.
b) En déduire qu'il existe un élément P de E_n tel que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$.
 P est donc un PMA d'ordre n de f .

Condition suffisante pour être un PMA

Soit h un élément de E . On dit que h équi oscille sur $k+1$ points s'il existe $k+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ de l'intervalle $[-1, 1]$, tels que

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, |h(x_i)| = \|h\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, h(x_{i+1}) = -h(x_i).$$

(on dit que les extrema sont alternés).

14. Exemples

- a)** Dessiner le graphe d'une fonction ϕ de E telle que $\|\phi\|_\infty = \frac{1}{2}$ et ϕ équi oscille sur 4 points.
 (on ne cherchera pas à expliciter une telle fonction).
b) Montrer que le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n+1$ équi oscille sur $n+2$ points.

Le but de la question 15. est de montrer le résultat suivant :

Si P est un élément de E_n tel que $f - P$ équi oscille sur $n+2$ points, alors P est un PMA d'ordre n de f .

15. Soit P un élément de E_n tel que $f - P$ équi oscille sur $n+2$ points que l'on note $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$.
 Soit Q un élément de E_n tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.
a) Soit $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, montrer que si $f(x_i) - P(x_i) > 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) > 0$.
 On a de même, que si $f(x_i) - P(x_i) < 0$ alors $Q(x_i) - P(x_i) < 0$.
b) En déduire que $P = Q$ et conclure.

Détermination de PMA

16. Dans cette question, pour $x \in [-1, 1]$, on prend $f(x) = x^{n+1}$ et on pose :
 $q_n(x) = x^{n+1} - 2^{-n} T_{n+1}(x)$.
 Montrer que q_n est un PMA d'ordre n de f .

17. En déduire que pour tout polynôme P unitaire de degré $n+1$, on a $2^{-n} \|T_{n+1}\|_{\infty} \leq \|P\|_{\infty}$.

18. a) Dans cette question, f est un polynôme de degré $n+1$.

Déterminer un PMA d'ordre n de f .

b) Application : déterminer un PMA d'ordre 2 de $f(x) = 5x^3 + 2x - 3$.

Remarque : On peut montrer l'unicité du PMA.

Il n'existe pas de formule générale qui donne l'expression du PMA d'une fonction quelconque. On peut cependant utiliser un algorithme (de Remes) qui fournit une suite de polynômes qui converge vers le PMA.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **Notations**

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n .

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t A$ est sa matrice transposée, $\text{rang}(A)$ son rang et $\text{Tr}(A)$ sa trace.

I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X A X \geq 0$.

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^t M M = I_n$.

Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p .

Tournez la page S.V.P.

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :

dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,

dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,

dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,

dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.

La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.

Remarque : dans le texte, le mot « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma \Gamma$.

Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1} H P$.

2. On pose $S = P D P^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = U S$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \text{Tr}({}^tA B)$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$.

Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \|A - M\|$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.
5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^tA) \right\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que la matrice ${}^t A A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ à termes positifs telle que ${}^t A A = D^2$.
On note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A .
 - a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n , évaluer ${}^t A_i A_j$.
En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?
 - b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n , $A_i = d_i E_i$.
 - c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = E D$.
10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t A A = {}^t B B$.
 - a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1} {}^t A A P = P^{-1} {}^t B B P = D^2$.
 - b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U B$.
11. Dédurre des questions précédentes le théorème de décomposition polaire :
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = U S$.
(Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
 $\|M \Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

- 13.** Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = U S$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = P D P^{-1}$.
- a.** Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
- b.** Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
- 14.** On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- a.** Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \text{Tr}(D \Omega) + n$.
- b.** Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(D \Omega) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
- c.** Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.
- 15.** Montrer que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.
- 16.** Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p

- 17.** Un résultat de densité.
- a.** Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.
- b.** En déduire que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 18.** Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leq n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, P la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = P D {}^tP$ et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P .

Si k est un entier entre 1 et n , on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k . Nous allons montrer que :

$$\lambda_k = \max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \quad (\text{théorème de Courant et Fischer}).$$

19. Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i et λ_i (i compris entre 1 et n) : ${}^t X A X$ et ${}^t X X$ et pour k entier entre 1 et n , $\frac{{}^t C_k A C_k}{{}^t C_k C_k}$.

20. Soit k entier entre 1 et n , on pose $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.

Montrer que pour tout X non nul de F_k , $\frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \geq \lambda_k$ et déterminer $\min_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^t X A X}{{}^t X X}$.

21. Soit $F \in \Psi_k$,

a. montrer que $\dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}) \geq 1$.

b. Si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}$, montrer que $\frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \leq \lambda_k$.

22. Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = E D P$. En déduire que le rang de la matrice ${}^t A A$ est encore r .

(On pourra utiliser les résultats de la question 9.)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle ${}^t A A$ de rang r : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$, si on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_r}, 0, \dots, 0)$, si pour $1 \leq l \leq n$ on note M_l la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l -ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question 23., tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $E D = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} M_l$.

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}({}^t A B)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que

$$A = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^r \sqrt{\mu_l} R_l.$$

25. Avec les notations de la question **24**, on pose $N = \sum_{l=1}^p \sqrt{\mu_l} R_l$.

Montrer que $\text{rang}(N) \leq p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}$.

26. Soit M une matrice de rang p ($p < r$), on note $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A - M)(A - M)$ et on pose $G = \text{Ker } M \cap \text{Im}({}^tA A)$.

Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

a. Montrer que $\dim G \geq r - p$.

b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k , montrer que :

$$\alpha_k \geq \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tX {}^tA A X}{{}^tX X}.$$

c. On note $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice ${}^tA A$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$.

Montrer que $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, \dots, V_{k+p}\}) \geq k$.

d. En déduire que $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

27. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1
Durée : 4 heures*Les calculatrices sont autorisées.*

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Dans tout ce problème, on désigne par μ une application continue 2π - périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \quad y'' + y = \mu(t)$$

On désigne par φ_μ la solution sur $\mathbf{R}$ de (E_μ) qui vérifie en outre les relations $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \cos t \, dt \quad \text{et} \quad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \sin t \, dt$$

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de la fonction φ_μ . Dans la partie II et la partie III, on étudie un exemple explicite.

PARTIE I

On désigne par F_μ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F_\mu(x) = (\sin x) G_\mu(x) - (\cos x) H_\mu(x)$.

Tournez la page S.V.P.

Pour simplifier les notations, on écrira F, G, H, φ pour désigner les fonctions $F_\mu, G_\mu, H_\mu, \varphi_\mu$.

I.1 Justifier la dérivabilité de G, H et donc F . Préciser $F(0)$ et $F'(0)$.

I.2 Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $\mu(x)$.

I.3 Justifier l'affirmation $F = \varphi$.

I.4 Etude du caractère 2π - périodique de φ .

I.4.1 Calculer la dérivée de $G(x + 2\pi) - G(x)$ et $H(x + 2\pi) - H(x)$.

I.4.2 Exprimer $G(x + 2\pi) - G(x)$ en fonction de $G(2\pi)$
et $H(x + 2\pi) - H(x)$ en fonction de $H(2\pi)$.

I.4.3 Exprimer $\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x)$ en fonction de $\sin x, \cos x, G(2\pi), H(2\pi)$.

I.4.4 A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction φ est-elle 2π - périodique ?

I.4.5 La fonction φ est-elle 2π - périodique lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)

I.4.6 La fonction φ est-elle bornée lorsque $\mu(t) = \sin t$? (resp. lorsque $\mu(t) = \cos t$?)

I.4.7 Montrer que la fonction φ est 2π - périodique lorsque $\mu(t) = |\sin t|$.

I.4.8 Les fonctions $\varphi, \varphi',$ et φ'' sont-elles bornées lorsque $\mu(t) = |\sin t|$?

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\mu(t) = |\sin t|$.

PARTIE II

Calcul de $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$

II.1 Justifier l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $t \mapsto e^{-t} |\sin t|$.

II.2 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin t| dt$.

II.2.1 Calculer v_0 .

II.2.2 Montrer qu'il existe un nombre réel ρ (que l'on explicitera) tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $v_n = \rho^n v_0$.

II.2.3 En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

II.2.4 En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} |\sin t| dt$.

II.3

II.3.1 Déduire des résultats obtenus dans la partie I (en particulier de **I.4.8**) que les fonctions $t \mapsto e^{-t} \varphi(t)$, $t \mapsto e^{-t} \varphi'(t)$ et $t \mapsto e^{-t} \varphi''(t)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$.

II.3.2 Etablir une relation entre $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} \mu(t) dt$ et $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$.

En déduire $\int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} \varphi(t) dt$.

PARTIE III

Développement de Fourier des fonctions μ et φ .

Si f est une application continue 2π -périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on désigne par $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad \text{pour } n \in \mathbf{N}.$$

Lorsqu'elle converge, on désigne par $SF_f(t)$ la somme de la série de Fourier :

$$SF_f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt).$$

III.1

III.1.1 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction μ (**rappel** : $\mu(t) = |\sin t|$).

III.1.2 Justifier la convergence de la série de Fourier de la fonction φ (**rappel** : $\varphi''(t) + \varphi(t) = |\sin t|$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$).

III.2 Série de Fourier de la fonction μ .

III.2.1 Calculer les coefficients $a_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\mu)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$?

III.2.2 Etablir la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)}$ et expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.

III.2.3 Etablir la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$ et calculer sa somme

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}.$$

III.3 Série de Fourier de la fonction φ .

III.3.1 Etudier la parité des fonctions G, H puis celle de la fonction φ . Quelle est la valeur des coefficients $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$?

III.3.2 Etablir une relation entre $a_n(\varphi'')$ et $a_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

III.3.3 En déduire la valeur de $a_n(\varphi)$ pour $n \neq 1$.

III.3.4 Calculer $a_1(\varphi)$.

III.4 On considère la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2 - 1)(16p^4 - 1)}$. Justifier la convergence de cette série et

expliciter sa somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)(16p^4 - 1)}$ en calculant l'intégrale du **II** par un autre procédé qu'on justifiera soigneusement.

III.5 On considère dans cette question l'application ϕ de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \phi''(t) + \phi(t) &= \phi(t) \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \\ \text{et } \phi(0) &= \phi'(0) = 0. \end{aligned}$$

III.5.1 La fonction ϕ est-elle 2π -périodique ?

III.5.2 La fonction ϕ est-elle bornée sur $\mathbf{R}$?

III.5.3 La fonction $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0 et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Etant donné un entier naturel n , on note $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$.

On note $\mathbf{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_k[x]$ le sous espace de $\mathbf{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k . On identifiera le polynôme $P \in \mathbf{R}[x]$ avec la fonction polynôme associée.

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note $\mathcal{R}$ l'espace des restrictions à $[-1, 1]$ des polynômes de $\mathbf{R}[x]$ et on note $\mathcal{R}_k$ l'espace des restrictions à $[-1, 1]$ des polynômes de $\mathbf{R}_k[x]$. Par abus, on appellera polynôme une fonction de $\mathcal{R}$.

Le but du problème est de définir une méthode de calcul approché d'une famille d'intégrales.

Dans la partie I, on étudie une famille de polynômes. La partie II utilise une structure d'espace préhilbertien réel de l'espace $\mathcal{C}$, pour obtenir une formule de calcul exacte de certaines intégrales. La partie III conduit à la méthode de calcul approché annoncée.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $t_n \in \mathcal{C}$ par : pour tout $x \in [-1, 1]$, $t_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$.

PARTIE I

1. Simplifier les expressions de t_0 , t_1 , t_2 , t_3 et constater que ces fonctions ont des expressions polynomiales, que l'on explicitera.

2. Tracer, sur un même dessin, les graphes de t_0 , t_1 , t_2 et t_3 . Préciser les racines et les extremums de chaque fonction.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer les racines de la fonction t_n . Montrer que les racines de t_n sont deux à deux opposées.

4. On suppose l'entier $n \geq 2$. Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

4.1 Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}$.

4.2 Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$.

Pour $x \in [-1, 1]$, le changement de variable bijectif $\theta = \operatorname{Arc} \cos x$, permet d'écrire $t_n(x) = \cos(n\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

5. Pour $n \geq 1$, exprimer $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x)$ en fonction de x et de $t_n(x)$.

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction t_n est la restriction à l'intervalle $[-1, 1]$ d'un polynôme T_n de $\mathbf{R}[x]$. Préciser le degré de T_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n n'a pas de racine complexe non réelle.

PARTIE II

1. Soit f une fonction de $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2.1 Calculer I_0 et I_1 .

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} (on pourra, entre autre méthode, utiliser le changement de variable $\theta = \text{Arc cos } x$).

2.3 En déduire les valeurs de I_2 et I_4 . Quelle est la valeur de I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$?

3. Définition d'une structure préhilbertienne réelle sur C .

3.1 Montrer que l'application de $C \times C$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ définit un produit scalaire sur C .

3.2 Montrer que la famille de fonction t_p , pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, est une base orthogonale de l'espace vectoriel R_n .

Calculer la norme de chaque fonction t_p .

3.3 Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

4. On veut montrer qu'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 uniques, tels que pour tout polynôme $P \in R_5$, on a

$$(1) \quad \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.1 On suppose que l'égalité (1) est satisfaite par tout $P \in R_5$. En prenant successivement les polynômes P définies par $P(x)=1$, $P(x)=x$, $P(x)=x^2$, déterminer les réels a_0, a_1, a_2 .

4.2 Montrer que le triplet (a_0, a_1, a_2) trouvé convient pour les polynômes P définies par $P(x)=x^4$ puis $P(x)=x^5$.

En déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout polynôme $P \in R_5$.

5. calcul d'une intégrale.

5.1 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

5.2 Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx$, à l'aide du changement de variable $t = 2x-1$ et de la formule (1).

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Etant donné des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et une fonction $f \in C$, on note $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(x_k)$ où $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$.

On se propose de montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ uniques, tels que pour tout polynôme P de R_{n-1} , on ait :

$$(2) \quad \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = S_n(P).$$

1. On suppose que l'égalité (2) est satisfaite pour tout $P \in R_{n-1}$. En prenant successivement pour polynômes P les monômes $1, x, \dots, x^{n-1}$, montrer que les réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont les solutions d'un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est non nul (on ne demande pas le calcul des intégrales qui interviennent dans le second membre du système).
2. On suppose qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que, pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la relation (2) soit vérifiée par les fonctions t_p .

2.1 Montrer qu'alors la relation (2) est vérifiée pour tout polynôme $P \in R_{n-1}$.

2.2 En utilisant ce qui précède, en particulier I.4 et II.3, montrer que les a_k sont tous égaux et calculer leur valeur.

2.3 On suppose que les a_k ont la valeur trouvée en 2.2. Soit P un polynôme de R_{2n-1} . En écrivant la division euclidienne de P par t_n (sur $[-1, 1]$), montrer que P vérifie (2).

Etant donné une fonction $g \in C$, on note $D_n(g) = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - S_n(g)$ et on note

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x)|.$$

3. Soit $f \in C$.

3.1 Soit $P \in R$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 > 0$, qui dépend de P , tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty$.

3.2 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on prend $f(x) = e^x$. Soit m un entier de $\mathbf{N}^*$.

4.1 Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge et que $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m.m!}$.

4.2 Déterminer un polynôme P de degré m tel que $\|f - P\|_{\infty} \leq \frac{1}{m.m!}$.

4.3 Justifier que $S_4(f)$ fournit une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ à 10^{-3} près.

4.4 Calculer cette valeur approchée.

Fin de l'énoncé.

Epreuve spécifique - filière PC

MATHEMATIQUE 1

Durée : 4heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\mathbb{R}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX .

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

Une matrice symétrique S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$$

et définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Partie I

I.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Etablir les égalités :

- a) ${}^tXY = {}^tYX$.
- b) $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y^tY)X = {}^tY(X^tX)Y$.
- c) ${}^tXSY = \langle X | SY \rangle = \langle SX | Y \rangle$.

I.2 Démontrer les propriétés suivantes :

- a) $\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2, S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- b) $\forall (S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- c) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.3 a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX = 0$. Montrer que toute valeur propre de S est nulle et en déduire $S = 0$.

b) Donner un exemple de matrice carrée M d'ordre 3, non nulle et vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX = 0$$

I.4 a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

b) Que peut-on dire d'une matrice symétrique réelle semblable à une matrice symétrique réelle positive ?

I.5 On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\geq$ et $>$, définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 \geq S_2 \iff S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 > S_2 \iff S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

- a) Montrer que la relation $\geq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que pour $n \geq 2$, cet ordre n'est pas total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- c) La relation $>$ est-elle une relation d'ordre ?
- d) Trouver un exemple dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ montrant que $S_1 \geq S_2$ et $S_1 \neq S_2$ n'implique pas nécessairement $S_1 > S_2$.

I.6 Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

- a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
- b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de u respectivement associés. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par v . Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v . En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de u et v dans cette base soient toutes deux diagonales.

I.7 a) Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage.

b) On donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage et déterminer explicitement une telle matrice de passage.

I.8 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 S_2 = S_2 S_1$. Montrer que $S_1 S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.9 a) Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 S_2 = S_2 S_1$. Montrer que :

$$S_2 \geq S_1 \geq 0 \implies S_2^2 \geq S_1^2$$

b) Montrer que les matrices $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vérifient $S_2 \geq S_1 \geq 0$.

Vérifient-elles $S_2^2 \geq S_1^2$?

Partie II

On se propose dans cette partie de caractériser de diverses manières la définie positivité d'une matrice symétrique réelle.

II.1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- a)** S est définie positive.
- b)** Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.
- c)** Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t M M$.
- d)** S est positive et inversible.

II.2 Soit A_n et B_n les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ données par :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = 2I_n - B_n$$

a) Montrer que pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$:

$${}^t X A_n X = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

- b) En déduire que A_n est définie positive.
 c) En cherchant une matrice M_n de la forme :

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}, \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$$

déterminer explicitement une matrice M_n inversible telle que $A_n = {}^t M_n M_n$.

II.3 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $S = {}^t M M$. On note $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ la famille des vecteurs colonnes de M . Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur $\text{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_i)$.

- a) Justifier que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
 b) On définit la famille de vecteurs $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ par les relations :

$$V_1 = U_1 \text{ et } \forall i \in \{2, \dots, n\}, V_i = U_i - p_{i-1}(U_i)$$

Montrer que la famille $\mathcal{V}$ est orthogonale et que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $\mathcal{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ la famille de vecteurs définie par $W_i = \frac{1}{\|V_i\|} V_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{W}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure.

d) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{W}$. Montrer que M peut s'écrire sous la forme $M = PT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et qu'alors $S = {}^t T T$.

e) Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de la forme

$S = {}^t T T$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et en déduire que S est symétrique définie positive.

II.4 a) Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que ${}^t X A_0 X = 0$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si ($\text{Tr } A > 0$ et $\det A > 0$) ce qui équivaut encore à ($a > 0$ et $ab - c^2 > 0$).

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. On décompose S sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} a & {}^t V \\ V & S' \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), \quad S' \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$$

En écrivant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour $a \neq 0$:

$${}^tXSX = a \left[\left(x + \frac{1}{a} {}^tVX' \right)^2 + \frac{1}{a^2} {}^tX'(aS' - V^tV)X' \right] \quad (1)$$

et en déduire que S est définie positive si et seulement si ($a > 0$ et $aS' - V^tV$ est définie positive).

d) En gardant les notations de la question **II.4 c)** précédente, on peut alors construire par récurrence une suite de nombres réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une suite de matrices $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ comme suit. On pose d'abord :

$$S_1 = S, \quad a_1 = a, \quad V_1 = V, \quad S'_1 = S', \quad S_2 = a_1 S'_1 - V_1 {}^tV_1$$

Si $n \geq 3$, on décompose S_2 sous la forme

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & {}^tV_2 \\ V_2 & S'_2 \end{pmatrix}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad V_2 \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R}), \quad S'_2 \in \mathcal{S}_{n-2}(\mathbb{R})$$

On pose à nouveau $S_3 = a_2 S'_2 - V_2 {}^tV_2$ et on itère le processus précédent. On obtient ainsi une suite de matrices symétriques réelles $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ où S_i est d'ordre $n - i + 1$ et une suites de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ liés par les relations :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad S_i = \begin{pmatrix} a_i & {}^tV_i \\ V_i & S'_i \end{pmatrix}, \quad S_{i+1} = a_i S'_i - V_i {}^tV_i$$

Le processus s'arrête pour $i = n$ car S_n est alors d'ordre 1 et on note $S_n = (a_n)$.

Montrer que S est définie positive si et seulement si tous les réels de la suite $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont strictement positifs.

e) Soit $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Selon les notations précédentes, déterminer explicitement les réels a_1, a_2, a_3 associés à cette matrice S et en déduire que S est définie positive si et seulement si :

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$$

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUE 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

*N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,
à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0, 1[$ on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

- Pour tout $t \in [-\pi, +\pi]$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,
- La fonction φ_u est périodique de période 2π .

Soit $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u) \cos nt$ la série de Fourier de la fonction φ_u .

I.1 Calculer $a_n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction φ_u est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

I.2 En déduire, pour tout $u \in]0, 1[$, l'égalité :

$$\frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

I.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0, 1[$, et que la série de fonctions de terme général $u'_n(x)$ converge normalement sur tout segment $[0, a] \subset [0, 1[$.

Tournez la page SVP

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

I.4 Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \quad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Nous noterons s sa limite.

I.4.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$.
En déduire que $s(x+1) = -s(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.3 Calculer $s(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1) \cdots (x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-p)$.

II.1.2 On suppose que x n'est pas un nombre entier négatif ou nul.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle (on pourra considérer la série de terme général $\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, défini à partir d'un certain rang N_x que l'on déterminera en fonction de x).

Nous noterons f la fonction $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xf(x+1)$.
Calculer $f(1)$ et en déduire $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)f(1-x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

On pourra étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\frac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)}$.

II.4 On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$(1) \quad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.1 Montrer que la relation (1) est vérifiée lorsque px est entier négatif ou nul.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$ ne dépend pas de x . En déduire que f vérifie une relation du type :

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right),$$

où A_p est un nombre réel positif ou nul dépendant de p .

II.4.3 En écrivant pour $x = \frac{1}{p}$ la relation ci-dessus, montrer que :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right) = 1.$$

En déduire une expression de A_p^2 en fonction de p et de $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}$.

II.4.4 Montrer l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$(x^{p-1} + x^{p-2} \dots + x + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, en déduire les valeurs de $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}$ et de A_p , ainsi que la relation (1).

PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

III.1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

III.2.1 On pose $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$. Déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x+1)$ et en déduire l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x et n .
En déduire que $G_n(x) = \frac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 Montrer que pour tout $t \in [0, n]$ on a les inégalités $e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ et $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. En déduire que l'on a $0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$ pour tout $t \in [0, n]$.

III.2.3 Montrer, par récurrence sur n , que l'on a $(1-a)^n \geq 1-na$ pour tout $a \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $t \in [0, n]$ on a les inégalités :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Déduire de ce qui précède la limite, pour $x \in]0, +\infty[$, de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

III.3 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI – SESSION 2003

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les cinq parties du problème sont indépendantes

α désignant un réel non nul, on note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

PARTIE I

1. Montrer qu'on peut se limiter à $\alpha > 0$ (ce qu'on fera dans toute la suite du problème).
2. Vérifier que f_α est périodique ; on notera T_α une période strictement positive.
3. De quelle équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients réels constants, homogène, f_α est-elle solution ? Résoudre cette équation différentielle.
4. On note respectivement E et d la partie entière et la partie décimale de α .
C'est-à-dire $\alpha = E + d$, avec E entier naturel et $0 \leq d < 1$.
Déterminer en fonction de E et d le nombre de solutions dans $[0, \pi]$ de $f_\alpha(x) = 0$.

PARTIE II

On pose $f_{\alpha,\beta} = f_\alpha + f_\beta$, où α et β sont des réels strictement positifs distincts.

1. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est périodique si et seulement si il existe deux entiers naturels non nuls k et p tels que : $k\alpha = p\beta$ (on pourra envisager $x = 0$). On notera $T_{\alpha,\beta}$ une période de $f_{\alpha,\beta}$.
2. Relier alors $T_{\alpha,\beta}$ à T_α et T_β .
3. α et β étant à nouveau quelconques (mais toujours réels strictement positifs distincts), montrer la relation : $f_{\alpha,\beta}'' + \alpha^2 f_{\alpha,\beta} = (\alpha^2 - \beta^2) f_\beta$.
4. En déduire que $f_{\alpha,\beta}$ est solution de l'équation (E) : $y^{(4)} + (\alpha^2 + \beta^2)y'' + \alpha^2\beta^2y = 0$.
5. Vérifier que f_α est solution de (E). En déduire que f_β , f_α' , f_β' sont également solutions de (E).

6. En admettant que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 4, montrer que la famille $(f_\alpha, f_\beta, f'_\alpha, f'_\beta)$ en constitue une base.

PARTIE III

On s'intéresse à $f_{\frac{1}{2},1}$, que pour simplifier on note f .

1. Montrer que $[0, 2\pi]$ est un intervalle suffisant à l'étude de f .
2. Etudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$; (on notera x_0 le point de $]0, 2\pi[$ où $f'(x) = 0$).
3. Déterminer $f(x_0)$.
4. Discuter suivant c le nombre de solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = c$.
5. Préciser les solutions dans les cas $c = -1$ et $c = 0$.
6. On se place dans le cas où l'équation $f(x) = c$ admet, sur $[0, 2\pi]$, 2 solutions distinctes x_1 et x_2 . Déterminer $\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_2}{2}\right)$.
7. Résoudre $8y''(x) + 5y(x) = 3\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)\right]$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.
8. Reprendre la question III.7 en appliquant le résultat de la question II.3 à des valeurs particulières de α et β .

PARTIE IV

On pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^n f_{\frac{1}{2^k}}(x)$, et $U_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot P_n(x)$.

1. Montrer que $U_1 = \frac{1}{2} U_0$.
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
3. En déduire, pour $x \in]0, \pi]$ la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers l'infini.
4. Vérifier que le résultat précédent peut se prolonger par continuité à $x = 0$.

PARTIE V

On note F_α la fonction de période 2π , telle que $F_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ sur $[-\pi, +\pi]$.

1. Comparer F_k et f_k si $k \in \mathbb{N}^*$.
Dans toute la suite, on suppose que α n'est pas entier.
2. Représenter sommairement $F_{\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{4}{3}}$ pour $x \in [0, 2\pi]$.
3. Montrer que F_α est continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable aux points d'abscisses $(2p+1)\pi$.
4. On note à nouveau E et d les parties entière et décimale de α .
Discuter suivant E et d les signes de $F_\alpha(\pi)$ et de $(F_\alpha)'_g(\pi)$, dérivée à gauche de F_α en π .
5. Déterminer les coefficients de Fourier de F_α (qu'on notera pour simplifier $a_n(\alpha)$ et $b_n(\alpha)$).
Ecrire la série de Fourier de F_α et préciser sa convergence.
6. Quelle est la limite de $a_n(\alpha)$ quand α tend vers un entier naturel non nul k ?
7. Dédire du résultat obtenu en 5 un développement en série de $\cot(\alpha \pi)$.

Fin de l'énoncé

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI – SESSION 2003

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

$M_3(\mathbb{C})$ (resp. $M_3(\mathbb{R})$) est l'anneau des matrices carrées 3×3 à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$). On note I la matrice identité, et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dite de Frobenius.

L'objet de ce problème est d'étudier le sous-anneau de $M_3(\mathbb{C})$ engendré par F , et d'en donner quelques applications. Les parties **II** et **III** sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : Dans toute cette partie, on travaille dans $M_3(\mathbb{C})$.

1. Soit $\chi_F(t) = \det(F - tI)$ le polynôme caractéristique de F . Donner $\chi_F(t)$ et en déduire que F est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On posera $j = \exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$.

2. On note :

$$A = \{xI + yF + zF^2, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

a/ Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$, dont on donnera une base et la dimension.

b/ Montrer que le produit de deux éléments de A est commutatif et reste dans A .

3. Montrer que tous les éléments de A sont diagonalisables dans une même base.

4. Déterminer alors une expression factorisée du déterminant des matrices $A = xI + yF + zF^2$ en fonction de x, y, z , puis donner une condition d'inversibilité de ces matrices.

5. Soit $A \in A$, A inversible. On établit dans cette question que $A^{-1} \in A$. Pour cela, on considère l'application $\Phi : A \rightarrow A$

$$M \mapsto AM$$

a/ Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de A .

b/ Montrer que c'est un isomorphisme puis que $A^{-1} \in A$.

c/ Proposer une méthode pour vérifier cette conclusion ($A^{-1} \in A$) en utilisant l'outil calcul formel.

Partie II : Soit ε_3 un espace affine euclidien réel de dimension 3, d'espace vectoriel associé E_3 . On rapporte ε_3 (resp. E_3) à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (resp. la base orthonormée

directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$). On note classiquement $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (resp. $\vec{u} \wedge \vec{v}$) le produit scalaire (resp. vectoriel) de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{u}$.

On considère l'ensemble S des points M de ε_3 défini par :

$$S = \{M(x, y, z) \in \varepsilon_3, \det(xI + yF + zF^2) = 1 \text{ où } x, y, z \text{ sont réels}\}$$

On étudie quelques propriétés de S dans cette partie.

1. Ecrire une équation cartésienne de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On vérifiera que cette équation peut se factoriser en :

$(x + y + z) q(x, y, z) = 1$, où $q(x, y, z)$ est une quantité à expliciter. En déduire que :

$$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a}) \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}\|^2 = 1$$

avec $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

On obtient ainsi une caractérisation géométrique de S .

2. En déduire que S est une surface de révolution autour de l'axe Δ passant par O et dirigé par $\vec{a}$.
On pourra introduire le projeté orthogonal H de M sur Δ .

3.

a/ Donner une équation cartésienne de S dans un repère orthonormé attaché à l'axe de révolution et d'origine O . On posera $\vec{K} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ et on choisira par conséquent deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ (qu'il n'est pas

utile d'explicitier). On pourra utiliser la caractérisation géométrique de S donnée en 1.

b/ En déduire la nature des méridiennes de S , c'est-à-dire des courbes intersection de S avec un plan contenant l'axe. En dessiner une, puis représenter S dans l'espace.

4. Pour $M(x, y, z) \in S$ et $M'(x', y', z') \in S$, on définit le point $M''(x'', y'', z'') = M * M'$ par :

$$x'' = xx' + yz' + zy' \quad y'' = xy' + yx' + zz' \quad z'' = xz' + yy' + zx'$$

a/ En calculant $(xI + yF + zF^2)(x'I + y'F + z'F^2)$, montrer que $M'' \in S$. On a ainsi muni S d'une loi interne $*$.

b/ Soit $M(x, y, z) \in S$. On pose $A = (xI + yF + zF^2)$. Justifier que A^{-1} existe et peut se décomposer en : $A^{-1} = x'I + y'F + z'F^2$ avec $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et que $M'(x', y', z') \in S$. Déterminer $M * M'$.

c/ Montrer alors que $(S, *)$ est un groupe commutatif.

5. Soient P le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ et $C = P \cap S$.

a/ Reconnaître C et en donner les éléments caractéristiques.

b/ Montrer que C est stable par la loi $*$, puis que c'est un sous-groupe de $(S, *)$.

Partie III : Dans cette partie, on se place toujours dans l'espace affine euclidien réel ε_3 rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$. Pour tout point $M(x, y, z)$ de ε_3 , on note indifféremment $\varphi(M)$ ou $\varphi(x, y, z)$ la quantité :

$$\varphi(x, y, z) = \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| + \|\overrightarrow{CM}\|$$

On souhaite minimiser cette quantité.

1. Calculer $\varphi(O)$. Vérifier que pour tout $M \in \varepsilon_3$ tel que $\|\overrightarrow{OM}\| > 3$, $\varphi(x, y, z) > 3$. En déduire que la fonction φ admet un minimum.
2. Montrer que φ n'atteint son minimum en aucun des points O, A, B, C . Pour l'étude en O , on pourra examiner le comportement de φ au voisinage de O , le long de l'axe Δ passant par O et dirigé par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; et donc définir pour l'occasion la quantité $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$.

Les questions suivantes précisent en quel(s) point(s) φ est minimale.

3. Soit r l'application affine de ε_3 fixant O et transformant A en C , B en A et C en B . On note $\vec{r}$ son application linéaire associée. Justifier que r est bien définie, que la matrice de $\vec{r}$ relativement à la base $\mathbf{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est F , et montrer que $\vec{r}$ est une isométrie vectorielle. Quelle est la nature de r ? On précisera ses éléments caractéristiques.
4. Pour tout $M \in \varepsilon_3$, on pose $M' = r(M)$. Montrer que $\varphi(M) = \varphi(M')$.
5. Soit P un point en lequel φ est minimale. On montre dans cette question que P est sur la droite Δ . Pour cela, on procède par l'absurde, *en supposant que P n'est pas sur cette droite*.
a/ Soit $P' = r(P)$. Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OP'}$ ne peuvent-ils pas être colinéaires ?
b/ Soit $P'' = r(P') = r^2(P)$ et soit Q l'isobarycentre de P, P' et P'' .

Montrer que $\varphi(Q) \leq \frac{1}{3}(\varphi(P) + \varphi(P') + \varphi(P''))$.

c/ Déduire du 4 que $\varphi(Q) \leq \varphi(P)$, et du 5.a. que cette inégalité est en fait stricte. Conclure.

6. On sait désormais qu'on doit rechercher le minimum sur l'axe Δ . Il s'agit donc de minimiser $\Phi(x) = \varphi(x, x, x)$.

a/ Montrer que $\Phi(x) > \Phi(0)$ pour tout $x < 0$.

b/ Etudier le sens de variation de la fonction Φ sur $\mathbb{R}_+$.

c/ Conclure que φ atteint une seule fois son minimum, au point $P\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, et que ce minimum

vaut $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME I

A. Etude d'une fonction f

On fixe un réel α et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- 1) a) Déterminer α tel que f soit continue en 0.

Désormais, α prendra cette valeur.

- b) Montrer qu'alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- 2) Etudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f .

(On pourra être amené à étudier la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x$)

Donner l'allure de la courbe représentative de f .

- 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

En déduire un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \text{ avec } (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4.$$

B. Développement en série entière de f

- 1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, en précisant le rayon de convergence associé.

- 2) En déduire que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
Préciser ce développement.

- 3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère les deux équations différentielles

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{et } (E_H) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Dans cette partie, I désigne l'un des deux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que (E_H) admet sur I deux solutions de la forme $x \mapsto x^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

En déduire toutes les solutions de (E_H) sur I .

2) Résoudre alors (E) sur I par la méthode de variation des constantes.

$$(\text{On pourra remarquer que } \frac{d}{dx} \left(\text{Arctan } x + \frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{2}{(1+x^2)^2}.)$$

3) En déduire que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et que cette solution est f .

D. Calcul de deux intégrales impropres

On considère les deux intégrales impropres

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } x}{x^2} dx$$

$$\text{et } K = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x \text{Arctan } x}{(1+x^2)^2} dx.$$

1) Justifier l'existence de ces deux intégrales.

2) a) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$.

b) Calculer alors J à l'aide d'une intégration par parties (prudente).

3) En effectuant un changement de variable et en utilisant la relation prouvée en A.3), calculer l'intégrale K .

E. Etude d'une autre fonction

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1) Montrer que g est développable en série entière sur $] -1, 1[$ sous la forme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)^2}.$$

2) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

b) Justifier (soigneusement) que sa somme est égale à $g(1)$.

c) En déduire un rationnel approchant $g(1) = \int_0^1 \frac{\text{Arctan } t}{t} dt$ à 5×10^{-2} près.

4) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) - \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

(On pourra écrire l'expression $g(x) - \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$ sous la forme $\frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^x h(t) dt$, où h est une fonction à déterminer, puis utiliser un changement de variable et la relation prouvée en A.3).)

5) En déduire un équivalent simple de g au voisinage de $+\infty$, ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

6) Etudier la parité et les variations de g , puis donner l'allure de sa courbe représentative.

(On pourra être amené à étudier la fonction $x \mapsto \text{Arctan } x - \int_0^x \frac{\text{Arctan } t}{t} dt$, et à utiliser l'étude

de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan } x$, déjà effectuée en A.2).)

PROBLEME II

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme $M(a, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est noté E .

Dans les parties A et B, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.

A. Généralités

- 1) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

En donner une base et la dimension.

- 2) Pourquoi peut-on assurer sans calculs que $M(a, b)$ est diagonalisable ?

Que peut-on dire de plus ?

- 3) Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a, b)$, puis, pour chacune des valeurs propres obtenues (non nécessairement distinctes), déterminer un vecteur propre associé, que l'on choisira unitaire, et de première composante positive.

- 4) En déduire que $M(a, b) = PD'P$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -b\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

B. Matrices orthogonales de E

- 1) Déterminer, parmi les matrices $M(a, b)$ de E , celles qui sont orthogonales.

2) On note $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que l'endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^3$, admettant A pour matrice dans la base canonique, est une isométrie vectorielle.

En préciser la nature et les éléments caractéristiques.

C. Construction de nouveaux produits scalaires sur $\mathbb{R}^3$

Etant donnés trois réels λ , a et b , on pose $N = \lambda I_3 + M(a, b)$.

Pour tous vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose alors $\phi(U, V) = {}^t U N V$.

On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur λ , a et b , pour que ϕ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Selon l'usage, on convient d'identifier une matrice carrée d'ordre 1 et son unique coefficient.

1) Sans déterminer explicitement $\phi(U, V)$, montrer que ϕ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, bilinéaire et symétrique.

2) On pose $Z = {}^t P U$ (P a été définie dans la partie A), et on note z_1 , z_2 et z_3 les composantes

de Z , de sorte que $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\phi(U, U) = {}^t Z (\lambda I_3 + D) Z = (\lambda + 2a) z_1^2 + (\lambda + b\sqrt{2}) z_2^2 + (\lambda - b\sqrt{2}) z_3^2$.

3) En déduire que si $\lambda > \max(-2a, |b|\sqrt{2})$, alors ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

4) Etudier la réciproque.

D. Etude des points critiques d'une fonction de deux variables

Dans cette question, $a = -1$, $b = 1$ et $\lambda = 2$, de sorte que $N = 2I_3 + M(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout couple de réels x et y , on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix}$, puis $f(x, y) = \phi(U, U) = {}^t U N U$.

1) Calculer explicitement $f(x, y)$, puis vérifier que f est de classe C^1 et admet exactement deux points critiques, que l'on précisera. (On pourra remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(1+y)(x+xy+y)$.)

2) A l'aide du résultat de C.2), montrer que l'un de ces points critiques – à préciser – correspond à un minimum global de f .

3) Vérifier que $f(-2+t, -1+t) - f(-2, -1) \sim -2t^3$. Qu'en déduit-on pour l'autre point critique ?

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

A propos de l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux » du théorème de convergence normale d'une série de Fourier...

Pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et de période 2π , on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}) \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(n t) dt \text{ (pour } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{i n x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n(f) \cos(n x) + b_n(f) \sin(n x)).$$

On rappelle le **théorème de convergence normale** :

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue de période 2π et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p \in \mathbb{N}}$.

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux ».

Une première partie démontre des résultats préliminaires.

Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », la série de Fourier peut diverger.

Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur I .

I. Résultats préliminaires

1. Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction f n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur I :
 - a. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.
 - b. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur I ?

2. On considère la fonction continue $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, de période 2π , paire et définie pour $x \in [0, \pi]$, par $\varphi(x) = \sqrt{x}$.
Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe C^1 par morceaux sur I .

3. Théorème de Cesàro

Soit (u_n) une suite de complexes qui converge vers le complexe l .

- a. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\sum_{k=0}^n (u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.

- b. En déduire que la suite $\left(\frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1} \right)$ converge vers l .

4. Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n , notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} (S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_n(f)).$$

On démontre, *et nous l'admettrons*, le **théorème de Fejér** :

« La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur I vers la fonction f ».

Une application :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur I , montrer que la suite $(\sigma_n(f))$ converge vers la fonction f .

5. Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geq n\})_n$ convient).

II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout entier naturel non nul n par : $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[\left(2^{n^3} + 1\right) \frac{x}{2}\right]$.

6. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

7. On pose, pour p et k entiers naturels, $I_{p,k} = \int_0^\pi \cos(p t) \sin\left(\frac{2k+1}{2} t\right) dt$ et, pour q entier naturel,

$$T_{q,k} = \sum_{p=0}^q I_{p,k}.$$

a. Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

b. Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$ et en déduire que, pour tout couple (q, k) d'entiers naturels, $T_{q,k} \geq 0$.

c. Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1}$.

d. En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \sim \frac{1}{2} \ln k$.

8. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{p, 2^{n^3-1}}$.

9. Montrer que, pour p entier naturel non nul, $S_{2^{p^3-1}}(f)(0) \geq \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3-1}, 2^{p^3-1}}$

(on remarquera que : $\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^N a_l = \frac{-a_0}{2} + \sum_{l=0}^N a_l$).

Conclure que la suite $(S_n(f)(0))$ diverge.

III. Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Si f est une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_{[a, b]}$, on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a, b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$.

On appelle alors **variation totale** de f sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\sigma \in S_{[a, b]}} V(\sigma, f).$$

10. Montrer que la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.

(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ subdivision de $[0, 1]$: $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}).$$

11. Exemples généraux

- Montrer qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a, b]$ et préciser $V([a, b], f)$.
- Montrer qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a, b]$.
- Montrer qu'une fonction $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux est à variation bornée.

12. Soit une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée sur $[a, b]$ et soit $a < c < b$.

Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ est à variation bornée et que : $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f)$.

Remarque : on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

13. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.

Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision

$$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N} \text{ de } [0, 2\pi] \text{ définie, pour } k \text{ entier compris entre } 0 \text{ et } |n|N, \text{ par : } x_k = \frac{2\pi k}{|n|N}.$$

Pour k entier compris entre 1 et $|n|N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

- Vérifier que :
$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) (x_k - x_{k-1}).$$

- b. Montrer que : $\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f).$
- c. En déduire que pour tout entier n non nul, $|c_n(f)| \leq \frac{V([0, 2\pi], f)}{2|n|\pi}.$

14. Soit (u_n) une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{j=0}^n u_j \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k , $|u_k| \leq \frac{A}{k+1}.$

a. Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i) , l'expression : $k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L).$

b. Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n , $|\sigma_n - L| \leq d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls :

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A \frac{k-1}{2(n+2)}.$$

c. L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$).

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}.$ Que peut-on en déduire ?

15. Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f .

16. Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question 2. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ .

17. Application

Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de période 2π et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Fonctions de matricesNotations :

1. Les $\mathbb{K}$ -algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :
 - L'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées réelles d'ordre n .
 - Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, on note C_I^∞ l'algèbre commutative des fonctions de classe C^∞ de I dans $\mathbb{K}$.
 - L'algèbre des fonctions polynomiales de I dans $\mathbb{K}$ est usuellement identifiée à l'algèbre $\mathbb{K}[X]$.
2. On y rencontre aussi les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels suivants :
 - L'espace des colonnes réelles à n lignes noté $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
 - L'espace ${}_N[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg P \leq N\}$, où $N \in \mathbb{N}$.
3. Les notions de convergence dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})$ sont relatives aux normes respectives :
 - $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, si $X = {}^t[x_1, \dots, x_n]$.
 - $\|M\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$, si $M = [m_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Objectifs du problème**Tournez la page S.V.P.**

Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$, on sait donner un sens à la matrice $P(A)$ et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur A qui en résulte. En particulier, si M est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on appelle **POLYNÔME MINIMAL** de M le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P(M) = 0$; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice $f(A)$ POUR TOUTE FONCTION f DE CLASSE C^∞ , et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice A . Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur A .

Dans un second temps, on exploite ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

Notations fixées pour tout le problème :

- On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et l'on suppose que son polynôme minimal Π_A peut être écrit sous la forme : $\Pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ avec : $r \geq 1$; les λ_j sont des RÉELS distincts ; les m_j sont dans $\mathbb{N}^*$. On note alors $m = \sum_{1 \leq j \leq r} m_j$ le degré de Π_A .
- On considère aussi un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et contenant tous les λ_j .

La matrice A et l'intervalle I sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

Preliminaires :

1. Établir que pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ et M dans $M_n(\mathbb{C})$, on a : $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$.
2. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$ de $M_n(\mathbb{C})$, et soit $\beta = (B_1, \dots, B_d)$ une base de $\mathcal{M}$.
 - a) Montrer que l'on définit une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}$ en posant $\mathcal{N}(M) = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$, si $M = \sum_{1 \leq k \leq d} x_k B_k$ est la décomposition de l'élément M de $\mathcal{M}$ sur la base β .
 - b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives a et b vérifiant : $\forall M \in \mathcal{M}, a\|M\| \leq \mathcal{N}(M) \leq b\|M\|$.
 - c) Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$; on note $M_p = \sum_{1 \leq k \leq d} x_p(k) B_k$ la décomposition de M_p sur β . Montrer que la suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ si et seulement si CHAQUE SUITE RÉELLE $(x_p(k))_{p \in \mathbb{N}}$ ($k = 1, \dots, d$) converge vers 0.

I – Une relation d'équivalence sur C_I^∞

On convient de dire que des fonctions f et g de C_I^∞ « coïncident sur le spectre de A » lorsque : $\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$. Ce que l'on résume par la notation $f \equiv_A g$.
Un exemple : si $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$ la notation $f \equiv_A g$ signifie : $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ et $f(-1) = g(-1)$.

3. Soient ℓ dans $\mathbb{N}^*$, λ dans I et f dans C_I^∞ vérifiant : $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$.

a) Établir l'identité : $\forall x \in I, f(x) = \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u) du$.

b) En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction h vérifiant :

(1) $\forall x \in I, f(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$

(2) $h \in C_I^\infty$

4. Soient f et g dans C_I^∞ .

a) On suppose : $\exists h \in C_I^\infty, f = g + h \Pi_A$.

En considérant les dérivées successives de $f - g$, établir que $f \equiv_A g$.

b) On suppose $f \equiv_A g$; en exploitant le **3.** justifier l'existence de h dans C_I^∞ vérifiant :

$$f = g + h \Pi_A.$$

5. Soient P et Q dans $[[X]]$; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $P \equiv_A Q$

(2) $\exists H \in [[X]], P = Q + H \Pi_A$.

II – Définition de la matrice $f(A)$

A. On considère l'application φ de ${}_{m-1}[X]$ vers m qui associe à un polynôme P le m -uplet :

$$\varphi(P) = \left((P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leq k_1 \leq m_1-1}, \dots, (P^{(k_r)}(\lambda_r))_{0 \leq k_r \leq m_r-1} \right).$$

6. Établir le caractère bijectif de φ .

7. Soit f dans C_I^∞ ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme P_f de $[[X]]$, de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ et tel que : $f \equiv_A P_f$. On convient alors de DÉFINIR la matrice $f(A)$ en posant : $f(A) = P_f(A)$.

B. Quelques exemples

8. On suppose ici que f est polynomiale et l'on écrit : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$.

En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question 7, on obtient le résultat naturel : $f(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k$.

9. Ici : $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ et $I = \mathbb{C}$.

- Calculer $\Pi_A(X)$.
- Calculer la matrice $f(A)$ dans chacun des cas suivants :
 - $f(x) = ax + b$, les réels a et b étant donnés.
 - $f(x) = \sin(\pi x)$
 - $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, où la fonction g est donnée dans C_I^∞ .

III – Le calcul systématique de $f(A)$

A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire ϕ du II.A, justifier l'existence et l'unicité de polynômes $Q_{j,k}$ ($1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1$) vérifiant :

pour TOUTE fonction f de C_I^∞ , on a : $P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$

On considère alors les matrices dites « associées » à A :

$$Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \quad (1 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq m_j - 1).$$

11. Montrer que les diverses matrices $Z_{j,k}$ sont linéairement indépendantes et que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

B. Deux exemples

12. Ici : $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ et $I = \mathbb{C}^*$.

- Justifier l'existence de matrices Z_1 et Z_2 de $M_2(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2.$$
- EN DÉDUIRE le calcul de Z_1 et Z_2 .
- Calculer les matrices $A^{2004}, \sqrt{A}$ et plus généralement A^α pour α dans $\mathbb{C}^*$.

13. Ici : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ et $I = \mathbb{K}$.

- a) Présenter sous forme factorisée le polynôme $\Pi_A(X)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{K})$?
- b) Calculer les matrices $Z_{j,k}$ « associées » à A .

IV – Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g dans C_I^∞ et α dans $\mathbb{K}$.

- a) Que valent $P_{\alpha f}$ et P_{f+g} ?
- b) Justifier l'existence d'un polynôme H de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$.

15. a) Montrer que l'application $S: f \mapsto f(A)$ de C_I^∞ dans $M_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.

b) Quel est son noyau ?

16. On considère les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, puis les fonctions $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{K}_+^*$ dans $\mathbb{K}$. On peut ainsi DÉFINIR les matrices $\cos A$, $\sin A$, et même $\sqrt{A}$ et $\frac{1}{A}$ si les λ_j sont dans $\mathbb{K}_+^*$.

- a) En exploitant le morphisme S , calculer $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$.
- b) On suppose ici que les λ_j sont strictement positifs. Reconnaitre : $(\sqrt{A})^2$ et $\frac{1}{A}$.

B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté $\mathcal{M}_A = \{f(A) / f \in C_I^\infty\}$ est une sous-algèbre COMMUTATIVE de $M_n(\mathbb{K})$ et préciser sa dimension.

18. Montrer que si un élément de $\mathcal{M}_A$ est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$ alors son inverse est aussi dans $\mathcal{M}_A$.

19. Soit f dans C_I^∞ ; établir l'équivalence des énoncés suivants :

- (1) $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

$$(2) \quad \forall j \in \{1, \dots, r\} \quad f(\lambda_j) \neq 0$$

20. Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, on note Λ_M l'ensemble de ses valeurs propres RÉELLES.

En exploitant la question **19** comparer les ensembles : Λ_A et $\Lambda_{f(A)}$ où f est donnée dans C_I^∞ .

V – Application à la résolution d'un système différentiel

21. Soient $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de C_I^∞ et f dans C_I^∞ . Établir l'équivalence des énoncés suivants :

(1) La suite de matrices $(f_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $M_n(\mathbb{K})$ vers $f(A)$.

(2) Pour chaque j ($1 \leq j \leq r$) et chaque k ($0 \leq k \leq m_j - 1$), la suite réelle $(f_p^{(k)}(\lambda_j))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$.

Lorsque la condition (2) est réalisée, on convient de dire que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ « converge vers f sur le spectre de A ».

22. Pour t réel, on considère la fonction $f_t : x \mapsto e^{tx}$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que : $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$. Il s'agit donc précisément de la matrice usuellement notée $\exp(tA)$.

23. En exploitant les résultats acquis à ce stade du problème, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra
poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Notation et but du problème

On désigne par :

- E_0 : le $\mathbf{R}$ - espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$, et qui vérifient $f(0) = 0$;
- E_1 : l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2$ soit intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$;
- E_2 : l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

On note :

$$N_1(f) = \left[\int_{\mathbf{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_1 ; \quad N_2(f) = \left[\int_{\mathbf{R}_+} (f'(t))^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_2 .$$

Le but de ce problème est de comparer les ensembles E_1 et E_2 d'une part, les fonctions N_1 et N_2 d'autre part.

Les parties **I** et **II** sont consacrées à deux exemples, la partie **III** aborde le problème de comparaison de façon plus générale.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I – Exemple 1

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = \text{Arctan } t$ (où Arctan désigne la fonction Arctangente).

I.1/ Montrer que f appartient à E_1 .

I.2/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, et qu'en particulier f appartient à E_2 .

I.3/ Calcul de $N_2(f)$.

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note $\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}_+} H_x(t) dt$.

I.3.1/ Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

I.3.2/ Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \neq 1$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la variable T :

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)}$$

I.3.3/ En déduire l'expression explicite de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \neq 1$.

I.3.4/ Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

I.4/ Etudier le signe de $u - \text{Arctan } u$, pour $u \in \mathbf{R}_+$.

I.5/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \frac{\text{Arctan } (xt)}{t(t^2 + 1)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

I.6/ Calcul de $N_1(f)$.

Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $\theta(x) = \int_{\mathbf{R}_+^*} G_x(t) dt$.

I.6.1/ Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

I.6.2/ Montrer que la fonction θ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$.

I.6.3/ Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

I.6.4/ Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

I.6.5/ Etablir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.

I.6.6/ En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

PARTIE II – Exemple 2

Dans cette partie, on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ (où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

II.1/ Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbf{R}_+$. En déduire que f appartient à E_2 . Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

II.2/ Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ (respectivement lorsque $t \rightarrow +\infty$).

II.3/ Montrer que f appartient à E_1 .

II.4/ Calcul d'une intégrale.

II.4.1/ Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{-\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

On note désormais $J = \int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2} dt$.

II.4.2/ Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k} \ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \int_{]0,1[} (-t^{2k} \ln t) dt$.

II.4.3/ Justifier avec soin l'égalité : $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} (-t^{2k} \ln t) dt$.

II.4.4/ Dédurre de ce qui précède la valeur de l'intégrale J , sachant que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II.5/ Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier, on note $I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt$.

On rappelle que $shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, $chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour $(u \in \mathbf{R})$ et la relation $ch^2 u - sh^2 u = 1$.

II.5.1/ Montrer que $I = 2 \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} dt$.

II.5.2/ Justifier le changement de variable $u = f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ dans l'intégrale obtenue dans la question **II.5.1**; que devient I quand on effectue ce changement ?
Même question pour le changement de variable $v = e^{-u}$.

II.5.3/ En déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\frac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

PARTIE III

Le but de cette partie est de comparer, d'une part, les ensembles E_1 et E_2 , et, d'autre part, les fonctions N_1 et N_2 .

III.1/ Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et telle que $f(0)=0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \frac{f'(t)}{t}$ pour tout $t > 0$. On pose $\alpha = f'(0)$.

III.1.1/ Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) lorsque $t \rightarrow 0^+$?

III.1.2/ Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbf{R}_+^*$.

III.1.3/ Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t).g'(t)$) lorsque $t \rightarrow 0^+$? (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).

III.1.4/ Etablir, pour $x > 0$, la relation :

$$\left(\int_{]0,x]} (f'(t))^2 dt \right) = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_{]0,x]} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_{]0,x]} (h(t))^2 dt.$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

III.2/ Comparaison de E_1 et E_2 .

III.2.1/ Dédurre de la relation $\left(\int_{]0,x]} (f'(t))^2 dt \right) = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_{]0,x]} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_{]0,x]} (h(t))^2 dt$ l'inclusion : $E_2 \subset E_1$.

III.2.2/ Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$).

III.3/ Comparaison de N_1 et N_2 .

III.3.1/ Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$ - espace vectoriel E_0 .

On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2 .

III.3.2/ Justifier l'inégalité : $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.

III.3.3/ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$.
Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.

III.3.4/ Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?

III.4/ Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation $\left(\mathbf{R} \right)$, montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \rightarrow +\infty$; quelle est cette limite ?

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Ce problème porte sur l'étude d'une suite double et de différents contextes dans lesquels on retrouve cette suite.

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0, par $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $[0, n]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$.

On note $M_{n+1}(\mathbf{Z})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Pour $M \in M_{n+1}(\mathbf{Z})$, on note $M = (m_{p,q})_{(p,q) \in [0,n]^2}$ où $m_{p,q}$ est l'élément de la ligne p et de la colonne q . Par exemple $M \in M_2(\mathbf{Z})$ sera noté $M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} \end{pmatrix}$.

Pour $M \in M_{n+1}(\mathbf{Z})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M et $\text{com}(M)$ la comatrice de M .

$\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Les parties **II**, **III** et **IV** de ce problème sont indépendantes entre elles ; seule la suite étudiée dans la partie **I** apparaît dans une question de chacune de ces parties.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

On définit la suite double de nombres réels $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ par :

- (i) $a_{0,0} = 1$
- (ii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{p,0} = 0$
- (iii) pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $a_{0,q} = 0$
- (iv) pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)a_{p+1,q}$.

La considération d'un tableau, dans lequel les $a_{p,q}$ sont disposés avec p indice de ligne et q indice de colonne, pourra se révéler d'une utilité certaine.

I.1. Pour $q \in \mathbb{N}$, calculer $a_{1,q}$.

I.2. Calculer $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$.

I.3. Pour $q \geq 2$, exprimer $a_{2,q}$ en fonction de $a_{2,q-1}$. En déduire la valeur de $a_{2,q}$.

I.4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la propriété P_p : " pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $a_{p,q} \in \mathbb{N}$ ".
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la propriété P_p est vraie.

I.5. Pour $p > q$, calculer $a_{p,q}$.

I.6. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $a_{p,p}$.

I.7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ (c'est-à-dire à $n+1$ lignes et à $n+1$ colonnes), dont le terme de la ligne p et de la colonne q est $a_{p,q}$, pour tout $(p,q) \in [0,n]^2$.

Expliciter les matrices A_2 , A_3 , A_4 et A_5 .

PARTIE II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

II.1. Soit $M = (m_{p,q}) \in M_{n+1}(\mathbf{Z})$.

II.1.1. Montrer que $\det(M) \in \mathbf{Z}$.

II.1.2. Montrer que $\text{com}(M) \in M_{n+1}(\mathbf{Z})$.

II.1.3. On rappelle qu'une matrice M est inversible dans $M_{n+1}(\mathbf{Z})$ si et seulement si M^{-1} existe et appartient à $M_{n+1}(\mathbf{Z})$. Montrer que M est inversible dans $M_{n+1}(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

II.2. On définit la suite $(B_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ par : $B_0 = 1$ et pour $p \in \mathbf{N}^*$,
$$B_p = \prod_{j=0}^{p-1} (X - j).$$

II.2.1. Montrer que $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_n[X]$; on notera (B) cette base.

On note (X) la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

On note P_n la matrice de passage de la base (X) à la base (B) et Q_n la matrice de passage de la base (B) à la base (X) .

II.2.2. On prend $n = 4$, expliciter les matrices P_4 et Q_4 .

II.2.3. Montrer que P_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

II.2.4. Calculer $\det(P_n)$.

II.2.5. Montrer que Q_n est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

On note $Q_n = (\beta_{p,q})_{(p,q) \in [0,n]^2}$. Pour tout $q \in [0, n]$, on a donc $X^q = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p$.

II.2.6. En donnant à X des valeurs particulières, déterminer les coefficients $\beta_{0,q}$, $\beta_{1,q}$, $\beta_{2,q}$ pour $q \in [0, n]$.

II.2.7. Montrer que $Q_n = A_n$ où A_n est la matrice définie au I.7.

PARTIE III

On note F l'espace vectoriel réel des applications de classe C^∞ définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On définit l'application ϕ de F dans F par :

$$\phi(f) = g \text{ où } g(x) = xf'(x).$$

Pour $q \in \mathbf{N}^*$, on note $\phi^q = \phi \circ \phi^{q-1}$; ainsi $\phi^2 = \phi \circ \phi$ (par convention : $\phi^0 = id_F$).

III.1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de F . Est-il surjectif ? Est-il injectif ? Préciser le noyau de ϕ .

III.2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de ϕ .

III.3. Pour $f \in F$, expliciter $\phi^2(f)$. Déterminer le noyau de ϕ^2 et en donner une base.

III.4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers $d_{p,q}$ tels que, pour tout $q \in [1, n]$ et tout $f \in F$, on ait la relation : pour tout x dans $]0, +\infty[$, $\phi^q(f)(x) = \sum_{p=1}^q d_{p,q} x^p f^{(p)}(x)$, où $f^{(p)}$ est la dérivée p-ième de f .

On admet que cette décomposition est unique.

III.5. On convient que $d_{0,0} = 1$ et que, pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{N}^*$, $d_{p,0} = d_{0,q} = 0$ et $d_{p,q} = 0$ si $p > q$.

Montrer que pour tout $(p, q) \in [1, n]^2$, on a $d_{p,q} = a_{p,q}$, où les $a_{p,q}$ sont les termes définis dans la partie I.

PARTIE IV

IV.1 Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(t) = \exp((\exp t) - 1)$, où $\exp$ est la fonction exponentielle.

IV1.1. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 4 en $t = 0$.

IV1.2. Pour n variant de 1 à 4, en déduire la valeur de la dérivée n-ième de φ en 0.

Soit E un ensemble de cardinal n , $n \in \mathbb{N}$. On appelle partition de E , tout ensemble de parties non vides de E , deux à deux disjointes, dont la réunion est E . Chaque partie de la partition s'appelle une classe.

IV.2. Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on note P_n^j le nombre de partitions de E en j classes. Par convention, on note $P_0^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, $P_n^0 = P_0^j = 0$.

IV.2.1. Pour $j > n$, calculer P_n^j .

IV.2.2. Calculer P_n^1 et P_n^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.2.3. On suppose $j \geq 2$ et $n \geq 1$. Soit $a \in E$.

En distinguant parmi les partitions de E en j classes, celles pour lesquelles le singleton $\{a\}$ est une classe de la partition, justifier l'égalité $P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + jP_{n-1}^j$.

IV.2.4. En déduire que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, on a $P_n^j = a_{j,n}$, les $a_{j,n}$ étant les termes définis dans la partie I.

IV.3. On note P_n le nombre de partitions de E . Par convention $P_0 = 1$.

IV.3.1. Pour n variant de 1 à 4, calculer P_n et comparer P_n à $\varphi^{(n)}(0)$ où φ est la fonction définie en IV.1.

IV.3.2. Exprimer P_n à l'aide des P_n^j . Dans la suite, on admettra la formule

$$(1) \quad P_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k P_k \quad \text{où les } C_n^k \text{ sont les coefficients du binôme.}$$

IV.3.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $P_n \leq n!$

IV.4 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

IV.4.1. Déduire de IV.3.3. que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 1.

IV.4.2. Montrer à l'aide de (1) que pour $|x| < 1$, on a $s'(x) = s(x) \exp x$ (on pourra développer en série entière $\exp x$ et utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières).

IV.4.3. En déduire $s(x)$.

IV.4.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \varphi^{(n)}(0)$.

Fin de l'énoncé.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Si n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, tA désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\text{Ker}(A)$ est le noyau de A défini par : $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $\text{Im}(A)$ est l'image de A définie par : $\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), Y = AX\}$

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$ et on identifiera selon l'usage $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$$

Tournez la page S.V.P.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre n et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n .

PARTIE I

I.1 Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(M)$ et $\text{Ker}({}^tM)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les noyaux $\text{Ker}(M)$ et $\text{Ker}({}^tM)$?
- b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\text{Im}(M)$ et $\text{Im}({}^tM)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les images $\text{Im}(M)$ et $\text{Im}({}^tM)$?

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A{}^tA) = \text{Ker}({}^tA)$.
- b) Montrer que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A{}^tA) = \text{rg}(A)$.
- c) Montrer que $\text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA)$ et $\text{Im}(A{}^tA) = \text{Im}(A)$.

I.3 Soit q un entier naturel non nul et $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ un système de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$, $r = \dim F$ et $G = (g_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ définie par $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_q^2$. Le déterminant de G est appelé déterminant de Gram du système $\mathcal{S}$ et sera noté $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q)$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base orthonormale de F , on note pour tout j de $\mathbb{N}_q$, $x_j = \sum_{i=1}^r b_{ij}e_i$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ de terme général b_{ij} .

- a) Montrer que $G = {}^tBB$ et en déduire $\text{rg}(G) = \text{rg}(\mathcal{S})$.
- b) Montrer que G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.
- c) En déduire que $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q) \geq 0$ et que $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ est liée.
- d) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec sa condition nécessaire et suffisante d'égalité est un cas particulier de ce résultat.

I.4 Montrer que $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q)$ reste invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

I.5 Dans cette question q est supérieur ou égal à 2.

a) On note L le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \dots, x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L , puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$. Montrer que :

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, x_3, \dots, x_q)$$

b) En déduire successivement :

i) $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1)\gamma(x_2, x_3, \dots, x_q)$ avec égalité si et seulement si x_1 est orthogonal à L .

ii) $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1)\gamma(x_2) \cdots \gamma(x_q)$ avec égalité si et seulement si les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_q$ sont deux à deux orthogonaux.

I.6 Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $c_1, c_2, \dots, c_n$ ses vecteurs colonnes.

a) Montrer que :

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^n \|c_k\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $c_1, \dots, c_n$ sont deux à deux orthogonaux.

b) On suppose de plus : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, |a_{ij}| \leq 1$. Montrer que :

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}}$$

avec égalité si et seulement si A est une matrice à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

PARTIE II

On note :

- $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{-1, +1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.
- $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients diagonaux dans $\{-1, +1\}$.
- E l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\mathcal{H}_n$ est non vide.

II.1 Déterminer explicitement toutes les matrices éléments de $\mathcal{H}_2$.

II.2 a) Montrer que toute matrice A de $\mathcal{H}_n$ vérifie ${}^tAA = nI_n$.

b) Réciproquement toute matrice carrée A vérifiant ${}^tAA = nI_n$ est-elle dans $\mathcal{H}_n$?

c) Montrer que si A est à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et vérifie ${}^tAA = nI_n$, alors A est dans $\mathcal{H}_n$.

II.3 On appelle permutation σ de $\mathbb{N}_n$ toute bijection de $\mathbb{N}_n$ sur lui-même et matrice de permutation $P^{(\sigma)}$ associée à la permutation σ , la matrice d'éléments $P_{ij}^{(\sigma)}$ donnés par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, P_{ij}^{(\sigma)} = \delta_{i\sigma(j)}$$

où δ_{kl} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Donner le terme général de la matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$. Comment obtient-on cette matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$ à partir de A ?
- b) Donner le terme général de la matrice $AP^{(\sigma)}$. Comment obtient-on cette matrice $AP^{(\sigma)}$ à partir de A ?
- c) Montrer que si A appartient à $\mathcal{H}_n$, il en est de même de tA , des matrices ${}^tP^{(\sigma)}A$ et $AP^{(\sigma)}$ pour toute permutation σ ainsi que des matrices $A\Delta$ et ΔA pour toute matrice Δ de $\mathcal{D}_n$.

II.4 Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit direct de A et B par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

- a) Montrer que si $A \in \mathcal{H}_2$ et $B \in \mathcal{H}_n$, alors $A \otimes B \in \mathcal{H}_{2n}$.
 - b) En déduire que E contient toutes les puissances de 2.
 - c) Montrer que l'ensemble $\{A \otimes B \mid (A, B) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2\}$ est strictement inclus dans $\mathcal{H}_4$.
- II.5** Soit $n \in E$, $n > 2$.

- a) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1. Déduire alors de l'orthogonalité des vecteurs colonnes 1 et 2 d'une telle matrice que n est pair. On pose $n = 2m$.
- b) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1 et dont la deuxième colonne est constituée de m coefficients égaux à 1 suivis de m coefficients égaux à -1 . Déduire alors de l'orthogonalité du troisième vecteur colonne avec les vecteurs colonnes 1 et 2 que n est un multiple de 4.

PARTIE III

III.1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.2 Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $M = RS$.

- a) Montrer que la matrice tMM est symétrique définie positive.
- b) En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = S^2$.
- c) Montrer que S est inversible et que MS^{-1} est orthogonale.
- d) Conclure. Dans toute la suite du problème on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

III.3 Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes, D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\text{Tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que $\text{Tr}(Q\Sigma) = \text{Tr}(Q_1D)$ et en déduire :

$$\text{Tr}(Q\Sigma) \leq \text{Tr}(\Sigma)$$

c) Montrer que $\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} [\text{Tr}(Q\Sigma)] = \text{Tr}(\Sigma)$.

III.4 Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{H}_n$, on pose :

$$f(A) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{ij} \right)$$

a) Montrer que l'application f ainsi définie de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure que l'on notera α_n .

b) Soit $T = (t_{ij})$ la matrice triangulaire inférieure d'ordre n définie par $t_{ij} = 1$ si $i \geq j$ et $t_{ij} = 0$ si $i < j$. Montrer que $f(A) = \text{Tr}(AT)$.

c) D'après la question **III.2**, on sait que $T = RS$ avec R orthogonale et S symétrique définie positive. Montrer alors que $f(A) \leq \sqrt{n} \text{Tr}(S)$, puis que $\alpha_n \leq \sqrt{n} \text{Tr}(S)$.

d) Lorsque $n = 2$, évaluer α_2 et $\sqrt{2} \text{Tr}(S)$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

*N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,
à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

La partie II peut être traitée indépendamment des parties I et III.

PARTIE I

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ de la variable complexe z , où s est un nombre réel donné.

I.1 Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

I.2 Dans cette question, $z = e^{i\theta}$ désigne un nombre complexe de module 1.

I.2.1 Etudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ dans le cas où $s > 1$ ainsi que dans le cas où $s \leq 0$.

I.2.2 Dans le cas où $0 < s \leq 1$, étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour $z = 1$.

I.2.3 Toujours dans le cas où $0 < s \leq 1$, on suppose que $z \neq 1$. On pose $S_0 = 0$, et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = \sum_{k=1}^n z^k$.

Tournez la page SVP

Montrer que $|S_n| \leq M(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M(\theta) = \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$.

En écrivant z^k sous la forme $S_k - S_{k-1}$ pour tout nombre entier $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k [k^{-s} - (k+1)^{-s}] + S_n n^{-s}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n [n^{-s} - (n+1)^{-s}]$ est convergente et en déduire que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n \text{ est convergente.}$$

Nous noterons dorénavant $\varphi(z, s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour tout couple $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente.

I.3 On note I l'intervalle ouvert $] -1, +1[$ de $\mathbb{R}$.

I.3.1 Montrer que pour tout $(x, s) \in I \times \mathbb{R}$ on a $\varphi(x, s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$.

I.3.2 Calculer $\varphi(x, 0)$ et $\varphi(x, 1)$ pour tout $x \in I$.

I.4 On suppose dans cette question que $s > 1$.

I.4.1 Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt} t^{s-1}$. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ à l'aide de n, s et

$$\text{l'intégrale } \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} f_1(t) dt.$$

I.4.2 Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$ de fonctions de la variable réelle t est intégrable terme à terme sur $]0, +\infty[$.

En déduire que pour tout $s > 1$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, on a :

$$(1) \quad \varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \varphi(1, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

II.1 Montrer que ζ est une fonction indéfiniment dérivable de la variable s sur $]1, +\infty[$.

II.2 Montrer que ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

II.3 Montrer que pour tout $s \in]1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s).$$

En déduire la limite de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers $+\infty$.

Déterminer un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

PARTIE III

III.1 Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

- (i) $g(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.
- (ii) g est périodique de période 2π .

III.1.1 Montrer que g est paire. Développer g en série de Fourier réelle. Etudier l'égalité entre g et la somme de sa série de Fourier.

III.1.2 Calculer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, où ζ est la fonction définie dans la partie précédente.

III.2 Soit θ un nombre réel. On note $R\varphi(\theta)$ la partie réelle de $\varphi(e^{i\theta}, 2)$, où φ est la fonction définie à la question I.2.

III.2.1 Exprimer $R\varphi(\theta)$ à l'aide de $g(\theta)$.

III.2.2 En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

III.2.3 Déduire de ce qui précède la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt.$$

III.3 Soit s un nombre réel strictement positif.

III.3.1 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s (e^t \cos \theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \cos n\theta,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s e^t \sin \theta}{e^{2t} - 2e^t \cos \theta + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)} \sin n\theta.$$

III.3.2 En déduire des expressions des intégrales :

$$I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch} t} dt, \quad J(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{sh} t} dt,$$

en fonction des sommes $S_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)^{-(s+1)}$, $S_2(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1)^{-(s+1)}$ et de $\Gamma(s+1)$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Objet : La transformation de Fourier est un outil employé en sciences de l'ingénieur. En plus d'être linéaire, elle vérifie de nombreuses propriétés. Nous nous proposons d'en établir quelques-unes en nous limitant à un espace vectoriel particulier.

I. - Préliminaires

On note $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions définies, continues, infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions f de la forme $f(t) = P(t) e^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes.

Pour tout n entier naturel, on note $\mathcal{P}_n$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ des fonctions f de la forme $f(t) = P(t) e^{-\pi t^2}$ où P est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n .

I-1) Quelques endomorphismes qui nous seront utiles

Soient T , D , S trois applications qui, à une fonction f de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ associent respectivement les fonctions suivantes :

$$T(f) = g \text{ avec pour tout } t \text{ réel } g(t) = t f(t)$$

$$D(f) = f'$$

$$S(f) = h \text{ avec pour tout } t \text{ réel } h(t) = f(-t)$$

Montrer que les applications T , D , S définissent chacune un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Montrer que S est un automorphisme. Donner S^{-1} .

I-2) Étude des intégrales utilisées

a) Justifier l'existence de $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

De nombreuses méthodes permettent d'obtenir $J = \sqrt{\pi}$. On l'admettra.

En déduire la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$.

b) Pour toute fonction f de $\mathcal{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

c) Pour tout u réel, pour toute fonction f de $\mathcal{P}$, justifier la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} dt$.

I-3) Définition de la transformation de Fourier (notée ϕ ici)

Soit ϕ l'application qui, à tout f de $\mathcal{P}$ associe si elle existe la fonction $\phi(f) = \psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } u \text{ réel} \quad \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} dt.$$

Vérifier que ϕ est bien définie sur $\mathcal{P}$, puis montrer que ϕ est une application linéaire.

II. – Deux formules pour l'application linéaire ϕ

On conservera par la suite les notations suivantes :

f un élément de $\mathcal{P}$, défini par : $f(t) = P(t) e^{-\pi t^2}$ pour tout t réel.

Son image par ϕ : $\psi = \phi(f)$ définie par : $\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi ut} dt$ pour tout u réel.

II-1) Première formule

Justifier la dérivabilité de ψ , calculer $\psi'(u)$ et montrer que dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\psi' = -2i\pi \phi(g) \quad \text{avec } g(t) = t f(t)$$

que l'on peut écrire de façon plus formelle

$$D \circ \phi = -2i\pi (\phi \circ T) \quad \text{formule que l'on notera (1)}$$

En remarquant que ψ' est l'image d'une fonction de $\mathcal{P}$, en déduire que ψ est infiniment dérivable et est donc un élément de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

II-2) Deuxième formule

Par une intégration par parties, montrer que dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\phi(f') = \psi_1 \quad \text{avec } \psi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-2i\pi ut} dt = 2i\pi u \psi(u)$$

que l'on peut écrire de façon plus formelle :

$$\phi \circ D = 2i\pi (T \circ \phi) \quad \text{formule que l'on notera (2)}$$

III. – ϕ est un endomorphisme

III-1) Pour tout k entier naturel, on note b_k la fonction qui à tout t réel associe $b_k(t) = t^k e^{-\pi t^2}$. Pour tout n entier naturel, on considère la famille $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$, justifier que celle-ci constitue une base de $\mathcal{P}_n$. On pose $\phi(b_k) = B_k$.

III-2) Donner l'ensemble $\mathcal{SG}$ des solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(t) + 2\pi t f(t) = 0$ si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1 .

III-3) Vérifier que b_0 est un élément de $\mathcal{SG}$, noter la relation différentielle qui en découle en utilisant les endomorphismes D et T , en déduire une relation différentielle vérifiée par B_0 , puis montrer l'existence d'une constante complexe λ telle que, pour tout u réel, $B_0(u) = \lambda e^{-\pi u^2}$. Exprimer $B_0(0)$ sous forme d'une intégrale et en déduire la valeur de λ .

III-4) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = T(b_{k-1})$. Calculer B_1, B_2, B_3 , puis montrer par récurrence que $B_k = \phi(b_k)$ est un élément de $\mathcal{P}_k$. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, si f est un élément de $\mathcal{P}_n$, il en est de même de $\phi(f)$. Montrer alors que ϕ définit un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

IV. – Étude en dimension 4

Soit n un entier naturel.

On note S_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ tel que $S_n(f) = S(f)$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ tel que $\phi_n(f) = \phi(f)$.

IV-1) Ecrire les matrices de ϕ_3 et S_3 dans la base (b_0, b_1, b_2, b_3) de $\mathcal{P}_3$.

IV-2) Expliciter $\phi_3 \circ \phi_3$ en fonction de S_3 . En déduire que ϕ_3 est inversible et déterminer son inverse.

V. – ϕ est bijectif. Quel est son inverse ?

Pour tout endomorphisme A , on note $A^2 = A \circ A$, et pour tout m entier naturel non nul $A^m = A \circ A^{m-1} = A^{m-1} \circ A$ avec la convention $A^0 = I$ qui représente l'application identité sur $\mathcal{P}$.

Pour tout j entier naturel, on note $b_0^{(j)}$ la $j^{\text{ième}}$ dérivée de b_0 , on a donc $b_0^{(j)} = D^j(b_0)$ (on posera $b_0^{(0)} = b_0$).

V-1) Pour tout j entier naturel non nul, exprimer $\phi(b_0^{(j)})$ en fonction de b_0 et de T , puis en fonction de b_j .

V-2) Pour tout k entier naturel non nul, on a la relation $b_k = T(b_{k-1}) = T^k(b_0)$; exprimer $\phi(b_k)$ en fonction de b_0 et de D , puis en fonction de $b_0^{(k)}$.

V-3) Exprimer alors $\phi^2(b_k)$. En déduire que ϕ est bijectif, justifier les deux formules suivantes :

$$\phi \circ \phi = S \quad \text{et} \quad \phi^{-1} = S \circ \phi = \phi \circ S.$$

Cette dernière relation nous permettra par la suite de permuter S et ϕ .

V-4) Montrer que $\phi^{-1} = \phi^3$.

VI. – Valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_3

VI-1) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_3 ; cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

VI-2) Déterminer une base de $\mathcal{P}_3$ formée de vecteurs propres de ϕ_3 .

VI-3) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout t réel par : $f(t) = P(t) e^{-\pi t^2}$, avec $P(t) = 1 + t^2 + t^3$.

Décomposer f dans la base trouvée à la question précédente.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Soit α un nombre réel et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note (E_α) l'équation différentielle suivante :

$$(E_\alpha) : y'' + \alpha y = f.$$

On désigne par :

- S l'ensemble des fonctions F de la variable x deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_α) .
- S_0 l'ensemble des fonctions F éléments de S telles que $F(0) = F(\pi) = 0$.

Partie A

A.1.) On suppose dans cette question que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$ et que le réel α est nul. Déterminer l'ensemble S_0 .

A.2.) On suppose dans cette question que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Soit ω un réel strictement positif, déterminer l'ensemble S_0 lorsque :

- A.2.a.) $\alpha = \omega^2$.
- A.2.b.) $\alpha = -\omega^2$.

A.3.) On suppose dans cette question que le réel α est nul.

Soit n un entier naturel non nul, déterminer l'ensemble S_0 lorsque :

- A.3.a.) $f(x) = \cos nx$.
- A.3.b.) $f(x) = \sin nx$.

A.4.) On suppose toujours que le réel α est nul et on désigne par f un élément quelconque de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

- A.4.a) Montrer que :

$$S = \left\{ F : x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du + ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- A.4.b) En déduire que l'ensemble S_0 admet un unique élément noté F_1 . Déterminer F_1 .

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ la fonction définie de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même qui, à la fonction f , associe F_1 , unique élément de S_0 .

A.5.a.) Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

A.5.b.) L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

A.5.c.) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme φ .

Partie B

B.1.) On définit la fonction p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

B.1.a.) Montrer que la fonction p est paire, de période 2π , continue et de classe C^1 par morceaux.

B.1.b.) Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction p sur $[-\pi, 3\pi]$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Unité graphique 2 cm sur $(O; \vec{i})$ et 5 cm sur $(O; \vec{j})$.

B.1.c.) Justifier avec soin que la fonction p est somme de sa série de Fourier.

B.1.d.) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction p et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}.$$

B.2.a.) Soit g une fonction continue, de période 2π de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $a_n(g)$ et $b_n(g)$ ses coefficients de Fourier.

Donner la formule de Parseval pour la fonction g .

B.2.b.) En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Partie C

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_1) dans le cas particulier où f est un élément de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit :

$$y'' + y = f.$$

C.1.) Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0.$$

C.2.) On définit la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

C.2.a.) Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad h(x) = \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt.$$

C.2.b.) Montrer que la fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter h' et h'' .

C.2.c.) En déduire que la fonction h est une solution particulière de (E_1) .

C.3.) Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) .

C.4.) On suppose dans cette question que $f(x) = |\sin x|$.

C.4.a.) Déduire de la partie B que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

C.4.b.) Soit x un nombre réel et n un entier naturel, calculer :

$$\int_0^x \cos 2nt \sin(x-t) dt.$$

C.4.c.) **On admet avoir le droit de permuter série et intégrale.**

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} (1 - \cos x) + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx - \cos x}{(4n^2 - 1)^2}.$$

C.4.d.) Déduire de la question B.2.b.) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

C.4.e.) Calculer $h(0)$ et $h(\pi)$.

C.4.f.) Déduire l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = |\sin x|$ puis l'ensemble S_0 des éléments de S s'annulant en 0 et π .

Partie D

On considère l'équation différentielle :

$$(F) \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0.$$

D.1.) Soit z une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, y(x) = z(\ln x)$. Exprimer à l'aide des applications z' , z'' les dérivées première et seconde de l'application y .

D.2.) Montrer que l'application y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (F) si, et seulement si, l'application z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à préciser, que l'on notera (H).

D.3) Résoudre (H). En déduire l'ensemble des solutions de (F).

D.4.) Déterminer l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, & x > 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Fin de l'énoncé

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel n , on note E_n le sous-espace de E formé par les polynômes de degré au plus égal à n .

Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

L'espace E_n est muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($0 \leq k \leq n$).

Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme P de E , on définit un polynôme $\phi(P)$ par :

$$[\phi(P)](X) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X).$$

- 1) Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme ϕ de E .
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n , le sous-espace vectoriel E_n est stable par ϕ .

On notera désormais φ_n l'endomorphisme de E_n induit par ϕ sur E_n :

$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = \phi(P)$$

- 3) Dans cette question, on suppose que n est égal à 3.
 - a) Écrire la matrice M_3 de φ_3 dans la base canonique de E_3 .
 - b) Justifier que φ_3 est diagonalisable.
 - c) Déterminer une base de E_3 diagonalisant φ_3 , formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1.
- 4) On revient au cas général d'un entier naturel n quelconque.
 - a) Montrer que la matrice M_n de φ_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.
 - b) En déduire que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

Partie B : Étude d'une famille de polynômes

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme L_n par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

- 1) Calculer sous forme simplifiée les polynômes L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .
- 2) Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer le degré de L_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
- 4) En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n a la même parité que n .
- 5) Vérifier, à l'aide de la formule de LEIBNIZ, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n].$$

- 6) En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n , puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- 7) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leq \left(\frac{1 + |x|}{2} \right)^n \binom{2n}{n}.$$

- 8) On définit, pour tout entier naturel n , le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$.

a) Vérifier que :

$$(X^2 - 1) U'_n(X) = 2nXU_n(X).$$

b) En dérivant $n + 1$ fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi(L_n) = n(n + 1)L_n.$$

Partie C : Définition d'un produit scalaire

On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) \, dx.$$

1) Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E .

Dans toute la suite du problème, l'espace E et ses sous-espaces E_n ($n \in \mathbb{N}$) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2) a) Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P'(x)Q'(x) \, dx.$$

b) Que peut-on dire déduire pour les endomorphismes φ_n ($n \in \mathbb{N}$) ?

c) En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie B, que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

3) Soit n un entier naturel.

a) Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in [0, n], \langle Q, L_n \rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] \, dx.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1} .

c) Retrouver ainsi que les polynômes L_p ($p \in \mathbb{N}$) sont deux à deux orthogonaux.

4) a) À l'aide de C.3)a), exprimer, pour tout entier naturel n , $\|L_n\|^2$ en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \, dx.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

5) Donner, pour tout entier naturel n , une base orthonormée de E_n .

Partie D : Une relation de récurrence

Soit n un entier naturel non nul.

1) Calculer le coefficient de X^{n+1} dans $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$.

2) En déduire l'existence et l'unicité de $n+1$ réels α_k tels que

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X).$$

3) Montrer que $\forall k \in [0, n], \alpha_k = -(2n+1) \frac{\langle XL_n, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$.

4) Pour tout $k \in [0, n-2]$, vérifier que $\langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle$ puis montrer que $\alpha_k = 0$.

5) Par des considérations de parité, montrer que $\alpha_n = 0$.

- 6) En utilisant la valeur des polynômes L_k au point 1, déterminer alors α_{n-1} .
- 7) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$.

Partie E : Fonction génératrice

On fixe un réel t et on considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} L_n(t)x^n$, de la variable réelle x .

- 1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^n \binom{2n}{n} x^n$.
- 2) En déduire que le rayon de convergence R_t de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} L_n(t)x^n$ est strictement positif.
On donnera une minoration de R_t , mais on ne cherchera pas à le calculer.

On note S_t la somme de cette série entière : $\forall x \in]-R_t, R_t[, S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$

- 3) En utilisant le résultat de **D.7)**, montrer que S_t est solution sur $]-R_t, R_t[$ de l'équation différentielle suivante, d'inconnue y fonction de x :

$$(\mathcal{E}_t) \quad (1 - 2tx + x^2)y'(x) + (x - t)y(x) = 0$$
- 4) Pour $|t| < 1$, en déduire l'expression de $S_t(x)$ en fonction de x .

Partie F : Projection orthogonale, calcul de distance

- 1) Calculer, pour tout entier naturel k , l'intégrale

$$J_k = \int_{-1}^1 x^k \, dx.$$

- 2) Étant donnés deux entiers naturels n et r , tels que $0 \leq r \leq n$, on note p_r la projection orthogonale de E_n sur son sous-espace vectoriel E_r .
Donner une expression générale de $p_r(P)$ utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme P de E_n .
- 3) On suppose désormais $n = 3$ et $P = X^3$.
 - a) Déterminer $p_0(P)$, $p_1(P)$ et $p_2(P)$.
 - b) Calculer les distances $d(P, E_k)$ de P aux sous-espaces vectoriels E_k pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2$.

- 4) On note G l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.
Montrer l'existence de

$$m = \min_{Q \in G} \int_{-1}^1 (Q(x))^2 \, dx$$

et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants**PREMIER EXERCICE**

Calculer les deux intégrales doubles suivantes :

- a. $\iint_T (x+y) dx dy$ où $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1, y \leq 1, x+y \geq 0\}$.
- b. $\iint_C |x+y| dx dy$ où $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

DEUXIÈME EXERCICEPour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire

$$(E_n): xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n=1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geq 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.

On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
 - a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 - c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 - d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $] -1, 1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Exemple

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II. THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

a. Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que :

pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et

que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*

Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$ pour $n \geq 1$).

b. Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel,

$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition (Q) à la condition (P_2) de telle sorte que si (a_n) vérifie (P_2) et (Q) , alors elle vérifie (P_1) .

9. On prend pour (Q) la propriété : pour tout entier n , $a_n \geq 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés (P_2) et (Q) , alors elle vérifie la propriété (P_1)

(on pourra montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$).

Si on prend pour (Q) la propriété :

la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$),

on obtient le **théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV. SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :

si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n.$$

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

diverge et que la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i$ pour que la

série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. Exemple

Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est périodique de période 6 avec

$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1, \varepsilon_5 = -1, \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

(il est demandé de détailler les calculs).

Fin de l'énoncé.

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RACINES CARRÉES DE MATRICES

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

$M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ - algèbre des matrices carrées réelles de taille n .

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.

$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée.

$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

$S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:

si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Objectifs

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

On note $\text{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A , c'est-à-dire

$$\text{Rac}(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}), R^2 = A\}.$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut admettre parfois une infinité de racines) et d'étudier quelques propriétés topologiques de $\text{Rac}(A)$.

Les trois parties du problème sont **indépendantes**.

Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I – DÉTERMINATION DE $\text{Rac}(A)$ DANS QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A , si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .
2. Racines carrées de D
Soit S une racine carrée de D .
 - a. Montrer que $DS = SD$.
 - b. En déduire que la matrice S est diagonale.
 - c. On note alors $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?
 - d. Que peut-on dire de $\text{Rac}(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative?
 - e. Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D . On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P . Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).
4. Application :

Écrire les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f .
 - a. Comparer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.
 - b. On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im } f$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\text{Ker } f$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.
6.
 - a. Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.
 - b. Application : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : Cas où $A = I_n$

7. Soit R une racine carrée de l'unité I_n .
 - a. Vérifier que R est une matrice inversible.
 - b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.
8. Déterminer $\text{Rac}(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 4 : Cas où A est une matrice symétrique réelle

Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

9. Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?
10. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle-même symétrique et positive.

Remarque : On peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

II – ÉTUDE TOPOLOGIQUE DE $\text{Rac}(A)$

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N .

Tournez la page S.V.P.

11. Fermeture de $\text{Rac}(A)$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Rac}(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

12. Étude du caractère borné de $\text{Rac}(I_n)$ **a. Un exemple instructif**

Pour tout entier naturel q , on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2 . $\text{Rac}(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

b. $\text{Rac}(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?**c. Application : pour cette question, $n \geq 2$.**

Montrer qu'il n'existe pas de norme $\| \cdot \|$ « surmultiplicative » sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|\|B\|$.

III – ZÉROS DE FONCTIONS POLYNOMIALES. APPLICATION À LA DÉTERMINATION DE L'INTÉRIEUR DE $\text{Rac}(A)$

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$.

On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire :

si $P \in \Gamma_p$, il existe N un entier naturel et une famille de réels $\{a_{i_1, \dots, i_p}, 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq N\}$ tels que

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in I_1 \times \dots \times I_p, \quad P(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq N} a_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}.$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.

Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.

Enfin, si $P \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, P(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0\}$ ($Z(P)$ est l'**ensemble des zéros de la fonction polynomiale P**).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $\text{Rac}(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a, r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

13. Questions préliminaires :

- a. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a, r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.
- b. Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

14. Exemples d'ensemble des zéros de fonctions polynomiales

- a. Dans cette question $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.
- b. Dans cette question $p = 2$. On considère $P(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$.
 $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-ils infinis ?

15. Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale

Soit $P \in \Gamma_p$.

- a. Soient $I_1, I_2, \dots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.
- b. En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.
- c. Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

16. Application à l'étude de l'intérieur de $\text{Rac}(A)$

Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

- a. Écrire $\text{Rac}(A)$ sous forme d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1, P_2, \dots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que $\text{Rac}(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l)$.
- b. Déterminer l'intérieur de $\text{Rac}(A)$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Notation et Objectifs :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathbf{C}^0$: le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathbf{C}_1^0$: le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^0$ des fonctions f 1-périodique (c'est-à-dire telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application de $\mathbf{C}^0$ dans $\mathbf{C}^0$, définie par :

pour tout $f \in \mathbf{C}^0$, $\theta(f) = F$ où F est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x , associe $\int_x^{x+1} f(t)dt$.

On admet que θ est un endomorphisme de $\mathbf{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme θ .

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

Quelques propriétés de $F = \theta(f)$

I.1/ Exemples.

I.1.1/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$.

I.1.2/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où k est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

I.2/ Variation de $F = \theta(f)$.

On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de $\mathbf{c}^0$.

I.2.1/ Montrer que la fonction F est de classe $\mathbf{c}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x .

I.2.2/ Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0} .

I.2.3/ Montrer que la fonction $F = \theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathbf{c}_1^0$.

I.2.4/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathbf{c}^0$.

I.2.5/ On suppose que la fonction f admet une limite finie L_1 en $+\infty$.

Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1 = 0$.

I.3/ Propriétés du graphe de F .

Soient $f \in \mathbf{c}^0$ et $F = \theta(f)$.

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t) dt$.

I.3.1/ Comparer $\psi(-u)$ et $\psi(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).

I.3.2/ Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1**, si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

I.4/ Étude d'un exemple.

Soit $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2 + 1}$, pour t réel.

I.4.1/ Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.2/ La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

I.4.3/ La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

I.4.4/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).

I.4.5/ La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

I.4.6/ Soit $F = \theta(f)$.

I.4.6.1/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F .

I.4.6.2/ La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}_+$).

PARTIE II

L'endomorphisme θ

II.1/ L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

II.2/ Sur le noyau de θ .

On note désormais $\text{Ker } \theta$ le noyau de l'endomorphisme θ .

II.2.1/ Montrer que $f \in \text{Ker } \theta \Leftrightarrow [f \in \mathcal{C}_1^1 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0]$.

II.2.2/ Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}_1)^2$. On note $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

On admettra, sans justification, que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_1^0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note C_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $C_k(t) = \cos(2\pi kt)$.

II.2.2.1/ Vérifier que C_k appartient à $\mathbf{c}_1^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle C_j | C_k \rangle$ pour $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2/ Ker? est-il de dimension finie ?

II.2.3/ Soit $f \in \mathbf{c}_1^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $\varphi_n(x) = \int_n^x f(t)dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $w_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

II.2.3.1/ Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $w_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$.

II.2.3.2/ Si on suppose que f appartient à Ker? , quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} w_n ?$$

II.2.3.3/ Si on suppose que f n'appartient pas à Ker? , quelle est la nature de la

$$\text{série } \sum_{n \geq 1} w_n ?$$

II.3/ Sur le spectre de θ .

On note $Sp(\theta)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme θ .

Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

II.3.1/ Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme θ .

II.3.2/ Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

II.3.3/ Expliciter l'ensemble $[Sp(\theta)] \cap \mathbb{R}_+$.

PARTIE III

Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme θ

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme θ .

On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ qui est fixée dans toute cette partie.

On suppose $\lambda > 0$.

III.1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

On pose, pour tout t de l'intervalle I_k : $g(t) = t \left(\frac{\cos t}{\sin t} \right) + \ln \left(\frac{\sin t}{\lambda t} \right)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

III.1.1/ Soit ρ la fonction définie sur I_k , par : $\rho(t) = t \sin(2t) - t^2 - \sin^2 t$.

Étudier la fonction ρ sur I_k et préciser son signe.

III.1.2/ Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans E_λ , d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

III.2/ Soit $\gamma = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

III.2.1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{\gamma t} dt$.

III.2.2/ À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = e^{at} \cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme θ associé à la valeur propre λ ?

III.3/ En déduire une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme θ .

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations et objectifs

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $|\lambda|$ le module de λ .

$M_2(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices à deux lignes et à deux colonnes, à coefficients complexes.

$M = (m_{i,j})$ étant une matrice à coefficients complexes, on note $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de M . La matrice transposée de M est notée tM .

Pour $M \in M_2(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M et $\text{tr}(M)$ la trace de M . On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le problème porte sur l'étude de sous-ensembles de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ et conduit à définir, par des matrices de $M_2(\mathbb{C})$, des rotations d'un espace euclidien de dimension 3.

Dans la première partie, on définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$.

Dans la deuxième et la troisième partie, on étudie des sous-ensembles de matrices de $M_2(\mathbb{C})$.

Tournez la page S.V.P.

Dans la quatrième partie, on définit une structure euclidienne sur un sous-ensemble de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ et on étudie des automorphismes de cet espace euclidien.

Dans tout le problème, des questions de calcul peuvent être traitées indépendamment des autres questions.

PARTIE I

On note $\mathbb{C}^2$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des couples de nombres complexes. Les deux vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{C}^2$ forment une base $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$, appelée base canonique.

Étant donné deux vecteurs $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ de $\mathbb{C}^2$, de matrices $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique, **on définit le produit scalaire** $(x | y) = \bar{a}c + \bar{b}d = {}^t \bar{X}Y$; **la norme est définie par** $\|x\| = \sqrt{(x | x)} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

$\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel préhilbertien complexe pour ce produit scalaire et B est une base orthonormale de $\mathbb{C}^2$.

I.1. Soient $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ et λ, μ deux scalaires complexes. Exprimer les produits scalaires $(y | x)$, $(\lambda x | y)$, $(x | \mu y)$ en fonction du produit scalaire $(x | y)$.

I.2. Soient $x = (a, 1 + 3i)$, $y = (-1 + 5i, 3 - 2i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$.

I.2.1. À quelle condition sur le nombre complexe a , les vecteurs x et y forment-ils une base de $\mathbb{C}^2$?

I.2.2. À quelle condition cette base est-elle orthogonale ? Dans ce cas, calculer la norme de x .

I.3. Soit $T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

I.3.1. Déterminer les valeurs propres (complexes) et les sous-espaces propres de T .

I.3.2. En déduire qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de T , que l'on explicitera.

- I.4.** Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On note $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ les vecteurs colonnes de U .
Exprimer le produit matriciel ${}^t\bar{U}U$ en fonction de $(x|y)$, $\|x\|$ et $\|y\|$.

PARTIE II

On note $\mathcal{U} = \left\{ U \in M_2(\mathbb{C}) ; {}^t\bar{U}U = I_2 \right\}$.

- II.1.** Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ avec $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. À quelle condition sur les vecteurs colonnes x et y de U a-t-on $U \in \mathcal{U}$?

- II.2.** Soit $U \in \mathcal{U}$. Calculer $|\det(U)|$, le module de $\det(U)$.

- II.3.** Soit $U \in \mathcal{U}$.

- II.3.1.** Montrer que U est inversible et que U^{-1} appartient à $\mathcal{U}$.
II.3.2. Montrer que $\bar{U}$ appartient à $\mathcal{U}$ et que tU appartient à $\mathcal{U}$.
II.3.3. Soit $V \in \mathcal{U}$. Montrer que le produit UV appartient à $\mathcal{U}$.

- II.4.** Soit U un élément de $\mathcal{U}$ et soit λ une valeur propre complexe de U . Déterminer $|\lambda|$.

PARTIE III

On note $\mathrm{SU} = \{U \in \mathrm{U} \ ; \ \det(U)=1\}$.

Pour θ élément de $\mathbb{R}$, on définit la matrice $D_\theta \in \mathrm{SU}$ par : $D_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

III.1. Soit $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

III.1.1. Donner les quatre relations portant sur les scalaires a, b, c, d , qui caractérisent l'appartenance de U à SU .

III.1.2. On suppose que U appartient à SU . Montrer que $c = -\bar{b}$ et $d = \bar{a}$.

III.1.3. En déduire que U appartient à SU si et seulement si $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

III.2. Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ une matrice de SU .

III.2.1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi(\lambda) = \det(U - \lambda I_2)$ de U . En déduire qu'il existe un réel θ tel que les valeurs propres de U sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Etant donné une matrice $U \in \mathrm{SU}$, on admet que U est semblable à une matrice diagonale D_θ avec une matrice de passage $P \in \mathrm{SU}$, c'est à dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathrm{SU}$ tels que $U = PD_\theta P^{-1}$. La démonstration de ce résultat fera l'objet de la question **IV.7**.

III.2.2. Vérifier que la matrice T définie à la question **I.3** appartient à SU . Déterminer un réel θ et une matrice P appartenant à SU , tels que $T = PD_\theta P^{-1}$.

PARTIE IV

Rappel : E étant un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à la base orthonormale directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, θ étant un réel, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice, relativement à cette base, de la rotation de E d'axe dirigé par le vecteur ε_1 et dont une mesure de l'angle est le réel θ .

On note $\mathcal{V} = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) ; A = {}^t \bar{A} \text{ et } \operatorname{tr}(A) = 0 \right\}$.

IV.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

IV.1.1. Montrer que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels. En déduire que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel dont une base est formée par les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

IV.1.2. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par : $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB)$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{V}$. En notant $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme de A , exprimer $\|A\|^2$ en fonction de $\det(A)$.

IV.1.3. Pour j et k appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, calculer les produits scalaires $\langle E_j, E_k \rangle$. Que peut-on en déduire ?

Dans la suite, on considère $\mathcal{V}$ comme un espace euclidien, pour le produit scalaire défini ci-dessus.

IV.2. Soit $P \in \operatorname{SU}$. On note l_P l'application définie sur $\mathcal{V}$ par : pour tout $A \in \mathcal{V}$, $l_P(A) = PAP^{-1}$.

IV.2.1. Montrer que l_P est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $\mathcal{V}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{V}$ qui conserve la norme).

IV.2.2. Soient P et Q dans SU . Montrer que le produit PQ appartient à SU et montrer que la composée $l_P \circ l_Q$ vérifie $l_P \circ l_Q = l_{PQ}$.

Dans la suite, pour $U \in \text{SU}$, on étudie les automorphismes l_U de $\mathbf{v}$.

IV.3. Caractérisation de l_{D_θ} .

IV.3.1. Pour $j=1,2,3$, exprimer $l_{D_\theta}(E_j)$ dans la base (E_1, E_2, E_3) .

IV.3.2. En déduire que l_{D_θ} est une rotation de l'espace euclidien $\mathbf{v}$, dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle.

IV.4. Soit $U \in \text{SU}$. En utilisant le résultat admis dans **III.2.**, déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbf{v}$, relativement à laquelle la matrice de l_U est une matrice de rotation. Préciser un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

IV.5. Soit $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{SU}$. En notant $a = p + iq$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $U = pI_2 + iH$ avec $H \in \text{M}_2(\mathbb{C})$.

IV.5.1. Montrer que H appartient à $\mathbf{v}$.

IV.5.2. Déterminer $l_U(H)$.

IV.5.3. En notant $b = r + is$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, déterminer par ses composantes relativement à la base (E_1, E_2, E_3) , un vecteur de l'axe de la rotation l_U .

IV.6. On considère la rotation l_T de $\mathbf{v}$, définie par la matrice de T de la question **I.3** ; donner un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

IV.7. Soit $U \in \text{SU}$. Démonstration du résultat admis dans **III.2.**

IV.7.1 On suppose que U a une valeur propre double ; quelles sont les matrices U possibles ?

IV.7.2 Dans le cas où U a deux valeurs propres distinctes, montrer que les sous espaces propres correspondants sont orthogonaux dans $\mathbb{C}^2$. En déduire le résultat admis dans **III.2.**

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Objectifs, notations et définitions

Les objectifs de ce problème sont les suivants :

- étendre la notion d'exponentielle à une matrice sans faire appel aux séries, mais par analogie avec l'introduction de la fonction réelle de variable réelle : $s \mapsto e^{\alpha s}$ comme solution du problème de Cauchy : $y' = \alpha y$, $y(0) = 1$.
- établir quelques propriétés de cette exponentielle.
- résoudre dans $\mathbb{R}^3$ une équation différentielle du type $x' = u \wedge x$ que l'on rencontre en particulier en mécanique du solide.

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$. I_n est la matrice identité dont les coefficients sont donnés par le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A , A_{ij} désigne le cofacteur de l'élément a_{ij} et on appelle comatrice de A la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est A_{ij} . Cette matrice sera notée $\text{Com } A$.

Tournez la page S.V.P.

Lorsque les coefficients a_{ij} de A sont des fonctions de s définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on rappelle que A est dérivable sur I si et seulement si toutes les fonctions $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables sur I et qu'alors :

$$\forall s \in I, A'(s) = (a'_{ij}(s))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

On pourra utiliser sans le redémontrer que le produit de deux applications A et B de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dérivables sur I , est dérivable sur I et que :

$$\forall s \in I, (AB)'(s) = A'(s)B(s) + A(s)B'(s)$$

PARTIE I

I.1 Soit la matrice M donnée par : $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

- a) Calculer $\det M$.
- b) Calculer la matrice produit $M \times {}^t\text{Com } M$.
- c) Déterminer le polynôme caractéristique χ_M de M .
- d) Calculer $(I_3 + M)(2I_3 - M)$, puis la matrice $\chi_M(M)$.

I.2 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ et B la matrice déduite de A en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne formée des coefficients $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

- a) Montrer que $\det B = \sum_{k=1}^n \beta_k A_{kj}$.
- b) En déduire les égalités : $\forall (l, j) \in \mathbb{N}_n^2, \sum_{k=1}^n a_{kl} A_{kj} = (\det A) \delta_{lj}$.
- c) Montrer de même les égalités : $\forall (l, i) \in \mathbb{N}_n^2, \sum_{k=1}^n a_{lk} A_{ik} = (\det A) \delta_{li}$.
- d) En déduire les formules :

$$A \times ({}^t\text{Com } A) = (\det A) I_n \quad \text{et} \quad ({}^t\text{Com } A) \times A = (\det A) I_n$$

I.3 a) Soit $(G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille de n^2 polynômes à coefficients complexes, tous de degré inférieur ou égal à 1. Pour $x \in \mathbb{C}$, on note $G(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $G_{ij}(x)$. Montrer par récurrence sur l'ordre de la matrice qu'il existe un polynôme Q à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{C}$, $\det G(x) = Q(x)$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $D_0, D_1, \dots, D_p$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^p x^k D_k = 0$. Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \dots, p\}$, $D_k = 0$.

I.4 Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $C(x) = {}^t\text{Com}(A - xI_n)$ et on note $\chi_A(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ le polynôme caractéristique de A .

a) Montrer qu'il existe n matrices $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, C(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k$$

b) En utilisant les questions **I.2** et **I.3**, établir les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{cases} AB_0 &= \alpha_0 I_n \\ AB_k - B_{k-1} &= \alpha_k I_n \\ -B_{n-1} &= \alpha_n I_n \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$$

c) En déduire que le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est un polynôme annulateur de A .

PARTIE II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ non nécessairement distinctes. On introduit les matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = I_n \text{ et } \forall k \in \{2, 3, \dots, n\}, C_k = \prod_{j=1}^{k-1} (A - \lambda_j I_n)$$

II.1 a) Montrer que A commute avec chaque matrice C_k .

b) Montrer que $(A - \lambda_n I_n)C_n = 0$.

II.2 On rappelle que le problème de Cauchy

$$Y'(s) = HY(s), \quad Y(0) = Y_0$$

admet une unique solution $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $s \longmapsto Y(s)$. On notera $(y_i(s))_{1 \leq i \leq n}$ les composantes de $Y(s)$.

On considère alors le nouveau problème de Cauchy suivant :

$$\forall s \in \mathbb{R}, E'(s) = AE(s) \text{ et } E(0) = I_n \quad (1)$$

où la fonction inconnue E est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $E_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $s \longmapsto \sum_{k=1}^n y_k(s)C_k$. Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, E'_A(s) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(s)[\lambda_k C_k + C_{k+1}] + y_n(s)\lambda_n C_n$$

En déduire que E_A est solution du problème (1).

b) Montrer que E_A est aussi solution du problème (2) ci-dessous :

$$\forall s \in \mathbb{R}, E'(s) = E(s)A \text{ et } E(0) = I_n \quad (2)$$

c) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $s \longmapsto E_A(s)E_A(-s)$. Montrer que la fonction φ est constante égale à I_n . En déduire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $E_A(s)$ est inversible et donner son inverse.

d) Soit F une solution du problème (1) et ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie pour tout s réel par $\psi(s) = E_A(-s)F(s)$. Montrer que la fonction ψ est constante et en déduire que le problème (1) admet E_A pour unique solution.

e) Montrer que E_A est aussi l'unique solution du problème (2).

Désormais, on note pour tout s réel : $E_A(s) = e^{sA}$. La matrice $E_A(1) = e^A$ est appelée *exponentielle de la matrice A*. Cette notation et cette définition seront justifiées par les diverses propriétés étudiées dans la suite du problème.

II.3 A l'aide de l'algorithme décrit dans les questions précédentes, déterminer explicitement les coefficients de e^{sM} , où M est la matrice donnée à la question **I.1**.

II.4 Soit le problème de Cauchy dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donné par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, Z'(s) = AZ(s) \text{ et } Z(0) = Z_0, Z_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que sa solution est donnée par $Z(s) = e^{sA}Z_0$.

PARTIE III

III.1 Montrer que pour tout s réel, la matrice e^{sA} est un polynôme en A .

III.2 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que pour tout s réel, A et e^{sB} commutent.

b) Montrer que pour tout s réel, e^{sA} et e^{sB} commutent.

c) Montrer que les fonctions

$$\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), s \longmapsto e^{s(A+B)} \text{ et } \nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), s \longmapsto e^{sA} e^{sB}$$

vérifient une même équation différentielle et en déduire $e^{A+B} = e^A \times e^B$.

III.3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer e^A , e^B , e^{A+B} et $e^A e^B$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

III.4 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour tout s réel :

$$e^{sP^{-1}AP} = P^{-1}e^{sA}P$$

b) Montrer que pour tout s réel : $e^{s({}^tA)} = {}^t(e^{sA})$.

PARTIE IV

On se place désormais dans l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u = (a, b, c)$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et x l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ solution du problème de Cauchy :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \frac{dx}{ds} = u \wedge x \text{ et } x(0) = x_0 \quad (3)$$

IV.1 Si $X(s)$ et X_0 sont les matrices colonnes respectives des coordonnées de $x(s)$ et x_0 dans la base $\mathcal{B}$, montrer que le problème (3) s'écrit encore :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \frac{dX}{ds} = AX \text{ et } X(0) = X_0 \quad (4)$$

où A est une matrice que l'on précisera.

IV.2 Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que $A^3 = -A$.

IV.3 Montrer que $e^{sA} = I_3 + (\sin s)A + (1 - \cos s)A^2$ et donner l'expression de la solution du problème (4).

IV.4 On note f et g respectivement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et e^{sA} .

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer l'image par g de la base $\mathcal{B}_0$, puis caractériser géométriquement l'endomorphisme g .

c) Calculer e^{sB} .

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

*N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,
à la précision et à la concision de la rédaction.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

PARTIE I

On considère l'équation différentielle linéaire du 2^o ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

I.1. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$.

On supposera dans la suite du problème que $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, y désigne une fonction de la variable réelle x , admettant un développement en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

I.2. Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda + n + 1)(\lambda - n)}{(n + 1)^2} a_n.$$

Tournez la page SVP

I.3.

I.3.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ pour que l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$?

I.3.2. Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathcal{E}_\lambda)$ de degré d , que nous noterons φ_d , telle que $\varphi_d(0) = 1$.

I.3.3. Expliciter la fonction polynôme φ_1 .

I.3.4. Déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c' tels que :

$$\frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{(2x+1)^2}.$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

I.4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{N}$.

I.4.1. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{E}_\lambda)$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

I.4.2. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$, que nous noterons φ_λ , développable en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.

I.4.3. Expliciter les développements en série entière de la variable x des fonctions $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

PARTIE II

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \sin^2 t} \, dt.$$

II.1. Montrer que ψ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$.

II.2. Montrer que ψ est indéfiniment dérivable sur $] -1, +\infty[$.

II.3.

II.3.1. Montrer que pour tout $u \in]-1, +1[$ on a $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$.

II.3.2. Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) x^n.$$

II.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.
Calculer I_0 .

En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$.

II.3.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq 1$.

II.3.5. Montrer que le développement de ψ en série entière est intégrable terme à terme sur $] -1, +1[$, et en déduire que :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(x) \, dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.$$

II.4. Dédurre du développement de ψ en série entière une expression de $\psi(x)$ en fonction de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

II.5. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse $\mathcal{C}$ paramétrée par $t \in [0, 2\pi] \mapsto b \cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j}$, où a et b sont des nombres réels donnés tels que $a \geq b > 0$. On note ℓ sa longueur et e son excentricité.
Montrer que $\ell = \pi a \left[\varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) \right]$.

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+x \sin^2 t} \, dx.$$

Tournez la page SVP

III.1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et 2π -périodique.

III.2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.3. Montrer que la série de Fourier de f est de la forme :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n} \cos 2nt,$$

où $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}, \dots$ sont des nombres réels que l'on ne cherchera pas à calculer.
Préciser pourquoi la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier.

III.4. A l'aide du résultat de la question II.3.5, donner une expression de α_0 sous forme de somme d'une série numérique.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être un erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice I

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel.

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin \left[\left(2 - \sqrt{3} \right)^n \pi \right]$.

1.1. Montrer qu'elle est à termes positifs.

1.2. Etudier sa convergence.

2. On pose $A_n = \left(2 - \sqrt{3} \right)^n + \left(2 + \sqrt{3} \right)^n$; montrer que A_n est entier.

3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin \left[\left(2 + \sqrt{3} \right)^n \pi \right]$.

4. Quel est le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n x^n$; préciser les cas $x = \pm R$.

Exercice II

On rappelle que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculer l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u} du$ où a est un réel

2.

2.1. Justifier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$

2.2. Calculer J .

3. On considère $K(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au) \cdot \sin(bu)}{u^2} du$, où a et b sont des réels.

3.1. Exprimer $K(a, b)$ à l'aide de $I(a+b)$ et $I(a-b)$.

3.2. En déduire les valeurs de $K(a, b)$ en distinguant les différentes régions du plan (a, b) .

3.3. Donner une expression de $K(a, b)$ regroupant les différents cas.

Problème

Toutes les fonctions considérées dans les parties I, II et III de ce problème appartiennent à l'ensemble C^0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Partie I

On considère l'équation $(E_{1/2})$ d'inconnue f élément de C^0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (x+t)f(t) dt = g(x), \text{ où } g \text{ est une fonction donnée de } C^0.$$

1. Soit f solution de l'équation $(E_{1/2})$

1.1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + ax + b$, où a et b sont des réels qui s'expriment par des intégrales dépendant de f .

1.2. Ecrire en fonction de g le système d'équations vérifié par a et b .

2. En déduire a et b , puis f dans le cas où $g(x) = x$.

Partie II

On considère l'équation (E_λ) d'inconnue f élément de C^0 :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} (x+t) f(t) dt = g(x)$ où g est un élément donné de C^0 et λ un réel.

1. En reprenant le procédé de la partie I, montrer que, sauf pour deux valeurs particulières λ_1 et λ_2 du paramètre λ , (E_λ) admet une solution unique pour toute fonction g .

2. A quelle condition sur g l'équation (E_{λ_1}) admet-elle des solutions ?

Même question pour (E_{λ_2}) .

3. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} (1-3t^2) dt$.

4. En déduire dans le cas $\lambda = \lambda_1$ (resp. $\lambda = \lambda_2$) un exemple de fonction g_1 (resp. g_2), non identiquement nulle, vérifiant la condition trouvée à la question 2 de la partie II.

5. On choisit pour g la fonction nulle.

5.1. Quelle est la solution de (E_λ) pour λ distinct de λ_1 et λ_2 ?

5.2. Exprimer f_1 et f_2 , solutions respectives de (E_{λ_1}) et (E_{λ_2}) .

5.3. Que dire de $\int_{-1}^{+1} f_1(t) f_2(t) dt$?

Partie III

On note K l'application qui à toute fonction h de C^0 associe la fonction Kh définie sur $\mathbb{R}$ par :

$[Kh](x) = \int_{-1}^{+1} k(x,t) h(t) dt$, où k est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. Montrer que K est linéaire et que Kh est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Comment l'équation $(E): f(x) - \int_{-1}^{+1} k(x,t) f(t) dt = g(x)$ s'écrit-elle ?

3. On note $K^2 h = K[Kh]$ et $K^{n+1} h = K[K^n h]$. Montrer formellement, c'est-à-dire sans considération de convergence, que $f = g + \sum_{n \geq 1} K^n g$ est solution de l'équation (E) .

Tournez la page S.V.P.

4. On pose $k(x, t) = \frac{1}{2}(x + t)$ et $g(x) = x$.

4.1. Déterminer Kg puis K^2g .

4.2. Exprimer par récurrence $K^n g$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire f par application de la question 3, et retrouver ainsi le résultat de la question I.3.

Partie IV

Soit Δ un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$. Toutes les fonctions considérées dans cette partie, appartiennent à l'ensemble $C^0(\Delta)$ des fonctions continues sur Δ , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère l'application qui, au couple (F, G) de fonctions de $C^0(\Delta)$, fait correspondre le réel $\int_{\Delta} F(t)G(t)dt$.

Cette application définit un produit scalaire, noté $\langle, \rangle$. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. On utilise les notations de la partie III, et on pose $k(x, t) = a(x)b(t) + a(t)b(x)$, où les fonctions a et b sont orthogonales entre elles : $\langle a, b \rangle = 0$, et normées : $\|a\| = \|b\| = 1$.

On pose $\varphi_1 = a + b$ et $\varphi_2 = a - b$. Vérifier que $K\varphi_1 = \varphi_1$ et $K\varphi_2 = -\varphi_2$. En déduire que 1 et -1 sont valeurs propres de K . Que peut-on dire alors de φ_1 et φ_2 ?

On admettra que 1 et -1 sont les seules valeurs propres non nulles de K , et que les espaces propres associés sont de dimension 1, engendrés respectivement par φ_1 et φ_2 .

2. On considère l'équation d'inconnue f élément de $C^0(\Delta)$: $f - \lambda Kf = g$, où g est une fonction donnée de $C^0(\Delta)$ et λ un réel non nul. On suppose qu'elle admet au moins une solution f_0 .

2.1. Montrer que si $\lambda \neq \pm 1$, cette solution est unique.

2.2. Ecrire l'ensemble des solutions si $\lambda = \pm 1$.

3. h étant une fonction donnée, montrer que Kh s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions φ_1 et φ_2 .

4. Exprimer $K^n h$, pour n entier naturel non nul.

5. En déduire que, pour $0 < |\lambda| < 1$ la solution de l'équation $f - \lambda Kf = g$ obtenue sous la forme : $f = g + \sum_{n \geq 1} \lambda^n K^n g$ s'écrit $f = g + A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$, où A_1 et A_2 sont sommes de séries géométriques.
6. Préciser f si g est orthogonal à la fois à φ_1 et à φ_2 .
7. Application : on choisit $\Delta = [-\pi, \pi]$, $k(x, t) = \frac{\sin(x+t)}{\pi}$, $g(x) = \sin 2x$;
- 7.1. Vérifier que k satisfait aux hypothèses de la question 1 de la partie IV.
- 7.2. Vérifier que g satisfait aux hypothèses de la question 6 de la partie IV.
- 7.3. Résoudre alors les équations : $f - \frac{1}{2} Kf = g$ et $f - Kf = g$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet présente la méthode des traces, algorithme de calcul itératif du polynôme caractéristique d'une matrice. Cette méthode fut utilisée par l'astronome français Urbain Le Verrier pour découvrir la planète Neptune en 1845.

Le principe de la méthode est expliqué en partie **I**. Le programme informatique qui s'en déduit est analysé en partie **II**. Trois exemples et une application concluent le problème, partie **III**. Les parties **II** et **III** sont indépendantes et pourront être traitées dans un ordre arbitraire.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On notera I la matrice identité.

I. La méthode des traces

Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. On souhaite en calculer de façon systématique le polynôme caractéristique χ_A défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n\end{aligned}$$

où les coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ont volontairement été indexés à rebours pour faciliter l'issue de la question **I.6**. Dans le cas général, deux difficultés se posent :

- Le développement du déterminant, qui doit être réalisé avec une complexité raisonnable.
- La collecte des coefficients à l'issue du développement.

Nous verrons en question **II.4 d/** que ces deux contraintes excluent d'office toute méthode de calcul récursif. Des méthodes plus appropriées ont donc été mises au point, dont la méthode des traces expliquée ci-après.

Tournez la page S.V.P

1. a/ Que vaut a_0 ?

b/ Quelle hypothèse du problème et quel théorème du cours vous permettent - au moins d'un point de vue théorique - de factoriser $\chi_A(\lambda)$ sous la forme :

$$\chi_A(\lambda) = a_0 \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

où les complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

c/ Lorsque ces valeurs propres sont connues, elles permettent de remonter aux coefficients de χ_A . Expliquer comment pour les coefficients a_1 et a_n .

Malheureusement, les valeurs propres ne sont pas toujours connues avant le calcul du polynôme caractéristique. Plutôt que de relier les coefficients aux racines, on peut relier les coefficients à des sommes de puissances de valeurs propres, grâce à des formules de Newton (question I.7) : c'est la méthode des traces.

2. Le polynôme caractéristique χ_A étant scindé, on rappelle qu'il est possible de trigonaliser A. Il existe une matrice T triangulaire semblable à A dont les coefficients diagonaux sont précisément $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Exprimer en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les traces de T^p puis de A^p pour tout entier naturel p.

3. On note χ'_A la dérivée de χ_A . Établir l'identité :

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$$

4. En déduire que, pour λ assez grand en module :

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^p$$

On fournira un minorant strict m de $|\lambda|$ le plus précis possible.

5. En conclure que, pour $|\lambda| > m$:

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^p)}{\lambda^p}$$

6. Démontrer alors que, pour λ assez petit en module, on a :

$$n.a_0 + (n-1).a_1.\lambda + \dots + 1.a_{n-1}.\lambda^{n-1} = \left(a_0 + a_1.\lambda + \dots + a_n.\lambda^n \right) \sum_{p=0}^{+\infty} \text{tr}(A^p) \lambda^p$$

On traitera le cas $\lambda = 0$ à part, et on fournira un majorant strict M de $|\lambda|$ le plus précis possible.

7. En déduire les relations de Newton, valables pour tout k , $1 \leq k \leq n$:

$$-ka_k = a_0.\text{tr}(A^k) + a_1.\text{tr}(A^{k-1}) + \dots + a_{k-1}.\text{tr}(A)$$

8. Expliquer sommairement en quoi ces relations permettent d'obtenir le polynôme caractéristique χ_A . Restent-elles valables lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$?

II. Mise en place de l'algorithme

Dans cette partie, on s'intéresse à la mise en œuvre pratique de l'algorithme des traces et on en évalue les performances en termes de complexité. Cette partie en appelle à l'expérience du candidat en matière de calcul formel : Maple, Mathematica, ou tout simplement le logiciel de sa calculatrice programmable. Dans tous les cas, indiquez sur la copie le langage utilisé.

Dire qu'un programme a une complexité de l'ordre de n^k (n et k entiers naturels non nuls) signifie que le nombre d'additions, de multiplications et de divisions élémentaires à réaliser est équivalent à αn^k ($\alpha > 0$) lorsque n tend vers $+\infty$. Par exemple, un programme réalisant le produit de n complexes est d'une complexité de l'ordre de n . En revanche, un programme réalisant n fois un produit de n complexes est d'une complexité de l'ordre de n^2 .

1. Les logiciels de calcul formel sont souvent livrés avec une fonction permettant de multiplier deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Sans reprogrammer cette fonction, indiquer sa complexité.
2. Les logiciels de calcul formel sont souvent livrés avec une fonction permettant de calculer la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Sans reprogrammer cette fonction, indiquer sa complexité.

a/ On suppose la matrice A et l'entier n connus du logiciel. Rédiger la partie de programme réalisant le stockage des traces $\text{tr}(A^1)$, $\text{tr}(A^2)$, ..., $\text{tr}(A^n)$ dans un tableau t , de sorte que $t[k]$ contienne $\text{tr}(A^k)$ pour k variant de 1 à n .

b/ En général, la complexité d'un tel programme peut varier de n^4 à n^5 selon la manière dont on s'y prend. Quelle est la complexité du programme conçu en réponse au **a/** (justifier) ?

4.

a/ On suppose désormais la matrice A , l'entier n et le tableau t connus du logiciel. Rédiger la partie du programme réalisant le stockage des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, dans un tableau a , de sorte que $a[k]$ contienne a_k pour k variant de 0 à n .

b/ Que renseigne le dernier coefficient : a_n ?

c/ Quelle est la complexité totale de l'algorithme des traces (justifier) ?

d/ On revient maintenant à la méthode naïve évoquée au début du problème. Celle-ci consisterait en un développement récursif du déterminant caractéristique : développement du déterminant $n \times n$ par rapport à la première colonne, puis développement des sous-déterminants $(n-1) \times (n-1)$ par rapport à leur première colonne, etc. Quelle est la complexité de cette méthode (justifier) ? En quoi la collecte des coefficients pose-t-elle difficulté ? Conclure.

III. Trois exemples et une application

La validation d'un algorithme s'accompagne toujours de tests. On fait tourner le programme sur des exemples dont on connaît les résultats intermédiaires ou finaux. Puis on compare ce qui est attendu à ce qui est effectivement retourné. Les questions **1**, **2** et **3** de cette partie permettent d'élaborer de tels tests. La question **4** validera encore davantage cette étude, mais pour d'autres raisons.

Dans les trois premières questions de cette partie, on rapporte l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à sa base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Dans la dernière question, on revient sur $\mathbb{C}$.

1. Exemple 1.

On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions :

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_2}, f(\vec{e_2}) = \vec{e_3}, \dots, f(\vec{e_{n-1}}) = \vec{e_n} \text{ et } f(\vec{e_n}) = \vec{0}.$$

a/ Pourquoi ces conditions définissent-elles f sans ambiguïté ? Déterminer la matrice A de f dans la base B , puis l'image, le rang et le noyau de f .

b/ Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f .

c/ Retrouver ce résultat en simulant la méthode des traces.

2. Exemple 2.

On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions :

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_2}, f(\vec{e_2}) = \vec{e_3}, \dots, f(\vec{e_{n-1}}) = \vec{e_n} \text{ et } f(\vec{e_n}) = \vec{e_1}.$$

Déterminer la matrice A de f dans la base B , puis l'image, le rang et le noyau de f . Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f . Retrouver ce résultat en simulant la méthode des traces.

3. Exemple 3.

On munit dans cette question $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

a/ Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ comme étant la projection orthogonale sur la droite D engendrée par $\vec{u}$. Déterminer son image, son rang et son noyau. Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f (on choisira une base adaptée au problème).

b/ Déterminer la matrice A de f dans la base B en fonction des coefficients $u_1, u_2, \dots, u_n$. Justifier que $A^2 = A$. Retrouver le polynôme caractéristique de f en simulant la méthode des traces sur la matrice A .

4. Une application. On rétablit dans cette question un résultat classique de l'algèbre linéaire grâce - entre autres - à la méthode des traces.

a/ Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$. Déterminer χ_A .
En déduire que 0 est la seule valeur propre de A . Démontrer alors que $A^n = [0]$.

b/ Soit maintenant une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = [0]$. Prouver que 0 est valeur propre de A et qu'il n'y en a pas d'autre.

c/ En déduire l'équivalence, valable pour tout A de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A^n = [0] \Leftrightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$$

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Problème 1

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle (E)

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \quad (E)$$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle solution de (E) sur l'intervalle I toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I , telle que

$$\forall x \in I, \quad x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Partie I. Etude de deux primitives.

1) Pour tout $x \in]0, 4[$, on pose $A(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(4-t)}}$.

1.a) Trouver $\alpha > 0$ tel que, lorsque t tend vers 0^+ , on ait $\frac{1}{\sqrt{t(4-t)}} \sim \frac{\alpha}{\sqrt{t}}$.

En déduire que l'intégrale impropre $A(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, 4[$.

1.b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $A(x)$ pour tout $x \in]0, 4[$.
Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, 4[, \quad A(x) = \beta \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\beta}\right)$$

1.c) En déduire la limite de $A(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

1.d) Donner un équivalent simple de $A(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

2) Pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on pose $B(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-4)}}$.

2.a) Montrer que $B(x)$ est bien défini pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

2.b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-t} + \sqrt{4-t}$, calculer $B(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad B(x) = \gamma \ln\left(\frac{\sqrt{-x} + \sqrt{4-x}}{\gamma}\right)$$

2.c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^-} B(x) = 0$.

2.d) Donner un équivalent simple de $B(x)$ lorsque x tend vers 0^- .

Partie II. Résolution de (E) .

- 1) On note (H) l'équation homogène associée à (E) .
 - 1.a) Résoudre (H) sur l'intervalle $] - \infty, 0[$.
 - 1.b) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, 4[$.
 - 1.c) Résoudre (H) sur l'intervalle $]4, +\infty[$.
 - 1.d) Montrer que la fonction constante égale à 0 est la seule solution de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- 2) On étudie ici (E) sur $]0, 4[$.
 - 2.a) Résoudre (E) sur $]0, 4[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction A définie en **I.1**).
 - 2.b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]0, 4[$ possédant une limite finie à droite en 0.
On note f cette solution. Donner l'expression de $f(x)$, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

- 3) On étudie ici (E) sur $] - \infty, 0[$.
 - 3.a) Résoudre (E) sur $] - \infty, 0[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction B définie en **I.2**).
 - 3.b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $] - \infty, 0[$ possédant une limite finie à gauche en 0.
On note g cette solution. Donner l'expression de $g(x)$, ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.

- 4) On étudie ici (E) sur $] - \infty, 4[$.
 - 4.a) Montrer qu'il existe une unique fonction h définie sur $] - \infty, 4[$ qui vérifie les trois conditions :
 - (1) la restriction de h à $]0, 4[$ est solution de (E) sur $]0, 4[$.
 - (2) la restriction de h à $] - \infty, 0[$ est solution de (E) sur $] - \infty, 0[$.
 - (3) h est continue en 0.
 - 4.b) Pour tout $x \in] - \infty, 0[\cup]0, 4[$, on pose $T(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x}$. Donner la limite l de $T(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
On admettra que $T(x)$ tend aussi vers l lorsque x tend vers 0^- .
 - 4.c) En déduire que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $] - \infty, 4[$.
Préciser la valeur de cette fonction en 0, ainsi que la valeur de sa dérivée en 0.

- 5) L'équation (E) possède-t-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

Partie III. Etude d'une solution développable en série entière.

- 1) **1.a)** On suppose ici que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence strictement positif, solution de (E). Déterminer a_0 et trouver une relation de récurrence liant a_n et a_{n-1} ($n \geq 1$).
- 1.b)** Montrer que (E) possède une unique solution développable en série entière, sur un intervalle ouvert à préciser, que l'on notera encore $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Calculer son rayon de convergence R , et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- 2) Etude de la série numérique $\sum a_n (-R)^n$.
- 2.a)** On pose $u_n = a_n R^n$ ($n \geq 0$). Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 2.b)** Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = -\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$. Montrer que la série $\sum v_n$ est une série positive divergente.
- 2.c)** En déduire la nature de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
- 2.d)** Montrer que la série $\sum a_n (-R)^n$ est convergente.
- 3) Etude de la série numérique $\sum a_n R^n$.
- 3.a)** On rappelle que l'on note $u_n = a_n R^n$. Montrer que $\forall n \geq 1, \frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{n}{n+1}$.
- 3.b)** En déduire que $\forall n \geq 0, u_n \geq \frac{1}{n+1}$.
- 3.c)** Préciser alors la nature de la série $\sum a_n R^n$.
- 4) **4.a)** Montrer que S et h coïncident sur $] -4, 4[$. On rappelle que h a été définie en **II.4.a**).
- 4.b)** Donner une expression simple de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$.

Problème 2

Les parties **I** et **II** sont indépendantes, la partie **III** utilise les résultats des parties **II** et **III**, qui pourront être utilisés sans démonstration. *Dans ce cas, le candidat indiquera avec précision les résultats admis et utilisés.*

Attention aux notations, ainsi la lettre E désigne différents espaces vectoriels selon les parties du problème.

Partie I. Un peu d'algèbre linéaire dans $E = \mathbb{R}_5[X]$.

On note $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5. On désigne par e_k , où $0 \leq k \leq 5$, les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de E , on a donc $e_k(X) = X^k$, et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

On note $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_3, e_5)$ l'ensemble des polynômes impairs de E , et $E_2 = \text{Vect}(e_0, e_2, e_4)$ l'ensemble des polynômes pairs de E .

Remarque : on notera que E_1 , E_2 et E sont trois espaces vectoriels distincts.

Preliminaires

- 1) Vérifier que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_3, e_5)$ est une base de E_1 , et que $\mathcal{B}_2 = (e_0, e_2, e_4)$ est une base de E_2 .
- 2) Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E .

Etude d'applications linéaires

- 1) On considère l'application s qui à tout polynôme P de E_2 , associe le polynôme $s(P)$ défini par :

$$s(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

- 1.a) Montrer que si P est un polynôme pair de E , alors son polynôme dérivé P' est un polynôme impair, et son polynôme dérivé second P'' est un polynôme pair.
- 1.b) Montrer que s définit un endomorphisme de E_2 .
- 1.c) Donner la matrice S de s dans la base $\mathcal{B}_2$ de E_2 .
- 1.d) En déduire le noyau de s , le spectre de s et les sous-espaces propres de s .
- 1.e) L'endomorphisme s est-il diagonalisable ?

- 2) On considère l'application φ qui à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$\varphi(P) = 2XP - P'.$$

- 2.a)** Montrer que φ est une application linéaire. Est-ce un endomorphisme de E ?
2.b) Déterminer le noyau et le rang de φ , puis une base de $\text{Im}(\varphi)$.

- 3) On désigne par f la restriction de φ , au sous-espace vectoriel E_2 . Montrer que f définit un isomorphisme de E_2 sur E_1 .

Partie II. Etude d'un endomorphisme en dimension finie.

On désigne désormais par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

On note s un endomorphisme de E_2 et f une **application linéaire bijective** de E_2 dans E_1 .

Pour tout x de E , vérifiant $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on définit :

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2).$$

- 1) **1.a)** Donner la décomposition dans $E = E_1 \oplus E_2$ de l'élément $F(x)$.
1.b) Montrer que F est un endomorphisme de E .
1.c) Montrer que F est injective.
1.d) Soit y un élément de E , vérifiant $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in E_1$, et $y_2 \in E_2$.
Prouver que $y = F(x)$, avec $x = f(y_2) + f^{-1}(y_1) - f \circ s \circ f^{-1}(y_1)$.
1.e) F est-elle bijective ?
- 2) **2.a)** Dans l'ensemble de la question **2.a)** on suppose que F admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.a.i) Vérifier qu'on a $\lambda \neq 0$.

2.a.ii) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ , vérifiant $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Montrer qu'on a alors :

$$\lambda f^{-1}(x_1) = x_2.$$

En déduire que x_1 et x_2 sont non nuls, puis que x_2 est un vecteur propre de s associé à une valeur propre que l'on exprimera en fonction de λ .

2.b) Réciproquement, soient μ une valeur propre réelle de l'endomorphisme s , et z_2 un vecteur propre de s associé à μ .

On définit $z_1 = f(z_2)$, et $z = k \cdot z_1 + z_2$, où $k \in \mathbb{R}$.

On veut déterminer à quelles conditions, le vecteur z ainsi défini, pourrait être un vecteur propre de F .

2.b.i) On suppose que z est vecteur propre de F associé à une valeur propre λ . Montrer alors que $k = \frac{1}{\lambda}$, et que λ est racine d'un trinôme admettant deux racines distinctes notées λ_1 et λ_2 .

2.b.ii) Déterminer l'expression de λ_1 et λ_2 en fonction de la valeur propre μ .

2.b.iii) Déterminer pour chacune des valeurs λ_1 et λ_2 , un vecteur propre de F associé à cette valeur propre.

2.c) Soient $u_1, \dots, u_k$, k vecteurs propres de s , associés à la même valeur propre μ de s , et formant une famille libre. Soit λ , l'une des deux valeurs propres de F déterminée comme en **2.b)** A partir de chaque vecteur u_i , on détermine un vecteur propre v_i de F , associé à λ , calculé comme en **2.b)**.

Montrer que les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont linéairement indépendants.

3) 3.a) Prouver que $\dim(E_1) = \dim(E_2)$, et que $\dim(E) = 2 \dim(E_2)$.

3.b) On suppose que s admet p valeurs propres réelles distinctes $\mu_1, \dots, \mu_p$. Prouver que F admet exactement $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

3.c) Montrer que si s est diagonalisable, alors F l'est aussi.

Indication : on pourra raisonner sur les dimensions des sous-espaces propres, ou exhiber des bases de vecteurs propres.

Partie III. Deux applications.

1) Première application :

Dans cette question, $E = \mathbb{R}_5[X]$, et f et s désignent les applications définies dans la partie **I**.

Déterminer les valeurs propres de l'application F correspondante, où F est définie comme dans la partie **II**.

2) Deuxième application :

Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension 6, muni d'une base $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. On veut appliquer les résultats de la partie **III**. au cas de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit F l'endomorphisme de E , représenté par A dans la base $\mathcal{B}$, on a donc : $\text{Mat}(F, \mathcal{B}) = A$.

2.a) Déterminer deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 , ainsi que deux applications s et f , permettant d'appliquer les résultats obtenus à la partie **II**.

2.b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes puis calculer leur somme.

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

b. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{(n-1)!}.$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : f est une fonction périodique de période 2π , f est une fonction paire et pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = x^2$.

a. Déterminer la série de Fourier de la fonction f .

b. En déduire, **avec soin**, les réels : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$

c. Déterminer, en énonçant le théorème utilisé, le réel : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$

PROBLEME : Une introduction aux fonctions tests

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ est muni de sa norme naturelle : la valeur absolue.
Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si h est une fonction de classe C^k , $h^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de h .

Si h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on note $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite **nulle à l'infini** si ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont nulles.

Objectifs :

Le **support** d'une fonction f définie sur un intervalle I , noté $\text{Supp } f$, est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas : $\text{Supp } f = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}$.

Une fonction est dite à **support compact** si son support est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

On appellera **fonction test**, une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des fonctions tests. Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

Le but du sujet est de découvrir des fonctions tests dans la partie **I** et d'en voir deux utilisations ; pour l'approximation uniforme de fonctions dans la partie **II**, et pour démontrer un théorème de Whitney à la partie **III**.

Les parties **II** et **III** sont **indépendantes** et utilisent des résultats de la partie **I**.

I. Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est bornée si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie sur I est donc à support compact si et seulement si $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

2. Quelques exemples

- a. On note u la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4 - x^2$ si $x \in [0, 2]$ et $u(x) = 0$ si $x > 2$.

Représenter la fonction u et déterminer son support. La fonction u est-elle à support compact ? La fonction u est-elle une fonction test ?

- b. La fonction sinus est-elle une fonction test ?

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ si $x \leq 0$.

- a. La fonction h est, d'après les théorèmes généraux, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel k , il existe un polynôme P_k dont on précisera le degré tel que pour tout réel x strictement positif, $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. En déduire que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- b. La fonction h est-elle une fonction test ? h est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$.
- Déterminer le support de φ puis justifier que c'est une fonction test. Déterminer les variations de φ puis tracer l'allure de sa courbe.
 - Déterminer une fonction test dont le support est $[3, 8]$ puis une fonction test dont le support est $[1, 2] \cup [5, 6]$.

5. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à support compact.

6. *Construction d'une suite régularisante*

- Justifier que la fonction φ de la question 4. est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt > 0$. En déduire l'expression d'une fonction test ρ positive, de support $[-1, 1]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. La suite de fonctions $(\rho_n)_n$ est appelée *suite régularisante*.

- Pour tout entier naturel non nul n , déterminer le support de ρ_n et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt$.

II. Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests

Un théorème de Weierstrass nous dit que toute fonction continue sur un **segment** peut être approchée uniformément par des fonctions polynômes.

Voyons ce qu'il en est si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier (donc sur **un intervalle non borné**).

7. *L'approximation polynomiale ne convient plus*

Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f .

- Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N , on ait pour tout réel x , $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.

Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geq N$?

- Conclure que f est nécessairement une fonction polynôme.

Nous allons toutefois démontrer qu'il est possible d'approcher certaines fonctions uniformément sur $\mathbb{R}$, non pas par des fonctions polynômes, mais par des fonctions de classe C^∞ , ou par des fonctions tests.

Plus précisément, nous allons démontrer les deux résultats d'approximation suivants :

(A₁) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact.

(A₂) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions tests.

L'approximation (A₁) est un résultat préliminaire, qui est démontré à la question 8.

8. Approximation d'une fonction continue nulle à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact

Pour tout entier naturel n , on définit sur $\mathbb{R}$, la fonction paire z_n par $z_n(x) = 1$ si $x \in [0, n[$, $z_n(x) = -x + n + 1$ si $x \in [n, n+1[$ et $z_n(x) = 0$ si $x \in [n+1, +\infty[$.

- Représenter graphiquement la fonction z_n . Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (z_n) . La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
- Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini. Démontrer que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$. On peut donc poser pour tout entier naturel n , $\alpha_n = \sup_{|x| \geq n} |g(x)|$.
- Etudier la monotonie de la suite (α_n) puis déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
- Pour tout entier naturel n , on définit la fonction g_n en posant $g_n = g z_n$. Déterminer un réel k tel que pour tout entier naturel n , $\|g_n - g\|_\infty \leq k \alpha_n$.
- En déduire le résultat d'approximation (A_1) : toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact.

Dans les questions 9., 10., et 11., f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g désigne une fonction continue à **support compact**. Il existe donc un réel $R > 0$ tel que $\text{Supp } g \subset [-R, R]$.

9. Convolution

- Justifier que, pour tout réel x , l'application $t \mapsto g(t)f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction $g * f$ par $(g * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt$. On dit que $g * f$ est le *produit de convolution* de g par f .
- Soit x un réel, montrer que l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit donc sur $\mathbb{R}$ la fonction $f * g$ par $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$. Comparer les fonctions $f * g$ et $g * f$.

10. Support d'une convolution

- Dans cette question, on suppose de plus que f est à support compact, il existe donc un réel $S > 0$ tel que $\text{Supp } f \subset [-S, S]$. Si $x > R + S$, que vaut $(f * g)(x)$? En déduire que $f * g$ est aussi à support compact.
- Montrer que si la fonction f n'est pas à support compact, $f * g$ n'est pas nécessairement à support compact.

11. Dérivation d'une convolution

- Soit a un réel strictement positif. Justifier que pour tout $x \in [-a, a]$,
$$(f * g)(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)dt.$$
- Montrer que si g est de plus supposée de classe C^1 , alors $f * g$ est de classe C^1 . Écrire alors $(f * g)'$ à l'aide d'un produit de convolution.

Si on suppose de plus, que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on démontre de la même manière et on l'admettra que $f * g$ est également de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

12. Application à l'approximation

a. Soit n un entier naturel non nul, ρ_n désigne la fonction test introduite dans la question 6.,

montrer que pour tout réel x , $|f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt$.

b. On suppose de plus que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer avec soin que la suite de fonctions $(f * \rho_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de classe C^∞ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

c. En déduire le résultat d'approximation (A_2): toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions tests (on pourra utiliser librement le résultat suivant: une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$).

Remarque : L'espace des fonctions tests joue un rôle important en analyse, notamment dans la théorie des distributions pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

III. Théorème de Whitney

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème de Whitney : Si F est une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $F = Z(f)$ où $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.

13. Justifier que la réciproque du théorème de Whitney est vraie.

14. Une première tentative de preuve... infructueuse

Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y|$ et d_F l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $d_F(x) = d(x, F)$.

Déterminer $Z(d_F)$. Quelle propriété notée (P) devrait vérifier l'application d_F pour que le théorème de Whitney puisse être démontré ?

Représenter graphiquement d_F dans le cas particulier où $F =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

d_F vérifie-t-elle cette propriété (P) ? Justifier votre réponse.

15. Utilisation de fonctions tests

Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :

(i) F est le complémentaire d'un intervalle ouvert $]a, b[$.

(ii) F est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints.

16. Démontrer le théorème de Whitney dans le cas général. On utilisera librement le résultat suivant: une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, c'est-à-dire $\Omega = \bigcup_{k \in I}]a_k, b_k[$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

QUELQUES APPLICATIONS DES MATRICES DE GRAM À LA GÉOMÉTRIE

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et on note $(\mid)$ un produit scalaire sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont p vecteurs de E , on appelle matrice de GRAM de $x_1, x_2, \dots, x_p$, notée $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général $(x_i \mid x_j)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} (x_1 \mid x_1) & (x_1 \mid x_2) & \dots & (x_1 \mid x_p) \\ (x_2 \mid x_1) & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (x_p \mid x_1) & \cdot & \dots & (x_p \mid x_p) \end{pmatrix}$$

on notera $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p)$ son déterminant : $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p) = \det G(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le noyau de A est, par définition,

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Par ailleurs, on note :

pour n entier $n \geq 2$, E_n l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique à la fois considéré comme espace vectoriel euclidien et espace affine euclidien.

I. GÉNÉRALITÉS

1. Résultat préliminaire

- Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t Y Y = 0$?
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Ker}({}^t A A) \subset \text{Ker} A$ puis en déduire que $\text{rang}({}^t A A) = \text{rang} A$.

2. On donne $x_1, x_2, \dots, x_p$ p vecteurs de E .

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , et si A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans la base $\mathcal{B}$, montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_p) = {}^t A A$.

Quel lien existe entre le rang de la matrice $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et le rang de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$?

3. Dans cette question, $p = n$.

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit liée.
- Montrer que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si, $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

4. Application

L'angle géométrique d'un couple (u, v) de vecteurs non nuls de E_n est le réel $\alpha \in [0, \pi]$

vérifiant : $\cos \alpha = \frac{(u | v)}{\|u\| \|v\|}$.

Si A, B et C sont trois points de E_3 situés sur la sphère de centre O et de rayon 1, si on désigne par α, β et γ l'angle géométrique des couples respectifs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, montrer en utilisant une matrice de GRAM que :

$$1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Que se passe-t-il dans le cas où les points A, B et C sont sur un même cercle ?

5. Interprétation géométrique de la matrice de GRAM

- Si a, b et y sont trois vecteurs de E tels que le vecteur a soit orthogonal à la fois au vecteur b et au vecteur y , trouver une relation entre les déterminants $\Gamma(a+b, y)$, $\Gamma(a, y)$ et $\Gamma(b, y)$.
- Si (x, y) est une famille libre de deux vecteurs de E_2 , si $F = \text{vect}\{y\}$ et si z est le projeté orthogonal du vecteur x sur F , montrer que $\Gamma(x, y) = \Gamma(x-z, y)$.

- c. En déduire que si A, B et C sont trois points non alignés de E_2 , $\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ est l'aire du triangle ABC (donc, $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ est l'aire du parallélogramme « formé par A, B et C »).
6. De la même façon on montre que si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de E_3 , $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}$ est le volume du parallélépipède « formé par A, B, C et D » que l'on désignera par parallélépipède $ABCD$.
On ne demande pas de prouver ce résultat.
- a. Vérifier que ce résultat permet de retrouver la formule usuelle du volume du parallélépipède rectangle.
- b. A l'aide de ce résultat écrire un petit algorithme en français qui, avec la donnée des coordonnées des points A, B, C et D , calcule le volume du parallélépipède $ABCD$ ou affiche que les points sont coplanaires.
On pourra considérer que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
- c. Après avoir entré cet algorithme dans la calculatrice, indiquer les résultats qu'elle donne dans chacun des cas suivants :
- i. $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, -1, 3)$, $C = (-1, -2, 0)$ et $D = (3, -1, 0)$.
 - ii. $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 4, -7)$, $C = (0, 3, 0)$ et $D = (0, 2, 1)$.
 - iii. $A = (8, 0, \frac{3}{2})$, $B = (0, 1, -1)$, $C = (-\frac{1}{2}, 2, 0)$ et $D = (3, 3, 0)$.

II. POINTS ÉQUIDISTANTS SUR UNE SPHÈRE EUCLIDIENNE

Dans cette partie, m est un entier naturel, $m \geq 2$, et t est un réel, $t \neq 1$.

La famille de m vecteurs distincts $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ de l'espace E , de dimension $n \geq 2$, est solution du problème $P(m, t)$ si :

tous les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont de norme 1

et

pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m , $(x_i | x_j) = t$.

7. Résultats préliminaires
- a. Montrer que si $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est solution du problème $P(m, t)$ alors, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m , $\|x_i - x_j\|$ est constant.
- b. Sans aucun calcul de déterminant, donner en le justifiant, le polynôme caractéristique de la matrice $J \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
- c. En déduire que si $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ est solution du problème $P(m, t)$, alors $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m) = (1-t)^{m-1}(1+(m-1)t)$.
8. Conditions nécessaires
- a. Montrer que, pour que $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ soit une famille libre de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t \in \left[\frac{-1}{m-1}, 1 \right[$ et que $m \leq n$.

- b. Montrer que, pour que $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ soit une famille liée de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t = \frac{-1}{m-1}$ et que $m \leq n+1$ (on pourra montrer qu'alors, la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ est libre).

c. Application

Existe-t-il dans E_3 cinq vecteurs distincts qui deux à deux forment un même angle obtus θ , c'est-à-dire tel que $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$?

9. Exemple du cas $n = 2$

Déterminer pour $m \geq 3$, une famille $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ de points de E_2 , telle que la famille de vecteurs $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_m})$ soit solution du problème $P(m, t)$ en précisant le couple (m, t) . Placer ces points sur une figure.

10. Exemple du cas $n = 3$

On suppose que $n = 3$ et $t \in \left] \frac{-1}{2}, 1 \right[$.

On pose $a = \sqrt{\frac{2-2t}{3}}$ et $b = \sqrt{\frac{2t+1}{3}}$.

- a. Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et H un sous espace supplémentaire orthogonal de $\text{vect}\{u\}$ dans $\mathbb{R}^3$, justifier qu'il existe une famille (y_1, y_2, y_3) de vecteurs de H solution du problème $P(3, \frac{-1}{2})$.
- b. Si on pose alors pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $x_i = a y_i + b u$, montrer que (x_1, x_2, x_3) est une famille libre de vecteurs solution au problème $P(3, t)$.
- c. A quelle condition nécessaire portant sur $\alpha \in]0, \pi[$, existe-t-il trois points A_1, A_2 et A_3 de la sphère de centre O et de rayon 1 de E_3 tels que les trois angles géométriques des couples $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$, $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_3})$ et $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ soient égaux à α ?

Remarque : on demande de ne pas utiliser le résultat de la question 4.

III. THÉORÈMES d'APOLLONIUS

On rappelle que si $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une base de E et si f est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $S = (f(a_i, a_j))$. Par ailleurs, si x et y sont deux vecteurs de E où X et Y sont les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$, on a $f(x, y) = {}^t X S Y$.

11. Soit $\langle , \rangle$ un autre produit scalaire sur E , on considère $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux bases orthonormales de E pour ce produit scalaire. On note P la matrice de passage de la base $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vers la base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Montrer que, pour le produit scalaire $(\mid)$, $G(b_1, b_2, \dots, b_n) = P^{-1} G(a_1, a_2, \dots, a_n) P$

puis justifier que $\sum_{i=1}^n (a_i \mid a_i) = \sum_{i=1}^n (b_i \mid b_i)$.

12. Dans E_2 , de repère orthonormé (O, e_1, e_2) , on considère l'ellipse C d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels strictement positifs.}$$

a. Justifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par $\langle U, V \rangle = \frac{u v}{a^2} + \frac{u' v'}{b^2}$ si $U = (u, u')$ et $V = (v, v')$ dans la base (e_1, e_2) .

b. Deux vecteurs U et V de E_2 sont des diamètres conjugués de C si (U, V) est une base orthonormale pour le produit scalaire $\langle \mid \rangle$.

Donner un exemple simple de deux diamètres conjugués de C .

c. Dans cette question, on demande de faire une figure.

Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) de C , montrer en utilisant un vecteur gradient,

que l'équation de la tangente T à la courbe C en M_0 est $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$. En déduire que

la droite D qui passe par O et parallèle à T a pour équation cartésienne $\langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} \rangle = 0$.

Si on note M_0' un point d'intersection de D et C , montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont des diamètres conjugués de C .

d. Si M et M' sont deux points de C tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient des diamètres conjugués de C , démontrer les deux théorèmes d'Apollonius suivants :

i. $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ (précision : $OM^2 = (\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM})$).

ii. L'aire du parallélogramme « formé par O, M et M' » est constante égale à $a b$.

IV. RECHERCHE D'UNE ISOMÉTRIE AFFINE

13. On note $O(E_n)$ le groupe des automorphismes orthogonaux de E_n .

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux familles de vecteurs de E_n vérifiant

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

On veut montrer qu'il existe $u \in O(E_n)$ vérifiant : pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u(x_i) = y_i$.

On note $p = \text{rang}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{rang}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, et on considère que les vecteurs sont numérotés de sorte que $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ soient deux familles libres de vecteurs.

On pose alors $V = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n\}$,

$$W = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p\} = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dots, y_n\},$$

on note $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $V^\perp$
 et $(e'_{p+1}, e'_{p+2}, \dots, e'_n)$ une base orthonormale de $W^\perp$.

Soit u un endomorphisme de E défini par :

pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ $u(x_i) = y_i$ et pour $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$ $u(e_i) = e'_i$.

- a. Montrer que u conserve le produit scalaire.
 - b. Pour tout entier $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$, montrer que $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp$.
 - c. Conclure.
- 14.** On donne $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ deux familles de points de E_n vérifiant pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n , $\|\overrightarrow{A_i A_j}\| = \|\overrightarrow{B_i B_j}\|$ et on veut montrer qu'il existe une isométrie affine f de E_n vérifiant pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(A_i) = B_i$.
- a. Si on pose pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i = \overrightarrow{A_1 A_i}$ et $y_i = \overrightarrow{B_1 B_i}$, montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n , $(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j)$.
 - b. Conclure.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

Pour z appartenant à $\mathbb{C}$, on note $|z|$ son module.

Pour tout entier naturel n , on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k éléments d'un ensemble de n éléments,
pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On rappelle :

- la valeur de $\binom{n}{k}$: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

• la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel,

alors :
$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Enfin si n est un entier naturel non nul on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

et on pose $\sigma_0 = 0$.

Objectifs :

Dans les parties I et II on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier une fonction φ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Étude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes :

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

À toute suite complexe a , on associe la suite a^* définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$.

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série

$$\sum_{n \geq 0} a_n.$$

PARTIE I

Deux exemples

I.1/ Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.

I.1.1/Expliciter $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2/Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3/La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2/ Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

I.2.1/ Exprimer a_n^* en fonction de z et n .

I.2.2/ On suppose que $|z| < 1$.

I.2.2.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.2.2.2/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3/ On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1/ Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?

I.2.3.2/ Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3/ On suppose que $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$
Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

PARTIE II

Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite a est à valeurs réelles, la suite a^* étant toujours définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$.

II.1/ Comparaison des convergences des deux suites.

II.1.1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k fixé, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

II.1.1.1/ Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2/ En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2/ Soient a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$.

Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3/ On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4/ On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5/ La convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$?

II.2/ Comparaison des convergences des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1/ Pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k ,
c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2/ On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N} .$$

II.2.2.1/ A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question **II.2.1** ?

II.2.2.2/ Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$) .

II.2.3/ On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4/ La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$?

PARTIE III

Une étude de fonctions

On rappelle que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!}; \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n x^n.$$

III.1/ Étude de f .

III.1.1/ Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.1.2/ Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

III.1.3/ Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.

III.2/ Étude de g .

III.2.1/ Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.2/ On désigne par g' la dérivée de la fonction g ; exprimer $g' - g$ en fonction de f .

III.2.3/ Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

III.3/ La fonction F .

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

III.3.1/ Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

III.3.2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k(k!)(n-k)!}$.

Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n .

III.4/ La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n .

III.4.1/ Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

III.4.1.1/ Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2/ En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n .

III.4.3/ Montrer en utilisant III.4.1 et III.4.2 que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5/ Étude de la fonction φ .

On rappelle que pour x réel $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n x^n$.

III.5.1/ Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sigma_n x^n$.

III.5.2/ Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction φ , et étudier ses variations sur $[0, R[$.

III.5.3/ Valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

En utilisant les résultats de la partie II et de la question III.4.3 expliciter la valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4/ Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à Δ et retrouver la valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Etant donné un entier naturel non nul n , on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Etant donné une matrice A , la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire, telle que $I_n = (a_{i,j})$ avec :

Pour tout i , $a_{i,i} = 1$ et pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.

On note J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Objectifs :

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété $(\mathcal{P})$.

Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.

La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$, à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.

Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

PARTIE I

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

I.1. Calculer la matrice M^2 .

I.2. Exprimer la matrice $M^2 + M$ en fonction des matrices J_5 et I_5 .

I.3. Exprimer la matrice J_5^2 en fonction de la matrice J_5 .

I.4. Dédurre des questions précédentes un polynôme annulateur de M .

I.5. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice M ?

I.6. Montrer que M possède une valeur propre entière (et une seule) ; déterminer cette valeur propre entière ainsi que le sous-espace propre associé.

PARTIE II

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n-1$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

- (1) M est symétrique
- (2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,i} = 0$
- (3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n - \delta$ coefficients égaux à 0.
- (4) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j} = 0$, si et seulement si, il existe un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$.
L'entier k est alors unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété $(\mathcal{P})$:

si $m_{i,j} = 1$, alors pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a le produit $m_{i,k} m_{j,k} = 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

II.1. Expression de M^2 . On note $M^2 = (a_{i,j})$.

II.1.1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer les coefficients $a_{i,i}$.

II.1.2. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.

II.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement φ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_n .

II.2. Relation entre n et δ .

II.2.1. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$, l'image de l'application linéaire φ .

II.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta \text{id}$.

En calculant $(f \circ f)(u)$, montrer que u est colinéaire à v .

II.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.

II.2.4. Dédurre des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

II.3. Valeurs propres de f .

Dans la suite de cette question **II.3**, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et

$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

II.3.1. Justifier l'affirmation : il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f .

II.3.2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Que vaut $\varphi(u)$?

II.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E) : $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

II.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E) . On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f , par exemple a . En utilisant la trace de l'endomorphisme f , exprimer a en fonction de δ . En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f . Dans la suite, on suppose $a > b$.

II.4. Relations portant sur r , s , a , b et δ .

On note r la dimension du noyau de $f - a \text{ id}$ et s la dimension du noyau de $f - b \text{ id}$.

II.4.1. Exprimer $(a-b)^2$ en fonction de δ .

II.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ .

II.4.3. En déduire $(r-s)(a-b)$ en fonction de δ .

II.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r=s$? Que valent alors r et s ?

Dans la suite, on caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M .

II.5. Premier cas. On suppose que $a-b \notin \mathbb{Q}$.

II.5.1. Montrer que $r=s$. En déduire δ et n .

II.5.2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M .

II.6. Deuxième cas. On suppose que $a-b \in \mathbb{Q}$.

II.6.1. On écrit $a-b = \frac{m}{q}$ avec m et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m . En déduire que $a-b \in \mathbb{N}$.

II.6.2. Montrer que $a-b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a-b = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p . En déduire a et b en fonction de p .

II.6.3. On note $c = a-b$. Montrer que c divise $(c^2+3)(c^2-5)$. En déduire que $c \in \{3, 5, 15\}$.

II.6.4. Pour les différentes valeurs de c , donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s .

PARTIE III

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de $\mathbb{R}^5$.

On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de $\mathcal{B}$:

$$u_i = e_\alpha + e_\beta \text{ avec } \alpha \neq \beta.$$

III.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i .

On indexe les vecteurs u_i de façon arbitraire : u_i , $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$.

III.2. Soit ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ qui réalise une bijection de la base $\mathcal{B}$ sur elle-même.

Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket \times \llbracket 1, 10 \rrbracket$, on a $(u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$.

III.3. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.

III.3.1. Pour $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, calculer $(u_i|u_i)$.

III.3.2. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.3.3. On suppose que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\varepsilon$ avec les quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.

III.4.1. Écrire une combinaison linéaire M de A , I_{10} et J_{10} susceptible de vérifier la propriété $(\mathcal{P})$ définie dans la partie II.

III.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x | y)$ et $\|x\|$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

La matrice transposée d'une matrice A est notée tA .

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

PARTIE I

I.1 Soit x et y deux vecteurs de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que : $(x | y) = {}^tXY = YX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leq \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H .

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F . Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur z de F , $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, E_i la matrice de e_i .

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \sum_{i=1}^k E_i {}^t E_i Z$.

ii) En déduire $M(p) = \sum_{i=1}^k E_i {}^t E_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $\|p(z)\| \leq \|z\|$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F , r le projecteur orthogonal de F sur K , λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^\perp$.

b) Établir l'égalité : $\lambda \|u\|^2 = \|r(u)\|^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

c) Montrer que : $\text{Ker}(p \circ r) = \text{Ker } p + \text{Ker } r$ et $\text{Im}(p \circ r) = \text{Im } p \cap \text{Im } r$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k , A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.

a) Montrer que les matrices A, B, C, D vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A, \quad AB + BD = B, \quad CB + D^2 = D, \quad {}^t A = A, \quad {}^t B = C, \quad {}^t D = D$$

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

ii) ${}^t C C = 0$.

iii) $C = 0$.

iv) p et r commutent.

PARTIE II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F .

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f , montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$$

Dans la suite x_0 sera appelée une *pseudo-solution* de l'équation :

$$f(x) = v \quad (*)$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation $(*)$ admet une pseudo-solution unique.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si pour tout x appartenant à E : $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$. Ecrire sous forme matricielle l'équation $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si :

$${}^t A A X_0 = {}^t A V$$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $(*)$: $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

PARTIE III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1 a) Soit y un élément de F . Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y', \quad (x, y') \in (\text{Ker } f)^\perp \times (\text{Im } f)^\perp$$

b) Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x .

c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f .

III.2 Déterminer le noyau et l'image de g .

III.3 a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\text{Ker } f)^\perp$.

b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\text{Im } f$.

III.4 Premier exemple : On prend $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

III.5 Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.

a) Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$ et $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp$.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g . (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).

c) En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E .

III.6 Deuxième exemple : On prend $E = F = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

N.B.: Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La partie III est indépendante des deux premières.

PARTIE I

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_0(x) = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x + k).$$

I.1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $P_n(m)$ à l'aide de factorielles.

Soit α un nombre réel qui n'est pas un nombre entier strictement négatif.

On définit la fonction f_α de la variable réelle x par :

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}.$$

I.2. Montrer que f_α est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

I.3. On considère l'équation différentielle linéaire homogène en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(E_\alpha) \quad xy''(x) + (2\alpha + 1)y'(x) + xy(x) = 0.$$

I.3.1. Montrer que f_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

I.3.2. Réciproquement, soit y une solution de (E_α) , paire, et développable en série entière de la variable x au voisinage de $x = 0$. Exprimer y en fonction de f_α et $y(0)$.

On suppose à présent, et jusqu'à la fin de la partie I de ce problème, que $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

I.4. Soit g_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g_\alpha(x) = x^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x).$$

I.4.1. Montrer que g_α est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

I.4.2. En comparant les limites à droite en 0 de f_α et g_α , montrer que ces fonctions sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

En déduire la solution générale de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

I.4.3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] - \infty, 0[$ à valeurs réelles.

Montrer que y est solution de (E_α) sur $] - \infty, 0[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

En déduire la solution générale de (E_α) sur $] - \infty, 0[$.

I.5. Soit j_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x)$.

I.5.1. Montrer que j_α est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(B_\alpha) \quad x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0.$$

Que peut-on dire de $j_{-\alpha}$?

I.5.2. En déduire la solution générale de (B_α) sur $]0, +\infty[$ puis sur $] - \infty, 0[$.

PARTIE II

Dans cette partie, α désigne un nombre réel strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$.
On définit la fonction h_α de la variable réelle x par :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos xt \, dt.$$

II.1. Montrer que h_α est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

II.2.

II.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x h_\alpha''(x) + x h_\alpha(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} x \cos xt \, dt$.

II.2.2. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que h_α est solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

II.3. Montrer que h_α est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha) x^{2n}}{(2n)!},$$

où $I_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} t^{2n} \, dt.$

II.4. Exprimer h_α en fonction de $h_\alpha(0)$ et f_α .

II.5. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de n , $P_n(\alpha)$ et $I_0(\alpha)$.

PARTIE III

Soit $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles x et y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On lui associe la fonction $\tilde{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{F}(r, \theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

pour tout $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

On note ΔF le *laplacien* de F , défini par $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

III.1. Montrer que pour tout $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ on a :

$$\Delta F(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

On se propose de déterminer les fonctions F non identiquement nulles telles que $\tilde{F}$ soit de la forme $\tilde{F}(r, \theta) = f(r)g(\theta)$ et que $\Delta F + \omega^2 F = 0$, où ω est un nombre réel positif ou nul, et f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

III.2. Soient $F, \tilde{F}, f$ et g vérifiant les conditions ci-dessus.

III.2.1. Montrer que g est 2π -périodique.

III.2.2. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait simultanément :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall r \in]0, +\infty[, \quad r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2 \omega^2 - \lambda) f(r) = 0, \\ (ii) \quad & \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0. \end{aligned}$$

III.2.3. Dédurre de la question III.2.1. que le nombre réel λ est nécessairement de la forme $\lambda = p^2$, avec $p \in \mathbb{N}$.

III.2.4. En déduire la forme générale de g .

On distinguera le cas où $p = 0$ et le cas où $p \neq 0$.

III.3. On suppose dans cette question que $\omega = 0$.

III.3.1. Déterminer la forme générale de f dans le cas où $p = 0$.

III.3.2. Déterminer la forme générale de f dans le cas où $p \neq 0$.

On pourra commencer par chercher les fonctions f qui sont de la forme $f(r) = r^\alpha$.

III.4. On suppose dans cette question que $\omega \neq 0$.

Soit f_1 la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_1(r) = f\left(\frac{r}{\omega}\right)$.

Montrer que f_1 est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(B_p) \quad r^2 y''(r) + r y'(r) + (r^2 - p^2) y(r) = 0.$$

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Notations et définitions

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers naturels non nuls. $M_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes. $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

L'ensemble des entiers compris entre 1 et n sera noté $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On appellera matrice colonne d'ordre n toute matrice complexe à n lignes et 1 colonne. Ainsi, $M_{n,1}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n .

Soit $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{C})$. Pour $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on appelle $A_q[i, j]$ le coefficient sur la i -ième ligne et la j -ième colonne de la matrice A_q .

On dira qu'une telle suite $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $B = (B[i, j])_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $M_{n,p}(\mathbb{C})$ lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{q \rightarrow \infty} A_q[i, j] = B[i, j].$$

On notera dans ce cas $B = \lim_{q \rightarrow \infty} A_q$. Par exemple, si on pose pour tout entier $q > 0$:

$$A_q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{q}\right) & e^{-q} \\ 1 & \frac{2q}{1+q} \end{pmatrix},$$

alors :

$$A_q[1,1] = \cos\left(\frac{1}{q}\right), A_q[1,2] = e^{-q}, A_q[2,1] = 1, A_q[2,2] = \frac{2q}{1+q} \text{ et } \lim_{q \rightarrow \infty} A_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Préliminaire

On détermine dans ce préliminaire trois résultats qui seront utiles pour les questions 6 et 7 de la partie I.

Pour la question P.1, le détail des calculs devra figurer sur la copie. Pour les questions P.2 et P.3, on pourra faire usage de la calculatrice et ne mentionner que les résultats intermédiaires utiles.

On définit les trois matrices A_1 , A_2 et A_3 par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ -1 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 6i \\ -2i & 3 & 7 \\ 2i & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ (où } i^2 = -1 \text{)} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

P.1 – Donner les valeurs propres de A_1 et justifier que A_1 est diagonalisable.

P.2 – Donner les valeurs propres de A_2 et justifier que A_2 est diagonalisable.

P.3 – Justifier que A_3 est diagonalisable, et donner une matrice inversible P , une matrice diagonale D telles que $P^{-1}A_3P = D$. Déterminer P^{-1} .

Partie I

Généralités sur les suites matricielles. Etude du cas diagonalisable

1 – Soient S et T deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{C})$ et soient $(V_q)_{q \in \mathbb{N}}$ et $(W_q)_{q \in \mathbb{N}}$, deux suites de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{C})$ convergentes respectivement vers les matrices S et T , et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Prouver alors que la suite $(V_q + \lambda W_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers $S + \lambda T$.

2 – Soit r un entier naturel non nul et :

- $(V_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{C})$, convergente vers S ;
- $(W_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{p,r}(\mathbb{C})$, convergente vers T .

Prouver alors que la suite $(V_q W_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est convergente vers ST .

3 – Soit B une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Dédurre du I.2 que si $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $M_n(\mathbb{C})$, convergente vers B , et si P est une matrice inversible d'ordre n , alors la suite $(P^{-1}A_qP)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}BP$.

Prouver également que si X et Y sont deux matrices colonnes d'ordre n , alors la suite de matrices colonnes $(A_q X + Y)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers $BX + Y$.

4 – On suppose, dans cette question 4 seulement, que A est une matrice carrée diagonale d'ordre n , de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui peuvent être complexes) :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, A^q désigne la q -ième puissance de A :

$$\begin{cases} A^0 = \mathbf{I}_n \\ \forall q \in \mathbb{N}, A^{q+1} = A \cdot A^q \end{cases}.$$

On s'intéresse alors à la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ des puissances de A .

4.1 – Prouver que si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $|\lambda_i| < 1$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

4.2 – Prouver que s'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda_i| > 1$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

4.3 – Soit λ un nombre complexe de module 1 tel que la suite de nombres complexes $(\lambda^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe z .

4.3.1 – Justifier que $z \neq 0$.

4.3.2 – En remarquant que la suite $(\lambda^{q+1})_{q \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers z , montrer que $\lambda = 1$.

4.3.3 - En déduire que la suite de matrices $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge, si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (|\lambda_i| < 1 \text{ ou } \lambda_i = 1).$$

5 – Montrer que si $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée diagonalisable, dont chaque valeur propre λ vérifie $|\lambda| < 1$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

6 – Déterminer si les suites de matrices $(A_1^q)_{q \in \mathbb{N}}$, $(A_2^q)_{q \in \mathbb{N}}$ et $(A_3^q)_{q \in \mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites éventuelles (les A_i sont les trois matrices définies dans la partie préliminaire). *On pourra faire usage de la calculatrice.*

7 – Les résultats de cette question 7 ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

7.1 – Soit une matrice carrée A diagonale d'ordre n , de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que la suite de matrices $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ définie par : $S_q = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} A^k$ a une limite, notée $\exp(A)$, qu'on déterminera.

7.2 – Montrer que si A est une matrice carrée diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale (d'ordre n) et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_q = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} A^k \text{ converge vers une matrice notée } \exp(A), \text{ et que : } \exp(A) = P \exp(D) P^{-1}.$$

7.3 – Calculer $\exp(A_3)$ où A_3 est définie dans le préliminaire (on pourra utiliser la calculatrice pour faire certains produits matriciels).

Partie II

Suites arithmético-géométriques matricielles

Etant données $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on définit par récurrence une suite $(X_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de matrices colonnes d'ordre n par :

$$\begin{cases} X_0 \text{ est une matrice colonne donnée d'ordre } n \\ \forall q \in \mathbb{N}, X_{q+1} = AX_q + B \end{cases}.$$

On suppose de plus que 1 n'est pas valeur propre de A .

1 – Montrer que $A - \mathbf{I}_n$ est inversible.

2 – Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne S , telle que $AS + B = S$.

3 – Prouver alors que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, X_q = A^q (X_0 - S) + S.$$

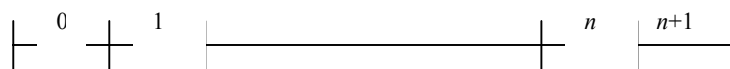
4 – En déduire que si A est diagonalisable et si toutes les valeurs propres λ de A vérifient $|\lambda| < 1$, alors :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} X_q = S.$$

Partie III

Application à la diffusion de la chaleur dans une tige

On considère, dans cette partie, une tige homogène découpée en $n+2$ petits segments de longueurs identiques, numérotés de 0 à $n+1$.



On suppose les segments assez petits pour considérer la température comme constante sur chacun d'entre eux à un instant donné. On appelle $F(k, t)$ la température à l'instant $t \geq 0$ du segment numéroté k avec $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. On fait les hypothèses suivantes :

- Après un intervalle de temps $\tau > 0$ (caractéristique de la longueur des segments et de la matière de la tige) la température à l'instant $t+\tau$, d'un segment autre que les deux segments extrêmes, a pour température la moyenne des températures à l'instant t des deux segments adjacents :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F(k, t+\tau) = \frac{1}{2} [F(k-1, t) + F(k+1, t)].$$

- Le segment numéroté 0 est maintenu à la température de 20°C et le segment numéroté $n+1$ est maintenu à la température de 100°C :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, (F(0, t) = 20 \text{ et } F(n+1, t) = 100).$$

- On suppose enfin qu'à l'instant 0 le segment numéroté $n+1$ est à la température de 100°C et que tous les autres sont à la température de 20°C :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, F(k, 0) = 20 \\ F(n+1, 0) = 100 \end{cases}.$$

1 – Donner une matrice carrée A d'ordre n , et une matrice colonne $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, \begin{pmatrix} F(1, t+\tau) \\ \vdots \\ F(n, t+\tau) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F(1, t) \\ \vdots \\ F(n, t) \end{pmatrix} + B.$$

2 – Pour $q \in \mathbf{N}$, on définit la matrice colonne X_q par :

$$X_q = \begin{pmatrix} F(1, q\tau) \\ \vdots \\ F(n, q\tau) \end{pmatrix}.$$

Justifier alors que pour tout entier naturel q on a : $X_{q+1} = AX_q + B$.

3 – On suppose $n = 4$ dans cette question.

3.1 – Ecrire dans l'un des langages de calcul formel du programme (MAPLE ou MATHEMATICA par exemple) une procédure permettant de calculer X_q en fonction de q . On indiquera le langage utilisé.

3.2 – Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur numérique de X_{10} . On donnera le résultat avec une précision de 10^{-1} sur chaque coordonnée.

4 – Soit $\omega \in \mathbf{R}$. On note U_ω la matrice colonne :

$$U_{\omega} = \begin{pmatrix} \sin(\omega) \\ \sin(2\omega) \\ \vdots \\ \sin(n\omega) \end{pmatrix}.$$

4.1 – Prouver que : $U_{\omega} = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega) = 0$.

On supposera par la suite que $\sin(\omega) \neq 0$.

4.2 – Montrer que si λ est un réel tel que $AU_{\omega} = \lambda U_{\omega}$, alors $\lambda = \cos(\omega)$.

4.3 – Réciproquement, donner les valeurs de $\omega \in]0, \pi[$ pour lesquelles $AU_{\omega} = \cos(\omega)U_{\omega}$.

4.4 – En déduire que A est diagonalisable et donner une matrice inversible $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, telles que $P^{-1}AP = D$.

Justifier que les valeurs propres de A appartiennent à $] -1, 1[$.

5 – A l'aide de la partie II, justifier qu'il existe une unique matrice colonne S telle que $S = AS + B$, puis que $\lim_{q \rightarrow \infty} A^q X_q = S$. Quelle interprétation physique pouvez-vous donner de S ?

6 – Déterminer explicitement S . Interprétez le résultat.

Partie IV

Etude de la suite des puissances d'une matrice réelle

A désigne, pour toute la suite, une matrice carrée réelle d'ordre n . On appelle $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On munit $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire usuel ; on note $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ la

norme de la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $(X|Y)$ le produit scalaire des matrices colonnes X et Y .

On notera que $(X|Y) = {}^tXY$ (tX désigne la transposée de X).

1 – Montrer que la suite $(A^q)_{q \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(A^q E_k)_{q \in \mathbf{N}}$ de matrices colonnes converge.

On pourra introduire les colonnes $C_1(q), \dots, C_n(q)$ de la matrice A^q .

2 – En déduire que la suite $(A^q)_{q \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si pour toute matrice colonne $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ la suite de matrices colonnes $(A^q X)_{q \in \mathbf{N}}$ converge.

3 – Démontrer que :

3.1 – S’il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq k\|X\|$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

On pourra établir que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \forall q \in \mathbb{N}, \|A^q X\| \leq k^q \|X\|$.

3.2 – S’il existe $k \in]1, +\infty[$ tel que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \geq k\|X\|$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

4 – Pour toute matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(X) = \|AX\|^2$. Soit g l’endomorphisme associé à tAA . Montrer que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X) = {}^tX {}^tAA X = (X | g(X)).$$

5 – Justifier que tAA est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux seront notés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

6 – Prouver qu’il existe une base orthonormale $B = (u_1, \dots, u_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sorte que pour tout vecteur X de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ dans B on ait :

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

En déduire que les λ_i sont tous positifs ou nuls.

7 – On pose désormais $k_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ et $k_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Prouver à l’aide de la question 3 que :

7.1 – Si $k_1 < 1$, alors la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

7.2 – Si $k_0 > 1$, alors $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

8 – On reprend la suite $(X_q)_{q \in \mathbb{N}}$ définie dans la partie II, et on suppose que $k_1 < 1$. Montrer que 1 n’est pas valeur propre de A et que pour tout entier q on a : $\|X_q - S\| \leq (\sqrt{k_1})^q \|X_0 - S\|$.

9 – On reprend les notations de la partie III, avec $n = 4$. Déterminer à l’aide de la majoration ci-dessus un entier q_0 tel que pour $q \geq q_0$ on ait $\|X_q - S\| \leq 1$. En déduire que pour $q \geq q_0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $S_k - 1 \leq F(k, q\tau) \leq S_k + 1$ (les S_k désignent les coordonnées de S). Interpréter ce résultat.

Fin de l’énoncé

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème

La partie I est indépendante de la suite du problème.

I) A) On considère l'équation différentielle $(E_1) : xy' - y = \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Résoudre l'équation homogène associée.

b) Déterminer une solution particulière de l'équation complète.

c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .

2) Préciser la solution f de l'équation (E_1) telle que $f(1) = 0$.

B) On considère l'équation différentielle $(E_2) : x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \rightarrow x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme : $y(x) = K(x)x^\alpha$, en donnant à α la valeur trouvée à la question précédente. On montrera que K' vérifie une équation différentielle du premier ordre.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2) a) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de l'équation (E_2) .

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .

3) Démontrer que la fonction f (définie à la question A) 2)) est l'unique solution de l'équation (E_2) telle que $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$.

II) Etude de la fonction f .

1) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

a) Etudier les variations de la fonction f .

b) Etudier les branches infinies de f et construire une allure de la représentation graphique.

c) Déduire de l'étude des variations de f que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f .

b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge et la calculer.

c) Quelle est la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} f(x) dx$?

III) Comparaison des moyennes.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant n nombres réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel m_a défini par : $m_a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique le nombre réel m_g défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique le nombre réel m_h défini par : $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

1) a) En appliquant l'inégalité montrée à la question II) 1) c) aux réels $\frac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.

b) Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?

c) Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a :

$$x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 - 4x^2 y^2 z^2 + 1 \geq 0.$$

2) a) En appliquant l'inégalité vue en III 1) a) aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leq m_g$.

b) Dans quels cas a-t-on $m_h = m_g$?

c) Dédire des questions précédentes que $m_h \leq m_a$.

En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$, on a :

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

IV) Applications.

1) Dédire de l'inégalité $m_g \leq m_a : \forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\frac{n}{1 + \ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.

3) a) En déduire la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ est bornée et en donner un encadrement à l'aide des questions précédentes.

4) a) Démontrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$ est croissante (on pourra considérer la suite de terme général $\ln(\sqrt[n]{n!})$).

b) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$?

V) Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.

1) a) k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer un encadrement de $\ln(k)$ par deux intégrales de la fonction $\ln$.

b) En déduire : $\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt.$

c) En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

2) Déterminer la nature des séries de termes généraux : $\frac{1}{(n!)^{1/n}}$ et $\frac{1}{(n!)^{2/n}}$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

1) Etude d'une famille de fonctions

On considère les fonctions f_α , où α est un réel fixé, définies par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha x}{1+x} - \ln(1+x)$$

- a) Etudier les variations des fonctions f_α sur $] -1, +\infty[$. On précisera les limites de f_α aux bornes de l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- b) Déterminer les fonctions f_α admettant un extremum local, et étudier le signe de f_α en ce point.
- c) Déterminer le nombre de solutions $x > -1$ de l'équation $f_\alpha(x) = 0$.

2) Etude d'une fonction particulière

On pose désormais $f = f_2$, soit : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur $] -1, +\infty[$, vérifiant : $-1 < a < b$.
Donner une valeur approchée de b à 10^{-2} près.
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement une solution $c > -1$.
- c) Montrer que : $\forall x > -1, f(x) \leq x$.

3) Etude d'une suite récurrente

On considère la suite récurrente $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{1+u_n} - \ln(1+u_n) \end{cases}$$

- a) On pose $I = [0, 1]$. Montrer que I est stable par f .
- b) Soit $u_0 \in I$ fixé. Montrer que la suite u est bien définie, et que $\forall n \geq 0, u_n \in I$.
- c) Montrer que la suite u est monotone.
- d) Démontrer que la suite u converge vers une limite ℓ .

e) Déterminer la valeur de ℓ .

4) Etude d'une série numérique

Soit la série numérique $\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$.

- a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
- b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \leq f\left(\frac{1}{k}\right)$
- c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$?

5) Etude d'une nouvelle fonction

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \neq 0, \varphi(t) = \frac{1}{t} \ln(1+t^2) \end{cases}$

- a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Pour $t \neq 0$, exprimer $\varphi'(t)$ à l'aide de la fonction f .
- c) Soit Φ définie par $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$.
 - i) Quel est le domaine de définition de Φ ?
 - ii) Montrer que Φ est paire.
- d) i) Soit $x \in [1, +\infty[$, calculer $\int_1^x \frac{2}{t} \ln t dt$.
 - ii) En déduire : $\forall x \geq 1, \Phi(x) - \Phi(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.
 - iii) Justifier rapidement l'inégalité : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$, et en déduire :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \leq 1$$

- e) Donner un équivalent simple de $\Phi(x)$ en $+\infty$.
- f) Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$?

Exercice 2

1) Recherche du Développement en Série de Fourier d'une fonction à l'aide de séries entières

Dans tout l'exercice on désigne par f l'application définie par

$$f(x) = \frac{1}{8 \cos x - 17}$$

- a) Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b) On pose $X = e^{ix}$. Montrer qu'il existe une fonction rationnelle F telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(X)$$

On rappelle qu'une fonction rationnelle est un rapport de deux fonctions polynômes.

- c) On considère F la fonction rationnelle déterminée à la question précédente. On note $D(F)$ le domaine de définition de F , avec $D(F) \subset \mathbb{C}$. Déterminer $(a, b, r_1, r_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall z \in D(F), F(z) = \frac{a}{r_1 - z} + \frac{b}{r_2 - z}$$

- d) Montrer qu'il existe deux séries entières S_1 et S_2 de rayon de convergence $R > \pi$, telles que :

$$\text{si } \frac{1}{R} < |z| < R, \quad F(z) = S_1(z) + S_2(z^{-1})$$

- e) A partir de la décomposition précédente, déterminer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nx)$$

- f) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser la valeur de la somme.
On ne demande pas de calculer explicitement la série de Fourier de f .

- g) D'après la question 1.e), quelle hypothèse peut-on émettre sur l'expression des coefficients de la série de Fourier de f ?

On ne demande pas de vérifier cette hypothèse, c'est l'objectif de la suite du problème.

2) Propriétés des coefficients de Fourier

Pour tout entier naturel n on note : $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$

- a) Calculer a_0 . On utilisera le changement de variable : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan \frac{x}{2}$.
Exprimer a_1 à l'aide de a_0 et d'une intégrale très simple à calculer, puis déterminer la valeur de a_1 .
- b) Simplifier l'expression $4 \cos(nx) + 4 \cos[(n+2)x]$ en faisant apparaître $\cos[(n+1)x]$.
En déduire une expression de

$$4 \cos(nx) + 4 \cos[(n+2)x] - 17 \cos[(n+1)x]$$

en fonction de $\cos[(n+1)x]$ et $\cos x$.

En déduire une relation de récurrence liant a_{n+2} , a_{n+1} et a_n .

- c) En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$.
- d) Montrer que $M = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et en déduire une expression de X_n en fonction de n .
- e) L'hypothèse de la question 1.g) est-elle vérifiée ?

3) Calcul de sommes numériques

- a) A l'aide de la série de Fourier de f calculer les sommes numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n$$

- b) Vérifier les résultats précédents à l'aide de séries entières ou numériques de référence.

Problème

On rappelle que si on a $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme avec $a_d \neq 0$, alors d est le degré de P et a_d est le coefficient dominant de P .

Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé dans tout le problème. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe $\phi(P)$ donné par

$$\phi(P) = P'' - 2XP'$$

Partie I. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Ecrire sa matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) *On diagonalise ici l'endomorphisme ϕ .*
 - a) Montrer que ϕ est diagonalisable. Donner les valeurs propres de ϕ .
 - b) En déduire que pour tout entier $p \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaire, tel que

$$\phi(H_p) = -2pH_p \quad (*)$$

- 4) On se place (*uniquement dans cette question*) dans le cas particulier $n = 3$.
Ecrire la matrice M dans ce cas particulier, et donner alors H_0, H_1, H_2 et H_3 .
- 5) Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Notons $d = \deg(H_p)$.

En écrivant $H_p = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k + X^d$, et en utilisant $(*)$, montrer que

$$\deg(H_p) = p, \quad a_{p-1} = 0, \quad a_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}$$

Partie II. Une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$$

- 1) Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la dérivée de $x \mapsto P'(x)e^{-x^2}$.
Montrer que

$$\langle \phi(P), Q \rangle = - \langle P', Q' \rangle$$

- b) En déduire que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

- c) Quelle est la nature de l'endomorphisme ϕ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \langle ., . \rangle)$?
- 3) Une base orthogonale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \langle ., . \rangle)$.
a) Soient p et q deux entiers dans $\{0, \dots, n\}$. Déduire de **II.2b** que :

$$(p \neq q) \Rightarrow \langle H_p, H_q \rangle = 0$$

- b) En déduire que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 4) Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $H_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$.

Partie III. Quelques propriétés des polynômes H_p .

- 1) On établit ici une relation de récurrence sur les polynômes H_p .
Soit $p \in \{0, \dots, n\}$.

- a) Soient P, Q, R trois polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle$$

- b) On suppose $p \geq 2$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, on a

$$\langle XH_p, Q \rangle = 0, \quad \text{puis} \quad \langle H_{p+1} - XH_p, Q \rangle = 0$$

- c) Justifier l'existence d'un $p+1$ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que

$$H_{p+1} - XH_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k$$

d) En utilisant **I.5** et **III.1b**, montrer que :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, 2H_{p+1} - 2XH_p + pH_{p-1} = 0$$

2) Montrer alors que si p est pair, alors H_p est pair, et que si p est impair, alors H_p est impair.

3) On calcule ici la dérivée de H_p .

a) Soit $p \in \{2, \dots, n\}$. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, $\langle H'_p, Q \rangle = 0$.

b) En déduire, en décomposant H'_p suivant la base $(H_0, \dots, H_n)$, que

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, H'_p = pH_{p-1}$$

4) On pose $U_0 = 1$, et pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$:

$$U_p(x) = \exp(x^2) \frac{d^p}{dx^p} [\exp(-x^2)]$$

a) Montrer que U_p est un polynôme de degré p . Calculer son coefficient dominant.

b) Calculer $U'_p(x)$ et $U''_p(x)$ en fonction de $\frac{d^i}{dx^i} [\exp(-x^2)]$, $i \in \{p, p+1, p+2\}$.

c) En déduire que

$$H_p = \frac{(-1)^p}{2^p} U_p$$

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

1) Etude d'une famille de fonctions

On considère les fonctions f_α , où α est un réel fixé, définies par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \frac{\alpha x}{1+x} - \ln(1+x)$$

- a) Etudier les variations des fonctions f_α sur $] -1, +\infty[$. On précisera les limites de f_α aux bornes de l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- b) Déterminer les fonctions f_α admettant un extremum local, et étudier le signe de f_α en ce point.
- c) Déterminer le nombre de solutions $x > -1$ de l'équation $f_\alpha(x) = 0$.

2) Etude d'une fonction particulière

On pose désormais $f = f_2$, soit : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur $] -1, +\infty[$, vérifiant : $-1 < a < b$.
Donner une valeur approchée de b à 10^{-2} près.
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement une solution $c > -1$.
- c) Montrer que : $\forall x > -1, f(x) \leq x$.

3) Etude d'une suite récurrente

On considère la suite récurrente $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{1+u_n} - \ln(1+u_n) \end{cases}$$

- a) On pose $I = [0, 1]$. Montrer que I est stable par f .
- b) Soit $u_0 \in I$ fixé. Montrer que la suite u est bien définie, et que $\forall n \geq 0, u_n \in I$.
- c) Montrer que la suite u est monotone.
- d) Démontrer que la suite u converge vers une limite ℓ .

e) Déterminer la valeur de ℓ .

4) Etude d'une série numérique

Soit la série numérique $\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$.

- a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
- b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \leq f\left(\frac{1}{k}\right)$
- c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$?

5) Etude d'une nouvelle fonction

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \neq 0, \varphi(t) = \frac{1}{t} \ln(1+t^2) \end{cases}$

- a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Pour $t \neq 0$, exprimer $\varphi'(t)$ à l'aide de la fonction f .
- c) Soit Φ définie par $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$.
 - i) Quel est le domaine de définition de Φ ?
 - ii) Montrer que Φ est paire.
- d) i) Soit $x \in [1, +\infty[$, calculer $\int_1^x \frac{2}{t} \ln t dt$.
 - ii) En déduire : $\forall x \geq 1, \Phi(x) - \Phi(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.
 - iii) Justifier rapidement l'inégalité : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$, et en déduire :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \leq 1$$

- e) Donner un équivalent simple de $\Phi(x)$ en $+\infty$.
- f) Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$?

Exercice 2

1) Recherche du Développement en Série de Fourier d'une fonction à l'aide de séries entières

Dans tout l'exercice on désigne par f l'application définie par

$$f(x) = \frac{1}{8 \cos x - 17}$$

- a) Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- b) On pose $X = e^{ix}$. Montrer qu'il existe une fonction rationnelle F telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(X)$$

On rappelle qu'une fonction rationnelle est un rapport de deux fonctions polynômes.

- c) On considère F la fonction rationnelle déterminée à la question précédente. On note $D(F)$ le domaine de définition de F , avec $D(F) \subset \mathbb{C}$. Déterminer $(a, b, r_1, r_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\forall z \in D(F), F(z) = \frac{a}{r_1 - z} + \frac{b}{r_2 - z}$$

- d) Montrer qu'il existe deux séries entières S_1 et S_2 de rayon de convergence $R > \pi$, telles que :

$$\text{si } \frac{1}{R} < |z| < R, \quad F(z) = S_1(z) + S_2(z^{-1})$$

- e) A partir de la décomposition précédente, déterminer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nx)$$

- f) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser la valeur de la somme.
On ne demande pas de calculer explicitement la série de Fourier de f .

- g) D'après la question 1.e), quelle hypothèse peut-on émettre sur l'expression des coefficients de la série de Fourier de f ?

On ne demande pas de vérifier cette hypothèse, c'est l'objectif de la suite du problème.

2) Propriétés des coefficients de Fourier

Pour tout entier naturel n on note : $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$

- a) Calculer a_0 . On utilisera le changement de variable : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan \frac{x}{2}$.
Exprimer a_1 à l'aide de a_0 et d'une intégrale très simple à calculer, puis déterminer la valeur de a_1 .
- b) Simplifier l'expression $4 \cos(nx) + 4 \cos[(n+2)x]$ en faisant apparaître $\cos[(n+1)x]$.
En déduire une expression de

$$4 \cos(nx) + 4 \cos[(n+2)x] - 17 \cos[(n+1)x]$$

en fonction de $\cos[(n+1)x]$ et $\cos x$.

En déduire une relation de récurrence liant a_{n+2} , a_{n+1} et a_n .

- c) En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$.
- d) Montrer que $M = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et en déduire une expression de X_n en fonction de n .
- e) L'hypothèse de la question 1.g) est-elle vérifiée ?

3) Calcul de sommes numériques

- a) A l'aide de la série de Fourier de f calculer les sommes numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n$$

- b) Vérifier les résultats précédents à l'aide de séries entières ou numériques de référence.

Problème

On rappelle que si on a $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme avec $a_d \neq 0$, alors d est le degré de P et a_d est le coefficient dominant de P .

Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé dans tout le problème. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe $\phi(P)$ donné par

$$\phi(P) = P'' - 2XP'$$

Partie I. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Ecrire sa matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) *On diagonalise ici l'endomorphisme ϕ .*
 - a) Montrer que ϕ est diagonalisable. Donner les valeurs propres de ϕ .
 - b) En déduire que pour tout entier $p \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ unitaire, tel que

$$\phi(H_p) = -2pH_p \quad (*)$$

- 4) On se place (*uniquement dans cette question*) dans le cas particulier $n = 3$.
Ecrire la matrice M dans ce cas particulier, et donner alors H_0, H_1, H_2 et H_3 .
- 5) Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Notons $d = \deg(H_p)$.

En écrivant $H_p = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k + X^d$, et en utilisant $(*)$, montrer que

$$\deg(H_p) = p, \quad a_{p-1} = 0, \quad a_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{4}$$

Partie II. Une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$$

- 1) Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la dérivée de $x \mapsto P'(x)e^{-x^2}$.
Montrer que

$$\langle \phi(P), Q \rangle = - \langle P', Q' \rangle$$

- b) En déduire que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

- c) Quelle est la nature de l'endomorphisme ϕ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \langle ., . \rangle)$?
- 3) Une base orthogonale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \langle ., . \rangle)$.
a) Soient p et q deux entiers dans $\{0, \dots, n\}$. Dédurre de **II.2b** que :

$$(p \neq q) \Rightarrow \langle H_p, H_q \rangle = 0$$

- b) En déduire que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 4) Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que $H_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$.

Partie III. Quelques propriétés des polynômes H_p .

- 1) On établit ici une relation de récurrence sur les polynômes H_p .
Soit $p \in \{0, \dots, n\}$.

- a) Soient P, Q, R trois polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que

$$\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle$$

- b) On suppose $p \geq 2$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, on a

$$\langle XH_p, Q \rangle = 0, \quad \text{puis} \quad \langle H_{p+1} - XH_p, Q \rangle = 0$$

- c) Justifier l'existence d'un $p+1$ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que

$$H_{p+1} - XH_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k$$

d) En utilisant **I.5** et **III.1b**, montrer que :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, 2H_{p+1} - 2XH_p + pH_{p-1} = 0$$

2) Montrer alors que si p est pair, alors H_p est pair, et que si p est impair, alors H_p est impair.

3) On calcule ici la dérivée de H_p .

a) Soit $p \in \{2, \dots, n\}$. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$, $\langle H'_p, Q \rangle = 0$.

b) En déduire, en décomposant H'_p suivant la base $(H_0, \dots, H_n)$, que

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, H'_p = pH_{p-1}$$

4) On pose $U_0 = 1$, et pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$:

$$U_p(x) = \exp(x^2) \frac{d^p}{dx^p} [\exp(-x^2)]$$

a) Montrer que U_p est un polynôme de degré p . Calculer son coefficient dominant.

b) Calculer $U'_p(x)$ et $U''_p(x)$ en fonction de $\frac{d^i}{dx^i} [\exp(-x^2)]$, $i \in \{p, p+1, p+2\}$.

c) En déduire que

$$H_p = \frac{(-1)^p}{2^p} U_p$$

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE

On considère la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.

- a. On pose $F = [0, 1] \times [0, 1]$, justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure. On pose alors $M = \sup_{(x, y) \in F} f(x, y)$.
- b. Montrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ alors nécessairement $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
- c. Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F et le comparer à $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (on pourra utiliser la calculatrice).
Déterminer M .

PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Soit $x \in]0, +\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

b. Déterminer, pour $x \in]0, +\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n .

2. Fonction zêta de Riemann

On rappelle que la fonction zêta est définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connaît $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q \pi^p$

où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous.

On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.

a. On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$.

Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.

b. On fixe l'entier $p \geq 2$ et un réel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon.$$

c. Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :

si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément

vers une fonction f sur $[a, b]$, alors, la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge vers le réel

$$\int_a^b f(x) dx.$$

On commencera par donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ juste en énonçant un théorème.

4. Exemples et contre-exemples

- a. Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0, 1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x) dx$.

Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées.

- b. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x) dx$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0, 1]$.

5. Cas d'un intervalle quelconque

- a. Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $I = [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle I non borné.

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

- b. Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I .

On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I .

- i. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x \in I$, $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I .

- ii. Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x) dx\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x) dx$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I .

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in I$:

$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x) dx\right)$ converge

vers le réel $\int_I f(x) dx$.

a. Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I .

b. Exemples

i. Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratiqué sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f .

ii. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} dx$.

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :

si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément

sur $[a, b]$, alors, la série de réels $\sum \int_a^b f_n(x) dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier

On appellera série trigonométrique une série de fonctions du type

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \text{ où } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites de réels.}$$

La série de Fourier d'une fonction 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est donc une série trigonométrique.

a. Montrer qu'une série trigonométrique n'est pas toujours la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, utiliser la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ avec le théorème de Parseval que

l'on commencera par énoncer.

b. Montrer qu'une série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ est la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

On utilisera sans démonstration les résultats classiques pour n et p entiers naturels :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \int_0^{2\pi} \sin(px) \cos(nx) dx = 0.$$

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :

si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\sum \int_I |f_n(x)| dx$ converge, alors f est intégrable sur I , la série $\sum \int_I f_n(x) dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Application : théorème de Hardy

On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$ comme la somme d'une série numérique.

10. Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

- Montrer que, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).
- Montrer que, pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.
- Montrer que, néanmoins, $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 (-1)^n x^n dx$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) dx.$$

11. Théorème de convergence monotone

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I .
On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I .

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que :

la série $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x) dx$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$.

12. Application à la physique

a. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$.

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.

La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8 \pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{h c}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.

Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$.

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \frac{c}{4} u$.

b. Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \frac{2 \pi^5 (k_B)^4}{15 h^3 c^2}$.

13. Généralisation

a. Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$.

b. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ et une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt$.

Fin de l'énoncé.



EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Groupes d'isométries sur $\mathbb{R}^n$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des endomorphismes de E
- $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E
- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée
- $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$

- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme p** sur E :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Une norme N sur E est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

Objectifs

Si N est une norme sur E , on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **N -isométrie** si pour tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$.

On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N -isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p .

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

- a. Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E , on a

$$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2[(N(x))^2 + (N(y))^2].$$

En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

- b. Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les

matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose $\langle x, y \rangle_s = {}^tXSY$, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ définit un produit scalaire sur E .

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x, y) = {}^t XSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^t X S X}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x .

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E .

4. Montrer que $(\text{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

5. Une caractérisation géométrique des N -isométries

On note $\Sigma(N) = \{x \in E, N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N -isométrie si et seulement si $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

Le groupe des N -isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N -sphère unité.

6. Dans cette question uniquement $n = 2$ et donc $E = \mathbb{R}^2$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \text{Vect}\{e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$ -isométries ?

7. Dans cette question uniquement $n = 3$ et donc $E = \mathbb{R}^3$.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q .

- a. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$, telle que

$$q(x, y, z) = {}^t X S X.$$

- b. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $S = P D {}^t P$.

- c. Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

- d. Déterminer la nature géométrique de la quadrique $\Sigma(N_q)$, la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

- e. Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.

- f. Dédurre de la question 5, par une considération géométrique, que $\text{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Si N est une norme, on note $\text{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}}, u \in \text{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\text{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\text{Isom}(N)$, c'est « sa version matricielle ».

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que u est une N_S -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E , on a $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$.

b. En déduire que u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tASA = S$.

9. Reconnaître alors $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

10. Une application des polynômes interpolateurs

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On se donne $r+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers $\mathbb{R}^{r+1}$ définie par

$$P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r)).$$

a. Déterminer le noyau de u . En déduire que pour tous réels $y_0, y_1, \dots, y_r$, il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b. Application : soit n un entier naturel non nul et $u_1, \dots, u_n$ des réels strictement positifs, on pose $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L , à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S .

b. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S . Montrer qu'il existe un polynôme Q , à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

c. Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d. Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).

Désormais, on note $\sqrt{S}$ l'unique racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S .

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^t X S X}$ où X est le vecteur colonne associée à x .

a. Montrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\text{ISOM}(N_S)$.

b. Montrer que l'application ψ de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\text{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.

Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini?

IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$

Dans cette partie p est un réel **strictement** supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour alléger l'écriture, une **p -isométrie** désigne une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\text{Isom}(p)$ le groupe des p -isométries.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'**adjoint** de u pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

13. Endomorphismes de permutation signée

$\mathcal{P}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma, \varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

a. Montrer que $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie.

b. Écrire la matrice de $u_{\sigma, \varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$.

14. Inégalité de Hölder

a. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b. En déduire que pour tous vecteurs x et y de E , on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c. Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p -isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice $A = [u]_{\mathcal{B}}$.

15. Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p$.

16. Une formule clé de dualité

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \{z \in E, \|z\|_q = 1\}$.

a. Justifier l'existence du réel $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

b. Justifier que $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Montrer que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

17. En déduire que si u est une p -isométrie, u^* est une q -isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$.

18. On suppose de plus que $p \neq 2$.

a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des réels dans $[0, 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b. En déduire que pour tout i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p -isométrie).

19. Conclusion

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p .

Commentaire : Les p -isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur $\mathbb{R}^n$, la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- e : le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x .

Pour tout entier naturel n , on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Si j et n sont deux entiers naturels fixes tels que $0 \leq j \leq n$, on note :

- $\llbracket j, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $j \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{j}$ le nombre de parties ayant j éléments d'un ensemble de n éléments.

On rappelle que pour tout entier naturel j élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ on a : $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

Si f est une fonction k fois dérivable sur un intervalle I (avec $k \geq 1$) on note f' (resp. $f^{(k)}$) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée k -ième).

Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle : $u(n)=u_n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x|<\frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x .

Objectifs :

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

Dans la partie I on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie II on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n . La partie III est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum_{n \geq 0} \delta_n$ et $\sum_{n=1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

PARTIE I

Les suites α et β

On définit la suite α par $\alpha_0=1$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}.$$

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$; en particulier

$$\text{pour } x=-1 : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on note : } \beta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{et} \quad \rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

I.1/ Étude de la suite α .

I.1.1/ Expliciter α_k pour k dans $\llbracket 0,4 \rrbracket$.

I.1.2/ Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2/ Étude de la suite β .

I.2.1/ Expliciter β_k pour k dans $\llbracket 0,4 \rrbracket$.

I.2.2/ Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.3/ Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.2.4/ Comparer les deux suites α et β .

I.3/ Étude de ρ_n .

I.3.1/ Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n .

I.3.2/ Etablir, pour tout entier naturel n , l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

L'inégalité est-elle stricte ?

I.3.3/ Dédire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

I.4/ Étude d'une fonction.

On désigne par f la fonction définie et de classe C^1 (au moins) sur l'intervalle $] -1 ; 1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :

$$f(0)=1 \text{ et pour tout } x \text{ de }] -1 ; 1[: (1-x)f'(x) - xf(x) = 0.$$

I.4.1/ Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f . Expliciter $f(x)$ pour tout x de $] -1 ; 1[$.

I.4.2/ Justifier l'affirmation : « f est de classe C^∞ sur $] -1 ; 1[$ ».

I.4.3/ Expliciter $(1-x)f(x)$, puis exprimer pour tout entier naturel n :

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) \text{ en fonction de } n \text{ et de } x.$$

I.4.4/ En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n , entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

PARTIE II

La suite γ

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.

Pour $n \geq 1$ on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$,
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n=0$ on adopte la convention : $\gamma_0=1$.

II.1/ Calculer γ_1 et γ_2 .

II.2/ Classer les éléments de $\mathcal{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3 .

II.3/ On suppose dans cette question que $n=4$.

II.3.1/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant deux points fixes ?

II.3.2/ Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant un point fixe ?

II.3.3/ Calculer γ_4 .

II.4/ Relation entre les γ_k .

II.4.1/ Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.

II.4.2/ Si $0 \leq k \leq n$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

II.4.3/ Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k = n!$.

II.5/ On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ et l'on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

II.5.1/ Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

II.5.2/ Pour tout x de $] -1 ; 1[$, on pose $h(x) = g(x)e^x$.

Justifier l'existence du développement en série entière de la fonction h sur $] -1 ; 1[$ et expliciter ce développement.

II.5.3/ Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $] -1 ; 1[$. En déduire la valeur du rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$.

II.5.4/ Comparer les deux suites β et γ .

II.5.5/ La fonction g est-elle définie en 1 ?

II.5.6/ La fonction g est-elle définie en -1 ?

II.5.7/ Calculer γ_8 .

PARTIE III

Sur $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$

Pour tout entier naturel n on note :

- $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$.
- $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.
- $v_n = (-1)^{n+1} J_n$.

III.1/ La série $\sum_{n \geq 0} v_n$.

III.1.1/ Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

III.1.2/ Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$.

III.2/ Estimation intégrale de δ_n .

III.2.1/ Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \quad (1).$$

III.2.2/ Dédurre de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n .

III.3/ Sur la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

III.4/ Sur la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.2/ On pose $A = -\int_0^1 e^x \ln(1-x) dx$.

III.4.2.1/ Justifier la convergence de l'intégrale impropre A .

III.4.2.2/ Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$ en fonction de l'intégrale A .

III.4.3/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ et expliciter la somme

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$.

III.4.4/ Expliciter un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{600}$.

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A et tB la transposée d'une matrice B quelconque.

Étant donné une matrice A , la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .

Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on identifie la matrice A avec le réel a .

Pour tout entier naturel n , on note $n!$ la factorielle de n , avec la convention $0! = 1$.

Soient p et n deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$:

- on note $\llbracket p, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq n$.
- on rappelle la notation
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

Objectifs :

Dans ce problème, on définit la matrice de Gram d'une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

La première partie porte sur des calculs de déterminants, la valeur d'un des déterminants calculés servant à illustrer la quatrième partie.

Dans la deuxième partie, on définit les matrices de Gram et on en étudie quelques propriétés.

Les troisième et quatrième parties sont des applications de la deuxième partie.

PARTIE I

Les résultats de cette partie ne serviront que dans la partie IV.

I.1. Déterminant d_p .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i,j) \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket$.

On note $d_p = \det(A_p)$.

I.1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

I.1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n , d_{n-1} et d_{n-2} .

I.1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i .

I.1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2 , on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée : $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i .

I.1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1} , puis en déduire d_p .

I.2. Déterminants D_n et Δ_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n .**

On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,n \rrbracket$.

I.2.1. Calculer les déterminants $D_0, D_1, D_2, \Delta_0, \Delta_1$ et Δ_2 .

I.2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n .

I.2.3. En déduire Δ_n puis D_n .

PARTIE II

A) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1. Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

II.A.1.1. Pour $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket$, déterminer le produit ${}^t X_i C X_j$.

II.A.1.2. En déduire que $C=0$ si et seulement si pour tout couple (X,Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t X C Y = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (e_i | e_j)$ le produit scalaire de e_i et e_j .

Pour tout vecteur u de E , on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.

II.A.2. Pour tout couple (x,y) de vecteurs de E , justifier l'égalité $(x|y) = {}^t X A Y$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E et soit $A' = (a'_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a'_{i,j} = (e'_i | e'_j)$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3. Pour tout vecteur u de E , on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3.1. Soit x un vecteur de E . Donner une relation entre les matrices X, X' et P .

II.A.3.2. Justifier l'égalité $A' = {}^t P A P$.

II.A.3.3. Que devient l'égalité précédente lorsque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale ?

II.A.3.4. Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

II.A.3.5. Dédurre des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = \left((\varepsilon_i | \varepsilon_j) \right)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(\varepsilon_i | \varepsilon_j)$, vérifie $\det(B) > 0$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1, \dots, u_n$. Soit $M = \left((u_i | u_j) \right)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(u_i | u_j)$. À toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$.

II.B.1. Dans cette question on suppose $n = 2$.

II.B.1.1. Montrer que $\det(M) \geq 0$.

II.B.1.2. À quelle condition sur $\det(M)$ la famille (u_1, u_2) est-elle libre ?

On revient au cas général où n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

II.B.2. Exprimer les coefficients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i | v)$.

II.B.3. En déduire l'égalité ${}^t XMX = \|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur v .

II.B.4. Soit λ une valeur propre (complexe) de la matrice M . Justifier que λ appartient à $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda \geq 0$.

II.B.5. Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

II.B.6. On suppose que la matrice M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Définition : Etant donné n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on appelle matrice de Gram des vecteurs $v_1, \dots, v_n$, la matrice $G(v_1, \dots, v_n) = \left((v_i | v_j) \right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(v_i | v_j)$.

Il résulte de la partie II que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det(G(v_1, \dots, v_n)) \neq 0$; dans ce cas, on a $\det(G(v_1, \dots, v_n)) > 0$.

PARTIE III

Dans cette partie, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ supposé orienté, u_1, u_2, u_3 sont trois vecteurs unitaires de E . On note α, β, γ les réels de $[0, \pi]$ tels que $(u_1 | u_2) = \cos \alpha$, $(u_2 | u_3) = \cos \beta$, $(u_3 | u_1) = \cos \gamma$ et on suppose que $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$.

III.1. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 - 2X \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1$.

III.2. En déduire une factorisation de $\det(G(u_1, u_2, u_3))$ en produit de deux facteurs.

III.3. Montrer que $\cos \alpha$ est compris entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

III.4. Montrer que $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma$.

III.5. On suppose que $\alpha = \beta = \gamma$ et on note $c = \cos \alpha$.

III.5.1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En déduire ses valeurs propres.

III.5.2. Déterminer la plus petite valeur possible de c .

III.5.3. On prend $c = -\frac{1}{2}$.

III.5.3.1. Quelle est la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$?

III.5.3.2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En utilisant **II.B.5**, retrouver la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$.

PARTIE IV

Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.

On considère n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$.

IV.1. Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV.1.1. Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de λ et de $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$.

IV.1.2. Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

IV.2. Soit $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

IV.2.1. Soit w un vecteur de $\mathcal{H}$ orthogonal à F . Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

IV.2.2. Soit $v \in \mathcal{H}$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F . Montrer l'égalité $\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$.

IV.3. Calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

IV.3.1. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la convergence des intégrales $J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ et calculer leur valeur.

On rappelle (et on admettra) que $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

On considère la base de $\mathbb{R}[X]$ formée des vecteurs e_k où $e_k = X^k$, $k \in \mathbb{N}$.

IV.3.2. Calculer les produits scalaires $(e_i | e_j)$.

IV.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dédurre des questions précédentes et de la partie I, la distance du vecteur e_n au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leq n-1$ de l'espace $\mathbb{R}[X]$.

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations et objectifs

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note :

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et 1 colonne.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes.
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- tM la matrice transposée d'une matrice M .
- I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$$

- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$$

Le but du problème est d'introduire et d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

La première partie propose de montrer qu'une matrice donnée peut admettre une infinité de racines carrées ou n'en avoir aucune. La seconde partie montre l'existence et l'unicité d'une racine carrée symétrique positive de A lorsque A est symétrique positive et introduit la notion de valeur absolue d'une matrice symétrique réelle. Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude d'un algorithme de calcul de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.

PARTIE I

Pour a réel, soit M_a la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}$$

et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a .

I.1 Déterminer suivant les valeurs de a , le rang de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$. Quelle valeur propre de M_a a-t-on ainsi mise en évidence ? Préciser la dimension du sous-espace propre associé.

I.2 Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M_a , puis déterminer les valeurs propres de M_a .

I.3 a) Montrer que pour tout a réel, M_a est trigonalisable.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.

I.4 Dans cette question, on suppose $a = 1$.

a) Déterminer P inversible et D diagonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}M_1P = D$, puis déterminer une racine carrée de M_1 .

b) Montrer que la matrice $m = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En déduire que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.5 Dans cette question, on suppose $a = 0$ et on pose $N = M_0 - I_3$. Calculer N^2 et en déduire l'existence de α et β réels tels que $\alpha I_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.6 Dans cette question, on suppose $a = -\frac{1}{3}$ et on note $u = f_{-\frac{1}{3}}$.

a) Déterminer tous les éléments $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $M_{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les matrices commutant avec U . En déduire que U ne possède pas de racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

d) La matrice $M_{-\frac{1}{3}}$ possède-t-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

PARTIE II

II.1 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ n réels distincts deux à deux et φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi : Q \mapsto (Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n))$$

- a) Montrer que φ est une application linéaire injective.
- b) En déduire que quels que soient les réels $b_1, b_2, \dots, b_n$, il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant :

$$Q(a_1) = b_1, Q(a_2) = b_2, \dots, Q(a_n) = b_n$$

II.2 Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

- a) Démontrer, sans se contenter d'énoncer le résultat du cours, que tout sous-espace propre de f est stable par g .

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de f respectivement associés. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on note g_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par g . Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de g . En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de f et g dans cette base soient toutes deux diagonales.

II.3 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables et vérifiant $AB = BA$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

II.4 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que S est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
- b) Montrer de même que S est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

II.5 Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, les valeurs propres deux à deux distinctes de S .

- a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p - 1$ vérifiant :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}, Q(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$$

- b) Montrer que $Q(S)$ est symétrique positive.
- c) Montrer que $(Q(S))^2 = S$.
- d) On souhaite montrer l'unicité d'une matrice symétrique positive qui soit une racine carrée de S . Soit donc $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$.

Montrer que T commute avec S puis avec $Q(S)$ et conclure.

L'unique matrice symétrique positive racine carrée de S est alors notée $\sqrt{S}$.

- e) Dans cette question, on suppose que S admet seulement deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 . Montrer que :

$$\sqrt{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \left[S + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} I_n \right]$$

II.6 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que $S^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note alors $|S| = \sqrt{S^2}$ et cette matrice est appelée valeur absolue de la matrice S .

b) Montrer que les matrices $|S| + S$ et $|S| - S$ sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c) Soit $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $|S_1|$ et $|S_2|$.

PARTIE III

Soit a un réel strictement positif. On considère les deux suites réelles $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $a_0 = a$, $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{1}{b_k} \right), b_{k+1} = \frac{1}{2} \left(b_k + \frac{1}{a_k} \right)$$

III.1 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$.

III.2 On définit les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a_k b_k$ et $v_k = \frac{a_k}{b_k}$.

- a) Etudier la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- b) Etablir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- c) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $u_k \geq 1$.
- d) Etudier la convergence de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

III.3 Dédurre des questions précédentes que les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent et préciser leurs limites respectives.

III.4 a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible.

b) Montrer que l'inverse d'une matrice symétrique définie positive est symétrique et définie positive.

c) Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est symétrique définie positive.

III.5 Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n . On considère les deux suites de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $A_0 = A$, $B_0 = I_n$ et les relations de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_{k+1} = \frac{1}{2} (A_k + B_k^{-1}), B_{k+1} = \frac{1}{2} (B_k + A_k^{-1})$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont symétriques définies positives.

III.6 Soit D diagonale et P orthogonale telle que $A = PDP^{-1}$.

a) Montrer que D est symétrique définie positive.

b) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D_k = P^{-1} A_k P$ et $\Delta_k = P^{-1} B_k P$. Montrer que les matrices D_k et Δ_k sont des matrices diagonales inversibles vérifiant :

$$D_0 = D, \Delta_0 = I_n, D_{k+1} = \frac{1}{2} (D_k + \Delta_k^{-1}), \Delta_{k+1} = \frac{1}{2} (\Delta_k + D_k^{-1})$$

c) Montrer que les suites $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une même limite L que l'on précisera.

III.7 a) Montrer que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à M associe $PM P^{-1}$ est continue.

b) En déduire que les suites $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont aussi convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leur limite.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout l'énoncé de ce problème, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, et φ une fonction paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Toutes les fonctions considérées dans ce problème prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note (E) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x suivante :

$$(E) \quad y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

On note f_0 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions initiales $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$, et f_1 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions initiales $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$.

PARTIE I

I.1. Montrer que si y est une solution de (E) sur I , alors y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

I.2. Montrer que si y est une solution de (E) sur I , alors la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E) sur I .

I.3. Montrer que f_0 est une fonction paire et f_1 une fonction impaire.

Exprimer la solution générale de (E) sur I à l'aide de f_0 et f_1 .

Déterminer parmi les solutions de (E) sur I celles qui sont paires et celles qui sont impaires.

I.4. On suppose que f_0 ne s'annule pas sur I , et l'on pose $u = \frac{f_1}{f_0}$.

I.4.1. Montrer que u' ne s'annule pas sur I , et exprimer $\frac{u''}{u'}$ en fonction de $\frac{f_0'}{f_0}$.

I.4.2. En déduire qu'il existe une constante réelle B , que l'on calculera, telle que $u' = \frac{B}{f_0^2}$.

I.4.3. On note u_0 la primitive de $\frac{1}{f_0^2}$ qui s'annule en $x = 0$. Exprimer f_1 à l'aide de f_0 et u_0 .

I.5. Dans cette question, on suppose que $I = \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$ et que la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est solution de (E) sur I .

I.5.1. Déterminer $\varphi(x)$ et $f_0(x)$ pour tout $x \in I$.

I.5.2. Déterminer $u_0(x)$ pour tout $x \in I$. On pourra utiliser l'identité :

$$\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

et exprimer $u_0(x)$ comme fonction de $\tan x$.

I.5.3. En déduire la valeur de $f_1(x)$ pour tout $x \in I$ et expliciter la solution générale de (E) sur I .

PARTIE II

Dans cette partie on suppose que $I = \mathbb{R}$ et qu'en plus des conditions imposées au début de l'énoncé, φ est 2π -périodique.

On s'intéresse aux éventuelles solutions 2π -périodiques de l'équation (E) .

II.1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $x \mapsto y(x + 2\pi)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.2. En déduire qu'il existe des constantes réelles $w_{00}, w_{01}, w_{10}, w_{11}$, que l'on déterminera en fonction des valeurs prises par f_0, f'_0, f_1, f'_1 en 2π , telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$f_0(x + 2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x),$$

$$f_1(x + 2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x).$$

II.3. Soit W la matrice carrée d'ordre 2 définie par $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$.

Montrer que pour que (E) admette sur $\mathbb{R}$ des solutions non identiquement nulles 2π -périodiques, il faut et il suffit que W admette 1 pour valeur propre. On pourra exprimer une telle solution g en fonction de f_0 et f_1 puis utiliser la périodicité de g .

II.4. Montrer que si (E) admet sur $\mathbb{R}$ des solutions non identiquement nulles 2π -périodiques, alors l'une au moins des deux fonctions f_0 et f_1 est 2π -périodique. On pourra, g étant une telle solution, considérer les fonctions $x \mapsto g(x) + g(-x)$ et $x \mapsto g(x) - g(-x)$.

II.5. On suppose dans cette question que la fonction φ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = a - k^2 \sin^2 x,$$

où a et k sont des constantes réelles choisies de telle sorte que la solution f_0 sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$(E) \quad y''(x) + (a - k^2 \sin^2 x)y(x) = 0$$

soit 2π -périodique (on ne cherchera pas à démontrer l'existence de telles constantes a et k).

Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k \cos t \cos x} f_0(t) dt$.

On note K la fonction définie pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ par $K(x, t) = e^{k \cos t \cos x}$.

II.5.1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et paire.

II.5.2. Vérifier que pour tout couple $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) + (a - k^2 \sin^2 x)K(x, t) = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t) + (a - k^2 \sin^2 t)K(x, t).$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$F''(x) + (a - k^2 \sin^2 x)F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t)f_0(t)dt + \int_{-\pi}^{+\pi} (a - k^2 \sin^2 t)K(x, t)f_0(t)dt,$$

puis, au moyen d'une double intégration par parties, que F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

II.5.3. Dédurre de ce qui précède qu'il existe une constante réelle λ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{k \cos t \cos x} f_0(t)dt = \lambda f_0(x).$$

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose que $I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et que φ est une fonction constante sur I , égale à ω^2 , avec $\omega > 0$.

III.1. Déterminer dans ce cas la solution générale de l'équation (E) sur I , ainsi que ses solutions f_0 et f_1 .

III.2. Soit z une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +1[$. Montrer que la fonction y définie pour tout $x \in I$ par $y(x) = z(\sin x)$ est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $] -1, +1[$ de l'équation différentielle :

$$(E') \quad (1 - X^2)z''(X) - Xz'(X) + \omega^2 z(X) = 0.$$

III.3. Soit z une solution de (E') sur $] -1, +1[$, admettant sur $] -1, +1[$ un développement en série entière $z(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

III.3.1. Déterminer une relation de récurrence reliant a_{n+2} à a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ les expressions de a_{2p} en fonction de p , ω et a_0 , et de a_{2p+1} en fonction de p , ω et a_1 .

Pour quelles valeurs de ω l'équation (E') admet-elle des solutions polynomiales non identiquement nulles ?

Montrer que quelles que soient les valeurs de a_0 , a_1 et ω , le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est supérieur ou égal à 1.

III.3.2. On note z_0 la solution de (E') développable en série entière sur $] -1, +1[$ correspondant au choix $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, et z_1 la solution de (E') développable en série entière sur $] -1, +1[$ correspondant au choix $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Donner une expression, sur I , des fonctions $x \mapsto \cos \omega x$ et $x \mapsto \sin \omega x$ à l'aide des fonctions z_0 , z_1 et $\sin$.

III.3.3. Soit m un nombre entier strictement positif.

Exprimer $\cos 2mx$ et $\sin(2m+1)x$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, sous la forme :

$$\cos 2mx = P_m(\sin x), \quad \sin(2m+1)x = Q_m(\sin x),$$

où P_m est une fonction polynomiale de degré $2m$ et Q_m une fonction polynomiale de degré $2m+1$.
Ces expressions sont-elles valides sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

NB. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $C(I, K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans K où K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $C^k(I, K)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^k de I dans K où K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients réels.

Convention : On convient d'identifier les fonctions polynômes au polynômes qui leur correspond.

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1) On définit les fonctions φ et ψ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ et } \psi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

1.1) Étudier les variations des fonctions φ et ψ , préciser leurs limites en $+\infty$.

En déduire le signe de chacune des fonctions sur $[1, +\infty[$.

1.2) On considère un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, du plan.

Représenter graphiquement les fonctions φ et ψ dans ce repère.

2) On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

On note γ leur limite commune, le réel γ est appelé constante d'Euler, qu'on ne cherchera pas à calculer.

3) Soit n un entier naturel, on définit la fonction f de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - (1-x)^n}{x}$$

3.1) Montrer que la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$.

3.2) Montrer que la fonction f est une fonction polynôme élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donner l'expression de f dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$

3.3) Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donner l'expression de f dans cette base.

3.4) Calculer de deux façons différentes l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$.

Pour n entier naturel et p entier compris entre 0 et n , on note : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Déduire des deux expressions trouvées pour I que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1} \binom{n}{p}}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

Partie 2 : Transformée de Laplace

Soit E l'ensemble des fonctions f élément de $C([0, +\infty[, \mathbb{C})$, telles que :

- Pour tout réel a strictement positif, f est intégrable sur l'intervalle $]0, a]$.
- A chaque fonction f on peut associer $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad |f(x)| \leq \beta x^n.$$

4) Soit x et a deux réels strictement positifs, calculer $\int_x^a \ln(t) dt$.

Montrer que la fonction logarithme est élément de E .

5) Montrer que l'ensemble E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

6) Soit x un réel strictement positif.

Montrer que, si f est élément de E , alors la fonction φ_x définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ par $\varphi_x(t) = f(t)e^{-xt}$, est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On définit alors et on note $\mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace d'un élément f de E par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

7) Montrer que l'application $\mathcal{L}$ définie sur E est une application linéaire.

8) Si f est élément de $C^1([0, +\infty[, \mathbb{C})$ tel que f' soit élément de E , calculer $\mathcal{L}(f')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$ et de $f(0)$.

9) Soit k un entier naturel, montrer que f_k définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = t^k$, est élément de E .

Soit α un réel positif, on pose $I_k = \int_0^\alpha t^k e^{-xt} dt$.

Déterminer une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k .

En déduire la transformée de Laplace de f_k .

10) Soit ω un réel et f_ω l'application définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ par $f_\omega(t) = e^{i\omega t}$.

10.1) Montrer que f_ω est élément de E .

10.2) Calculer la transformée de Laplace de f_ω .

10.3) En déduire les transformées de Laplace des fonctions définies de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\cos_\omega(t) = \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \sin_\omega(t) = \sin(\omega t).$$

Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel

On définit la fonction de Bessel de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta.$$

11) Montrer que J est élément de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, exprimer J' et J'' à l'aide d'une intégrale.

12) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J'(t) = -\frac{t}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(t \cos \theta) d\theta.$$

13) Montrer que l'application J est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : tJ'' + J' + tJ = 0.$$

14) Montrer que l'application J est élément de E défini dans la partie 2.

15) Soit x un réel strictement positif, on pose : $I(x) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$.

15.1) Montrer que : $I(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$.

15.2) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{x^2 + \cos^2 \theta}$. En déduire $I(x)$.

Indication : on peut faire le changement de variable $u = \tan \theta$.

16) On admet avoir le droit de permuter l'ordre d'intégration soit :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta \right) e^{-xt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} \cos(t \cos \theta) e^{-xt} dt \right) d\theta.$$

Calculer la transformée de Laplace de l'application J .

Partie 4 : Transformée de Laplace de la fonction logarithme

17) Montrer que la fonction g définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

18) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) x & \text{si } x \in]0, n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

18.1) Montrer que :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+u) \leq u.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)|.$$

18.2) Pour x réel strictement positif fixé, déterminer la limite de la suite $(U_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} U_n(x) dx.$$

19) Soit n un entier naturel, on note $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt$.

19.1) Montrer l'existence de l'intégrale J_n .

19.2) Soit p un entier naturel et ε un élément de $]0, 1[$, calculer l'intégrale $\int_\varepsilon^1 u^p \ln(nu) du$, en

déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 u^p \ln(nu) du$ et calculer cette intégrale.

19.3) Soient n un entier naturel et p un entier compris entre 0 et n , montrer que :

$$\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}.$$

19.4) Utiliser le résultat de la question 3.4.) pour exprimer J_n en fonction de u_n défini dans la partie 1 question 2.

20) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$ en fonction de la constante d'Euler.

21) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$ et calculer sa transformée de Laplace.

.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

NB. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remettre à chaque candidat une feuille de papier millimétré

Problème 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à deux.

Si P appartient à E , on désigne par P' son polynôme dérivé.

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 $(P, Q) \rightarrow P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) = \langle P, Q \rangle$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

2) Soit $B_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

Vérifier que B_c est une base orthogonale de $(E, \langle \rangle)$.

Donner une base orthonormée B de $(E, \langle \rangle)$.

3) On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Soit $P = a + bX + cX^2 \in E$
 $Q = a' + b'X + c'X^2 \in E$ Vérifier que $\varphi(P, Q) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$

4) Soit u un endomorphisme de E et soit A sa matrice dans la base canonique de E .

Montrer l'équivalence des deux propriétés :

a) $\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$

b) ${}^t A S A = S$

5) On note $M_3(R)$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Montrer que $G = \{A \in M_3(R), {}^t A S A = S\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices carrées.

6) Soit v l'application qui à tout polynôme P de E associe $Q = v(P)$ tel que pour tout x réel, $Q(x) = P(1-x)$.

a) Démontrer que v est un endomorphisme de E .

b) Calculer la matrice de v dans la base canonique de E .

c) Est-ce que v vérifie la propriété définie dans la question 4) ?

d) Montrer que v est bijectif et préciser v^{-1} .

7) Soit $\begin{matrix} \psi: E \rightarrow E \\ P \rightarrow \psi(P) = P + P' + P'' \end{matrix}$ et $\begin{matrix} \psi_1: E \rightarrow E \\ P \rightarrow \psi_1(P) = P - P' \end{matrix}$

a) Montrer que ψ_1 et ψ sont deux endomorphismes de E .

b) Calculer leurs matrices dans la base canonique de E .

c) Déterminer $\psi \circ \psi_1$; conclusion ?

d) En déduire une solution particulière et la solution générale de l'équation différentielle $y - y' = x^2 + 5x + 9$

8) On considère l'endomorphisme r de E qui a pour matrice dans la base orthonormée B de E :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 & -1 - \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'espace E est orienté de telle façon que la base orthonormée B soit directe.

a) Montrer que A est une matrice orthogonale

b) Rechercher les vecteurs invariants par r .

c) En déduire que r est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle en ayant choisi une orientation de l'axe.

Problème 2

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $R = (O ; i, j)$.

1) Étude complète de l'arc paramétré $(C) : x = t^2 ; y = t^3$

2) Soit (Γ) la courbe d'équation cartésienne dans le repère R :

$$y^2 = \frac{4}{27} \left(x - \frac{4}{27} \right)$$

a) Quelle est la nature de (Γ) ?

b) Vérifier que $t^6 - \frac{4}{27}t^2 + \frac{16}{27^2} = \left(t^2 - \frac{2}{9} \right)^2 \left(t^2 + \frac{4}{9} \right)$

c) En déduire que $(C) \cap (\Gamma) = \{A, B\}$, A et B étant deux points symétriques par rapport à l'axe $x'Ox$ dont on donnera les coordonnées ; A sera celui d'ordonnée positive.

d) Montrer que les deux courbes (C) et (Γ) ont même tangente en A, tangente dont on donnera le point d'intersection F avec $x'Ox$. Soit (T) cette tangente.

e) Soit (N) la normale commune à (C) et (Γ) en A ; montrer que $(N) \cap (C) = \{A, D\}$ où D est un point dont on donnera les coordonnées et que (N) est tangente à (C) en D.

f) Calculer les coordonnées du deuxième point d'intersection E de (N) et de (Γ) .

3) Sur la feuille de papier millimétré, dessiner avec soin les courbes (C) et (Γ) :

On prendra pour unité de base : $\frac{2}{27}$ en abscisses et en ordonnées, et on mettra l'origine sur le bord gauche de la feuille.

On tracera (T) et (N) et on placera les points A, B, D, E, F.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I : Etude de polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

- 1) a) Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$.

Calculer successivement pour $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$, où $p \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme

$$S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$$

- b) Soit P un polynôme à coefficients complexes, de la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, on exprimera le résultat en fonction des coefficients a_k de P .

Indication : on pourra éventuellement distinguer les différents cas : $n = 3N$, $n = 3N + 1$ et $n = 3N + 2$, où $N \in \mathbb{N}$.

- 2) a) Soit $k \in \mathbb{C}$. Développer et simplifier le polynôme :

$$R_k(X) = (X - k)(jX - k)(j^2X - k)$$

- b) Soit le polynôme $Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$.
Montrer que T est un polynôme en X^3 .
- c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $H(Y) = T(X)$. Déterminer les racines du polynôme $H(Y)$.
- d) Déterminer de deux façons différentes les racines du polynôme T .

Partie II : Etude d'une famille de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre 3.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité, et on considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Vérifier que $K^3 = I$.
b) Calculer $A = (jK - I)(j^2K - I)$ et $B = (K - I)(K - jI)(K - j^2I)$.

- 2) a) Pour une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on définit

$$P(M) = \frac{1}{3} \left(I + M + M^2 \right)$$

Calculer $P_1 = P(K)$, $P_2 = P(j^2K)$, $P_3 = P(jK)$.

- b) Calculer les produits matriciels P_1P_2 , P_1P_3 et P_2P_3 .
 c) Vérifier que $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ et $P_3^2 = P_3$.

3) Soit $F = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
 b) Déterminer une base et la dimension de F .

4) Soit $F' = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

- a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F' .
 b) Montrer que F' est stable pour le produit matriciel, c'est à dire que

$$\forall (M, N) \in F'^2, MN \in F'$$

- c) Montrer que $F = F'$.
 d) Soit une matrice $M(a, b, c)$ de F , déterminer ses coordonnées (α, β, γ) dans la base (P_1, P_2, P_3) .

- 5) Soit $M(a, b, c) = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, avec (α, β, γ) vérifiant les relations déterminées à la question **II.4.d**). Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [M(a, b, c)]^n = u_n P_1 + v_n P_2 + w_n P_3$$

avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites complexes dont on déterminera les expressions pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de α , β et γ .

6) Soit $D(a, b, c) = M(a, b, c)M(a, bj, cj^2)M(a, bj^2, cj)$.

- a) On note (α, β, γ) les coordonnées de $M(a, b, c)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) .
 Déterminer en fonction de (α, β, γ) , les coordonnées respectives de $M(a, bj, cj^2)$ et $M(a, bj^2, cj)$.
 b) En déduire la décomposition de $D(a, b, c)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) , sans recourir à un produit matriciel explicite.

7) Soit $U = M(a, b, c)$, telle que :
$$\begin{cases} a + b + c = j \\ a + bj + cj^2 = j^2 \\ a + bj^2 + cj = 1 \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{G}(U) = \{U^k; k \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini que l'on déterminera.

Partie III : Etude d'une sous-famille de F .

On pose dans cette partie

$$G = \left\{ N(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- 1) a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de l'espace F défini dans la Partie **II**.
 b) On pose $S = N(0, 1)$. Montrer que la famille (I, S) est une base de G .

- 2) a) Pourquoi peut-on affirmer, *sans calcul*, que S est diagonalisable ?
 b) Déterminer les valeurs propres de S .
 c) Déterminer une matrice P inversible, et une matrice D diagonale telles que

$$P^{-1}SP = D$$

- 3) En déduire que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la matrice $N(a, b)$ est diagonalisable, et la diagonaliser.
- 4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $N(a, b)$ soit inversible.
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $[N(a, b)]^n$ à l'aide de P , P^{-1} , a , b , et n .

FIN DE L'EXERCICE

Problème

Les parties I et II de ce problème sont largement indépendantes.

Préliminaires : suites adjacentes.

Soit n_0 un entier naturel, et $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles. On dit que le couple (u, v) est un couple de suites adjacentes si

$$\begin{cases} u \text{ est une suite décroissante} \\ v \text{ est une suite croissante} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

On pose pour tout entier $n \geq n_0$, $w_n = u_n - v_n$.

- 1) a) Montrer que : $\forall n \geq n_0, w_n \leq u_{n_0} - v_n$.
 b) Montrer que $(w_n)_{n \geq n_0}$ est monotone et déterminer son sens de variation.
 c) Montrer que la suite v est majorée.
 d) Montrer que la suite v converge. On note ℓ sa limite.

- 2) En déduire que la suite u converge, et que sa limite est ℓ .

- 3) Montrer que : $\forall n \geq n_0, v_n \leq \ell \leq u_n$.

On vient entre autres, de prouver le théorème suivant : *Si (u, v) est un couple de suites adjacentes, alors ces deux suites convergent, et ont de plus même limite.*

Partie I : La constante γ . Une expression sous forme de série.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = S_n - \ln n, \quad v_n = S_{n-1} - \ln n$$

- 1)
 - a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1 - x) \leq 0$.
 - b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x - \ln(1 + x) \geq 0$.
- 2)
 - a) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
 - b) Montrer que la suite $v = (v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
 - c) Montrer que (u, v) est un couple de suites adjacentes.
 - d) On note γ leur limite commune (qui existe vu le préliminaire). Donner à l'aide de la question 3) des préliminaires, un encadrement de γ à 10^{-1} près.
- 3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

- a) Faire un développement limité de x_n , en $1/n$, à l'ordre 2.
- b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} x_n$?
- c) En déduire que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

Partie II : Une expression intégrale de la constante γ .

On pose pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$$

- 1)
 - a) On pose pour tout x réel, $f(x) = x - 1 + e^{-x}$. Donner un équivalent simple de f en 0.
 - b) En déduire que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (encore notée g).
 - c) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera K un réel tel que pour tout $x \geq 0$, $|g(x)| \leq K$.

- 2) On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx$$

Montrer que l'intégrale I est convergente.

3) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $X > 0$

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \quad \text{et} \quad I_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$$

a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente. En déduire que $I_n(X)$ a une limite lorsque X tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite à l'aide des données du problème.
On ne demande pas de calculer la valeur de la limite.

b) On note

$$J(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} dx \quad \text{et} \quad K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} dx$$

i) Montrer que $J(X)$ et $K_n(X)$ ont des limites lorsque X tend vers $+\infty$.

ii) Montrer que $K_n(X) = \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

iii) En déduire que $I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx$.

c) En utilisant **II.3.b.iii)** montrer que

$$I_n = \ln n - \int_1^n \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

4) Posons $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$.

a) On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi_t(x) = \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}$$

Montrer que φ_t peut être prolongée par continuité en 0. On continuera de noter φ_t la fonction continue sur $\mathbb{R}$ ainsi déterminée.

b) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

c) A l'aide d'une inégalité de Taylor, montrer qu'il existe une constante M (à déterminer) telle que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1], |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \frac{h^2 x^2}{2} M$$

d) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, montrer que :

$$\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|h|x}{2} e^{-xt} M dx$$

e) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

f) Calculer $F(1)$.

g) En utilisant **II.4.e)** et **II.4.f)**, montrer que $F(t) = \int_1^t \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$.

5) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ est convergente.

b) Montrer que $I_n = \ln n - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$.

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln n$.

6) Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})g(x)dx$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $|L_n - I| \leq \frac{K}{n}$.

*On rappelle que K a été définie en **II.1.c)**.*

b) Montrer que la suite $(L_n)_{n \geq 2}$ converge. Donner sa limite.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $L_n = v_n$.

d) En déduire que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx$$

FIN DU PROBLÈME

* * * * *

FIN DU SUJET

* * * * *

*Les calculatrices **sont autorisées**.*

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et ζ la fonction zeta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ .

Mise à part la partie **III**, qui utilise des résultats de la partie **I**, les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t) dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. *Dérivabilité de F*

(a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

(b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

5. *Lien avec ζ*

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ où

$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature selon la valeur de x , de la série

$\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. Étude de la convergence

(a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme en fonction de F de la série produit $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, lorsque $x > 1$.

(b) Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

7. Cas où $x = 1$

On suppose dans cette question 7. que $x = 1$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8. Développement asymptotique en 1

(a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

(b) En déduire deux réels a et b qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$ tels que l'on ait pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9. Développement asymptotique en 1 (bis)

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

(a) Justifier que pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Justifier que pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

- (c) Exprimer pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1 - x$.
- (d) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).
- (e) En déduire que l'on a pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. Application

Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de $\ln 2$ et γ de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geq 1$. Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.

$\mathbb{R}[X]$ désigne la $\mathbb{R}$ -algèbre des polynômes à coefficients réels.

On identifie un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

On **admet** qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n) .

On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.

On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n -ième nombre de Bernoulli.

11. Calculer B_1 et B_2 . En déduire b_1 et b_2 .

12. Calculer pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.

13. *Symétrie*

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

14. *Développement en série de Fourier*

Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k} \left(\frac{x}{2\pi} \right) \quad \text{pour } x \in [0, 2\pi[\quad \text{et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

Justifier avec soin qu'il existe une unique suite de réels $(a_n(k))_{n \geq 0}$ telle que pour tout réel x , on ait :

$$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

15. *Expression des coefficients*

(a) Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Montrer que l'on a :

$$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2} \left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) \right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).$$

(b) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.

(c) Conclure que pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$, on a :

$$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}.$$

On remarquera pour la suite (sans le redémontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. *Conclusion*

Déterminer pour $k \geq 1$ une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k} .

17. *Calcul effectif des b_n*

(a) Démontrer en utilisant une formule de Taylor que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

(b) En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés. Écrire, dans un des langages au programme, un petit algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_n pour un entier n donné.

Fin de l'énoncé

*Les calculatrices **sont autorisées**.*

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.

Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geq 2$.

On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X).$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

I. EXEMPLES

1. Soient α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.
 - (a) Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α , la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
 - (b) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?
3. *Cas $n = 2$*
Déterminer $\mathcal{E}_2$ puis montrer que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1} .
5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^3 a_{ii} \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

6. *Utilisation de la calculatrice*

- (a) Écrire un algorithme en français qui, à partir d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, teste si la matrice est ou n'est pas une matrice à diagonale propre. On considère que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
- (b) Écrire ensuite cet algorithme sur la calculatrice (il n'est pas demandé d'écrire sur la copie le programme en langage calculatrice). Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} & A_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
 A_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & A_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(c) Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les produits

$$a_{12}a_{21}, \quad a_{13}a_{31} \quad \text{et} \quad a_{23}a_{32}$$

pour qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à diagonale propre inversible soit telle que A^{-1} soit également une matrice à diagonale propre (on demande juste de donner cette conjecture sans chercher à la prouver).

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que

$$\det M = (\det A)(\det C)$$

(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

8. Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
- (a) La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
 - (b) $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

9. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a {}^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
10. Si on note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles, démontrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.
11. *Matrices trigonalisables*
- (a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
 - (b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
 - (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
12. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

13. *Question préliminaire*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\text{trace}({}^tAA)$.

14. *Matrices symétriques à diagonale propre*

- (a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Démontrer que
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

- (b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

15. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

- (a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.
(b) Justifier que la matrice tAA est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.
(c) Conclure que A est la matrice nulle.

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16. *Question préliminaire*

Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.

Démontrer que

$$\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$.

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

18. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 6 pages.

Notations :

On note :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\ln$: la fonction logarithme népérien.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^{n+1}}{n^x}$ converge (resp. la série $\sum_{n \geq 0} \ln 1 + e^{-nx}$ converge), on note $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^x}$ (resp $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln 1 + e^{-nx}$) la somme de cette série.

Objectifs :

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions θ et f .

Dans la partie I, on calcule trois valeurs exactes et une valeur approchée de $\theta(n)$ pour quatre entiers naturels n . La partie II est consacrée à une étude de la fonction f en liaison avec $\theta(2)$. Dans la partie III, on étudie de façon plus précise la continuité et le caractère C^1 de la fonction θ .

PARTIE I

Quelques valeurs de la fonction θ

I.1/ Calcul de $\theta 1$.

I.1.1/ Préciser, selon la valeur du nombre réel x , la limite de $\frac{1}{n^x}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

I.1.2/ Montrer que l'ensemble de définition de la fonction θ est $E = 0 ; +\infty$.

I.1.3/ Pour tout entier naturel n , on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

I.1.3.1/ Préciser une primitive de la fonction $t \mapsto \tan t$ et calculer J_1 .

I.1.3.2/ Montrer que la suite J_n est convergente et préciser sa limite.

I.1.3.3/ Calculer $J_n + J_{n+2}$ pour tout entier naturel n .

I.1.3.4/ En utilisant le résultat obtenu en I.1.3.3/, établir (par exemple par récurrence), pour tout entier naturel n non nul, la relation :
$$\sum_{k=1}^n \frac{-1^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1} .$$

I.1.3.5/ En déduire la valeur de $\theta 1$.

I.2/ Une valeur approchée de $\theta 3$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{-1^{k+1}}{k^3} .$$

I.2.1/ Décrire, en français, un algorithme de calcul de S_n pour n entier naturel non nul donné.

I.2.2/ En utilisant l'algorithme précédent et la calculatrice, donner la valeur décimale approchée par défaut σ de S_{30} à la précision 10^{-4} .

I.2.3/ Montrer que σ est aussi la valeur décimale approchée par défaut de $\theta 3$ à la précision 10^{-4} .

I.3/ Calcul de θ_2 et θ_4 .

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, 2π -périodique et vérifiant :

$$g(x) = x^2 \text{ pour tout } x \in -\pi ; \pi .$$

Pour tout entier naturel n , on pose $\alpha_n = \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx$.

I.3.1/ Calculer α_n pour tout entier naturel n .

I.3.2/ Expliciter les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de la fonction g .

On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx .$$

I.3.3/ Justifier la convergence, pour tout x réel, de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^2} \cos nx$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^2} \cos nx$ pour tout $x \in -\pi ; \pi$.

I.3.4/ En déduire la valeur de θ_2 .

I.3.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ et calculer la valeur de sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

I.3.6/ En utilisant le résultat obtenu en I.3.3/, établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^3} \sin nx \text{ et expliciter sa somme } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^3} \sin nx \text{ pour } x \in -\pi ; \pi .$$

I.3.7/ Justifier, pour tout x réel, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{-1^n}{n^4} \cos nx$ et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n^4} \cos nx$ pour $x \in -\pi ; \pi$ en fonction de x et θ_4 .

I.3.8/ En déduire la valeur de θ_4 .

PARTIE II

Etude d'une fonction

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x , on note $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction f en utilisant en particulier

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^2}.$$

II.1/ Montrer que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$.

On note désormais $\mathcal{C}$ l'image par f de l'intervalle $]0; +\infty[$.

II.2/ Montrer que la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$.

II.3/ Montrer que la fonction f est strictement monotone sur $]0; +\infty[$.

II.4/ Justifier l'affirmation : $\mathcal{C}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II.5/ Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (que l'on précisera) en $+\infty$.

II.6/ Pour tout nombre réel x strictement positif, on désigne par ψ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\psi_x(t) = \ln(1 + e^{-tx}).$$

II.6.1/ Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$.

II.6.2/ Etablir, pour tout nombre réel $x > 0$, la double inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt.$$

II.6.3/ Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy$ et exprimer sa valeur en fonction de θ_2 .

II.6.4/ Montrer qu'il existe une constante μ (que l'on précisera) telle que pour tout nombre réel x strictement positif, on ait la double inégalité :

$$\frac{\mu}{x} \leq f(x) \leq \lambda + \frac{\mu}{x}.$$

II.6.5/ En déduire la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 et préciser l'intervalle $\mathcal{C}$.

PARTIE III

Propriétés de la fonction θ

$$\text{Rappel : } \theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^{n+1}}{n^x}.$$

III.1/ Montrer que pour tout nombre réel x de $E =]0 ; +\infty[$, on a la double inégalité

$$1 - \frac{1}{2^x} \leq \theta(x) \leq 1.$$

III.2/ En déduire que la fonction θ est bornée sur E et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$; on précisera cette limite.

III.3/ Continuité de la fonction θ .

III.3.1/ En utilisant la notion de convergence normale, montrer que la fonction θ est continue sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

III.3.2/ Montrer que la fonction θ est continue sur E .

III.4/ Caractère C^1 de la fonction θ .

III.4.1/ Soit x un nombre réel fixé strictement positif, on désigne par φ_x la fonction définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $\varphi_x(t) = \frac{\ln t}{t^x}$.

Etudier les variations de la fonction φ_x sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$; on précisera l'étude dans les deux cas :

III.4.1.1/ lorsque $x \geq \frac{1}{\ln 2}$.

III.4.1.2/ lorsque $x \in \left]0 ; \frac{1}{\ln 2}\right[$.

III.4.2/ Démontrer de façon rigoureuse que la fonction θ est de classe C^1

III.4.2.1/ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\ln 2}; +\infty\right[$,

III.4.2.2/ sur l'intervalle $0; +\infty$.

III.4.3/ Déterminer le signe

III.4.3.1/ de $\theta' 2$,

III.4.3.2/ de $\theta' 1$.

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées.

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 7 pages.

Notations :

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det A$ le déterminant de la matrice A .

Étant donné un espace vectoriel E , on note id l'endomorphisme identité défini par :

Pour tout x de E , $id \ x = x$.

On note $\text{Im } l$ l'image d'un endomorphisme l de E et $\ker l$ son noyau.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note l^k l'endomorphisme de E défini par $l^0 = id$ si $k = 0$ et par $l^k = l \circ l^{k-1}$ sinon.

Étant donné une base $\mathcal{B}$ de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}} l$ la matrice de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{B}$.

Étant donné un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\dim F$ la dimension de F . On désigne par $\text{Vect } u, v$ (respectivement $\text{Vect } u, F$) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u et v (respectivement engendré par le vecteur u et les vecteurs de F).

Lorsque E sera un espace vectoriel normé, on notera $\|u\|$ la norme d'un vecteur u .

Lorsque E sera un espace euclidien, on notera $u|v$ le produit scalaire des vecteurs u et v ; on note $O(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E), $F^\perp$ désigne l'orthogonal du sous-espace vectoriel F et l^* désigne l'adjoint de l'endomorphisme l .

Objectifs :

Étant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel E , pour tout x de E et pour n de $\mathbb{N}^*$, on définit $L_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l^k x$. En prenant différentes hypothèses pour E et pour l , on étudie la limite

de la suite $L_n x$ $_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la première partie, on étudie cette limite dans trois exemples. Dans la deuxième partie, on obtient la limite de la suite $L_n x$ $_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans un cadre plus général ; cette limite est obtenue à l'aide d'une propriété d'algèbre linéaire que l'on fait établir dans trois contextes généraux différents.

Dans la troisième partie, cette propriété algébrique permet d'obtenir un résultat concernant une décomposition des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

PARTIE I : EXEMPLES

La partie **I** permet d'illustrer les résultats établis dans la partie **II**. Elle doit être traitée sans utiliser les résultats de la partie **II**. Les exemples **I.A**, **I.B**, **I.C** sont indépendants les uns des autres.

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = e_1, e_2, e_3, e_4$.

I.A Soit s l'endomorphisme de E défini par sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}} s = S =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

I.A.1 Réduction de l'endomorphisme s .

I.A.1.1 Justifier l'affirmation : l'endomorphisme s est diagonalisable. Calculer la matrice S^2 .

I.A.1.2 En déduire que s est un automorphisme orthogonal de E et que 1 et -1 sont ses valeurs propres.

On note E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres de s respectivement associés aux valeurs propres 1 et -1 . Il résulte des questions précédentes que E_1 et E_{-1} sont des sous-espaces supplémentaires de E .

I.A.1.3 Calculer la trace de s . En déduire les dimensions de E_1 et de E_{-1} .

I.A.2 On considère les trois vecteurs suivants de E : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

I.A.2.1 Déterminer les vecteurs $s u_1$ et $s u_2$. En déduire que u_1, u_2 est une base de E_1 . Déterminer une base orthonormale de E_1 .

I.A.2.2 Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 . En déduire que u_3, u_4 forme une base orthogonale de E_{-1} .

I.A.3 Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s^k x$.

I.A.3.1 Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel α_k tel que $s^k x = y + \alpha_k z$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel β_n tel que $S_n x = y + \beta_n z$.

I.A.3.2 Déduire de ce qui précède que la suite $S_n x$ $_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction de x et de $s x$.

I.B Soit l l'endomorphisme de E défini par sa matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}} l = L = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

I.B.1 Une propriété concernant les normes.

I.B.1.1 Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ de E , calculer $\|u\|^2 - \|l u\|^2$.

Prouver l'inégalité $\|l u\| \leq \|u\|$.

I.B.1.2 En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur u vérifie l'égalité $\|l u\| = \|u\|$. Montrer que 1 est une valeur propre de l et que le sous-espace propre associé est de dimension 2.

I.B.2 Réduction de l'endomorphisme l .

I.B.2.1 Déterminer le polynôme caractéristique de l .

I.B.2.2 Montrer que l possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$ que l'on déterminera. Justifier que les deux sous-espaces propres G_1 et G_λ de l associés aux valeurs propres 1 et λ sont supplémentaires dans E .

I.B.3 Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $L_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l^k x$.

Soit $x \in E$. On note $x = y + z$ avec $y \in G_1$ et $z \in G_\lambda$.

I.B.3.1 Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $l^k x$ en fonction de y, z et k .

I.B.3.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $L_n x$ en fonction de y, z et n .

En déduire que la suite $L_n x$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

I.C Soit t l'endomorphisme de E défini par sa matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} t = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

I.C.1 Montrer que T est une matrice orthogonale.

I.C.2 On considère les deux vecteurs suivants de E : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_3 + e_4$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_3 - e_4$.

I.C.2.1 On note $F_1 = \text{Vect } e_1, \varepsilon_1$. Déterminer les vecteurs $t e_1$ et $t \varepsilon_1$. En déduire que F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, stable par t .

I.C.2.2 Soit $F_2 = F_1^\perp$ l'orthogonal du sous-espace F_1 . Montrer que F_2 est stable par t . Montrer que e_2, ε_2 est une base de F_2 .

La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2$ est donc une base de E .

I.C.3 On note $T' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} t$.

I.C.3.1 Justifier que la matrice T' est orthogonale. Expliciter T' .

I.C.3.2 Soit $\theta = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Exprimer la matrice T' en fonction de θ . On

oriente le plan F_1 par la base e_1, ε_1 (respectivement on oriente le plan F_2 par la base e_2, ε_2). Préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de F_1 (respectivement de F_2) induit par t .

I.C.3.3 Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de θ et k la matrice de t^k relativement à la base $\mathcal{B}'$.

I.C.4 Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\omega}$. Expliciter $\zeta_n \omega$ selon les valeurs de ω . En déduire les réels ω pour lesquels la suite complexe $\zeta_n \omega_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

I.C.5 Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k x$.

I.C.5.1 Justifier que le sous-espace F_1 est stable par T_n .

I.C.5.2 Soit $y = \alpha e_1 + \beta \varepsilon_1 \in F_1$. On note $t^k y = \gamma_k e_1 + \delta_k \varepsilon_1$, $T_n y = \lambda_n e_1 + \mu_n \varepsilon_1$.

I.C.5.2.1 Déterminer la matrice $V_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice $U_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On exprimera V_k en fonction de θ et k et U_n en fonction de θ et n .

I.C.5.2.2 Montrer que la suite $T_n y_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

I.C.5.3 Soit $x \in E$. En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$, montrer que la suite $T_n x_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

PARTIE II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel. Étant donné un endomorphisme l de E , pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $L_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l^k x$.

II.A Dans cette partie **II.A**, on suppose que E est un espace euclidien et que $l \in O(E)$.

II.A.1 Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker l - id$ et $\text{Im } l - id$ sont orthogonaux. En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E .

Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent, il existe $y \in \ker l - id$ et $z \in E$ tels que $x = y + l z - z$.

II.A.2 Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $l^k x$ en fonction de y, z et k . En déduire l'expression de $L_n x$ en fonction de y, z et n .

II.A.3 Montrer que la suite $L_n x$ $_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E a une limite que l'on déterminera lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite de la partie **II**, étant donné un espace vectoriel normé E , on notera $B(E)$ l'ensemble des endomorphismes h de E qui vérifient : pour tout x de E , $\|h x\| \leq \|x\|$.

II.B Dans cette partie **II.B**, on suppose que E est un espace euclidien. Soit $f \in B(E)$. On note f^* l'adjoint de f .

II.B.1 Montrer que f^* appartient à $B(E)$.

II.B.2 Montrer que si $x \in E$ vérifie $f x = x$, alors $\|f^* x - x\|^2 \leq 0$. Montrer l'égalité $\ker f - id = \ker f^* - id$.

II.B.3 En déduire que $\ker f - id$ et $\text{Im } f - id$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E (on pourra utiliser l'égalité : pour φ l'endomorphisme de E , $\ker \varphi^* = \text{Im } \varphi^\perp$).

II.C Dans cette partie **II.C**, on suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $l \in B(E)$. Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on reprend la notation $L_n x$ définie au début de la partie **II**.

II.C.1 On suppose que x appartient à l'intersection $\ker l - id \cap \text{Im } l - id$. Soit $y \in E$ tel que $x = l y - y$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $l^n y$ en fonction de x, y et n . En déduire que $\ker l - id$ et $\text{Im } l - id$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

II.C.2 Soit $x \in E$. Montrer que la suite $L_n x$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

PARTIE III

Dans cette partie, E est un espace euclidien et $l \in O(E)$. Soit e un vecteur non nul de E . Pour

tout $x \in E$, on note $\sigma_e x = x - 2 \frac{x|e}{\|e\|^2} e$.

III.1 Calculer $\sigma_e e$. Pour x orthogonal à e , calculer $\sigma_e x$. Montrer que σ_e est un automorphisme orthogonal de E .

σ_e est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan $\text{Vect } e^\perp$.

III.2 On note $W = \ker l - id$ et on suppose que W est différent de E . Soit u un vecteur fixé de E tel que $u \notin W$. Dans la suite, on prend $e = l u - u$.

III.2.1 Montrer que e est orthogonal à W (on pourra utiliser le résultat de **II.A.1**).

III.2.2 Calculer $\sigma_e l u - u$ et $\sigma_e l u + u$. En déduire $\sigma_e l u$ et $\sigma_e u$.

III.2.3 Montrer l'égalité $\text{Vect } u, W = \ker \sigma_e l - id$.

III.2.4 En déduire que l peut se décomposer en la composée de p réflexions et exprimer p en fonction de $k = \dim W$ et de $n = \dim E$.

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations et objectifs

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n .

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot)_n$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_n$.

Une matrice carrée réelle M sera dite positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et on notera dans ce cas $M \geq 0$. De même un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera dit positif si toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles et on notera aussi $X \geq 0$. L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n , positives et symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des conditions pour lesquelles, étant donnés n nombres réels distincts ou non, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il existe une matrice carrée réelle d'ordre n positive et symétrique admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est égal à $\prod_{k=1}^n (\lambda_k - X)$.

Dans la première partie on considérera quelques exemples simples.

Dans la seconde, on montrera que si S est une matrice carrée réelle positive et symétrique de plus grande valeur propre α , alors α est positif, S admet pour la valeur propre α un vecteur propre positif et toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leq \alpha$.

La troisième partie, assez technique, permettra de connaître les valeurs propres d'une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre $n+p$ construite à partir de deux matrices A et B carrées réelles positives et symétriques d'ordres respectifs n et p dont on connaît les valeurs propres.

Enfin la dernière partie donnera des conditions suffisantes pour qu'il existe une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité, n réels donnés.

PARTIE I

I.1 Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs, distincts ou non, il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres. Montrer que son polynôme caractéristique P est donné par $P(X) = X^2 - 1$.

b) En déduire une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1 .

I.3 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres $-1, 0$ et 1 .

I.4 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 1$ et 1 .

I.5 Montrer qu'il n'existe aucune matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1$ et 0 .

I.6 a) Pour a et b réels, on note H la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent tous a et les autres valent tous b . Déterminer les valeurs propres de H .

b) Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est-elle nécessairement positive ?

PARTIE II

II.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Établir les égalités :

a) $(X \mid Y)_n = {}^tXY = {}^tYX$.

b) ${}^tXSY = (X \mid SY)_n = (SX \mid Y)_n$.

c) $\|PX\|_n = \|X\|_n$.

II.2 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $(Z \mid T)_{n+p} = (X \mid Y)_n + (U \mid V)_p$.

b) Montrer que si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U, V orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) La réciproque est-elle vraie ?

Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S . On pose $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.

II.3 a) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(DY \mid Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2$.

b) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

c) En utilisant une décomposition du vecteur X sur une base orthonormée de vecteurs propres de S , montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si X est vecteur propre de S associé à la valeur propre α .

II.4 Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geq 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_n = 1\}$ et $C = E \cap \Sigma$.

a) Montrer que E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto (SX \mid X)_n$. Donner l'expression de $\varphi(X)$ en fonction des coefficients de S et de ceux de X ; en déduire que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) On pose $\mu = \sup_{X \in C} \varphi(X)$. Justifier l'existence de μ et montrer qu'il existe X_0 appartenant à C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

e) Montrer que $\mu \leq \alpha$.

II.5 On suppose dans cette question $S \geq 0$.

a) Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α , on pose $W = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$.

i) Montrer que W est élément de C .

ii) Montrer que $|\varphi(X)| \leq \varphi(W)$.

iii) Montrer que $|\alpha| \leq \mu$.

b) En déduire $\alpha \geq 0$, puis que la matrice S admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α .

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\lambda_i| \leq \alpha$.

PARTIE III

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, A, B deux matrices symétriques réelles d'ordres respectifs n et p , $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A , $(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de B et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ les réels tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, AX_i = \alpha_i X_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, BY_j = \beta_j Y_j$$

Pour tout réel s , on note M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée sous forme de blocs par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1^t Y_1 \\ sY_1^t X_1 & B \end{pmatrix} \quad (1)$$

et on considère les vecteurs $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ définis par $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi que les vecteurs

$(T_j)_{1 \leq j \leq p}$ de $\mathbb{R}^{n+p}$ définis par $T_j = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_j \end{pmatrix}$.

III.1 Montrer que $Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ et $T_2, T_3, \dots, T_p$ sont vecteurs propres de M_s et préciser les valeurs propres correspondantes.

III.2 Pour θ réel, on note $V(\theta)$ le vecteur défini par $V(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos \theta)X_1 \\ (\sin \theta)Y_1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $V(\theta)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

b) Déterminer le spectre de M_0 .

c) On suppose dans cette question $s \neq 0$. On note θ_1 l'unique réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\tan \theta_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$$

et on pose $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$.

- i) Montrer que θ_1^2 est non nul.
- ii) Évaluer le produit $(\tan \theta_1)(\tan \theta_2)$.
- iii) Montrer que θ_1 et θ_2 vérifient l'équation :

$$\alpha_1 + s \tan \theta = \beta_1 + \frac{s}{\tan \theta} \quad (2)$$

iv) En déduire que $V(\theta_1)$ et $V(\theta_2)$ sont vecteurs propres de M_s et exprimer les valeurs propres correspondantes μ_1 et μ_2 en fonction de α_1, β_1 et s .

v) Montrer que les vecteurs $V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, Z_3, \dots, Z_n, T_2, T_3, \dots, T_p$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+p}$ et donner l'ensemble des valeurs propres de M_s .

vi) Montrer que les formules exprimant μ_1 et μ_2 en fonction de α_1, β_1 et s donnent encore des valeurs propres de M_s lorsque $s = 0$.

PARTIE IV

Dans cette partie on se propose de démontrer par récurrence la propriété (P_n) suivante : si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0$$

alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

IV.1 Vérifier que (P_1) est vraie.

IV.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_n) soit vraie et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1} \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0$$

On pose $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$ tel que $a, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient valeurs propres de A . Dans la suite de cette question **IV.2**, A désignera une telle matrice.

b) Montrer que A admet un vecteur propre X_1 unitaire et positif associé à la valeur propre a .

c) Pour s réel, soit M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s^t X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Vérifier que M_s est bien de la forme (1) : préciser p , B et Y_1 .

ii) En déduire les valeurs propres de M_s .

iii) Montrer que si $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$, les valeurs propres de M_s sont : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ et conclure.

IV.3 Exemple

a) Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Déterminer une matrice B carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4, admettant pour valeurs propres $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = -3$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

Pour tout nombre réel s , on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(\mathcal{E}_s)$ suivante :

$$(\mathcal{E}_s) \quad (1 - x^2) y''(x) - 2(s + 2) xy'(x) - 2(s + 1) y(x) = 0.$$

On note f_s la solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, +1[$ qui vérifie les conditions initiales $f_s(0) = 0$ et $f'_s(0) = 1$.

I.1. Soit g_s la fonction définie sur $] -1, +1[$ par $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.

I.1.1. Montrer que g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, +1[$.

I.1.2. Calculer $g_s(0)$ et $g'_s(0)$. En déduire que f_s est impaire.

I.2. Déterminer en fonction de s l'unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto (1 - x^2)^\alpha$ soit solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $] -1, +1[$.

I.3. Soit u_s la fonction définie sur $] -1, +1[$ par $u_s(x) = (1 - x^2)^{s+1} f_s(x)$.

I.3.1. Montrer que la dérivée u'_s de u_s est solution sur $] -1, +1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}'_s) \quad (1 - x^2) y'(x) + 2sxy(x) = 0.$$

I.3.2. Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}'_s)$ sur $] -1, +1[$.

I.3.3. Calculer $u'_s(0)$ et $u_s(0)$. En déduire que $u_s(x) = \int_0^x (1 - t^2)^s dt$ pour tout $x \in] -1, +1[$.

I.4. Soit y une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I . On note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de y sur I .

I.4.1. Montrer que pour que y soit solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I , il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \frac{2s + 2n + 3}{2n + 3} c_n.$$

I.4.2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de c_n en fonction de n et c_0 .

I.4.3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ l'équation $(\mathcal{E}_s)$ admet-elle des solutions polynomiales impaires non identiquement nulles ?

I.4.4. On suppose que $s \notin \{-n - \frac{3}{2}; n \in \mathbb{N}\}$, que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I , et que $c_0 \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$.

I.5. Déduire des questions précédentes que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^n (2s + 2k + 1) \right] x^{2n+1}.$$

I.6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, +1[$ on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}},$$

où Q_p est une fonction polynomiale impaire de degré $2p+1$ que l'on explicitera.

Expliciter en particulier $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$.

PARTIE II

On considère la fonction β de la variable réelle x définie par :

$$\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

II.1. Déterminer le domaine de définition de β .

II.2. Montrer que β est continue sur $] -1, +\infty[$.

On admettra que β est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \beta'(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2) dt$.

II.3. Montrer que β est strictement monotone sur $] -1, +\infty[$ et préciser son sens de variation.

II.4.

II.4.1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a $\beta(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3} \beta(x)$ pour tout $x > -1$.

II.4.2. Calculer $\beta(0)$. En déduire la limite de $\beta(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

II.4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner une expression de $\beta(n)$ à l'aide de factorielles. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\beta(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $\beta(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis celle de $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

II.4.4. Calculer $\beta\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire la valeur de $\beta\left(-\frac{1}{2} + n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE III

Soit γ un nombre réel strictement supérieur à 1, non entier. Soit φ_γ la fonction 2π -périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\gamma(x) = |\cos x|^\gamma.$$

On note $a_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(\gamma) \cos nx + b_n(\gamma) \sin nx]$ la série de Fourier de φ_γ .

III.1.

III.1.1. Préciser pourquoi φ_γ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.1.2. Que peut-on dire des coefficients $b_n(\gamma)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_{2p+1}(\gamma)$, $p \in \mathbb{N}$?

III.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \cos 2px \, dx$.

III.2.1. Montrer que $I_p - I_{p+1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \sin x \cdot \sin(2p+1)x \, dx$.

III.2.2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_p - I_{p+1} = 2 \frac{2p+1}{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma x \cdot \cos x \cos(2p+1)x \, dx.$$

III.2.3. En déduire que $I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1} [I_p + I_{p+1}]$.

III.2.4. Montrer que $I_0 = \beta(\gamma')$, où γ' est un nombre réel strictement positif que l'on calculera en fonction de γ .

III.2.5. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $I_p = \frac{\gamma}{\gamma+2p} A_p(\gamma) \beta(\gamma')$, où $A_p(\gamma) = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma-2k}{\gamma+2k}$.

III.3. Déduire de ce qui précède les valeurs de $a_0(\gamma)$ et de $a_{2p}(\gamma)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **IV** utilise certains résultats des parties **I**, **II** et **III**.

Notations

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à 3 lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ toute matrice à 3 lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On note tM la transposée de la matrice M .

Partie I

Un exemple numérique

Dans cette partie, on se propose d'étudier le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x & - & y & & & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ & & -y & + & 2z & = & 5 \end{cases}$$

1. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne que l'on déterminera.
2. Calculer $\det(A)$. *On pourra utiliser la calculatrice.*
La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer l'inverse A^{-1} de A . *On pourra utiliser la calculatrice.*
4. Montrer que le système (S) n'admet qu'une seule solution Q que l'on déterminera.
5. a. Montrer que le système (S) est équivalent au système $X = JX + K$ avec un vecteur colonne K de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- b. Justifier sans calcul qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $J = PD^tP$.
- c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de J . En déduire les matrices P et D .
- d. Pour tout entier naturel p , déterminer J^p en fonction de D et de la matrice P .

On définit la suite de vecteurs colonnes $(X^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ par $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On appelle $x^{(p)}$, $y^{(p)}$ et $z^{(p)}$ les composantes de $X^{(p)}$ c'est-à-dire $X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix}$. On pose enfin $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$.

6. Calculer les vecteurs colonnes $X^{(1)}$ et $\Delta^{(1)}$.
7. Ecrire un programme dans le langage de Maple ou Mathematica qui calcule le vecteur colonne $X^{(2008)}$.
8. a. En utilisant le fait que Q vérifie $Q = JQ + K$, montrer que pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis que $\Delta^{(p)} = PD^p{}^tP\Delta^{(0)}$.
b. Soit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$. On note $\|U\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sa norme euclidienne. Montrer que pour tout entier naturel p , $\|D^pU\| \leq \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|U\|$.
c. Exprimer $\|U\|$ en fonction de U et tU puis montrer que $\|PU\| = \|U\|$ et $\|{}^tPU\| = \|U\|$.
d. Déduire des questions précédentes que $\|\Delta^{(p)}\| \leq \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\|\Delta^{(0)}\|$ puis que $\|\Delta^{(p)}\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}$.
9. Prouver alors les trois inégalités :

$$|x^{(p)} - 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |y^{(p)} - (-1)| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad ; \quad |z^{(p)} - 2| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

10. Quelles sont les limites respectives des suites $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$?
11. Déterminer une valeur de p à partir de laquelle le vecteur colonne $X^{(p)}$ est une valeur approchée de la solution exacte Q à 10^{-3} près, c'est-à-dire tel que $\|\Delta^{(p)}\| \leq 10^{-3}$.

Partie II

Un espace de matrices

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère les matrices

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } U(b) = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble $E = \{J(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que E est stable par produit matriciel c'est-à-dire que pour toutes matrices M et N de E , le produit MN appartient à E .

On suppose désormais que $b \neq 0$.

3. Justifier sans calcul que les matrices $J(a, b)$ et $U(b)$ sont diagonalisables.
4. Quel est le rang de la matrice $U(b)$? En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(U(b))$.
5. Déterminer un réel λ tel que $U(b) = J(a, b) - \lambda I_3$.
6. En déduire une valeur propre de $J(a, b)$ et la dimension du sous-espace propre associé.
7. A l'aide de la trace, déterminer l'autre valeur propre de $J(a, b)$.

Partie III

Une norme matricielle

Si $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note pour tout indice i de $\{1, 2, 3\}$, $l_i = \sum_{j=1}^3 |m_{ij}|$.

Autrement dit, l_i est la somme des valeurs absolues des coefficients de la ligne i de la matrice M . Puis, on définit le réel positif $\varphi(M)$ par $\varphi(M) = \max\{l_1, l_2, l_3\}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ alors on définit la norme infinie du vecteur X par $\|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

1. a. Justifier que si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\varphi(A) = 6$.
b. Justifier que si $U = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\|U\|_\infty = 4$.
2. a. On note $X' = MX$ avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donner les expressions de x' , y' et z' en fonction de x , y , z et des coefficients de la matrice M .
b. Montrer que $|x'| \leq (|m_{11}| + |m_{12}| + |m_{13}|)\|X\|_\infty$. Déterminer de même une inégalité pour $|y'|$ et pour $|z'|$.
c. En déduire que $\|MX\|_\infty \leq \varphi(M)\|X\|_\infty$ puis que, si M' désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\|M'MX\|_\infty \leq \varphi(M')\varphi(M)\|X\|_\infty$.

Partie IV

La méthode de Jacobi

On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = a \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = c \end{cases}$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose que le système (S) admet une unique solution notée $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. On suppose de plus que $a_{1,1} \neq 0$ et $a_{2,2} \neq 0$ et $a_{3,3} \neq 0$.

1. Montrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$(S_J) \begin{cases} x = & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}z + \frac{a}{a_{1,1}} \\ y = -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}x & -\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}z + \frac{b}{a_{2,2}} \\ z = -\frac{a_{3,1}}{a_{3,3}}x - \frac{a_{3,2}}{a_{3,3}}y & + \frac{c}{a_{3,3}} \end{cases}$$

2. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S_J) peut se mettre sous la forme matricielle $X = JX + K$ avec J une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et K un vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Pour un système linéaire comportant un grand nombre d'équations et d'inconnues, les méthodes de résolution directe (comme celle du pivot de Gauss) aboutissant à une solution exacte deviennent très gourmandes en temps de calcul. Il est alors plus judicieux de calculer une solution approchée à l'aide d'une suite définie par récurrence convergeant vers la solution exacte, comme cela se fait dans la méthode de Jacobi que nous allons nous contenter d'illustrer sur un système 3×3 .

On définit ainsi la suite de vecteurs $(X^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ par la donnée d'un vecteur initial $X^{(0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} : X^{(p+1)} = JX^{(p)} + K$$

On définit aussi la suite $(\Delta^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ par $\Delta^{(p)} = X^{(p)} - Q$. Le vecteur $\Delta^{(p)}$ permet d'apprécier l'erreur d'approximation entre la solution approchée $X^{(p)}$ et la solution exacte Q .

3. En utilisant le fait que Q est la solution de l'équation $(S_J) : X = JX + K$, montrer que pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p+1)} = J\Delta^{(p)}$ puis $\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty \leq \varphi(J)\|\Delta^{(p)}\|_\infty$.
4. En déduire que pour tout entier naturel p , $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leq (\varphi(J))^p \|\Delta^{(0)}\|_\infty$.
5. En déduire une condition suffisante (C_1) sur la matrice J pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

$$6. \text{ On pose pour tout entier naturel } p : X^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix} \text{ et } \Delta^{(p)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(p)} \\ \beta^{(p)} \\ \gamma^{(p)} \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer les trois inégalités :

$$|\alpha^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\beta^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad ; \quad |\gamma^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty.$$

- b. Lorsque la condition (C_1) est vérifiée, montrer que les suites $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, $(y^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers q_1 , q_2 et q_3 .

7. La condition (C_1) est-elle vérifiée par la matrice J de la partie I ?

8. On revient au cas général. On suppose dans cette question que la matrice J est diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J = PDP^{-1}$.

On peut montrer alors, comme dans la partie I que, pour tout entier naturel p , $\Delta^{(p)} = PD^p P^{-1} \Delta^{(0)}$.

- a. Montrer que $\|\Delta^{(p)}\|_\infty \leq \varphi(P)(\varphi(D))^p \varphi(P^{-1}) \|\Delta^{(0)}\|_\infty$.
- b. En déduire une condition suffisante (C_2) sur $\varphi(D)$ pour que la suite $(\|\Delta^{(p)}\|_\infty)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- c. La condition (C_2) est-elle vérifiée par la matrice D de la partie I ?
9. Dans cette question, on reprend l'exemple de la matrice $J(a, b)$ avec $b \neq 0$ définie à la partie II. On a vu que cette matrice est diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $J(a, b) = PDP^{-1}$.
 - a. Calculer $\varphi(J(a, b))$ et $\varphi(D)$.
 - b. La matrice $J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ vérifie-t-elle la condition (C_1) ? la condition (C_2) ?
 - c. Dessiner dans le plan l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la condition (C_1) et ceux qui vérifient la condition (C_2) .

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

On pose $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$, où a et b sont réels.

1. Énoncer le ou les critères de convergence qui vous semblent adaptés à l'étude de cette intégrale.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels l'intégrale $I(a,b)$ converge.
3. Représenter graphiquement ce domaine de convergence dans le plan (a,b) .

Problème

Toutes les parties de ce sujet sont indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(x) - \sin(x)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.1 Justifier la possibilité de restreindre l'étude de f à $\mathbb{R}^+$.

1.2 Que peut-on en déduire pour (C) ?

2. On note I_n l'intervalle $[n\pi ; (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Etudier, en fonction de la parité de n , les variations de f sur I_n .

- 3.1 Montrer que les points de (C) d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.
- 3.2 Construire la courbe (C) pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$ (échelle : $\pi = 2$ carreaux sur les axes).
- 4.1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans tout intervalle I_n une solution unique.
On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.
- 4.2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < (2n+1) \frac{\pi}{2}$.
- 4.3 Donner un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.
- 4.4 Montrer que $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$.
- 4.5 En déduire que $x_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \varepsilon_n$, où ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini
(on rappelle que pour $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et que $\arctan(u)$ est équivalent à u au voisinage de 0).

Partie II

Soit g une fonction réelle de variable réelle, de classe C^1 par morceaux, de période T .

On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation de g , et Δ un intervalle de longueur T .

Pour n entier naturel, on note a_n et b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de g , donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\Delta} g(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} g(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} g(t) \sin(n\omega t) dt \text{ pour } n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, on appelle harmonique de rang n la quantité $h_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$.

On pose $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, qu'on appelle amplitude de h_n .

1. Montrer que si r_n est non nul, il existe φ_n tel que $h_n(t) = r_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$.
On appelle φ_n phase de h_n (par convention, on choisit $\varphi_n \in]-\pi ; \pi]$; si r_n est nul, φ_n n'existe pas).

2. On choisit dans cette question la fonction g de période T , définie par :

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0 ; \frac{T}{2}[, \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{T}{2} ; T[. \end{cases}$$

- 2.1 Que peut-on dire de $g - \frac{1}{2}$?

- 2.2 Que peut-on en déduire pour les coefficients de Fourier de g ?

- 2.3 Écrire le développement en série de Fourier de g .
- 2.4 Quelle est la somme de cette série ? (on énoncera de façon précise le théorème utilisé)
- 2.5 Exprimer r_n et φ_n si elle existe.

3. On considère la série numérique de terme général $u_p = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ pour $p \geq 0$.

3.1 Montrer que cette série est convergente.

3.2 Dédire de la question 2. la somme $\sum_{p \geq 0} u_p$.

4. On conserve les notations des questions 2. et 3. ci-dessus.

4.1 Énoncer la formule de Parseval.

4.2 Calculer $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4.3 En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Partie III

On note Δ l'opérateur laplacien : soit W un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et f élément de $C^2(W, \mathbb{R})$,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et on s'intéresse à une fonction f telle que $f(x, y, z) = u(r)$.

Montrer que pour $r \neq 0$, on a : $\Delta f = u''(r) + \frac{2}{r}u'(r)$.

On considère dans les mêmes conditions, l'équation : $\Delta f = -\omega^2 f$, où ω est un réel strictement positif, c'est-à-dire l'équation (U) : $u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = -\omega^2 u(r)$.

2. On définit la fonction v par $v(r) = r u(r)$.

Montrer que v vérifie l'équation différentielle (V) : $v'' + \omega^2 v = 0$.

3. Résoudre l'équation (V), en déduire pour $r \neq 0$ les solutions réelles de (U).

4. Déterminer les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand r tend vers 0.

5. On ne conserve pour la suite que les solutions obtenues à la question 4 ci-dessus.
On impose de plus $u'(1) = 0$. Déterminer l'équation (Ω) que doit vérifier ω pour que cette condition supplémentaire soit satisfaite.
6. Montrer graphiquement que l'équation (Ω) admet une solution et une seule dans tout intervalle $\left] \frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \right[$ où n est un entier naturel.
On notera ω_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.
7. Si n et p sont deux entiers naturels distincts, on note u_n et u_p deux solutions de (U) associées respectivement aux valeurs ω_n et ω_p solutions de (Ω) .
Montrer que :

$$\int_0^1 u_n(r) u_p(r) r^2 dr = 0 .$$

Fin de l'énoncé.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Dans tout le sujet, pour tous entiers p et q tels que $p \leq q$, la notation $\llbracket p, q \rrbracket$ désignera l'ensemble des entiers n vérifiant $p \leq n \leq q$.

Exercice

Etude et résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries entières

Dans cet exercice, on appelle solution d'une équation différentielle sur un intervalle I toute fonction deux fois dérivable sur I , solution de cette équation sur I .

- 1) Rappeler les développements en séries entières des fonctions $\exp$, $\cosh$ et $\sinh$. On précisera pour chaque série entière le rayon de convergence qui lui est associé.
- 2) Soit l'équation différentielle (H) :

$$(H) \quad x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On cherche une solution de (H) sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

- 2a. On suppose que $R > 0$ et que y est solution de (H) sur $] -R, R[$. Etablir des relations de récurrence portant sur les coefficients a_n , et donner la valeur de a_0 .
- 2b. On suppose que les relations établies en **2a** sont satisfaites. Montrer alors que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est combinaison linéaire de deux séries entières (indépendantes des a_n) que l'on précisera.
- 2c. Pour chacune des deux séries entières mises en évidence en **2b**, déterminer le rayon de convergence et l'expression de la somme.
- 2d. En déduire que y est effectivement solution de (H) . Donner son rayon de convergence R , et l'expression de sa somme sur $] -R, R[$.
- 3) On pose $I_1 =] -\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.
 - 3a. Vérifier que la fonction $y_1 : x \mapsto x \cosh(x)$ est solution de (H) sur I_1 et I_2 .
 - 3b. Résoudre (H) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de Lagrange.
 - 3c. Existe-t-il des solutions de (H) sur $\mathbf{R}$?
- 4) Soit l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = x^3 + x^4$$

- 4a. Résoudre (E) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de la variation des deux constantes.
- 4b. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.
- 4c. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbf{R}$ est développable en série entière, et préciser les coefficients de cette série entière et son rayon de convergence.

Problème 1

Matrices positives et racines carrées

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices orthogonales, et $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques.

On identifiera $\mathbf{R}$ avec $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. De même, on identifiera $\mathbf{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.

Ainsi, un vecteur $X \in \mathbf{R}^n$ de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ sera noté

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sa transposée s'écrira donc ${}^tX = (x_1, \dots, x_n)$.

Partie I. Une matrice A.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1) Dire pourquoi A est diagonalisable.
- 2) Montrer que le spectre de A est $\{0, 3, 6\}$.
- 3) Construire une matrice P **orthogonale**, de première ligne $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$, telle que $A = PDP^{-1}$.
- 4) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- 5) Calculer alors A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
- 6) On considère trois suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$, $(w_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n &+ 2v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n &+ 3v_n &+ 2w_n \\ w_{n+1} &= &2v_n &+ 4w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

6a. Exprimer X_{n+1} à l'aide de A et de X_n .

6b. En déduire des expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n .

Partie II. Racines carrées de la matrice A.

On conserve les matrices A , P et D de la partie **I**. Connaître P est inutile pour la suite.

On appelle racine carrée de la matrice A toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.

On note

$$\text{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$$

l'ensemble des matrices M qui commutent avec la matrice A .

- 1) Montrer que $\text{Com}(A)$ est un espace vectoriel.

- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On pose $\Delta = P^{-1}MP$, que l'on notera $\Delta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$
- 2a. Montrer que $AM = MA$ si et seulement si $D\Delta = \Delta D$.
- 2b. Montrer que $D\Delta = \Delta D$ si et seulement si Δ est diagonale.
- 3) Soit B une racine carrée de A .
- 3a. Montrer que $B \in \text{Com}(A)$.
- 3b. En déduire qu'il existe une matrice Δ diagonale telle que $B = P\Delta P^{-1}$.
- 3c. Montrer que $\Delta^2 = D$.
- 4) Combien la matrice A possède-t-elle de racines carrées ? Les écrire sous la forme $P\Delta_i P^{-1}$ en écrivant explicitement les matrices Δ_i .

Partie III. Matrices positives.

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$

Les matrices A , P et D ne sont donc plus celles des parties **I** et **II**.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on notera λ_i le i -ème élément diagonal de D , c'est à dire que l'on a :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On considère l'application φ définie sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ par

$$\forall (X, Y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \varphi(X, Y) = {}^t X A Y$$

- 1) Montrer que $\forall (X, Y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \varphi(X, Y) \in \mathbf{R}$.
- 2) Montrer que $\forall (X, Y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \varphi(X, Y) = \varphi(Y, X)$.
- 3) Montrer que φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable.
- 4) Pour tous vecteurs X et Y de $\mathbf{R}^n$, on pose $U = P^{-1}X$ et $V = P^{-1}Y$. Montrer que :

$$\varphi(X, Y) = {}^t U D V$$

- 5) Soit $U \in \mathbf{R}^n$ (de coordonnées $u_1, \dots, u_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$) et $V \in \mathbf{R}^n$ (de coordonnées $v_1, \dots, v_n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$). Montrer que :

$${}^t U D V = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i$$

- 6) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *symétrique-positive* si $\begin{cases} \text{(i)} & M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \\ \text{(ii)} & \forall X \in \mathbf{R}^n, {}^t X M X \geq 0 \end{cases}$

On désire prouver que A (définie en début de **III**) est symétrique-positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

- 6a. Montrer que le spectre de A est $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
- 6b. Supposons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$. Montrer que A est symétrique-positive.

- 6c. Supposons que A soit symétrique-positive. En calculant $\varphi(X, X)$ pour un vecteur X bien choisi, montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.
- 7) Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$.

Partie IV. Racine carrée positive d'une matrice positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une racine carrée de A si $B^2 = A$.

- 1) Soit A une matrice symétrique-positive fixée. On souhaite montrer que A possède, parmi les matrices symétriques-positives, une unique racine carrée.
 - 1a. En diagonalisant A dans une base orthonormée, construire une racine carrée B de A , symétrique-positive.
 - 1b. Soit B_1 et B_2 deux matrices symétriques-positives telles que $B_1^2 = B_2^2$.
 - 1b1. Montrer qu'il existe P_1, P_2 deux matrices inversibles, D_1 et D_2 deux matrices diagonales telles que $P_1 D_1^2 P_1^{-1} = P_2 D_2^2 P_2^{-1}$.
 - 1b2. Posons $P = P_2^{-1} P_1$. Montrer que $P D_1^2 = D_2^2 P$.
 - 1b3. En déduire que $P D_1 = D_2 P$, puis que $B_1 = B_2$.
- 2) La matrice A définie dans la partie I est-elle symétrique-positive ?
- 3) Citer, parmi les matrices de II.4, la racine carrée symétrique-positive de cette matrice A .

Problème 2

Série de Fourier, phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \pi[, & f(x) = \pi/4 \\ & f(0) = 0 \\ & f(\pi) = 0 \end{cases}$$

- 1) Tracer le graphe de f sur deux périodes.
- 2) Déterminer la série de Fourier de f exprimée à l'aide des coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- 3) Etudier la convergence de la série de Fourier de f sur $\mathbf{R}$. Lorsque cela est possible, donner la valeur de la somme de cette série.

- 4) 4a. Soient $x \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}$.

Indication : on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix}$ en faisant apparaître une suite géométrique.

- 4b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction g_n par : $\forall t \in]0, \pi[, \quad g_n(t) = \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t}$.

Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$, où $x \in]0, \pi[$?

- 4c. Déterminer les zéros de g_n sur $]0, \pi[$.

5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère S_{2n-1} la somme partielle de la série de Fourier de f au rang $N = 2n - 1$.

5a. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, S_{2n-1}(\pi - x) = S_{2n-1}(x)$.

5b. Justifier que l'étude de la fonction S_{2n-1} peut être réduite à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5c. Calculer $S'_{2n-1}(x)$ et en déduire :

$$\forall x \in [0, \pi[, S_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$$

5d. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on définit $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, I_k = (-1)^{k-1} |I_k|$$

5e. En utilisant le changement de variable $u = t - x_{k-1}$ dans le calcul de I_k , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, |I_{k+1}| \leq |I_k|$$

5f. Déduire des questions 5c à 5e que le maximum M_n de S_{2n-1} sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est

$$M_n = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$$

6) On va déterminer dans cette question $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

6a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $M_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{4n \sin(\frac{t}{2n})} dt$.

6b. On pose φ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que φ est bornée sur $[0, \pi]$. On notera K un majorant de φ sur cet intervalle.

6c. On pose ψ définie sur $]0, \pi[$ par $\psi(x) = \frac{x}{\sin x} - 1$. Montrer que ψ est monotone sur $]0, \pi[$.

6d. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\left| M_n - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{K}{2} \int_0^\pi \left| \frac{t/(2n)}{\sin[t/(2n)]} - 1 \right| dt$$

6e. Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\left| M_n - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{K}{2} \left(a + (\pi - a) \psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)$$

6f. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

7) A l'aide du développement en série entière de la fonction $\sin$, donner une expression de $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ comme somme d'une série numérique alternée.

8) Montrer que $M = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{36} + \frac{\pi^5}{1200} + R$ avec $|R| \leq 0, 1$.

9) Etablir le résultat suivant connu sous le nom de *Phénomène de Gibbs* : la limite, quand n tend vers $+\infty$, du maximum de la somme partielle au rang n de la série de Fourier de f , est strictement supérieure au maximum de la fonction f .

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] -1; 0[$ et $]0; 1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $] -1; 1[$.

EXERCICE 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- (a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
- (b) Prouver que pour tout x réel positif on a : $f(x) = \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt$.
En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\frac{\pi}{4}$.
- (c) Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.
- (d) En déduire la valeur de I .

PROBLÈME : THÉORÈME DU POINT FIXE ET APPLICATIONS

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de PICARD, ce qui fait l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes. Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.

Une définition. Soit $k \in [0; 1[$. On dira qu'une application $f : E \rightarrow E$ est une **contraction stricte** de rapport k lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Une notation. Pour n entier naturel et $f : E \rightarrow E$, on notera $f^n : E \rightarrow E$ l'application définie par :

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}(x) \text{ avec la convention } f^0 = \text{Id}.$$

PARTIE I : Le théorème du point fixe de PICARD

Dans cette partie $(E, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ est une contraction stricte de rapport k .

Pour $a \in E$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.

- (a) Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $\|u_{n+1}\| \leq k \|u_n\|$ puis que

$$\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|.$$

En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

- (b) Démontrer alors que la suite (x_n) converge vers un vecteur ℓ de E .
- (c) Prouver que ℓ est un point fixe de f c'est-à-dire que $f(\ell) = \ell$.
- (d) Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME DU POINT FIXE DE PICARD : Dans un espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$, une application $f : E \rightarrow E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout a dans E la suite des itérés $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

PARTIE II : Exemples et contre-exemples

2. Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte

On considère ici la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

- (a) Démontrer que pour tout t réel, on a $|g'(t)| < 1$. En déduire que l'on a pour x et y réels :

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

- (b) La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle une contraction stricte ?

3. Un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait :

$$f(x) = f \circ g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{x}{5} + 1.$$

- (a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout n entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de PICARD que cette suite converge vers un réel ℓ que l'on précisera.
- (b) Démontrer que pour tout n entier naturel et tout x réel, on a : $f(g^n(x)) = f(x)$.
- (c) En déduire que f est constante.

4. Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse dans cette question au système :

$$(S) \begin{cases} 4x &= \sin(x + y) \\ 3y &= 3 + 2 \arctan(x - y) \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par : $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) \right).$$

- (a) Pourquoi l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$ est-il complet ?
- (b) Démontrer que pour tout a et b réels, on a :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad \text{et} \quad |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

- (c) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$.
- (d) En déduire que le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
- (e) Ici $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ qui en fait un espace de Banach.
Déterminer $\| \psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0, 0) \|_\infty$.
L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\| \cdot \|_\infty$?
Quel commentaire peut-on faire ?

PARTIE III : Une équation intégrale

5. Soit F l'espace vectoriel des applications bornées de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans F on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On note aussi E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- (a) Démontrer soigneusement que $\|\cdot\|_{\infty}$ est une norme sur F . On admettra pour la suite que $(F, \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach.
 - (b) Vérifier que $E \subset F$.
 - (c) Démontrer le résultat suivant du cours :
si $(G, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et si (g_n) est une suite d'applications continues de G dans G qui converge uniformément sur G vers une application g alors g est continue.
 - (d) En déduire que $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ est aussi un espace de Banach.
6. On considère une application continue $K : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que $g \in E$. Pour λ réel, on note Φ l'application qui à une fonction f de E associe la fonction définie par :

$$\Phi(f)(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [0; 1].$$

- (a) Justifier que l'application $|K|$ est bornée et atteint ses bornes.
On pose $M = \max_{(x, y) \in [0; 1]^2} |K(x, y)|$.
- (b) Démontrer que $\Phi(f)$ est un élément de E .
- (c) On suppose que $|\lambda| < M^{-1}$. Vérifier que Φ est une contraction stricte de $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ et en déduire qu'il existe une unique application f dans E telle que :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [0; 1].$$

PARTIE IV : Une application géométrique

7. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un vrai triangle ABC avec B et C sur l'axe des abscisses.

Soit M un point de l'axe des abscisses. On note :

- P_M le projeté orthogonal de M sur (CA) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC) .

On obtient donc une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M .

On appelle a , b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

- (a) Pour M et M' points distincts de (BC) , justifier l'égalité (lorsque $M \neq C$) :

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

- (b) Démontrer que φ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Que peut-on en déduire ?

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

Remarques :

- Il n'est pas demandé le détail des calculs sur la copie lorsque le candidat aura besoin de calculer un déterminant, un produit de matrices, l'inverse d'une matrice ou tout autre calcul. Par exemple, pour un déterminant, il pourra se contenter d'écrire le déterminant à calculer et de donner la réponse.
- On rappelle que le candidat doit indiquer les théorèmes utilisés et lorsqu'il s'agira des théorèmes de Bézout et Gauss il indiquera leur nom.

PREMIER EXERCICE

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme à coefficients réels.

1. Si λ est une valeur propre de u , démontrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$ de E .
2. On suppose que $P(u)$ est l'endomorphisme nul : $P(u) = 0$.
 - (a) Montrer que toute valeur propre de u est racine de P .
 - (b) Réciproquement, toute racine de P est-elle valeur propre de u ?
3. On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension **impair** et que u est un endomorphisme de E vérifiant $u^3 - u^2 + u - id = 0$. Déterminer le spectre de u .

DEUXIÈME EXERCICE

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On note $w = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et Π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan Π et S la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base (u, v) du plan Π et justifier, sans calcul, que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice S' de la symétrie s dans la base (u, v, w) .
3. En déduire la matrice S .

PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. Définition et propriétés

Soit p et q deux entiers naturels non nuls, soit

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0, b_q \neq 0$.

Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\text{Res}(P, Q)$:

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q + p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\text{Res}(P, Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\text{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

Soit u l'application de E vers F définie pour $(A, B) \in E$ par : $u(A, B) = PA + QB$.

1. Cas où u est bijective

- (a) Démontrer que u est une application linéaire.
- (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

- (c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\text{Ker } u$ et en déduire que u est bijective.
2. **Matrice de u**
 On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F .
- (a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
- (b) Démontrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si, P et Q sont premiers entre eux (donc $\text{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si, P et Q ont au moins une racine commune complexe).
3. **Racine multiple**
- (a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, $\text{Res}(P, P') = 0$.
- (b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

II. Applications

4. Équation de Bézout

Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

- (a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
- (b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$PA_0 + QB_0 = 1.$$

Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u puis donner un couple solution.

- (c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$PA + QB = 1.$$

On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

5. Équation d'une courbe

- (a) On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^2 - t + 1 \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Étudier et construire la courbe Γ , on précisera les branches infinies.

- (b) On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose, pour $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établir que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

alors les fonctions polynômes A et B ont une racine commune.

En déduire qu'un point M de coordonnées (x, y) appartenant à la courbe Γ vérifie :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

- (c) Expliquer brièvement et sans calcul, à partir de la matrice de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, la nature de la courbe d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

6. Nombre algébrique

En utilisant les polynômes

$$P(X) = X^2 - 3 \quad \text{et} \quad Q_y(X) = (y - X)^2 - 7,$$

déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.
Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

Fin de l'énoncé

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages.

Notations :

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

Objectifs :

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et un procédé de calcul éventuel de J_m .

La partie I est consacrée à l'étude de la fonction φ pour obtenir un résultat qui concerne J_1 .

L'étude de l'existence de J_m fait l'objet de la partie II.

La partie III voit la mise en œuvre d'un procédé de calcul des intégrales J_m (lorsqu'elles convergent).

PARTIE I

Étude de la fonction φ

Rappel : $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos t$ (respectivement $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$).

I.1/ Étude des fonctions d et δ .

I.1.1/ Étudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos t}{t} \leq \alpha$.

I.1.2/ Étudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2} \leq \beta$.

I.2/ Existence de la fonction φ sur $[0 ; +\infty[$.

Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$.

I.3/ Limite de la fonction φ en $+\infty$.

I.3.1/ Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2/ Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser I.1.2).

I.4/ Caractère C^k de la fonction φ .

I.4.1/ Montrer que la fonction φ est continue sur $[0 ; +\infty[$.

I.4.2/ Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur $]0 ; +\infty[$ (on pourra utiliser I.1.1).

I.4.3/ Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

I.4.4/ Montrer que la fonction φ est de classe C^2 sur $]0 ; +\infty[$.

I.4.5/ Expliciter $\varphi''(x)$ pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

I.4.6/ Expliciter $\varphi'(x)$ pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

I.5/ Expression explicite de fonction $\varphi(x)$.

I.5.1/ Déterminer la limite de $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.5.2/ Expliciter une primitive de la fonction : $x \mapsto \ln(x^2+1)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.5.3/ Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

I.5.4/ Déterminer $\varphi(0)$.

PARTIE II

Étude de l'existence de J_m

Rappel : $J_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ et $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

II.1/ Étude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ pour tout entier naturel non nul m .

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2/ Étude de J_1 .

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1 - \cos)' = \sin$).

II.3/ Étude de l'existence de I_k .

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.4/ Étude de la nature de J_m

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et tout entier relatif k , on note : $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

II.4.1/ Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

II.4.2/ En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p .

II.4.3/ Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$ pour p entier naturel non nul ?

PARTIE III

Calcul de J_{2p+1}

III.1/ Un développement de Fourier.

On désigne par x un nombre réel fixé, non multiple entier de π , par h_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, 2π -périodique et vérifiant : $h_x(t) = \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)$ pour tout $t \in]-\pi; \pi]$.

III.1.1/ Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(h_x)$ et $b_n(h_x)$ de la fonction h_x .

On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$a_n(h_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(h_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(t) \sin(nt) dt.$$

III.1.2/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2}$ et déduire de III.1.1 la valeur de la somme : $\frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2}$.

III.2/ Étude d'un procédé de calcul.

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[-1; 1]$ à valeurs réelles ; on suppose de plus que f est impaire et dérivable en 0.

Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$\cdot \gamma_n = \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{f(\sin t)}{t} dt,$$

$$\cdot u_n \text{ l'application de } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } u_n(t) = (-1)^n \frac{2t f(\sin t)}{t^2 - n^2 \pi^2},$$

$$\cdot \mu_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t) dt.$$

III.2.1/ Déterminer la limite de γ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

III.2.2/ Etablir (pour tout entier naturel non nul n) une relation entre γ_n et μ_n .

III.2.3/ Établir la convergence, pour tout t appartenant à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$.

Désormais on note $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ **pour tout** t **appartenant à** $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

III.2.4/ Montrer que la fonction S est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

III.2.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \gamma_n$ et l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n$.

III.2.6/ Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$ et l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt.$$

III.2.7/ Justifier la convergence des intégrales généralisées $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t} dt$.

III.2.8/ Exprimer la différence $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

III.3/ Application au calcul de J_{2p+1} .

III.3.1 / En utilisant les résultats obtenus en III.1 et III.2 retrouver la valeur de J_1 (déjà obtenue en II.2).

III.3.2/ Calculer J_3 .

III.3.3/ Plus généralement expliciter J_{2p+1} pour tout entier naturel p .

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures***Les calculatrices sont autorisées.*

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

*Le sujet comporte 5 pages.*Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Etant donné une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice A . La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On note I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Objectifs

On considère des endomorphismes autoadjoints dont la matrice, relativement à une base orthonormale, est à coefficients tous positifs ou nuls. Avec une hypothèse supplémentaire sur les coefficients de la matrice, on fait établir des propriétés sur les valeurs propres et sur les vecteurs propres de ces endomorphismes.

La première partie est calculatoire et conduit à traiter un exemple des résultats généraux du problème.

Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés des endomorphismes autoadjoints particuliers que l'on étudie. La question II.1 porte sur l'étude de la norme subordonnée d'applications linéaires ; les questions suivantes de la partie II sont indépendantes des résultats de la question II.1.

Les deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème on désigne par n un entier de $\mathbb{N}^*$.

Les résultats servant à résoudre une question et provenant d'une question précédente, devront être justifiés par un renvoi à la question dont ils sont déduits.

PARTIE I

I.1. Soit θ un réel. On considère la suite réelle $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_1 = \sin(\theta),$$

$$-2x_1 \cos(\theta) + x_2 = 0,$$

$$\text{et pour tout } p \geq 1, \quad x_p - 2x_{p+1} \cos(\theta) + x_{p+2} = 0.$$

I.1.1. Déterminer x_2 . Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ expliciter x_p en fonction de p et de θ .

I.1.2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, à quelle condition sur θ a-t-on $x_{n+1} = 0$?

Pour t réel, on note $A_n(t) = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

(1) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les coefficients de la diagonale sont $a_{i,i} = 2t$;

(2) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|i - j| = 1$, $a_{i,j} = 1$;

(3) dans tous les autres cas $a_{i,j} = 0$.

On note $d_n(t) = \det(A_n(t))$.

I.2. Quelques valeurs de $d_n(t)$.

I.2.1. Calculer $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$, $d_4(t)$.

I.2.2. Pour $n \geq 3$, établir une relation entre $d_n(t)$, $d_{n-1}(t)$ et $d_{n-2}(t)$. En déduire que d_n est un polynôme en t , déterminer son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

I.3. On suppose $|t| < 1$ et on note $t = \cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$.

I.3.1. Montrer que $d_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

I.3.2. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $d_n(\cos(\theta)) = 0$.

I.4. On note $\chi_n(\lambda) = \det(A_n(0) - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(0)$.

I.4.1. Exprimer $\chi_n(\lambda)$ en fonction de d_n et de λ .

I.4.2. Déduire de I.3.2. que la matrice $A_n(0)$ possède n valeurs propres distinctes et donner ces valeurs propres. Montrer que la plus grande valeur propre est $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

I.4.3. En utilisant I.1.2, déterminer un vecteur propre de la matrice $A_n(0)$ associé à la valeur propre $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, dont toutes les composantes sont strictement positives.

PARTIE II

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$.   tant donné deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, on note $(u|v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u . Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F ; on admettra la propriété $(F^\perp)^\perp = F$.

On note $S = \{u \in \mathbb{R}^n / \|u\| = 1\}$. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres, réelles ou complexes, de f , c'est-à-dire le spectre de f .

II.1. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, on note $\|f\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|f(u)\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de l'endomorphisme f .

II.1.1. Soit φ un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Calculer $\|\varphi\|$.

II.1.2. Soit δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base $\mathfrak{B}$ par la matrice diagonale $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dont les coefficients de la diagonale sont les α_i . Montrer que $\|\delta\| = \max_{i \in [1, n]} |\alpha_i|$.

II.1.3. En déduire que lorsque f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ on a $\|f\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda|$.

Les questions suivantes de la partie II sont indépendantes de la question II.1.

Dans la suite du problème, on note l un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

II.2. Propriété de la plus grande valeur propre de l . On note Φ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\Phi(u) = (l(u)|u)$.

II.2.1. Montrer que Φ est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la restriction de l'application Φ à l'ensemble S admet un maximum.

On note v un vecteur de S tel que $\Phi(v) = \max_{u \in S} \Phi(u)$. Dans la suite de la question II.2, le vecteur v est fixé.

II.2.2. Soit u un vecteur de S orthogonal à v et soit t un réel.

Déterminer un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w = \frac{v + tu}{\alpha}$ appartienne à S .

En comparant $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$, montrer que $(l(v)|u) = 0$.

En déduire que le vecteur v est un vecteur propre de l .

On note ρ la valeur propre de l associée au vecteur propre v .

II.2.3. Soit λ une valeur propre quelconque de l et soit x un vecteur de S qui est un vecteur propre de l pour la valeur propre λ .

Comparer $\Phi(x)$ et λ .

Déduire des résultats précédents que $\lambda \leq \rho$.

On a donc montré que $\rho = \max_{\lambda \in \text{Sp}(l)} \lambda = \max_{u \in S} \Phi(u)$ et que si un vecteur v de S vérifie

$\Phi(v) = \max_{u \in S} \Phi(u)$, alors $l(v) = \rho v$.

Dans la suite du problème, on suppose que la matrice $A = (a_{i,j})$ de l'endomorphisme autoadjoint l , relativement à la base orthonormale $\mathfrak{B}$, vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,j} \geq 0$;
- (2) il n'existe pas de partition de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $\llbracket 1, n \rrbracket = I \cup J$, $I \cap J = \emptyset$ avec I et J non vides et telle que pour tout $(i, j) \in I \times J$, on ait $a_{i,j} = 0$.

Étant donné un vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on écrit $x \geq 0$ (respectivement $x > 0$) si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

on a $x_i \geq 0$ (respectivement $x_i > 0$). On note x^+ le vecteur $x^+ = \sum_{i=1}^n |x_i| e_i$.

Dans la suite du problème, on note $\rho = \max_{\lambda \in \text{Sp}(l)} \lambda$.

II.3. Signe de ρ .

II.3.1. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Exprimer $\Phi(x)$ en fonction des scalaires

$a_{i,j}$ et x_i . En déduire l'inégalité $|\Phi(x)| \leq \Phi(x^+)$.

II.3.2. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de S tel que $\rho = \Phi(x)$. Montrer que $\rho = \Phi(x^+)$. En déduire que $\rho \geq 0$.

II.4. Soit λ une valeur propre quelconque de l et soit x un vecteur de S tel que $l(x) = \lambda x$. Montrer que $|\lambda| \leq \rho$.

On a donc $\rho = \max_{\lambda \in \text{Sp}(l)} |\lambda|$.

II.5. Soit x un vecteur de S tel que $l(x) = \rho x$. Montrer que $l(x^+) = \rho x^+$, puis montrer que $x^+ > 0$ (pour montrer que $x^+ > 0$, on pourra raisonner par l'absurde et se souvenir que la matrice A de l'endomorphisme l vérifie la condition (2)).

II.6. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux vecteurs non nuls tels que $l(x) = \rho x$ et $l(y) = \rho y$.

Justifier que $y_1 \neq 0$. En considérant le vecteur $z = x - \frac{x_1}{y_1} y$, montrer que le sous-espace propre de l associé à la valeur propre ρ est de dimension 1.

II.7. Soit x un vecteur propre de l associé à une valeur propre λ . On suppose $x > 0$. Montrer que $\lambda \geq 0$. Montrer que $\lambda = \rho$.

II.8. On suppose $n \geq 3$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que

- (1) $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$;
- (2) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|i - j| = 1$, $a_{i,j} = 1$;
- (3) dans tous les autres cas $a_{i,j} = 0$.

Déduire des questions précédentes la plus grande valeur propre de la matrice A .

Fin de l'énoncé.



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures***Les calculatrices sont interdites*

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations et objectifs

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n , $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. I_n désigne la matrice identité d'ordre n et pour toute matrice A , tA désigne la transposée de A .

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On rappelle que pour toute matrice symétrique réelle d'ordre n , il existe P appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle d'ordre n telles que $S = PDP^{-1}$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot)$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définies positives.

Soit A une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à t associe la matrice $A(t)$ de coefficient d'indices i, j , $a_{ij}(t)$. Si pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'application $t \mapsto a_{ij}(t)$ est intégrable sur I , on note $\int_I A(t) dt$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient d'indices i, j , $\int_I a_{ij}(t) dt$.

L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de fonction matriciellement croissante.

Dans la première partie on étudiera les notions de matrices symétriques réelles positives et définies positives, puis on définira sur l'ensemble des matrices symétriques réelles une relation d'ordre. Diverses propriétés de cette relation seront utilisées dans les deux parties suivantes.

Dans la seconde partie, on définira ce qu'est une fonction matriciellement croissante (ou décroissante) et on étudiera des exemples de fonctions homographiques et puissances.

La troisième et dernière partie fera appel à une représentation intégrale et permettra de montrer que la fonction logarithme népérien et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in]0, 1[$ sont matriciellement croissantes.

Dans tout le problème, S désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n .

PARTIE I

I.1 Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tMSM appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.2 Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

I.3 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Est-elle symétrique définie positive ?

I.4 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle symétrique définie positive ?

I.5 Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si T est une matrice symétrique réelle semblable à S , alors T appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.6 a) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est valeur propre de M , alors λ est non nul et λ^{-1} est valeur propre de M^{-1} . En déduire le spectre de M^{-1} en fonction du spectre de M .

b) Montrer que si S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et S^{-1} appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.7 Montrer que si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = 0$, alors toute valeur propre de S est nulle et $S = 0$.

I.8 On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\leq$ et $<$, définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 < S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

a) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$ et $S_2 \leq S_1$, montrer que $S_1 = S_2$.

b) Si $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$, montrer que l'on n'a pas nécessairement $S_1 \leq S_2$ ou $S_2 \leq S_1$.

c) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$, $S_1 \neq S_2$, a-t-on $S_1 < S_2$?

d) Si S_1 et S_2 sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$ et α un réel, comparer les matrices αS_1 et αS_2 pour la relation $\leq$.

e) Si S , S_1 et S_2 sont trois matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_1 \leq S_2$, comparer les matrices $S + S_1$ et $S + S_2$ pour la relation $\leq$.

I.9 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $S_1 \leq S_2$. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M$.

I.10 On suppose $I_n \leq S$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de S ? En déduire que S est inversible.

b) Que peut-on dire des valeurs propres de S^{-1} ? En déduire : $0 < S^{-1} \leq I_n$.

I.11 a) Montrer que s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$, alors S est symétrique définie positive.

b) Montrer que si S est diagonale définie positive, alors il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

c) Montrer que ce résultat subsiste si S est symétrique définie positive non diagonale.

I.12 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $0 < S_1 \leq S_2$ et $M_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = {}^tM_1M_1$. Montrer que $I_n \leq {}^t(M_1^{-1})S_2M_1^{-1}$, en déduire que S_2 est inversible et $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$.

PARTIE II

II.1 Dans cette question seulement, on suppose d'une part que n est supérieur ou égal à 2 et d'autre part que S possède exactement deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de multiplicités respectives n_1 et n_2 .

a) Montrer qu'il existe un unique couple (P_1, P_2) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases}$$

Expliciter les deux matrices P_1, P_2 en fonction de $S, I_n, \lambda_1, \lambda_2$ et montrer qu'elles sont symétriques.

b) Si P est une matrice orthogonale telle que $P^{-1}SP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)$ (où λ_1 est répété n_1 fois et λ_2 n_2 fois), exprimer P_1 (respectivement P_2) en fonction de P , de P^{-1} et d'une matrice diagonale. En déduire que $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ et donner les rangs de P_1 et P_2 en fonction de n_1 et n_2 .

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2$ et en déduire pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ l'expression de $Q(S)$ en fonction de $P_1, P_2, Q(\lambda_1)$ et $Q(\lambda_2)$.

d) Soit S_0 la matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf les coefficients diagonaux qui valent 2. Vérifier que S_0 admet exactement deux valeurs propres et déterminer les matrices P_1 et P_2 associées.

II.2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont S est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $E_1, E_2, \dots, E_p$ les sous-espaces propres de u respectivement associés.

a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (u(x) | y) = (x | u(y))$.

b) Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, les sous-espaces propres E_i et E_j sont orthogonaux. Que vaut la somme directe $\bigoplus_{i=1}^p E_i$?

c) Si $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur E_i . La matrice de p_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée P_i .

i) Montrer que la matrice P_i est symétrique.

ii) Si x_j est élément de E_j , évaluer $p_i(x_j)$ et en déduire que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j, P_i P_j = 0$.

d) Montrer que $\sum_{i=1}^p P_i = I_n$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i = S$.

La décomposition $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ est dite décomposition spectrale de S .

II.3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont dans I , on définit la matrice $f(S)$ par

$$f(S) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) P_i$$

a) Montrer que $Sf(S) = f(S)S = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\lambda_i) P_i$.

b) Si X est vecteur propre de S pour la valeur propre λ_k , montrer que X est aussi vecteur propre de $f(S)$ et préciser la valeur propre correspondante.

c) Calculer $\cos(\pi S_0)$ où S_0 est la matrice introduite en **II.1 d)**.

L'application f sera dite matriciellement croissante (respectivement matriciellement décroissante) sur I si pour tout $n \geq 1$ et tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont dans I :

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B) \quad (\text{respectivement } f(B) \leq f(A))$$

II.4 a) Soit $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. A quelle condition sur la matrice S peut-on définir $g(S)$? Montrer qu'alors $g(S) = S^{-1}$ et en déduire que g est matriciellement décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $h :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+1}$. A quelle condition sur la matrice S peut-on définir $h(S)$? Montrer qu'alors $h(S) = I_n - (S + I_n)^{-1}$ et en déduire que h est matriciellement croissante sur $] -1, +\infty[$.

II.5 Pour $\alpha > 0$, soit $p_\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et pour tout x réel, soit $A(x)$ et $B(x)$ les matrices définies par :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ch } x} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que pour tout x réel, $B(x) \leq A(x)$.

b) Pour $x \neq 0$, déterminer explicitement la décomposition spectrale de $A(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$.

d) Montrer que $p_\alpha(B(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\text{ch } x)^\alpha} \end{pmatrix}$.

e) Calculer $\det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))]$. En donner un équivalent simple au voisinage de $x = 0$ et en déduire que pour $\alpha > 1$, p_α n'est pas matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

PARTIE III

On suppose désormais que S est définie positive.

III.1 a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$ une application telle que pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $t \mapsto a_{ij}(t)$ est intégrable sur I . Montrer que pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t \mapsto {}^t X A(t) X$ est intégrable sur I et :

$$\int_I {}^t X A(t) X dt = {}^t X \left(\int_I A(t) dt \right) X$$

b) Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ intégrable sur I et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $\int_I f(t)M dt$ et montrer que :

$$\int_I f(t)M dt = \left(\int_I f(t) dt \right) M$$

III.2 Soit $\alpha \in]0, 1[$ et F la fonction donnée par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x)$ existe.

b) Montrer, en utilisant par exemple le changement de variable $u = xt$, qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = Cx^\alpha$.

c) Montrer que pour tout $t > 0$, $S^{-1} + tI_n$ est inversible et $(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i$.

d) En déduire $F(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + tI_n)^{-1} dt$.

e) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall t > 0, {}^tX(A^{-1} + tI_n)^{-1}X \leq {}^tX(B^{-1} + tI_n)^{-1}X$$

En déduire que F est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$, puis que pour $\alpha \in]0, 1[$, la fonction p_α introduite en **II.5** est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

III.3 a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \ln x$.

b) En déduire $\ln S = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (S + tI_n)^{-1} \right) dt$.

c) Montrer que la fonction $\ln$ est matriciellement croissante sur $]0, +\infty[$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures****Les calculatrices sont interdites**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans tout ce problème, on note F la fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad F(x, z) = \exp \left(-zx - \frac{x^2}{2} \right),$$

et f la fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x, 0) = \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

PARTIE I

I.1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé, quelconque.

I.1.1. Ecrire les développements en série entière de la variable réelle x des fonctions $x \mapsto \exp(-zx)$ et $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On précisera les rayons de convergence des séries entières obtenues.

I.1.2. A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) x^n,$$

où A_n est une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction polynomiale H_n par $H_n = (-1)^n n! A_n$.

Donner les expressions de $H_0(z)$ et de $H_1(z)$ en fonction de z .

I.1.3. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x, z)$ à l'aide de F .

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ on a $H_{n+2}(z) = zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$.

Donner les expressions de $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$ en fonction de z .

I.2.

I.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1)\frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$.

I.2.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \frac{(-1)^n}{f} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.

Exprimer $K_0(x)$ et $K_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $H_n = K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.3.

I.3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.

I.3.2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0$.

I.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction φ_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$, où λ_n est un nombre réel que l'on déterminera.

I.5. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose :

$$I_{p,q} = I_{q,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx = (-1)^{p+q} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x) H_q(x) f(x) dx.$$

I.5.1. Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est bien définie pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

On admettra désormais que $I_{0,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi}$.

I.5.2. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ un couple de nombres entiers. A l'aide d'une intégration par parties dûment justifiée, montrer que $I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}$.
En déduire la valeur de $I_{p,q}$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On distinguera les cas $q \neq p$ et $q = p$.

PARTIE II

Soit $\hat{f}$ la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 2i\pi\nu) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

II.1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

II.2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2\nu\hat{f}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.

On pourra par exemple, entre autres méthodes, utiliser l'égalité $-t = 2i\pi\nu + (-2i\pi\nu - t)$.

II.3.2. Calculer $\hat{f}(0)$. En déduire l'expression de $\hat{f}(\nu)$ en fonction de ν .

PARTIE III

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$u_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = f(x - 2n\pi) + f(x + 2n\pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit U_n la fonction définie par $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On remarquera que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $U_n(x) = \sum_{k=-n}^n f(x - 2k\pi)$.

III.1. Soit A un nombre réel strictement positif.

III.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \frac{A}{2\pi}$. Etudier les variations sur le segment $[-A, +A]$ des fonctions $x \mapsto f(x - 2n\pi)$ et $x \mapsto f(x + 2n\pi)$.

En déduire que pour tout $x \in [-A, +A]$, on a $0 \leq u_n(x) \leq 2 \exp\left(-\frac{(2n\pi - A)^2}{2}\right)$.

III.1.2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $[-A, +A]$.

III.2.

III.2.1. Déduire de la question précédente que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note U sa somme.

III.2.2. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$. On admettra que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.3. Montrer que U est paire.

III.2.4. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_n(x + 2\pi)$ au moyen de $U_n(x)$, $f(x + 2(n + 1)\pi)$ et $f(x - 2n\pi)$. En déduire que U est périodique de période 2π .

III.3. Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ la série de Fourier de U .

III.3.1. Justifier l'égalité de U avec la somme de sa série de Fourier.

III.3.2. Montrer que l'on a $\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx = \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x) \cos nx \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

III.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos nx \, dx$.

En déduire que $\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos nx \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \, dx$.

III.3.4. Déduire de ce qui précède une expression de a_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de $\hat{f}$ et de n , puis exprimer a_n en fonction de n .

Fin de l'énoncé



MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Exercice

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n(r) = r^n \cos(n\theta)$.

- (b) Calculer la somme de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.

2. On pose $f(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$.

- (a) Justifier l'existence de $f(r, \theta)$ pour $r \in]0; 1[$ et tout θ réel.
 (b) Dédurre de la question précédente l'égalité :

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) .$$

Problème

Première partie

1. Résoudre, sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = 0$.

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer, sur l'intervalle $I =]0; \frac{\pi}{2}[$, la solution générale de l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = (\sin(2t))^{3/2}$.

Deuxième partie

a désigne un nombre réel strictement positif, k un nombre réel.

Si M et N sont deux points du plan, on note $d(M, N)$ la distance euclidienne des points M et N .

$\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par A et B les points de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (C) , formée de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) , tels que : $d(A, M)d(B, M) = k^2$.
 (b) Écrire cette équation en coordonnées polaires : $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$.
2. (a) En posant $R = r^2$, déterminer l'équation vérifiée par R .
 (b) Discuter l'existence et le signe des solutions réelles de cette équation en R . Préciser en particulier une condition portant sur a, k et θ pour que cette équation admette deux racines positives.
 Indication : il n'est pas utile de calculer explicitement les racines, on connaît leur somme et leur produit.
 (c) Montrer que, dans le cas où cette relation est satisfaite, la courbe (C) est la réunion de 4 courbes admettant une équation polaire de la forme $\theta \rightarrow r_i(\theta)$, r_i étant une fonction. Déterminer les fonctions r_i .
 (d) Déterminer les diverses symétries de la courbe (C) et en déduire un intervalle d'étude qui permet d'obtenir toute la courbe par des opérations géométriques que l'on précisera. Le tracé n'est pas demandé.
3. (a) Vérifier que dans le cas particulier où $k = \pm a$, une équation polaire de la courbe (C) est : $r(\theta) = \pm a\sqrt{2 \cos(2\theta)}$.
 Étudier les diverses symétries de la courbe.
 (b) Donner une allure de la courbe (C) dans le cas particulier où $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Troisième partie

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

θ appartenant à $[0; 2\pi[$, on désigne par $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$, ou simplement $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{u}(\theta) &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\end{aligned}$$

Soit un point M de $\mathbb{R}^3$, on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (r, θ) les coordonnées polaires du point m .

On appelle coordonnées cylindriques du point M le triplet (r, θ, z) et repère cylindrique le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

1. (a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) d'un point M en fonction de ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
 (b) On suppose que $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exprimer X, Y, Z en fonction de x, y, z et θ .
 (c) Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ puis les vecteurs $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(d) Que peut-on dire du repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$?

On désigne par (Σ) la surface d'équation cartésienne : $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. (a) Déterminer une équation de la surface (Σ) en coordonnées cylindriques. En déduire une nappe paramétrée, $(r, \theta) \rightarrow M(r, \theta)$, dont l'image est la surface (Σ) .
Pour toute la suite du problème, on identifie la nappe paramétrée et la surface.
- (b) Montrer que la surface est contenue dans la partie de $\mathbb{R}^3$ comprise entre deux plans parallèles dont on donnera une équation.
- (c) Montrer que la surface (Σ) est une réunion de droites parallèles au plan d'équation $z = 0$.
3. (a) Montrer qu'un vecteur normal $\vec{N}(r, \theta)$ à la nappe paramétrée $(r, \theta) \rightarrow M(r, \theta)$, $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times]0; 2\pi[$, est égal à : $r\vec{k} + 2\sin(2\theta)\vec{v}(\theta)$.
- (b) En déduire une équation, dans le repère cylindrique, du plan tangent Π_M à (Σ) au point M de coordonnées cylindriques $(r, \theta, \cos(2\theta))$.
- (c) Retrouver l'équation de Π_M en utilisant uniquement les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}(r, \theta)$.
- (d) Montrer que l'intersection de (Σ) et de Π_M contient la droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindriques $(0, 0, \cos(2\theta))$.
4. Déterminer une équation du plan tangent à (Σ) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quatrième partie

On dit qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$, définie par un arc paramétré $t \rightarrow M(t)$, défini d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, est tracée sur la surface (Σ) si et seulement si le point $M(t)$ appartient à (Σ) , pour tout t appartenant à I .

1. (a) L'arc paramétré Γ est défini en coordonnées cylindriques par une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, $t \rightarrow (r(t), \theta(t), z(t))$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne à la surface (Σ) .
On désigne par (Γ) la courbe formée par l'ensemble des images de l'arc paramétré Γ .
- (b) On suppose que l'arc paramétré $t \rightarrow M(t)$ est de classe C^1 au moins (ce qui signifie que les fonctions $t \rightarrow r(t)$, $t \rightarrow \theta(t)$ et $t \rightarrow z(t)$ sont de classe C^1) et que la courbe (Γ) est tracée sur la surface (Σ) . Soit M un point régulier de la courbe. Démontrer que la tangente en M à la courbe (Γ) est contenue dans le plan tangent en M à la surface (Σ) .
- (c) Retrouver le résultat de la question 3.(d) de la troisième partie à l'aide de la question précédente.
2. On suppose, jusqu'à la fin du problème, que (Γ) est définie par un arc paramétré de classe C^2 au moins.
On suppose de plus que la courbe est définie par une fonction $\theta \rightarrow r(\theta)$, c'est-à-dire, dans le repère cylindrique, par l'arc paramétré : $\theta \rightarrow M(r(\theta), \theta, \cos(2\theta))$. Cette courbe est donc tracée sur la surface (Σ) .

Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$ dans le repère cylindrique, puis des vecteurs $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)$.

3. En tout point $M(\theta)$ de l'arc paramétré Γ tel que les vecteurs $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(\theta)$ soient linéairement indépendants, on appelle plan osculateur à la courbe (Γ) en ce point, le plan affine : $\left(M(\theta), \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta), \frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(\theta) \right)$, qui sera noté P_M .

On appelle ligne asymptotique de la surface (Σ) une courbe tracée sur (Σ) telle qu'en tout point M de la courbe, le plan tangent Π_M à la surface coïncide avec le plan osculateur P_M à la courbe.

- (a) À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur les vecteurs $\vec{N}(r(\theta), \theta)$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(\theta)$, la courbe (Γ) est-elle une ligne asymptotique de (Σ) ?
- (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) , sous forme d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction r .
- (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) portant sur les vecteurs $\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{d\vec{N}}{d\theta}(r(\theta), \theta)$. Retrouver alors l'équation différentielle précédente.
4. Déterminer les projections sur le plan horizontal des lignes asymptotiques de (Σ) .

Fin de l'énoncé

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Remettre à chaque candidat une feuille de papier millimétré

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On considère le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \vec{i}, \vec{j}$.

Pour les dessins, on munira la feuille de papier millimétré d'une origine O placée au centre de la feuille et on représentera le vecteur $\vec{m}$ par le point M tel que $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$.

Soit $\mathcal{B} = \vec{I}, \vec{J}$ une autre base de $\mathcal{P}$, **non nécessairement orthonormée**. Si $\vec{m}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$, on notera x, y ses coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ et u, v ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On notera X et U les matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et on notera P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

On s'intéresse à la courbe γ d'équation $u^2 + v^2 = 1$ (on notera qu'il s'agit d'une équation donnée dans la base $\mathcal{B}$).

La transposée d'une matrice A se notera tA .

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel : si Y et Z sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et

$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ on pose $Y|Z = {}^tYZ = y_1z_1 + y_2z_2$; on définit également : $\|Y\| = \sqrt{Y|Y}$ la norme de Y .

Préliminaire

Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour faire certains calculs à condition de le mentionner sur votre copie

P1a – Donner une relation entre les matrices P , X et U .

P1b – Considérons l'exemple suivant : $\vec{I} = 2\vec{i}$ et $\vec{J} = \vec{j}$. Justifier sommairement sans utiliser la relation ci-dessus qu'on a alors :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}x \\ v = y \end{cases}.$$

Écrire la matrice P correspondante, puis vérifier sur cet exemple la validité de la formule obtenue au P1a.

P2 – Quelle est la nature de γ lorsque $\mathcal{K}$ est orthonormée ?

P3a – Pour $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donner la matrice inverse $Q_0 = P_0^{-1}$.

P3b – Calculer la matrice $A_0 = {}^tQ_0Q_0$. Déterminer les valeurs propres de A_0 , puis donner une matrice orthogonale R_0 et une matrice diagonale D_0 telles que $R_0^{-1}A_0R_0 = D_0$.

P4 – Soient trois réels a , b et c vérifiant $ab - c^2 > 0$. Justifier sommairement que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy = 1$ (dans $\mathcal{K}_0$) est soit une ellipse, soit un cercle, soit l'ensemble vide.

Partie I

Étude d'un exemple

On suppose dans cette partie que $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On appelle $D_{\vec{I}}$ et $D_{\vec{J}}$ les droites engendrées respectivement par $\vec{I}$ et par $\vec{J}$. Soit s la symétrie par rapport à $D_{\vec{I}}$ et de direction $D_{\vec{J}}$.

I.1 – Donner les coordonnées u', v' dans $\mathcal{K}$ de $s \vec{m}$ en fonction des coordonnées u, v de $\vec{m}$ dans $\mathcal{K}$.

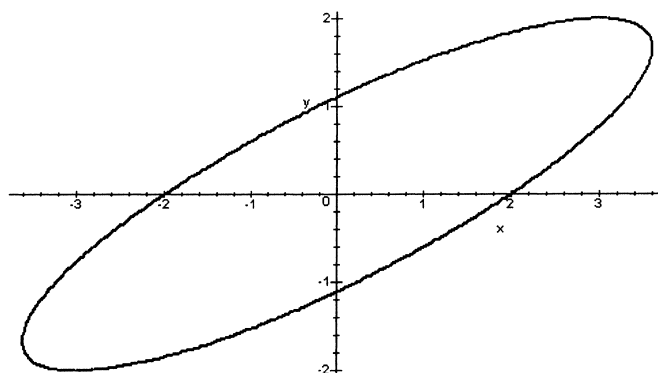
I.2 – On appelle γ^+ l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \geq 0$, ainsi que γ^- l'intersection de γ avec le demi-plan d'équation $v \leq 0$.

Justifier que $\gamma^- = s \gamma^+$, puis que γ est la réunion de γ^+ et de $s \gamma^+$.

I.3 – Prouver que si $\vec{m} \in \gamma$, alors $u \in]-1; 1[$.

I.4 – Déterminer alors une fonction φ définie sur $]-1; 1[$ telle que γ^+ soit la courbe représentative de φ dans la base $\mathcal{K}$.

I.5 – Le dessin de γ est le suivant :



Expliquer en quoi les résultats des questions I.1 à I.4 permettent de l'obtenir. Décrire quelle est la partie du dessin correspondant à γ^+ .

I.6 – Donner l'expression des coordonnées u, v d'un vecteur $\vec{m}$ dans $\mathcal{B}$ en fonction de ses coordonnées x, y dans $\mathcal{B}_0$. En déduire qu'une équation de γ est :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{13}{16}y^2 = 1.$$

I.7 – Justifier que γ est une ellipse dont on donnera un vecteur directeur de chacun des deux axes, les demi-longueurs a et b du grand et du petit axe, ainsi que l'excentricité e . On pourra utiliser la réduction de la matrice A_0 de la question P3.

Partie II

Détermination de la nature de γ dans le cas général

On revient au cas général. La matrice P désigne donc une matrice inversible quelconque d'ordre 2.

II.1 – Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tUU = 1$.

II.2 – On pose $Q = P^{-1}$ et $A = {}^tQQ$. Justifier que $\vec{m} \in \gamma$ si et seulement si ${}^tXAX = 1$.

II.3 – Montrer que A est symétrique. En déduire qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ dans laquelle l'équation de γ est : $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A et où x', y' désigne les coordonnées de $\vec{m}$ dans $\mathcal{B}'$.

II.4 – Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Montrer que $\|QX\|^2 = \lambda \|X\|^2$. En déduire que les valeurs propres de A sont positives.

II.5 – Montrer que A est inversible ; en déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

II.6 – Justifier que γ est un cercle ou une ellipse dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres de A .

Partie III

Une construction géométrique de γ

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{K}_0$ est P et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.
On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant :

Si C est une courbe de $\mathcal{P}$ ayant pour tangente T en $\vec{a}$, et si φ est un endomorphisme bijectif de $\mathcal{P}$, alors $\varphi(C)$ est une courbe qui admet $\varphi(T)$ pour tangente en $\varphi(\vec{a})$.

On rappelle par ailleurs qu'on identifie le vecteur $\vec{a}$ avec le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

III.1 – Soit $\vec{m}$ de coordonnées x, y dans $\mathcal{K}_0$. On appelle u', v' les coordonnées de $f(\vec{m})$ dans $\mathcal{K}$.
Établir que $x, y = u', v'$.

III.2 – En déduire que $\gamma = f(\mathcal{C})$.

III.3 – En utilisant la droite D d'équation $x = 1$ (dans $\mathcal{K}_0$), montrer que la droite Δ d'équation $u = 1$ (dans $\mathcal{K}$) est tangente à γ au point de coordonnées $(1, 0)$ dans $\mathcal{K}$.

Déterminer de même la tangente à γ en trois autres points.

III.4 – Soit $\lambda \in]0; 1[$.

On considère les deux droites $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ définies comme suit (les coordonnées sont données dans $\mathcal{K}_0$) :

- $D_{1,\lambda}$ passe par $A(1, 0)$ et par $B_\lambda(1-\lambda, 1)$.
- $D_{2,\lambda}$ passe par $C(-1, 0)$ et par $D_\lambda(0, \lambda)$.

Prouver que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont orthogonales.

Justifier alors que $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont sécantes en un point m_λ de $\mathcal{C}$, puis en déduire une construction du point $n_\lambda = f(m_\lambda)$.

III.5 – Construire par cette méthode sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, l'ellipse obtenue pour la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On prendra pour ce faire différentes valeurs de λ entre 0 et 1 et on complétera la courbe obtenue par symétrie. On choisira 2 cm pour unité. On fera également figurer certaines tangentes remarquables.

III.6 – Soit K un parallélogramme et soit $\mathcal{A}(K)$ son aire. Montrer que l'aire de $f(K)$ est $|\det f| \mathcal{A}(K)$.

On admet que plus généralement, si K est une partie de $\mathcal{P}$ d'aire $\mathcal{A}(K)$ finie, alors l'aire de $f(K)$ est $|\det f| \mathcal{A}(K)$.

En déduire l'aire de la partie bornée du plan délimitée par γ .

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on note B sa base canonique dont on rappelle qu'elle est orthonormale pour ce produit scalaire. On note également I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Soit $u = (-1, 0, 1)$ et $v = (-2, 1, 0)$ deux vecteurs de E .

On définit les sous-espaces vectoriels de E suivants : $F = \text{vect}(u)$, $G = \text{vect}(u, v)$ et G' le plan vectoriel de E d'équation cartésienne $x + 2y + z = 0$.

1a. Déterminer la dimension de G .

1b. Soit p_F la projection orthogonale sur F , déterminer $p_F(v)$.

1c. On pose $w = v - p_F(v)$, montrer que les vecteurs u et w sont orthogonaux.

1d. En déduire une base orthonormale de G .

1e. Montrer que $G = G'$.

2)

2a. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale de E ?

2b. Déterminer le polynôme caractéristique de M .

2c. Montrer que M admet un sous-espace propre H de dimension 2 et un sous-espace propre K de dimension 1.

2d. Diagonaliser M sous la forme $M = QDQ^{-1}$ où Q est une matrice inversible et D diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

2e. Montrer que H et K sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2f. Déterminer une base orthonormale de H .

2g. Déterminer une matrice P orthogonale telle que $M = PDP^{-1}$ où D est la même matrice qu'à la question 2d.

3)

3a. Soit N une matrice carrée. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir N et tN pour que N soit une matrice orthogonale.

3b. Soit λ et μ deux réels avec $\lambda > 0$, on pose $N = \lambda M + \mu I$.

Exprimer N comme un produit de matrices en fonction de P, P^{-1}, D, I, λ et μ .

3c. En déduire à l'aide de 3a. que N est orthogonale si et seulement si $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = 1$.

3d. Soit g l'endomorphisme de E canoniquement associé à $\frac{1}{3}M + I$. Expliquer pourquoi g est un endomorphisme orthogonal de E . Décrire g en déterminant ses éléments caractéristiques, on pourra pour cela profiter du résultat de la question 3b.

Exercice 2

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de E . **On considère une matrice A de E telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.**

1) Propriétés de A .

1a. Soit un réel $\lambda \neq 0$ et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = \lambda X$. Montrer que $X = 0$.

On pourra pour cela calculer A^2X de deux manières différentes.

1b. En déduire que $\text{sp}(A) \subset \{0\}$.

1c. Calculer le déterminant de A .

1d. En déduire que $\text{sp}(A) = \{0\}$.

1e. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

1f. Montrer que A ne peut pas être symétrique, peut-elle être orthogonale ?

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2a. Que vaut $f^2 = f \circ f$?

2b. En déduire que $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$.

2c. En déduire, à l'aide du théorème du rang, que $\text{rg} f \leq \frac{p}{2}$ puis que le rang de A vaut nécessairement 1 pour $p = 3$.

2d. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice M de première colonne nulle vérifiant $M \neq 0$ et $M^2 = 0$.

3) On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{\alpha A + \beta I \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(A, I)$$

3a. Déterminer la dimension de F .

3b. Montrer que F est stable par produit, c'est-à-dire : $\forall (M, N) \in F^2, MN \in F$.

3c. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \alpha A + \beta I \in F$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$M^2 = xM - \beta^2 I$$

3d. En déduire, pour $\beta \neq 0$, que la matrice $M = \alpha A + \beta I$ est inversible et que son inverse, qu'on donnera, est aussi dans F .

3e. On pose $B = A + I$, montrer que B est inversible, et déterminer B^{-1} en fonction de A et I .

3f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simplifiée de $B^n = (A + I)^n$ en fonction de n , A et I .

4) Application.

Soient a , b et c trois réels. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 3v_n + 6w_n \\ w_{n+1} &= -u_n - v_n - 2w_n \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

4a. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = BX_n$.

4b. On pose $A = B - I$, calculer A^2 .

4c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & 3n \\ 2n & 2n+1 & 6n \\ -n & -n & -3n+1 \end{pmatrix}$.

4d. En déduire l'expression des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n et a, b, c .

4e. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) soient constantes.

4f. Que peut-on dire, lorsque cette condition est vérifiée, du vecteur X_0 par rapport à la matrice B ?

Problème 1

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes. La partie III utilise certains résultats établis dans les parties précédentes.

Partie I. Calcul des intégrales de Wallis.

On appelle intégrales de Wallis, les intégrales I_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Indication : on pourra utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3)

3a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

3b. Déterminer l'expression de I_{2n+1} en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II. Fonctions de Bessel.

L'objectif de cette partie n'est pas la résolution complète des équations différentielles proposées, mais l'étude de certaines de leurs solutions définies sur différents intervalles.

*On rappelle qu'on appelle **solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un intervalle** I , toute application y , définie et deux fois dérivable sur I , vérifiant l'équation différentielle pour tout $x \in I$.*

Soit $p \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux équations différentielles

$$(E_p) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

et

$$(E'_p) \quad x^2 z'' + x(2p+1)z' + x^2 z = 0$$

- 1) Soient y et z deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = x^p z(x)$.
Montrer que y est solution de (E_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $] -\infty, 0[$), si et seulement si z est solution de (E'_p) sur $]0, +\infty[$ (respectivement $] -\infty, 0[$).
- 2) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on note $z(x)$ sa somme.
- 2a. Établir les relations que doivent vérifier les coefficients (a_n) de la série entière pour que z soit solution de (E'_p) sur $] -R, R[$.
- 2b. Vérifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$, et exprimer les coefficients a_{2n} en fonction de n , du paramètre p et de a_0 .
- 2c. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière déterminée précédemment vaut $R = +\infty$.
- 3) Démontrer que pour toute valeur donnée à $a_0 \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} p! \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (n+p)!} a_0 x^{2n}$ est solution de (E'_p) sur $\mathbb{R}$.
- 4) On considère la série entière : $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+p} n! (n+p)!} x^{2n+p}$.
- 4a. À l'aide de **3**), justifier que le rayon de convergence de cette série vaut $R = +\infty$.
On note désormais J_p la somme de cette série vérifiant donc :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (n+p)!} x^{2n}$$
- 4b. Dédurre des questions **1**) et **3**) que J_p est une solution de (E_p) sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- 4c. Expliquer pourquoi J_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- 4d. Montrer que J_p est une solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$, on pourra distinguer le cas $p = 0$.
- 5) Démontrer la relation suivante : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad J_{p+1}(x) = \frac{p J_p(x)}{x} - J'_p(x)$.

Partie III. Etude d'une intégrale à paramètre.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x, t) = \cos(x \sin t)$. On définit alors

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt$$

- 1) Expliquer pourquoi la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Rappeler les théorèmes relatifs à la dérivation d'une intégrale à paramètre, et en déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3)

3a. Donner les expressions de $F'(x)$ et $F''(x)$ sous forme intégrale.

3b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -x[F(x) + F''(x)]$$

4) En utilisant un développement en série entière, montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} \right) dt$$

5) On admet qu'il est possible d'intégrer terme à terme cette expression, et que F vérifie alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} dt$$

À l'aide des résultats des parties I. et II., démontrer que $F = J_0$.

Problème 2

Partie I. Comparaison entre série et intégrale.

1) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. Pour tout entier N tel que $N \geq n_0$, on pose

$$S_N = \sum_{k=n_0}^N f(k) = f(n_0) + \dots + f(N)$$

1a. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$. Montrer que :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

1b. Dédurre de la question précédente que : $S_{N+1} - f(n_0) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq S_N$, puis que

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq S_N \leq f(n_0) + \int_{n_0}^N f(t) dt \quad (*)$$

1c. Soit $X > n_0$. On note N la partie entière de X , c'est-à-dire l'unique entier vérifiant $N \leq X < N+1$. Montrer que :

$$\int_{n_0}^N f(t) dt \leq \int_{n_0}^X f(t) dt \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la suite

$$\left(\int_{n_0}^N f(t) dt \right)_{N \geq n_0} \text{ converge.}$$

1d. Montrer alors que l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$ et la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ sont de même nature.

2) Application à la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2a. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$?

2b. On pose $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

2c. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer à l'aide de (*) que : $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Partie II. Séries de Bertrand.

Dans toute cette partie, α et β sont deux réels, et on pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

1) Supposons $\alpha > 1$.

1a. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.

1b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

1c. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

2) Supposons $\alpha < 1$.

2a. Donner la limite de nu_n .

2b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$.

2c. Une application : donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$.

3) Supposons $\alpha = 1$.

Notons, pour tout $t > 1$, $f_\beta(t) = \frac{1}{t \ln^\beta(t)}$.

3a. Étudier les variations de f_β sur $]1, +\infty[$. Montrer alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que f_β soit décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

3b. Soit $X > n_0$. Calculer, en distinguant le cas $\beta = 1$, $I_\beta(X) = \int_{n_0}^X f_\beta(t) dt$.
Donner alors la nature de $I_\beta = \int_{n_0}^{+\infty} f_\beta(t) dt$ en fonction de β .

3c. En déduire, à l'aide de **I.**, la nature de $\sum_{n \geq 2} u_n$ en fonction de β .

4) À l'aide des résultats de cette partie **II.**, donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que la série $\sum u_n$ converge.

Partie III. Règle de la loupe.

Dans cette partie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \underbrace{u_{2^n} + \dots + u_{2^n}}_{2^n \text{ termes}}$$

Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n \quad \text{et} \quad T_N = \sum_{n=0}^N v_n$$

On fera attention aux indices de départs de sommation dans S_N et T_N .

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il d'entiers i vérifiant : $2^n \leq i \leq 2^{n+1} - 1$?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

3) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$T_N \geq S_{2^{(N+1)}-1}$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2}v_{n+1} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k$$

On pourra commencer par écrire $\frac{1}{2}v_{n+1} = 2^n u_{2^{n+1}}$.

5) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}T_N \leq \frac{1}{2}u_1 + S_{2^N-1}$$

6) À l'aide de 3) et 5), montrer alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

7) Une première application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{(1-\alpha)n}$.

7b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

7c. À l'aide de 6), quel théorème important du cours a-t-on prouvé ?

On pourra traiter séparément les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$.

8) Une deuxième application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout entier $n \geq 2$.

8a. Calculer v_n pour tout entier $n \geq 2$.

8b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge.

8c. Qu'a-t-on redémontré ?

FIN DU SUJET



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures***Les calculatrices sont autorisées.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Les candidats peuvent utiliser la calculatrice pour faire leurs calculs et donner directement la réponse sur la copie.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$ que l'on déterminera.
2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0)$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F .
Si A est une partie compacte de E , démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F .
L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0; \pi]$.

$$\text{On pose } I = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

- (b) Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ vérifiant $I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$.

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ converge et que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n \cdot n!}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

- (b) Si $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\frac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près.

Première partie : Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ impaire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0; \pi[\text{ et } f(0) = f(\pi) = 0.$$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4. Sur un même graphique, uniquement à l'aide d'une calculatrice, tracer sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{10} . Puis sur un autre graphique, tracer sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{20} .

Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?

Cette particularité est appelée phénomène de Gibbs.

5. On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin[(2k+1)t].$$

- (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.$$

Dans la suite de cette question 5., on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset]0; \frac{\pi}{2}[$.

- (b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $T_n(t) \leq M$.
- (c) Démontrer que l'on peut trouver une suite de réels (w_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - S_n(t)| \leq w_n$.

En commençant par observer que $\sin[(2k+1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a, b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$. Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction f ?

6. (a) Calculer $S'_n(t)$ pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S'_n(t)$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- (b) Démontrer que, pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et n entier naturel non nul,
- $$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt \quad \text{puis que} \quad S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}} du.$$
- (c) Démontrer que la suite $(S_n(\alpha_n))_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$.

7. Démontrer que la suite $\left(\sup_{x \in]0; \frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \right)_n$ ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

Pour une fonction f continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π , on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

8. Rappeler le théorème de Parseval (avec les coefficients $c_n(f)$) pour une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π .

Dans le cas où la fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, justifier que si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.

Ce résultat reste-t-il valable si la fonction f est seulement continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π ?

9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} (c_{-p}(f) e^{-ipt} + c_p(f) e^{ipt}).$$

- (a) Justifier que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, exprimer, avec soin, $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

(b) Démontrer que $f = g$.

10. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe C^1 par morceaux.

On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$u_n(f)(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}.$$

(a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.

(b) Démontrer que pour tout t réel,

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).$$

(c) Démontrer, avec soin, que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser vers quelle fonction.

(d) Énoncer le théorème que l'on vient de démontrer.

Le phénomène de Gibbs peut-il se produire pour cette fonction f ?

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

Notations et objectifs :

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note id l'endomorphisme identité de E , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n .

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1 .

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si u est un endomorphisme de E , l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r,$$

où r désigne un entier vérifiant $1 \leq r \leq n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r)).$$

Déterminer le noyau de ϕ , puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

4. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

- (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \dots, r\}$.
 - (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$.
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
 - (b) En déduire que :

$$\exp(PDP^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}.$$

6. Dédurre des questions **3.** et **5.** que $\exp(A) = L(A)$.
7. On suppose que E est munie d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A . Soit λ une valeur propre de v , et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$

8. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$, on note $E_i = \text{Ker}(v - \lambda_i \text{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i .
- (a) Démontrer que l'endomorphisme de E , $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i , parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).
- (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X - 1)^2(X - 2)$.

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X - 1)^2(X - 2)$.
11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \text{Ker}(u - \text{id})^2 \oplus \text{Ker}(u - 2 \text{id})$.
12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \text{id})^2$ et $q = u \circ (2 \text{id} - u)$. Calculer $p + q$.
13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\text{Ker}(u - 2 \text{id})$, parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{id})^2$. Que dire de l'endomorphisme q ?
14. Soit x un élément de E .
- (a) Préciser $(u - 2 \text{id})(p(x))$.
- (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier naturel k , $u^k \circ p = \alpha^k p$.
- (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geq 2$, $(u - \text{id})^k \circ q$?
Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\text{id}) \circ \exp(u - \text{id})$).
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u .

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$, est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F , noté p_F le projecteur sur F , parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E , la distance euclidienne de x à F , notée $d(x, F)$ est le réel :

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - y\| \mid y \in F \}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E . Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $d(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.
18. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n , c'est à dire $H = (\text{Vect } \{n\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $d(x, H)$ en fonction de $\langle x, n \rangle$ et de $\|n\|$.
19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

- (a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.
 - (b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $d(M, H)$.
20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \text{Vect } \{(1, 0)\}$ et $x = (1, 1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur x à F , c'est-à-dire le réel :

$$d_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \mid y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $d_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 8 pages.

Cette épreuve porte sur l'interpolation polynômiale d'une fonction et comprend trois parties.

Dans la première partie, on définit des polynômes d'interpolation.

Dans la deuxième partie, on étudie une fonction définie sur un segment. La troisième partie conduit à une formule barycentrique.

- On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0 et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel, $n \geq 2$.
- Étant donné deux entiers naturels $m \leq n$, on note $\llbracket m, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $m \leq k \leq n$.
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n . Pour simplifier l'écriture, lorsque P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, on notera de la même façon P la fonction polynôme associée.
- Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un entier naturel p , on note $C^p(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions f définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}$, p fois dérivables sur I et à dérivée p -ième, notée $f^{(p)}$, continue sur I . Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est, quant à lui noté $C(I, \mathbb{R})$. Lorsque I est le segment $[a, b]$, on considère sur l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ la norme N_∞ définie par :

$$\text{pour tout } f \in C([a, b], \mathbb{R}) : N_\infty(f) = \sup \left\{ |f(x)| ; x \in [a, b] \right\}.$$

- On note $\prod u_k$ le produit des termes u_k pour l'entier k décrivant l'ensemble indiqué.
- Pour m et p dans $\mathbb{N}$ avec $p \leq m$, on note $\binom{m}{p}$ l'entier $\frac{m!}{p!(m-p)!}$.

PARTIE I

Dans cette partie, on considère $n + 1$ nombres réels, deux à deux distincts, notés $x_0, x_1, \dots, x_n$, et on définit la forme bilinéaire B sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\text{pour tout } (f, g) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad B(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i) g(x_i).$$

Pour k entier, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit les polynômes L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

I.1. Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.1.1. Justifier rapidement l'affirmation :

B définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

I.1.2. Pour j et k entiers de $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $L_k(x_j)$. Montrer que la famille (L_k) , pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, est une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire B .

I.2. Définition de $P_n(f)$.

A toute fonction f appartenant à $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on associe le polynôme $P_n(f)$ défini par :

$$P_n(f) = \sum_{i=0}^n B(f, L_i) L_i.$$

I.2.1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $B(f, L_k)$ en fonction de $f(x_k)$. En déduire que $P_n(f)$ vérifie $P_n(f)(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

I.2.2. Montrer que $P_n(f)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, vérifiant $P(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

I.2.3. Expliciter $P_n(f)$ lorsque $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Préciser le polynôme $\sum_{k=0}^n L_k(X)$ et, pour x réel, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n L_k(x)$.

Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dira que $P_n(f)$ est le polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n , de la fonction f aux points x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on notera simplement P_n au lieu de $P_n(f)$.

Dans la suite de cette partie, on considère un segment $[a, b]$ contenant les points x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

I.3. Une application linéaire.

Soit Λ l'application linéaire de $C([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\text{pour tout } f \in C([a, b], \mathbb{R}) : \Lambda(f) = P_n(f).$$

On considère l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ . En identifiant tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ avec la fonction polynôme associée, on munit également $\mathbb{R}_n[X]$ de la même norme N_∞ . On définit la norme subordonnée à la norme N_∞ de l'application linéaire Λ par :

$$\|\Lambda\| = \sup \{ N_\infty(\Lambda(f)) ; N_\infty(f) \leq 1 \}.$$

On note Φ la fonction appartenant à $C([a, b], \mathbb{R})$, définie par :

$$\text{pour tout } t \in [a, b] : \Phi(t) = \sum_{k=0}^n |L_k(t)|.$$

I.3.1. Justifier l'inégalité : $\|\Lambda\| \leq N_\infty(\Phi)$.

I.3.2. Montrer qu'il existe un nombre réel $\tau \in [a, b]$ tel que $N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$.

I.3.3. Soit $\tau \in [a, b]$ tel que $N_\infty(\Phi) = \Phi(\tau)$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit ε_k par $\varepsilon_k = 0$ lorsque $L_k(\tau) = 0$ et $\varepsilon_k = \frac{|L_k(\tau)|}{L_k(\tau)}$ lorsque $L_k(\tau) \neq 0$. Soit ψ la fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ψ est continue sur $[a, b]$,
- pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi(x_k) = \varepsilon_k$,
- pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ la restriction de ψ à chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est de la forme $\psi(t) = a_k t + b_k$ où a_k et b_k sont des réels. Les restrictions de ψ à $[a, x_0]$ et à $[x_n, b]$ sont constantes.

En calculant $\Lambda(\psi)(\tau)$ déterminer $\|\Lambda\|$.

I.4. Un résultat auxiliaire.

Soit p un entier naturel non nul et soit $g \in C^p([a, b], \mathbb{R})$ une fonction s'annulant en $p + 1$ points distincts $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ de l'intervalle $[a, b]$.

I.4.1. Montrer que la fonction dérivée g' s'annule en au moins p points de $[a, b]$.

I.4.2. En déduire qu'il existe un point $\alpha \in [a, b]$ tel que $g^{(p)}(\alpha) = 0$.

I.5. Une expression de $f - P_n$.

On note T_{n+1} le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini pour x réel par $T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Soit f une fonction appartenant à $C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et soit y un réel de $[a, b]$, distinct de tous les x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note P_n (respectivement P_{n+1}) le polynôme d'interpolation de f de degré inférieur ou égal à n (respectivement inférieur ou égal à $n + 1$) aux points x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (respectivement au point y et aux points x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

I.5.1. Montrer qu'il existe un réel r tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = r T_{n+1}(x).$$

I.5.2. En appliquant à la fonction $g = f - P_{n+1}$ un résultat obtenu en **I.4.**, montrer qu'il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que : $f^{(n+1)}(\beta) = r(n+1)!$

En déduire que pour tout $y \in [a, b]$, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que :

$$(1) \quad f(y) - P_n(y) = \frac{1}{(n+1)!} T_{n+1}(y) f^{(n+1)}(\beta).$$

I.5.3. Montrer que l'égalité (1) est aussi vérifiée lorsque l'on remplace y par l'un des x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

PARTIE II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction φ définie sur le segment $[0, n]$ par : $\varphi(t) = |t(t-1)\cdots(t-n)|$.

II.1. Étude du maximum de φ .

II.1.1. Montrer que la fonction φ admet un maximum sur l'intervalle $[0, n]$.

II.1.2. Soit $t \in [0, n]$: comparer $\varphi(n-t)$ et $\varphi(t)$.

II.1.3. On suppose $t > 1$ et $t \notin \mathbb{N}$. Calculer $\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}$.

En déduire que pour $t \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, on a $\varphi(t-1) \geq \varphi(t)$.

II.1.4. On suppose n pair et on note $n = 2p$. Montrer que φ atteint son maximum en un point de l'intervalle $[0, 1]$ en supposant d'abord que $p = 1$ puis $p \geq 2$.

On admettra que pour n impair, φ atteint son maximum en un point de $[0, 1]$.

II.2. Abscisse du maximum de la fonction φ .

II.2.1. Soit $t \notin \mathbb{N}$, expliciter $\ln(\varphi(t))$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ en fonction de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{t-k}$.

II.2.2. Pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, déterminer le signe de la somme $\sum_{k=2}^n \frac{1}{t-k}$. En déduire que $\varphi'(t)$ est strictement négatif sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

II.2.3. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{t-k}$.

Déterminer le sens de variation de la fonction g . En déduire que la fonction φ' s'annule en au plus un point de $]0, 1[$.

II.2.4. Montrer que le maximum de φ est atteint en un point et un seul de $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$, noté t_n .

Quelle est la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{t_n - k}$?

II.3. Étude de l'abscisse t_n du maximum de φ .

II.3.1. On suppose $k \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité $\frac{1}{k - t_n} > \frac{1}{k}$.

En déduire une minoration de $\frac{1}{t_n}$.

II.3.2. Préciser la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

En déduire la limite de $\frac{1}{t_n}$ et par suite, celle de t_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

II.4. Une majoration de φ .

II.4.1. Montrer l'inégalité $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

II.4.2. Montrer l'inégalité $t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}$.

II.4.3. En déduire, que pour tout $t \in [0, n]$, on a la majoration $\varphi(t) < \frac{n!}{\ln(n+1)}$.

II.5. Une majoration de $N_\infty(f - P_n)$.

Dans cette question, on reprend les notations de la partie I.

Soit $[a, b]$ un segment, on note $h = \frac{b-a}{n}$ et on considère les $n+1$ points équidistants $x_i = a + ih$ de $[a, b]$, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

II.5.1. Pour $x \in [a, b]$, on note $t = \frac{x-a}{h} \in [0, n]$. On note T_{n+1} le polynôme défini en I.5. par $T_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Exprimer $|T_{n+1}(x)|$ en fonction de h et de $\varphi(t)$.

II.5.2. Soit $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ et soit P_n son polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n , aux points équidistants x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, défini en I.2.

Montrer l'inégalité :

$$(2) \quad N_\infty(f - P_n) \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} N_\infty(f^{(n+1)}).$$

PARTIE III

On conserve les notations des parties I et II, avec en particulier des réels x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

distincts. On définit les $n+1$ réels $w_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

III.1. Soit x un réel et soit k un entier de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Exprimer $T_{n+1}(x)$ en fonction de $L_k(x)$, $x - x_k$ et w_k .

III.2. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit P_n son polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n , aux points x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On suppose x différent de tous les x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Montrer l'égalité :

$$(3) \quad P_n(x) = T_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k}.$$

Calculer $T_{n+1}(x) \sum_{k=0}^n \frac{w_k}{x - x_k}$.

En déduire la formule barycentrique :

$$(4) \quad P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{w_k f(x_k)}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^n \frac{w_k}{x - x_k}}.$$

III.3. Dans cette question, on suppose les points x_i équidistants. On note $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ et $x_i = a + ih$, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On se propose d'établir une formule barycentrique en remplaçant les w_k par des coefficients entiers relatifs.

III.3.1. Exprimer w_k en fonction de h , de n et de k .

Soit $w_k^* = (-1)^n h^n n! w_k$. Exprimer w_k^* à l'aide d'un entier de la forme $\binom{m}{p}$, où m et p sont à

préciser en fonction de n et k .

III.3.2. On suppose x différent de tous les x_i , pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer la formule :

$$(5) \quad P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x_k)}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x - x_k}}.$$

III.4. Une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

On suppose que $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et on considère les $4n+1$ points équidistants compris entre $x_0 = -2n$ et $x_{4n} = 2n$.

III.4.1. Déterminer x_k pour $k \in \llbracket 0, 4n \rrbracket$.

III.4.2. Montrer que :

$$(6) \quad P_{4n}(x) = \frac{\sum_{k=-n}^n (-1)^k \binom{4n}{2n+2k} \frac{1}{x-2k}}{\sum_{k=-2n}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2n+k} \frac{1}{x-k}} \text{ est, pour } x \text{ différent de tous les } x_k,$$

la valeur en x d'un polynôme d'interpolation de la fonction $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, en des points équidistants que l'on précisera.

III.4.3. Soit $x \in [-2n, 2n]$ et soit p la partie entière de x .

Montrer l'inégalité : $\prod_{k=-2n}^{2n} |x - k| \leq (2n + p + 1)!(2n - p)!$

III.4.4. Montrer que pour x fixé dans $[-2n, 2n]$ et non entier, on a :

$$|f(x) - P_{4n}(x)| \leq (2n + p + 1)!(2n - p)! \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}}{(4n+1)!} = \theta(n, p).$$

Quelle est la limite de $\theta(n, p)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Fin de l'énoncé .

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI****MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

Les calculatrices sont autorisées.

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Le sujet comporte 5 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Étant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\det(l)$ son déterminant, $\text{tr}(l)$ sa trace et χ_l son polynôme caractéristique. En notant id l'endomorphisme identité, on définit $l^0 = id$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $l^{k+1} = l \circ l^k$.

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Objectifs

Étant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on définit un entier $r(l, u)$ à partir des itérés du vecteur par l'endomorphisme. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme, liées à la valeur de l'entier $r(l, u)$.

Dans la première partie, on traite un exemple dans le cas relativement élémentaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Une première structure euclidienne permet d'obtenir les coordonnées des itérés d'un vecteur par l'endomorphisme ; une deuxième structure euclidienne permet de montrer que des points du plan, déduits des vecteurs précédents, sont sur une ellipse.

Dans la deuxième partie, on fait établir des résultats généraux sur les endomorphismes étudiés.

Les deux parties sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \pi$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

I.1. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Étant donné deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$, on note $(u | v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u .

On définit les vecteurs $v_1 = \varepsilon_1$ et $v_2 = \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)\varepsilon_2$ et on considère la base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{V}$.

I.1.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l . En déduire les valeurs propres réelles ou complexes de l .

I.1.2. Soit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\|v\|^2$ et $\|l(v)\|^2$. En déduire que l est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.

I.1.3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{V}$ ainsi que la matrice inverse P^{-1} .

On note M' la matrice de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{E}$. Exprimer M' en fonction des matrices P , P^{-1} et M . Donner l'expression de M' et caractériser l'endomorphisme l .

I.1.4. Le vecteur v_2 vérifie $v_2 = l(v_1)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, on définit les vecteurs v_k par $v_k = l(v_{k-1})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = a_k v_1 + b_k v_2$.

I.1.4.1. En calculant de deux façons $\|v_k\|^2$, déduire de I.1.2 une relation entre a_k , b_k et $\cos(\theta)$.

I.1.4.2. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(v_1 | v_k) = \cos((k-1)\theta)$; en déduire la valeur de $(v_2 | v_k)$.

I.1.4.3. En utilisant les produits scalaires $(v_1 | v_k)$ et $(v_2 | v_k)$, donner un système linéaire de deux équations à deux inconnues a_k et b_k .

Montrer que $a_k = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)}$ et $b_k = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

I.2. Dans cette question, on prend la base précédente $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ comme base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Étant donné deux vecteurs $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ et $v' = x'_1 v_1 + x'_2 v_2$, on définit le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ par : $(v, v') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x'_1 + x_2 x'_2 \in \mathbb{R}$. La base $\mathcal{V}$ est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

On considère le plan euclidien muni du repère orthonormal $\mathfrak{R} = (O, v_1, v_2)$ où O est un point du plan. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k les points du plan de coordonnées (a_k, b_k) dans le repère $\mathfrak{R}$, où a_k et b_k sont les réels donnés dans **I.1.4**.

I.2.1. On note (x, y) les coordonnées d'un point du plan. Déterminer trois réels p, q, r tels que la conique d'équation $px^2 + qxy + ry^2 = 1$ passe par les points A_1, A_2 et A_3 . Montrer que tous les points A_k sont sur cette conique (on pourra utiliser **I.1.4.1**).

I.2.2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$. En déduire la nature de la conique.

On prend $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donner une équation réduite de la conique et tracer cette conique dans le plan euclidien muni du repère $\mathfrak{R}$.

PARTIE II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps K , avec $n \geq 2$ et l est un endomorphisme de E .

II.1. Soit u un vecteur non nul de E .

II.1.1. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, l(u), \dots, l^k(u))$ soit liée. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de $k+1$ vecteurs $(u, l(u), \dots, l^k(u))$ soit liée. On note $r(l, u)$ ce plus petit entier.

II.1.2. Justifier l'encadrement $1 \leq r(l, u) \leq n$.

II.1.3. Montrer que $r(l, u) = 1$, si et seulement si u est un vecteur propre de l . Montrer que $r(l, u) = n$, si et seulement si la famille $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E .

II.2. Un exemple.

Dans cette question, on suppose $n = 4$ et on note $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E .

On considère l'endomorphisme f de E représenté par la matrice $Mat_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

relativement à la base $\mathfrak{B}$. Calculer $\det(f)$ et $\text{tr}(f)$.

Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre. Déterminer trois réels x, y, z tels que $f^3(e_1) = xf^2(e_1) + yf(e_1) + ze_1$. En déduire $r(f, e_1)$.

On reprend le cas général où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et l un endomorphisme de E . Soit u un vecteur non nul de E .

II.3. On suppose $r(l, u) = n$. D'après II.1.3., la famille $\mathfrak{B}(u) = (u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E . On note $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

II.3.1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathfrak{B}(u)}(l)$ de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathfrak{B}(u)$. Calculer $\det(l)$ et $\text{tr}(l)$.

II.3.2. Déterminer $\chi_l(\lambda) = \det(l - \lambda \text{id})$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme l (on pourra calculer ce déterminant en ajoutant à la première ligne, une combinaison linéaire des autres lignes ; opération codée $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n \lambda^{i-1} L_i$ où L_i est la ligne d'indice i).

II.4. On note $I(l, u)$ l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que l'endomorphisme $P(l)$ vérifie $P(l)(u) = 0$.

II.4.1. Montrer que l'ensemble $I(l, u)$ est un idéal de $K[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté $G(l, u)$, tel que $I(l, u)$ est formé de tous les polynômes produit du polynôme $G(l, u)$ par un polynôme quelconque de $K[X]$.

II.4.2. Justifier que le polynôme $G(l, u)$ divise le polynôme χ_l . Montrer que le polynôme $G(l, u)$ est de degré $r(l, u)$.

II.4.3. On reprend l'exemple II.2. Déterminer le polynôme $G(f, e_1)$. En déduire le polynôme caractéristique de f puis les valeurs propres de f . Dans la question II.2. on montre que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre ; en utilisant ce résultat et le spectre de f , en déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

II.4.4. On suppose que l'endomorphisme l et le vecteur u vérifient les hypothèses de la question **II.3.** : $r(l, u) = n$ et $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

Déterminer le polynôme $G(l, u)$ et retrouver ainsi l'expression du polynôme caractéristique de l'endomorphisme l .

II.5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^p = 0$.

II.5.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l .

II.5.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe un vecteur non nul u tel que $r(l, u) = n$
- (2) $l^{n-1} \neq 0$.

II.6. On suppose que l'endomorphisme l est diagonalisable. Soit $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ une base de vecteurs propres de E avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $l(w_k) = \lambda_k w_k$.

II.6.1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(l, u) = n$ et on considère la base de E : $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$. On note $u = \sum_{k=1}^n x_k w_k$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{B}(u)$. En déduire que les valeurs propres de l sont toutes distinctes.

II.6.2. On suppose que les valeurs propres λ_k de l sont toutes distinctes.

II.6.2.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et on note $C = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$

une matrice colonne telle que le produit $AC = 0$. Montrer que le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est le polynôme nul. En déduire que la matrice A est inversible.

II.6.2.2. Montrer qu'il existe un vecteur u de E , non nul, tel que $r(l, u) = n$.

Fin de l'énoncé.



EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

* * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f .

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k \text{ fois}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \dots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que f est diagonalisable.
- 2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- 3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) . Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P , exprimer A^m en fonction de D , P et P^{-1} .
- 4) Calculer P^{-1} , puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- 5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
- 6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- 7) Dédire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
- 2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
- 3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2 , q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h , combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice D de f , puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q .

9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} &= p + q \\ f &= \lambda p + \mu q \\ f^2 &= \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Dédurre de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.

Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q .

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q . Déterminer la dimension de F .

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE III

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

2) En déduire que $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Montrer que pour tout entier ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i .

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F .

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

8.1) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f .

8.2) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h .

8.3) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors $2p - 1 \leq n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

B) 1) Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ .

Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ . Déduire de la question précédente que $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des nombres entiers strictement négatifs.

On considère la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -n, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

I.1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On notera désormais $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série de fonctions, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ la somme partielle d'ordre n et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste correspondant. On a donc $R_n = U - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.2.

I.2.1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n^{(p)}$ la dérivée de u_n à l'ordre p . Calculer $u_n^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq -n$.

I.2.2. Soient a et b deux nombres réels tels que $-1 < a < b$. Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

I.2.3. Dédurre de ce qui précède que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

I.3.

I.3.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ à l'aide de $U_N(x)$ et $U(x + N)$.

I.3.2. En déduire que U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -N - 1, -N[$, puis sur $\mathcal{D}$.

I.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, établir une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

I.4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. Donner un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

I.5.

I.5.1. Montrer que U est strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.

I.5.2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $U(x) = \frac{1}{4} \left[U\left(\frac{x}{2}\right) + U\left(\frac{x-1}{2}\right) \right]$.

PARTIE II

II.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

II.1.1. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} f_p(t)$ selon les valeurs de p .

On notera désormais f_p la fonction f_p prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1.2. Déterminer un équivalent de $f_p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

II.2. Soit φ la fonction d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

II.2.1. Montrer que le domaine de définition de φ est $] -1, +\infty[$.

II.2.2. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in] -1, +\infty[$ donnés.

Vérifier que pour tout $x \geq a$ et tout $t \geq 0$ on a $0 \leq f_p(t) e^{-xt} \leq f_p(t) e^{-at}$.

Montrer que la fonction $t \mapsto f_p(t) e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

II.2.3. Dédurre de ce qui précède que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

II.2.4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

II.3.

II.3.1. Montrer que $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.

II.3.2. En déduire que $\varphi(x) = U(x)$ pour tout $x > -1$.

II.3.3. Soit $p \in \mathbb{N}$ donné, $p \geq 2$.

Pour tout $x > -1$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$ à l'aide de p et de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} e^{-xt}}{e^t - 1} dt$.

PARTIE III

Soit g la fonction d'une variable réelle x , périodique de période 2π , telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

Soit $\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g) \cos nx + b_n(g) \sin nx)$ la somme de la série de Fourier de g .

III.1. Préciser pourquoi g est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.2.

III.2.1. Calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.2. Calculer $a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3.

III.3.1. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

III.3.2. En déduire la valeur de $U(-\frac{1}{2})$, puis celle de $U(0)$.

III.4. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

III.5. On note G la primitive de g telle que $G(0) = 0$.

III.5.1. Montrer que G est impaire, périodique de période 2π .

III.5.2. Calculer les coefficients de Fourier de G .

Préciser pourquoi G est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.5.3. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

* * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

EXERCICE

On munit un plan euclidien orienté d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 2$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1. Montrer qu'il existe un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer, dans lequel la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation $18X^2 - 2Y^2 = 2$.
On pourra utiliser la calculatrice.
2. Justifier que $\mathcal{H}$ est une hyperbole et préciser son excentricité.
3. Reconnaître la courbe $\mathcal{C}$. En déduire une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$.
4. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ se coupent en quatre points A, B, C et D dont on donnera les coordonnées dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$.
5. Prouver que les quatre points A, B, C et D forment un rectangle et donner son aire.
6. Donner les coordonnées des sommets, des équations des asymptotes et des équations des tangentes aux sommets de l'hyperbole dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$.
7. Représenter graphiquement dans le repère $(O; \vec{I}, \vec{J})$, la courbe $\mathcal{C}$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ avec ses asymptotes, ses sommets et ses tangentes en ses sommets.

N.B. : On ne demande pas de faire apparaître le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME

Ce problème comporte trois parties. Les parties A et B peuvent se traiter de façon indépendante. On peut utiliser certains résultats de la partie B pour traiter la partie C.

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n colonnes à coefficients réels. On note tM la transposée de la matrice M .

On appelle vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ toute matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définitions

On dit qu'un vecteur colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ces coefficients vaut 1. Par exemple le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ est stochastique car

$0,3 \geq 0$ et $0,6 \geq 0$ et $0,1 \geq 0$ et $0,3 + 0,6 + 0,1 = 1$.

On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque chacune de ses colonnes l'est.

Partie A

Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}; z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} :$$

$$(R) \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n + \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} = \frac{3}{10}x_n + \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} = \frac{3}{5}y_n + \frac{2}{5}z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (R) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.
2. Justifier que la matrice carrée A est stochastique.
3. Écrire un programme dans le langage de Maple ou Mathematica qui calcule le vecteur colonne X_{2010} .
4. Calculer la trace de A notée $\text{Tr}(A)$ et le déterminant de A noté $\det(A)$. On pourra utiliser la calculatrice. La matrice A est-elle inversible ?

5. Prouver que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice tA . Quelle est la valeur propre associée ?
6. On pourra admettre les résultats demandés ici pour traiter la question suivante.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Montrer que les matrices M et tM ont le même polynôme caractéristique.
 - Établir que M admet trois valeurs propres complexes (éventuellement non distinctes) que l'on note λ_1, λ_2 et λ_3 et que : $\text{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
7. Dédurre des questions précédentes que les valeurs propres de A sont $0, \frac{1}{10}$ et 1 .
8. Justifier qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec
- $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels que l'on déterminera.}$$
9. Calculer P^{-1} . On pourra utiliser la calculatrice.
10. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Exprimer X_n en fonction de n .
 - Montrer que le vecteur colonne X_n est stochastique.
12. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n) et (z_n)) est convergente vers une limite, notée l_x (respectivement l_y et l_z).
13. Prouver que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique et est vecteur propre de A .

Partie B

Cas de la dimension 2

Soit A une matrice carrée stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère une suite (X_n) de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^2$ telle que X_0 est stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0, 1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique. Il s'agit d'établir que $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ et $x_n + y_n = 1$.

3. Montrer que $0 \leq \text{Tr}(A) \leq 2$.

4. (a) On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$.

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut A^2 ? Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?

- (b) On suppose que $\text{Tr}(A) = 2$.

Que vaut A ? Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?

On suppose désormais que $0 < \text{Tr}(A) < 2$.

5. Montrer que $-1 < a - b < 1$.

Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$.

6. (a) Montrer que V est un vecteur propre de A . Exprimer la valeur propre associée que l'on note q , en fonction de a et b .

(b) Prouver que $|q| < 1$.

7. Établir que 1 est une valeur propre de A .

8. Prouver que la matrice A est diagonalisable.

9. On pourra admettre le résultat demandé ici pour traiter la suite.

Établir qu'il existe un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ et un réel λ vérifiant :

$$AL = L \text{ et } X_0 = L + \lambda V.$$

On ne cherchera pas à calculer l_x, l_y et λ .

10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = L + q^n \lambda V$.

11. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n)) est convergente vers l_x (respectivement l_y).

12. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique. On pourra utiliser B.2.

13. Soit T un vecteur colonne stochastique de $\mathbb{R}^2$ tel que $AT = T$. Montrer que $T = L$.

Partie C

Un cas particulier

On reprend les notations de la partie B.

Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice A n'est pas inversible.

1. Montrer que la matrice A est de rang 1.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

3. Établir alors que $A^2 = A$.

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = AX_0$.

Soit E un plan euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et f l'endomorphisme de E associé à la matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

5. Montrer que l'application linéaire f est un projecteur.

6. Donner dans la base $\mathcal{B}$, une équation de $\text{Ker } f$ et une équation de $\text{Im } f$.

7. En déduire que l'endomorphisme f est une projection orthogonale si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$.

8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\vec{u}(\theta)$ le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Établir que $\|f(\vec{u}(\theta))\|^2 = ((2\alpha - 1)^2 + 1) \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4})$.

9. En déduire les valeurs de $\frac{\|f(\vec{i})\|}{\|\vec{i}\|}$ et $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|}$ en fonction de α .

10. Démontrer que f est une projection orthogonale si, et seulement si, pour tout $\vec{x} \in E$, on a : $\|f(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE I

*Étude d'une fonction*Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 – Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Donner pour $x \neq 0$ la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x .
- 2 – Montrer que f est continue à gauche en 0.
- 3 – f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donner la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f'_g(0)$. f est-elle dérivable à droite en 0 ?
- 4 – Donner le tableau de variations de f . On fera figurer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 (par valeurs supérieures et inférieures).
- 5 – Tracer la courbe représentative de f . On précisera les asymptotes éventuelles.

PARTIE II

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : x^2 y' + y = 0$.

1 – Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

2 – Montrer que pour tout réel $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt$ converge.

On peut donc définir une fonction φ sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

3 – Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et donner, pour $x \in [a, b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

On vérifiera avec soin toutes les hypothèses du théorème utilisé.

4 – En déduire que φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1) : x^2 y' + y = x$.

5 – En déduire à l'aide de φ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

PARTIE III

Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$

On se donne dans cette partie un réel $x > 0$.

1 – Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ on a :

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}}.$$

2 – Justifier pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt$.

En déduire :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

3 – On pose pour $k \in \mathbb{N}$: $I_k(x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} dt$.

3.1 – Calculer $I_0(x)$.

3.2 – Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

3.3 – En déduire que : $I_k(x) = k! x^{k+1}$.

4 – On pose désormais, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k k! x^{k+1}.$$

4.1 – Prouver que : $|R_n(x)| \leq (n+1)! x^{n+2}$.

On suppose désormais que $x = \frac{1}{10}$.

4.2 – On pose $u_n = (n+1)! x^{n+2} = \frac{(n+1)!}{10^{n+2}}$. En étudiant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minimale pour $n=8$. Donner à l'aide de votre calculatrice une évaluation numérique de u_8 .

4.3 – En déduire une valeur approchée de $\varphi\left(\frac{1}{10}\right)$ à 10^{-4} près.

5 – Quel est le rayon de convergence de la série entière de la variable complexe t :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k k! t^{k+1} ?$$

Est-elle convergente pour $t = \frac{1}{10}$?

6 – Expliquer en quoi la partie III est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré (1854 – 1912) :

'Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.'*

* L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

PARTIE IV

Un peu d'algorithmique

On considère l'algorithme suivant rédigé en français :

On affecte 0,1 à la variable u .

Pour k allant de 1 à 8, calculer $-\frac{k u}{10}$, puis affecter le résultat à u .

Afficher u .

1 – Quelle sera la valeur affichée pour u à la dernière ligne ?

2 – Écrire le programme correspondant en utilisant la syntaxe de l'un des logiciels de calcul formel du programme (MAPLE ou MATHEMATICA par exemple). On précisera le logiciel utilisé.

3 – Adapter le programme précédant en introduisant une variable S , de sorte qu'en sortie de

boucle S contienne $\sum_{k=0}^8 \frac{(-1)^k k!}{10^{k+1}}$.

On s'interdira dans cette question d'utiliser une commande de sommation (telle `add` ou `sum`) prédéfinie par le logiciel.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

Partie I. Décomposition de Dunford : généralités

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et O_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

- i) $A = \Delta + N$,
- ii) Δ est diagonalisable,
- iii) N est nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = O_n$),
- iv) $\Delta N = N\Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A .

1) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1a. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1 .

1b. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2 .

2) Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

3) De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

4) Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A , alors Δ et N commutent avec A .

Partie II. Étude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Étude de Δ

1a. Déterminer le spectre de Δ , en déduire que Δ est inversible.

1b. Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1c. En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable, et exprimer Δ^{-1} en fonction de P , P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

2) Décomposition de A

2a. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2b. Montrer que N est nilpotente.

2c. Vérifier que $N\Delta = \Delta N = 2N$.

2d. En déduire que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

3) Décomposition de Dunford de A^{-1}

On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

3a. À l'aide de **II.2b** montrer que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$.

3b. En déduire que N_1 est nilpotente.

3c. Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.

3d. Justifier l'existence de A^{-1} .

3e. Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1} .

4) Décomposition de Dunford des puissances de A

Soit $p \in \mathbb{N}$.

4a. À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A , montrer que

$$A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.$$

4b. Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p .

4c. Calculer Δ^p . En déduire que :

$$A^p = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}.$$

5) Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

5a. Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.

5b. À l'aide des matrices P et P^{-1} , déterminer alors une matrice S à **valeurs propres positives** telle que $S^2 = \Delta$.

5c. Déterminer deux réels a et b , tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.

5d. On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.

5e. En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.

5f. Donner une décomposition de Dunford de R .

Exercice 2

Partie I. Résultats préliminaires

On rappelle la définition des coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} 0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0 \end{cases}$$

et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$

- 1) Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $h = f \times g$. On note de façon usuelle $f^{(k)}$ la dérivée k -ème de f pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la **formule de Leibniz** :

$$\forall x \in I, h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Indication : utiliser la relation liant les coefficients binomiaux rappelée ci-dessus et remarquer que $f^{(k+1)}g^{(n-k)} = f^{(k+1)}g^{(n+1-[k+1])}$.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I . Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante appelée **formule de Taylor avec reste intégral** :

$$\forall a \in I, \forall b \in I, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

Partie II. Développement en série entière de la fonction tangente

Soient $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$. On rappelle que la fonction tangente est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

- 1) En écrivant $f'(x) = 1 + f(x).f(x)$, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, $f^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées $f^{(k)}(x)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- 2) Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.
Que peut-on en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, sur les variations des fonctions $f^{(n)}$?

3) Pour tout entier naturel k , on note $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

3a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.

Indication : on pourra utiliser la formule trouvée en II.1).

3b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$.

Que peut-on en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, sur la parité des dérivées $f^{(n)}$?

3c. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient a_{2n} .

4) Soient $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$f(x) \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Que peut-on en déduire pour la **série numérique** $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$?

5) Soient $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1}$.

5a. Montrer que :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux) du$$

5b. Soit un réel r tel que $x < r < \frac{\pi}{2}$. En remarquant que $x = \frac{x}{r} r$, montrer que :

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} R_n(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} f(r)$$

5c. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, puis montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est convergente.

6) Démontrer que la fonction $\tan$ est développable en série entière sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et donner l'expression de cette série entière.

Problème

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence de la série de Fourier d'une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, pour laquelle on ne peut donc pas appliquer le théorème de Dirichlet.

Partie I. Étude d'une fonction définie par une intégrale

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α h est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Pour la suite α prendra cette valeur, ainsi h est continue sur $\mathbb{R}_+$ dans le reste de cette partie.

2) Montrer que la fonction $H : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3)

3a. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

3b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.

4) Montrer avec soin qu'une fonction u , continue sur $[0, +\infty[$ et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$, est bornée sur $[0, +\infty[$.

5) Dédurre de 3) et 4) que H est une fonction bornée.

Partie II. Étude d'une fonction 2π -périodique

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

On note :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

sa série de Fourier.

1a. Tracer l'allure de la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et donner, pour $x \in [\pi, 2\pi]$, une expression de $f(x)$. On remarquera que f **est continue sur** $\mathbb{R}$.

1b. La fonction f est-elle dérivable en π ? Justifier.

1c. Montrer que la restriction de f à $]0, \pi[$ n'est pas prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

La fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on ne peut donc pas appliquer le théorème de Dirichlet pour étudier la convergence de sa série de Fourier.

2) Étude des coefficients de Fourier trigonométriques

2a. Calculer $a_0(f)$ et donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $b_n(f)$.

2b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $a_n(f)$ à l'aide de la fonction H . Plus précisément, déterminer des réels β et γ tels que $a_n(f) = \beta \frac{H(\gamma)}{n^{3/2}}$.

2c. En déduire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n(f)| \leq \frac{M}{n^{3/2}}$$

3) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (|a_n(f)| + |b_n(f)|)$ est convergente. En déduire que la série de Fourier de f converge pour tout x réel. On note g sa somme, c'est-à-dire pour tout x réel,

$$g(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

4) Donner la parité et la périodicité de g . On admettra que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

5)

5a. Soit $n \geq 1$ et $p \geq 0$ deux entiers. Calculer $\int_0^\pi \cos(pt) \cos(nt) dt$. On pourra distinguer les cas $n = p$ et $n \neq p$.

5b. En admettant l'interversion série-intégrale $\int \sum = \sum \int$, montrer que la fonction g a les mêmes coefficients de Fourier que f .

Partie III. Conclusion

Le but de cette dernière partie est de prouver que les fonctions f et g sont égales, donc que la série de Fourier de f converge bien vers f .

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions réelles, 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$ et continues par morceaux et $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ constitué des fonctions **continues** (et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$).

Si $u \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on note $(a_n(u))_{n \geq 0}$ et $(b_n(u))_{n \geq 1}$ ses coefficients de Fourier trigonométriques.

1) Soient u et v deux fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$a_n(u - v) = a_n(u) - a_n(v)$$

On montre de même mais cela n'est pas demandé que $b_n(u - v) = b_n(u) - b_n(v)$.

Si u et v sont deux fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on pose :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t) dt \quad \text{et} \quad N(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- 2) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.
- 3) Que peut-on en déduire pour l'application N de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathbb{R}$? En particulier que caractérise $N(u) = 0$?
- 4) Soit φ une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Montrer, à l'aide de la formule de Parseval, que si tous ses coefficients de Fourier sont nuls alors φ est nulle.
- 5) Dédurre, avec précision, de tous les résultats précédents que l'on a bien $f = g$.

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

Exercice 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$. Déterminer S sur $] -R, R[$.
3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Problème

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E , on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt .$$

1. Question préliminaire

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

- 2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- 3. (a) On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- (b) Soit $\lambda \geq 0$ réel. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
 Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
 En déduire que g_n est un élément de E .

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f dans E de classe C^1 , croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

- (a) Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.
 (b) Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de LAPLACE

Dans toute cette partie, f est un élément de E .

7. On suppose dans cette question que f est dans F .

(a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

(b) *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. Théorème de la valeur finale

On suppose dans cette question que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

(a) Démontrer que f appartient à F .

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

(d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

- (a) Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
- (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$$

- (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

10. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

- (a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.
- (b) En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- (c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1) .$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt$.

- (d) Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ .
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9) :

Lorsque f dans E vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

On notera que, par rapport à la question 9, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Les candidats peuvent utiliser la calculatrice pour faire leurs calculs et donner directement la réponse sur la copie.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants.

EXERCICE

Commutant d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ le commutant de la matrice A .

1. Démontrer que pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.

2. Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera } P.$$

3. Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T . Déterminer sa dimension.

4. Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?

5. (a) Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?

(b) Démontrer alors que $C(A) = \text{vect} \{I_3, A, A^2\}$.

(c) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A .

Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

PROBLÈME

Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Dans ce problème, on note pour n entier naturel non nul :

- S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n réels positifs, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$.

1. *Question préliminaire*

On rappelle qu'une matrice S appartient à S_n^+ , si S appartient à S_n et si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$.

Démontrer qu'une matrice S de S_n est élément de S_n^+ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

PARTIE I

2. Soit $S \in S_n^+$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{trace } S$.
3. Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Démontrer que ${}^tMM \in S_n^+$.
- (b) Si $M = (m_{ij})$, en déduire l'inégalité $(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)^n$.

PARTIE II : Théorème de réduction simultanée

4. On se donne deux matrices $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, dans cette base, A est la matrice d'un produit scalaire φ . On note l'espace euclidien $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E et R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
- (a) Justifier que $I_n = {}^tRAR$.
- (b) On note $C = {}^tRBR$, justifier qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telle que ${}^tQCQ = D$.
- (c) Déterminer, en fonction des matrices R et Q , une matrice inversible P telle que :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP \quad (\text{théorème de réduction simultanée})$$

- (d) Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'une matrice inversible P telle que la matrice tPBP soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.

On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice B .

5. Démontrer l'inégalité « $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ » dans les deux cas suivants :
- (a) $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^+$, en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous les $\lambda_i \geq 0$, $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i\right)$.
- (b) $A \in S_n^+$ et $B \in S_n^+$, en démontrant d'abord que $A + B \in S_n^+$ et en considérant les cas où les matrices sont dans S_n^+ sans être dans S_n^{++} .
6. Soient A et B deux matrices de S_n^{++} et $t \in [0, 1]$. On note P une matrice inversible et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.
- (a) Exprimer $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det P$, t et les λ_i .
- (b) En utilisant la fonction $\ln$, démontrer que pour tout i entier compris entre 1 et n , $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$.
- (c) Démontrer que $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.
7. Si A est une matrice de S_n^{++} et B une matrice de S_n^+ , on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$) le résultat suivant qui est admis :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

- (a) Démontrer que S_n^{++} est dense dans S_n^+ .
- (b) Démontrer l'inégalité ci-dessus pour A et B deux matrices de S_n^+ .

PARTIE III : Théorème de Choleski

8. Si A est une matrice de S_n^{++} , il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T , vérifiant $A = {}^t T T$ (décomposition de Choleski).

On ne demande pas de prouver ce résultat.

- (a) On se propose de démontrer que cette matrice T est unique.

Si on pose $A = {}^t T_1 T_1 = {}^t T_2 T_2$, démontrer que $T_1 T_2^{-1} = I_n$ et conclure.

On pourra admettre que si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathcal{T}, \cdot)$ est un groupe.

- (b) Exemple : si $A = (a_{ij})$, où pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n , $a_{ij} = \min(i, j)$, donner la décomposition de Choleski de la matrice A .

On ne demande pas de vérifier que A est une matrice de S_n^{++} .

9. *Un peu d'informatique*

Pour une matrice A de S_3^{++} , écrire un algorithme en français permettant de trouver la matrice T de la décomposition de Choleski.

Entrer cet algorithme dans la calculatrice (on ne demande pas le programme sur la copie) puis, pour chacun des cas suivants, donner la matrice T :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}.$$

10. *Inégalité d'Hadamard*

- (a) Soit $S = (s_{ij}) \in S_n^{++}$, démontrer que $\det S \leq \prod_{i=1}^n s_{ii}$.

- (b) Application : démontrer que pour toute matrice inversible $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (a_{ij})$,

$$|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 6 pages.

Notations

On note : $|z|$ le module du nombre complexe z ,

J un intervalle de $[0, +\infty[$,

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence on note : $\tilde{f}_g(x) = \int_J f(t)g(xt)dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$.

Objectifs

Pour différentes hypothèses sur la fonction f , sur l'intervalle J et pour deux choix de la fonction g , on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie I, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie II, on considère une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe C^1 ou lorsque f est continue par morceaux.

PARTIE I

Une étude de séries

I.1. Étude de la fonction L

Pour tout x réel tel que la série entière $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ converge, on note $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ sa somme.

I.1.1. Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ et expliciter $L(x)$ pour x appartenant à $] -1, 1[$.

I.1.2. Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$ (où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

I.2. Étude de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

On considère la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $a_{3p} = -\frac{2}{3p}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1}$ et $a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$.

I.2.1. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1 + \frac{h}{p}}.$$

I.2.2. Déterminer la limite de la somme $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque p tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la fonction qui à t associe $\frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable). En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ et préciser sa somme.

I.2.3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

I.3. Étude des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$

Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera que $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

I.3.1. Montrer que $S_n(t) = \varphi(t) [e^{i(n+1)t} - e^{it}]$.

I.3.2. Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur le segment $[\pi, \alpha]$.

I.3.3. Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt$ tend vers zéro lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.3.4. Expliciter $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt$. Dédire de ce qui précède la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$.

Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$.

I.3.5. Exprimer $e^{it} \varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où t appartient à $[\pi, \alpha]$.

I.3.6. En déduire la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en I.2.3. ?

PARTIE II

Limite d'une intégrale

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) g(xt) dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

II.1. Existence de $\tilde{f}_g(x)$

On suppose que la fonction g est bornée sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout x réel strictement positif. Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

II.2. Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$

On suppose que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et à valeur réelle.

Soit $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$.

II.2.1. Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$.

II.2.2. Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t) e^{ixt} dt$ tend vers zéro lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.2.3. En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t) |\sin(xt)| dt.$$

II.3. Étude pour une fonction f particulière

On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$

et donc $\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin(xt)| dt$ pour $x \in]0, +\infty[$.

II.3.1. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$.

II.3.2. Montrer que pour $x \in]0, +\infty[$:

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du.$$

II.3.3. Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

II.3.4. Justifier, pour $x \in]0, +\infty[$, la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$;

préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}}$.

II.3.5. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

II.4. Étude générale

On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge et on note :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t) |\sin(xt)| dt \text{ pour } x \in]0, +\infty[.$$

II.4.1. Lemme préliminaire

Pour tout t réel tel que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$ converge, on pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Justifier l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t).$$

II.4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas C^1

On suppose de plus que f est une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En utilisant les résultats obtenus en II.2 et II.4.1, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu pour la fonction E ?

II.4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux

II.4.3.1. Une limite

Étant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère l'intégrale

$$F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt \text{ pour } x \in]0, +\infty[. \text{ Montrer que } F(x) = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du.$$

On pose p la partie entière de $\frac{\beta x}{\pi}$ et q la partie entière de $\frac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p , q et x .

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

II.4.3.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux

Si J est un intervalle de $[0, +\infty[$ et si f est une fonction continue par morceaux sur J

à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\int_J |f(t)| dt$ existe, on note toujours :

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(xt)| dt.$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment de $[0, +\infty[$ et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment de $[0, +\infty[$ et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = [0, +\infty[$ et f est une fonction continue par morceaux ?

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 7 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Dans tout le problème n est un entier de $\mathbb{N}^*$. On note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. Dans l'ensemble des matrices à coefficients réels, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec une matrice de passage orthogonale.

On note $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On note tA la matrice transposée de la matrice A et $\text{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A .

Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ est noté $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x . Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit tXY appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = {}^tXY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Objectifs

Dans le problème, on définit les ensembles S_n^+ (respectivement S_n^{++}) des matrices symétriques positives (respectivement des matrices symétriques définies positives) ainsi que les endomorphismes autoadjoints associés et on en donne quelques propriétés.

Dans la première partie, on traite deux exemples et on démontre une propriété de compacité d'une partie de $\mathbb{R}^n$ liée au signe des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint.

Dans les deux parties suivantes, on définit les ensembles S_n^+ et S_n^{++} et on démontre différentes propriétés de leurs éléments : caractérisation par le signe des valeurs propres, racine carrée, propriété de la trace.

Dans la dernière partie, on fait établir des inégalités vérifiées par les endomorphismes autoadjoints associés aux matrices de S_n^{++} . **Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre.**

Partie I

Étude de compacité

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit s un endomorphisme **autoadjoint** de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; (x|s(x)) = 1\}$.

I.1. Dans cette question, on suppose $n = 2$. On considère le plan euclidien muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ où O est un point du plan. À tout vecteur $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ de $\mathbb{R}^2$, on associe le point M du plan de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère $\mathcal{R}$. On note σ l'ensemble des points du plan ainsi associés aux vecteurs de Σ . Soit S la matrice de l'endomorphisme s relativement à la base $\mathcal{B}$.

I.1.1. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces

propres de la matrice S . Pour $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ dans $\mathbb{R}^2$, calculer le produit scalaire $(x|s(x))$.

Montrer que l'ensemble σ est une ellipse dont on donnera une équation réduite. Tracer cette ellipse dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.1.2. On suppose que $S = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de S . Déterminer l'ensemble σ et tracer cet ensemble dans le plan euclidien muni du repère $\mathcal{R}$.

I.2. On suppose n entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles (distinctes ou confondues) de s , chaque valeur propre figurant avec son ordre de multiplicité. On veut montrer que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs. On ordonne les λ_i dans l'ordre croissant, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et on considère une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

I.2.1. On suppose $\lambda_1 > 0$. Pour $x = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n$, calculer $(x|s(x))$. Montrer que l'ensemble Σ n'est pas vide. Montrer que Σ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto (x|s(x))$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est continue. En déduire que Σ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2. On suppose que Σ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$.

I.2.2.1. Montrer que l'inégalité $\lambda_n \leq 0$ est impossible.

I.2.2.2. On suppose $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n > 0$ et, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on considère le vecteur

$$x_r = r\varepsilon_1 + \sqrt{\frac{1 - \lambda_1 r^2}{\lambda_n}} \varepsilon_n.$$

Montrer que $x_r \in \Sigma$. Calculer $\|x_r\|^2$ et déterminer sa limite lorsque r tend vers $+\infty$. En déduire une contradiction avec l'hypothèse Σ compacte.

Dans la suite du problème, on note S_n^+ (respectivement S_n^{++}) l'ensemble des matrices S de $S_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : pour tout X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$ (respectivement ${}^tXSX > 0$). Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, soit s l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ et soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et X relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc ${}^tXSX = (x|s(x))$.

Partie II

Racine carrée d'une matrice de S_n^+

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $SX_i = \lambda_i X_i$.

II.1. On veut montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.2. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\lambda_i \geq 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

II.1.3. On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i > 0$. Montrer que S est inversible et que son inverse $S^{-1} \in S_n^{++}$.

II.2. On suppose de plus que $S \in S_n^+$.

II.2.1. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, calculer Δ^2 .

On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où C_i est la matrice colonne dont le coefficient de la ligne i est égal à 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Soient $Y = \sum_{i=1}^n y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq 0$ tels que $NY = \mu Y$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mu^2 y_i = \lambda_i y_i$ puis $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. En déduire que $N = \Delta$.

II.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UD^t U$. Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$. Montrer que T est unique.

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice T de S_n^+ telle que $T^2 = S$.

II.3. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S . On note $0 \leq \mu_1 < \dots < \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S . Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \dots, \mu_p$ par :

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et tout } a \in \mathbb{R}, L_k(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \frac{(a - \mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)}.$$

II.3.1. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$ (on rappelle que les X_i définis au début de la partie II, appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $SX_i = \lambda_i X_i$).

II.3.2. Soit P le polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$, à coefficients réels tel que : pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$. Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k . Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$. Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

II.3.3. En application des questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$. Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison linéaire des matrices S et $I_3 = \text{diag}(1,1,1)$.

Partie III

Une propriété de la trace des matrices de S_n^+

III.1. Soit $S \in S_n^+$.

III.1.1. On considère la matrice $\delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i \geq 0$. Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$. Montrer que $\text{tr}(\delta V) \leq \text{tr}(\delta)$.

III.1.2. En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a : $\text{tr}(SU) \leq \text{tr}(S)$.

III.2. Réciproque de la propriété III.1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in O(n)$, on a $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

III.2.1. Un lemme technique. Soient a, b, θ des réels. Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ , tel que $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$.
En déduire que l'inégalité « pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a \cos(\theta) + b \sin(\theta) \leq a$ » entraîne $b = 0$.

III.2.2. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leq p < q \leq n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q . Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π , orienté par la base (e_p, e_q) , la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π . Écrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\text{tr}(AU)$. En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

III.2.3. D'après III.2.2, la matrice A est symétrique. On note l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres de l . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on notera $l(v_i) = \beta_i v_i$. On suppose qu'une valeur propre de l est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$. En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$ conduit à une impossibilité et en déduire que $A \in S_n^+$.

Partie IV

Des inégalités remarquables

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et de t . On note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les n valeurs propres de s .

IV.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité (1) :

$$(1) \quad \left(t(x) \middle| t^{-1}(x) \right)^2 \leq (s(x) \middle| x) (s^{-1}(x) \middle| x).$$

À quelle condition sur x a-t-on égalité ?

IV.2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1 \lambda_n.$$

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer le signe de $P(\lambda_i)$.

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. Calculer $v(x)$ et montrer que x est vecteur propre de v . En déduire que la matrice V de v relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $V \in S_n^+$.

IV.3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, Q(a) = (s(x)|x)a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n.$$

Déterminer le signe de $Q(0)$ et celui de $Q(1)$. En déduire l'inégalité (2) :

$$(2) \quad (s(x)|x)(s^{-1}(x)|x) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4.$$

IV.4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$. Calculer les produits scalaires $(s(x)|x)$ et $(s^{-1}(x)|x)$. Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans l'inégalité (2).

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites**Les parties I, II et III sont indépendantes.****Notations et définitions**

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ le plan muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ avec $O = (0, 0)$, $\mathbf{i} = (1, 0)$ et $\mathbf{j} = (0, 1)$. La norme associée au produit scalaire canonique sera notée $\|\cdot\|_2$ si bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour a et b deux réels donnés, on définit $\mathcal{D}_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = ax + b$.

Si $M \in \mathcal{P}$ a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on note $p_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même abscisse x que M .

On définit aussi $\mathcal{D}'_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$: $x = ay + b$, et $p'_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}'_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même ordonnée y que M .

PARTIE I : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS UN CAS PARTICULIER

Soient A , B et C les trois points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement : $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(\alpha, \frac{1}{2})$ où α désigne un réel non nul.

On définit deux applications f_0 et f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a, b) = \|\overrightarrow{p_{a,b}(A)A}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p_{a,b}(B)B}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p_{a,b}(C)C}\|_2^2,$$

$$f_1(a, b) = \|\overrightarrow{p'_{a,b}(A)A}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p'_{a,b}(B)B}\|_2^2 + \|\overrightarrow{p'_{a,b}(C)C}\|_2^2.$$

I.1. Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.

I.2.

I.2.a. Montrer que $f_0(a, b) = b^2 + (b - 1)^2 + \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2$.

I.2.b. Vérifier que $f_0(a, b) = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

I.2.c. En déduire que la fonction f_0 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels $(a, b) = (0, \frac{1}{2})$ correspondant à la droite, notée $\mathcal{D}_0$, d'équation dans $\mathcal{R} : y = \frac{1}{2}$.

I.3.

I.3.a. Déterminer l'expression explicite de $f_1(a, b)$ en fonction de a, b et α .

I.3.b. Montrer que $f_1(a, b) = 3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2$.

I.3.c. En déduire que la fonction f_1 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels, noté (a_1, b_1) , à déterminer. On note alors $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation dans $\mathcal{R} : x = a_1y + b_1$.

I.4. Montrer que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales et se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de (A, B, C) .

PARTIE II : RÉSULTATS SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

Soit E un espace préhilbertien réel non réduit à $\{0\}$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

II.1. Donner la définition de $F^\perp$. Énoncer (sans démonstration) une propriété vérifiée par F et $F^\perp$ valable en général. Dans le cas où E est de dimension finie, que peut-on dire de plus ?

Pour $\mathbf{x} \in E$, on note $p_F(\mathbf{x})$ la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur F .

II.2. Démontrer que $\inf_{\mathbf{z} \in F} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ est bien défini et que cette borne inférieure est atteinte en un unique élément $\mathbf{z}$ de F défini par $\mathbf{z} = p_F(\mathbf{x})$.

Cette borne inférieure est notée $d(\mathbf{x}, F)$. On a donc $d(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x})\|$.

On dit qu'une application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} | \mathbf{y})_F$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un **produit subordonné à F** si elle vérifie les 4 propriétés suivantes :

- i) $\forall \mathbf{x} \in E$, l'application $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x} | \mathbf{y})_F$ est une forme linéaire sur E ;
- ii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x} | \mathbf{y})_F = (\mathbf{y} | \mathbf{x})_F$;
- iii) $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in F$, $(\mathbf{x} | \mathbf{y})_F = 0$;
- iv) $\forall \mathbf{x} \in F^\perp, \forall \mathbf{y} \in F^\perp$, $(\mathbf{x} | \mathbf{y})_F = (\mathbf{x} | \mathbf{y})$.

II.3.

II.3.a. Montrer que si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} | \mathbf{y})_F$ est un produit subordonné à F , alors :

- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x} | \mathbf{y})_F = (\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x}) | \mathbf{y} - p_F(\mathbf{y}))$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x} | \mathbf{x})_F = (d(\mathbf{x}, F))^2$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x} | \mathbf{x})_F \geq 0$;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x} | \mathbf{x})_F = 0 \iff \mathbf{x} \in F$.

II.3.b. Vérifier qu'il existe un unique produit subordonné à F .

On note alors $(\cdot|\cdot)_F$ ce produit subordonné à F et pour $\mathbf{x} \in E$, on pose $\|\mathbf{x}\|_F = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F}$.

II.4. Montrer que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| \leq \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$; à quelle condition sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ peut-on dire que : $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| = \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$?

II.5.

II.5.a. Montrer l'existence d'un élément de E , noté $\mathbf{u}$, tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On note alors $D = \text{Vect}(\mathbf{u})$ la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{u}$ et p_D la projection orthogonale sur D .

II.5.b. Vérifier que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $p_D(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{u})\mathbf{u}$.

Pour tout élément $\mathbf{x} \in E$, on pose $m_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}|\mathbf{u})$, $\sigma_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_D$.

Pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, on pose $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y})_D$.

II.5.c. Montrer que $\sigma_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\|$ et que $\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) - m_{\mathbf{x}}m_{\mathbf{y}}$.

On suppose dans la suite de cette partie que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux éléments de E tels que la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ soit libre.

II.6. Montrer que $\sigma_{\mathbf{x}}$ et $\sigma_{\mathbf{y}}$ sont deux réels strictement positifs.

On pose alors $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}\mathbf{u}}{\sigma_{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{y} - m_{\mathbf{y}}\mathbf{u}}{\sigma_{\mathbf{y}}}$ et $\rho = \frac{\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}}$.

II.7.

II.7.a. Montrer que $m_{\mathbf{x}^*} = 0$, que $\sigma_{\mathbf{x}^*} = 1$ et que $\rho \in]-1, 1[$.

II.7.b. Vérifier alors que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$ est une base orthonormale de $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$.

II.7.c. Montrer que $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|$ est bien défini et vaut $d(\mathbf{y}, F)$.

II.7.d. Établir que $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - m_{\mathbf{y}}\mathbf{u} - (\mathbf{y}|\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*\|$.

II.7.e. Vérifier que $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \sigma_{\mathbf{y}}\|\mathbf{y}^* - \rho\mathbf{x}^*\|$.

II.7.f. Déterminer, en fonction de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}$, l'unique couple de réels (a_0, b_0) tel que :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - a_0\mathbf{x} - b_0\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_0$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $y = a_0x + b_0$.

II.8. Montrer que $\mathcal{D}_0$ a pour équation dans $\mathcal{R}$: $\frac{y - m_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}} = \rho \cdot \frac{x - m_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}$.

II.9. Montrer de même qu'il existe un unique couple de réels (a_1, b_1) tel que :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x} - a_1\mathbf{y} - b_1\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_1$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $x = a_1y + b_1$.

II.10. Montrer que $\mathcal{D}_1$ a pour équation dans $\mathcal{R}$: $\frac{x - m_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}} = \rho \cdot \frac{y - m_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}$ avec le même réel ρ défini précédemment.

II.11. Vérifier que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées dans $\mathcal{R}$: $(m_{\mathbf{x}}, m_{\mathbf{y}})$.

II.12. Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = m_{\mathbf{x}}m_{\mathbf{y}}$.

PARTIE III : BASE ADAPTÉE À UN PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

Soit E_n un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 1$.

On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur E_n et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n . Pour tout élément $\mathbf{z} \in E_n$, on notera $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$ la matrice de $\mathbf{z}$ dans la base $\mathcal{B}$, et on posera $Z = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$. Ainsi Z est la matrice-colonne à n lignes donnée

par la relation $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{e}_i$.

III.1. Vérifier que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = {}^t XSY$ si $X = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$, $Y = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{y})$ et $S = \left((\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$.

On dit alors que S est **associée** à $\mathcal{B}$.

III.2.

III.2.a. Vérifier que si S est associée à $\mathcal{B}$, alors S est une matrice carrée symétrique réelle d'ordre n et que le spectre de S dans $\mathbb{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

III.2.b. À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice S associée à $\mathcal{B}$ est-elle diagonale ?

III.3. On considère deux matrices A et B carrées d'ordre n telles que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t XAY = {}^t XBY$. Montrer que $A = B$.

Notons $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ une base de E_n et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

III.4.

III.4.a. Pour $\mathbf{x} \in E_n$, on note $X = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$. Donner la relation entre X , X' et P .

III.4.b. On note $S' = \left((\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $X' = M_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$ et $Y' = M_{\mathcal{B}'}(\mathbf{y})$, donner l'expression de $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ en fonction de X' , Y' et S' . En déduire que $S' = {}^t P S P$.

III.4.c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E_n telle que, pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x'_i y'_i \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y'_i \mathbf{e}'_i.$$

III.4.d. À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à la base précédente $\mathcal{B}'$ est-elle une matrice orthogonale ?

III.5. Étant donné une matrice $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des réels $(d_1, \dots, d_n)$ strictement positifs sur la diagonale, M_1 est-elle la matrice associée à une base de E_n ?

III.6. Soit $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormale de E_2 et f_2 l'endomorphisme de E_2 dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_2 .

III.6.a. Déterminer le spectre de f_2 et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de f_2 .

III.6.b. M_2 est-elle la matrice associée à une base de E_2 ?

III.7. Soit $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormale de E_3 .

On note f_3 l'endomorphisme de E_3 dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_3 .

III.7.a. Déterminer le spectre de f_3 et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de f_3 .

III.7.b. M_3 est-elle la matrice associée à une base de E_3 ?

III.8. $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice associée à une base de E_4 ?

On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ d'éléments de E_n est **adaptée** si les conditions suivantes sont remplies :

- pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = 0$ si $i \neq j$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i) = \frac{1}{n}$.

III.9.

III.9.a. Montrer qu'une famille adaptée est une base de E_n .

III.9.b. Montrer l'existence d'une base adaptée.

III.9.c. E_n admet-il une unique base adaptée ?

III.9.d. On suppose que $\mathcal{B}$ est une base adaptée. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, déterminer l'expression de $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ en fonction des coordonnées de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$.

III.9.e. Calculer alors la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$.

PARTIE IV : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS LE CAS GÉNÉRAL

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On considère $A_1, \dots, A_n$, n points distincts du plan $\mathcal{P}$ qui ne sont pas alignés.

On note $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ leurs coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$.

On définit deux applications f_0 et f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a, b) = \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{p_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2 \quad \text{et} \quad f_1(a, b) = \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{p'_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2.$$

IV.1. Donner un exemple d'espace préhilbertien réel de dimension infinie, puis un exemple d'espace euclidien de dimension n (dans les deux cas, on donnera l'expression du produit scalaire).

On considère dans toute la suite du problème un espace euclidien E_n de dimension n , dont le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$.

IV.2. Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E_n telle que :

$$\forall (\mathbf{z}, \mathbf{t}) \in E_n^2, \quad (\mathbf{z}|\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i t_i \quad \text{si} \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{e}_i.$$

On pose $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$, si bien que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On définit alors, à partir des points $A_1, \dots, A_n$, deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans E_n en posant :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i.$$

IV.3. Montrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille libre de E_n .

IV.4. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_0(a, b) = n\|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|^2$ et $f_1(a, b) = n\|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\|^2$.

IV.5.

IV.5.a. En déduire que f_0 admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ qui est atteint en un unique couple de réels, noté (a_0, b_0) , et qu'il en est de même de f_1 avec un unique couple de réels noté (a_1, b_1) .

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit alors les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ d'équation dans $\mathcal{R}$: $y = a_0x + b_0$ et $x = a_1y + b_1$. On les appelle **les droites des moindres carrés** associées à $A_1, \dots, A_n$.

IV.5.b. Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de $(A_1, \dots, A_n)$.

IV.5.c. À quelle condition sur les $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont-elles orthogonales ? Donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

IV.5.d. Donner un exemple de quatre points distincts et non alignés $A_1, \dots, A_4$ de $\mathcal{P}$ tels que les droites des moindres carrés $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ associées à $A_1, \dots, A_4$ soient orthogonales et donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites**Les parties II et III sont indépendantes****PARTIE I**

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

I.1.

I.1.1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

I.1.3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.

I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n .

I.2.2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, v_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. On note $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U .

I.3. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, p_0(x) = x;$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, p_n(x) = x \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right)$.

PARTIE II

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note g_x la fonction d'une variable réelle, périodique de période 2π , telle que, pour tout $t \in]-\pi, \pi]$, on ait : $g_x(t) = \text{ch} \left(\frac{xt}{\pi} \right)$.

II.1.

II.1.1. Préciser pourquoi g_x est égale en tout point $t \in \mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier :

$$\frac{1}{2} a_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) \cos(nt) + b_n(x) \sin(nt)).$$

II.1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $b_n(x)$.

II.1.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $a_n(x)$. On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

II.2.

II.2.1. En donnant à t une valeur particulière dans la série de Fourier de g_x , montrer que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, U(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} - \frac{1}{x}.$$

II.2.2. A partir de $V(x) = \int_0^x U(t) dt$ et du résultat de **II.2.1**, donner à l'aide des fonctions usuelles une expression de la fonction V définie à la question **I.2.3**.

II.2.3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{sh}(x) = p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

PARTIE III

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$$\text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad h(x, t) = \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}.$$

III.1.

III.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x, t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

III.1.2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.2.

III.2.1. Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et à tout ordre. Calculer, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et

tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$. On distinguera les cas n pair et n impair.

III.2.2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{on a : } f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m} \sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt \text{ et } f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1} \cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1} dt.$$

III.4.

III.4.1. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\frac{1}{\exp(\pi t) - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$.

III.4.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t) \sin(tx)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t) \sin(tx) dt$ à l'aide de $u_n(x)$.

III.4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

on pose : $h_n(x, t) = \sum_{k=1}^{k=n} \exp(-k\pi t) \sin(tx)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$h_n(x, t) = (1 - \exp(-n\pi t)) \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t} - 1}.$$

Puis, montrer que : $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x, t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U .

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte trois exercices totalement indépendants entre eux et qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

La question 4. de cet exercice est indépendante des trois questions qui précèdent.
La notation th employée à la question 4.c. désigne la fonction tangente hyperbolique.

Soit f l'unique fonction impaire admettant 2π pour période et telle que : $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$.

1. Montrer que : $f(0) = f(\pi) = 0$, puis calculer $f\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ en justifiant la réponse fournie.

2. Représenter graphiquement la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

3.

a. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f .

b. En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$.

On énoncera très précisément le théorème utilisé.

c. En utilisant l'égalité établie à la question précédente 3.b., déterminer la somme de la

série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d. Appliquer la formule de Parseval à la fonction f et en déduire la somme de la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4. Soit x un réel strictement positif fixé.

a. Montrer que la fonction $t \rightarrow e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b. Soit k un entier naturel quelconque.

Montrer que : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} f(t) dt = \frac{(1 - e^{-\pi x})}{x} (-e^{-\pi x})^k$.

c. En déduire : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \frac{1}{x} \text{th}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Exercice 2

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la

$$\text{relation : } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$.

1. Rappeler la définition d'une fonction numérique décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.

a. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$

b. En déduire que f est continue au point x_0 .

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$

En déduire : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.$

4.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que :
 $\forall t \in [0, 1], \quad |e^t - 1| \leq M t.$

b. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt.$$

Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. Montrer finalement : $f(x) \underset{0_+}{\sim} -\ln(x).$

Indication : remarquer que pour x strictement positif, $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + g(x).$

5. Dans cette question, on se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(1)$.

On introduit la fonction h définie sur $[0, 1]$ par la relation : $\forall t \in [0, 1], \quad h(t) = \frac{e^t}{1+t}.$

On définit également deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

- Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0, 1]$.
- Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n .
- Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
- Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}$.
- Déterminer une valeur explicite de n , notée n_0 , telle que $\frac{u_{n_0} + v_{n_0}}{2}$ soit une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près.

En déduire une valeur décimale approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près de la forme $\frac{p}{100}$, où p désigne un entier naturel. On expliquera la démarche utilisée.

Exercice 3

Dans cet exercice, la notation $\lim_{x \rightarrow 1_-} g(x)$ employée à la question 3.b. signifie « limite de la fonction g lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ».

- Montrer que les trois séries entières $\sum_{n \geq 1} x^n$, $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} n x^n$ ont chacune un rayon de convergence égal à 1.

On pose alors : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

On sera attentif au fait que les trois sommes ci-dessus sont indexées à partir de $n = 1$.

- Dans cette question, x désigne un élément quelconque de l'intervalle $] -1, 1[$.
Rappeler sans démonstration une expression simple de $f(x)$ et en déduire une expression simple de $h(x)$ en citant précisément le théorème de cours utilisé.
- Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1[$.

- b. Soit x un élément quelconque de l'intervalle $[0, 1[$.
 Minorer $g(x)$ et en déduire : $\lim_{x \rightarrow 1_-} g(x) = +\infty$.
- c. Donner l'allure de la courbe représentative de la restriction de la fonction g à l'intervalle $[0, 1[$.
 On précisera en particulier la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4.

- a. Montrer qu'il existe un unique réel α possédant les deux propriétés suivantes :
 α est élément de l'intervalle $[0, 1[$ et $g(\alpha) = 2$.
- b. Calculer $h(0,5)$ et en déduire : $\alpha \geq 0,5$.
- c. A l'aide de votre calculatrice, déterminer explicitement le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que : $\sum_{n=1}^{n_0} \sqrt{n} (0,6)^n \geq 2$.
 Que peut-on en déduire pour α ?

5.

- a. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[, (1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) x^n$.
- b. En utilisant le critère spécial relatif aux séries alternées, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) (-1)^n$ est convergente.
- c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) (-1)^n$ n'est pas absolument convergente et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) x^n$.
- d. Montrer enfin que la fonction g possède une limite finie lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures. On citera très précisément le théorème utilisé.

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2**Durée : 3 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Calculatrices autorisées

Objectif et convention

On étudie dans ce sujet certains endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel. On se propose, entre autres, de reconnaître parmi ceux-ci les endomorphismes de référence : projections orthogonales, réflexions, rotations etc.

On notera $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Conformément à l'usage, les candidats pourront identifier les vecteurs (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ et les matrices colonnes à trois coefficients réels $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On pourra ainsi considérer que $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour tous nombres réels a, b et c , on considère la matrice $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$,

$f_{a,b,c}$ désignera l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{R}^3$ usuel ayant pour matrice $M(a, b, c)$ dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

On notera :

I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$;

$\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation, dans la base canonique, $x + y + z = 0$;

et Δ la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{P}$.

Les parties ne sont pas indépendantes. En particulier, l'étude des valeurs propres, faite dans la partie III, intervient dans la partie IV.

I Préliminaire important

On pose $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1°) Construction d'une base orthonormale directe

1.a) Montrer que $\mathbf{e}'_1$ est un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) dirigeant la droite Δ .

1.b) Montrer que $\mathbf{e}'_2$ est un vecteur unitaire appartenant au plan $\mathcal{P}$.

1.c) Déterminer un vecteur $\mathbf{e}'_3$ de sorte que $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbf{R}^3$.

2°) Soient a, b et c des réels.

2.a) Préciser $f_{a,b,c}(\mathbf{e}'_1)$ et en déduire que le réel $a + b + c$ est une valeur propre de $f_{a,b,c}$.

2.b) Justifier que la famille $(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}$.

2.c) Vérifier que les vecteurs $f_{a,b,c}(\mathbf{e}'_2)$ et $f_{a,b,c}(\mathbf{e}'_3)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

2.d) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par $f_{a,b,c}$.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^3$ est stable par un endomorphisme f quand pour tout $\mathbf{u}$ de F , son image par f , c'est-à-dire le vecteur $f(\mathbf{u})$, appartient également à F .

Les résultats de ce préliminaire peuvent être utilisés à de nombreuses reprises dans la suite du sujet.

II Quelques exemples

3°) On note ψ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $J = M(0, 1, 0)$.

3.a) Déterminer le rang de la matrice J . J est-elle inversible ?

3.b) Calculer le polynôme caractéristique de J et montrer que J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

3.c) Donner la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}'$ choisie au préliminaire I.1°) (*on pourra utiliser les calculs faits au préliminaire ou utiliser la formule de changement de bases et la calculatrice*).

3.d) En déduire que l'endomorphisme ψ est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques (axe orienté, angle).

4°) Dans cette question, on considère la matrice $M_2 = M(1/3, -2/3, -2/3)$.

4.a) Préciser la matrice $M_2 \times M_2$. Que dire du rang de M_2 ?

4.b) Justifier que l'endomorphisme s de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M_2 est une symétrie.

Préciser les sous-espaces propres $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$ (associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1).

4.c) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de M_2 .

5°) Dans cette question, on considère la matrice $M_1 = M(1/3, 1/3, 1/3)$.

5.a) Déterminer le rang de la matrice M_1 . M_1 est-elle inversible ?

5.b) Calculer, en faisant apparaître le détail des calculs, le polynôme caractéristique de M_1 (*on pourra commencer par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$*).

5.c) Préciser chaque sous-espace propre de M_1 .

5.d) Justifier que M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et reconnaître géométriquement l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M_1 .

III Étude des matrices $M(a, b, c)$

Dans cette partie, a, b et c désignent des nombres réels. On rappelle que $J = M(0, 1, 0)$.

On désignera par j le complexe $\exp\left(i \frac{2\pi}{3}\right)$ où $i^2 = -1$.

6°) Sans calculatrice, justifier : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

7°) Préciser la matrice J^2 et exprimer la matrice $M(a, b, c)$ à l'aide des matrices I_3 , J et J^2 et des réels a , b et c .

8°) Étude de J dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$

8.a) Déterminer les valeurs propres **complexes** de J et montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

On rappelle que le polynôme caractéristique de J a déjà été obtenu à la question 3.b).

8.b) Expliciter une matrice P à coefficients **complexes** telle que $D = P^{-1}JP$ soit une matrice diagonale à coefficients **complexes** que l'on précisera.

8.c) Montrer que $P^{-1}J^2P = D^2$.

Que vaut la matrice $P^{-1}I_3P$?

9°) Soient a, b et c réels.

9.a) Dédurre des questions 7°) et 8°) que $M(a, b, c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ et que les valeurs propres complexes (éventuellement confondues) de $M(a, b, c)$ sont :

$$a + b + c, \quad a + j b + j^2 c \quad \text{et} \quad a + j^2 b + j c.$$

9.b) Préciser les parties réelles et imaginaires de chacune des valeurs propres de $M(a, b, c)$ en fonction de a, b et c .

9.c) Montrer que les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont toutes réelles si, et seulement si, les réels b et c sont égaux.

10°) Dans cette question, on suppose que les réels b et c sont différents : $b \neq c$.
Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

11°) Dans cette question, on suppose que les réels b et c sont égaux : $b = c$.
On rappelle que $f_{a,b,b}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M(a, b, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

11.a) Déterminer les valeurs propres de $f_{a,b,b}$, ainsi que les sous-espaces propres associés (*on envisagera les deux cas : $b = 0$ et $b \neq 0$*).

11.b) Montrer que $f_{a,b,b}$ est diagonalisable et plus précisément qu'il existe une matrice à coefficients réels Q **orthogonale** telle que pour tous réels a et b , la matrice $D(a, b) = {}^t Q M(a, b, b) Q$ soit diagonale.

Expliciter une telle matrice Q (*on pourra utiliser 1.c*), ainsi que la matrice $D(a, b)$ obtenue.

IV Application : Étude des projecteurs

12°) Soient a, b et c des nombres réels.

12.a) À l'aide de la partie précédente, montrer que :

$f_{a,b,c}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes si, et seulement si, ($b = c$ et $b \neq 0$).

12.b) Déterminer les valeurs des réels a, b et c pour lesquelles l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b,c}$ est exactement $\{0, 1\}$.

12.c) En déduire l'équivalence des deux assertions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) $f_{a,b,c}$ est un projecteur de $\mathbf{R}^3$ autre que l'identité et l'application nulle

(ii) $(a, b, c) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ou $(a, b, c) = (2/3, -1/3, -1/3)$

Préciser les éléments caractéristiques des deux projecteurs obtenus.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

* * * * *

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * * * *

Exercice 1

On considère dans tout l'exercice que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \leq b$.

On note $E = \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère f et g **deux fonctions de E** .

On note enfin $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions h de E vérifiant $\int_a^b h^2(t)dt$ est convergente.

On s'intéresse dans cet exercice à la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)g(t)dt$, en particulier à celle de $\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt$, en fonction de celle de $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f^2(t)dt$.

Partie I. Cas particulier de l'intervalle $[a, b[$ borné

On suppose dans cette partie que $b \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'intervalle $[a, b[$ est borné.

1) Rappeler la définition de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$.

2) **2a.** Montrer que si f est constante, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

2b. En déduire que si f est bornée, alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

3) **3a.** Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1 + x^2$

3b. En déduire que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

3c. Donner un contre-exemple simple pour $a = 1$ et $b = +\infty$, c'est-à-dire une fonction h continue sur $[1, +\infty[$ vérifiant :

$\int_1^{+\infty} h^2(t)dt$ est convergente et $\int_1^{+\infty} h(t)dt$ est divergente.

Partie II. Produit scalaire

On suppose de nouveau dans cette partie que $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **1a.** Montrer $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

1b. Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}$, alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

2) En déduire que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

3) Montrer que l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.

On notera désormais le produit scalaire $(f|g)$ au lieu de $\varphi(f, g)$ et $\|f\|$ pour la norme associée.

4) On suppose dans cette question que $a = 1$, $b = +\infty$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

4a. Montrer que la fonction g appartient à $\mathcal{F}$ et calculer $\|g\|$.

4b. Montrer que si f est positive sur $[1, +\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors

$\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

4c. Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente et qu'on a de plus

$$\left(\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} f^2(t)dt$$

Partie III. Règle d'Abel

On suppose dans cette partie que $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente**. Le but est de montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et positive sur $I = [a, b[$ alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est également convergente.

On définit sur I la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(u)du$.

1) 1a. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

1b. Rappeler pourquoi F admet une limite finie en b^- , en déduire que F est bornée sur I .

Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I, |F(x)| \leq M$.

2) Cas particulier

On suppose dans cette question que $a = 1$, $b = +\infty$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$.

2a. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ est convergente.

2b. Pour $x \in [1, +\infty[$, à l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_1^x f(t)g(t)dt$ en fonction de $\int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$.

2c. En déduire que $\int_1^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente et vaut $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$.

3) Soit g_1 une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

3a. Montrer que $\int_a^b g_1'(t)dt$ est convergente si et seulement si g_1 admet une limite finie en b^- .

3b. On suppose de plus g_1 décroissante et positive, montrer à l'aide de **III.1b** et **III.3a** que $\int_a^b F(t)g_1'(t)dt$ est absolument convergente.

- 4) On suppose que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, décroissante et positive.
 Montrer, de la même manière qu'en **III.2**, que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

Partie I. Étude de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la série $\sum (-1)^n a_n$

- 1) **1a.** Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
1b. En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.
1c. Justifier que pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \leq 1 + t$ et en déduire que $\ell = 0$.
- 2) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$.
- 3) On se propose ici de calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

3a. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}.$$

3b. Vérifier l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1} dt \leq \frac{2}{3} a_{n+1}.$$

3c. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3} u$.

3d. En conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{p=0}^n (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^p dt = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3e. Donner la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Partie II. Étude de la série entière $\sum a_n x^n$ et de sa somme

- 1) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1a. Justifier que $R \geq 1$.

1b. Soit $x > 1$ fixé.

1b1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \left((1+t^2) \frac{x}{2} \right)^n dt \geq \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^1 \left((1+t^2) \frac{x}{2} \right)^n dt.$$

1b2. En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n x^n \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.$$

Justifier la divergence de la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1c. Conclure à $R = 1$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$ fixé. On définit sur $[0, 1]$ la fonction g_x par $g_x(t) = 1 - x \frac{1+t^2}{2}$.

2a. Étudier les variations de g_x sur $[0, 1]$ et dresser son tableau de variations complet suivant le signe de x .

2b. Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{g_x(t)}$ est définie et continue sur $[0, 1]$ et qu'il existe une constante $K_x > 0$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{2}{2-x-xt^2} \right| = \left| \frac{1}{g_x(t)} \right| \leq K_x.$$

2c. Montrer alors que :

$$\left| \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \left(\frac{x}{2}(1+t^2) \right)^{n+1} dt \right| \leq K_x |x|^{n+1} a_{n+1}.$$

3) Montrer l'égalité :

$$\sum_{p=0}^n a_p x^p = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt - \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} \left(\frac{x}{2}(1+t^2) \right)^{n+1} dt \quad (1)$$

4) Grâce à l'étude de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de l'égalité (1), en déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{2}{2-x-xt^2} dt.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en écrivant :

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n-1} dt$$

et en procédant à une intégration par parties dans la seconde intégrale, montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, (1+2n)a_n - na_{n-1} = 1 \end{cases}.$$

6) On définit la fonction S sur $] - 1, 1[$, par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 2x)y'(x) - (1 - x)y(x) = \frac{1}{x - 1}.$$

6a. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur chacun des intervalles $] - 1, 0[$ et $]0, 1[$.

On ne cherchera pas à raccorder les éventuelles solutions.

6b. Montrer que S est l'unique solution développable en série entière sur $] - 1, 1[$ de l'équation différentielle (E) .

6c. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $] - 1, 0[$ et sur $]0, 1[$.

6d. Montrer que S est l'unique solution de (E) sur $] - 1, 1[$.

Problème

Les différentes parties de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante.

On appelle matrice **symétrique définie positive** toute matrice à coefficients réels, symétrique, **dont les valeurs propres sont toutes strictement positives**.

Les parties **I** et **IV** utilisent le résultat suivant :

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n définies par $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors la matrice produit $C = AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ vérifie :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On rappelle la propriété : si T est une matrice triangulaire supérieure (respectivement triangulaire inférieure) inversible alors T^{-1} est une matrice triangulaire supérieure (respectivement triangulaire inférieure).

Dans l'ensemble du problème, l'expression « déterminer ... en fonction de la matrice M » signifie qu'on veut obtenir un résultat dépendant de M et/ou M^{-1} et/ou ${}^t M$ et/ou de leurs puissances successives.

Dans l'ensemble du problème, S désigne une matrice symétrique définie positive d'ordre n , avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Partie I. Étude théorique

S est une matrice symétrique définie positive d'ordre n , on sait donc qu'il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^t P S P = D$ où D est une matrice diagonale semblable à S .

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S , éventuellement égales pour $i \neq j$ et on a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, \cdots, n \rrbracket, \lambda_i > 0.$$

- 1) Déterminer une matrice M à valeurs propres strictement positives, vérifiant

$$M^2 = S.$$

- 2) Vérifier que M est une matrice symétrique.

- 3) On appelle $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le vecteur $m_j \in \mathbb{R}^n$ par $m_j = (m_{1j}, \dots, m_{ij}, \dots, m_{nj})$; m_j est donc représenté matriciellement par la colonne $n^\circ j$ de la matrice M .

Expliquer pourquoi la famille $\mathcal{B} = (m_1, \dots, m_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

- 4) On considère que $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. À l'aide du processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathcal{B}$, on construit successivement :

- une base $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_n)$ orthogonale,
- puis une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ orthonormale.

Rappeler, sans les démontrer, les formules liant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ aux vecteurs de $\mathcal{B}$, puis les vecteurs de $\mathcal{B}'$ aux vecteurs de $\mathcal{B}_1$.

En déduire que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice triangulaire supérieure que l'on notera T .

- 5) On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ définis par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = m_i$ et $g(m_i) = \varepsilon_i$.

5a. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_0$?

5b. Quelle est la matrice de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{B}$?

5c. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}_0$ est MT . On pourra, par exemple, exprimer les quantités $g(m_j)$ et $g(f(e_j))$ à l'aide des coefficients t_{ij} et/ou m_{ij} des matrices T et M , ou utiliser des matrices de changement de bases.

- 6) Expliquer pourquoi $Q = MT$ est une matrice orthogonale.

- 7) Exprimer M à l'aide de T et Q .

- 8) Dédire des questions I.1, I.2 et I.7 qu'il existe une matrice **triangulaire inférieure inversible** L telle que

$$S = L.^t L$$

Cette décomposition s'appelle une **décomposition de Cholesky** de S .

Partie II. Propriété réciproque

Soit une matrice A d'ordre n , avec $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant la décomposition : $A = L.^t L$, où L est une matrice triangulaire inférieure inversible, d'ordre n , à coefficients réels.

- 1) Vérifier que A est symétrique à coefficients réels.

2) On sait alors que A est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à λ , alors $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On va démontrer que forcément $\lambda > 0$.

On rappelle que si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et que si

on note $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne associé à v , alors $\|v\|^2 = {}^tV.V = \|V\|^2$.

En posant $Z = {}^tL.X$, calculer de deux façons différentes ${}^tX.A.X$ et en déduire que

$$\lambda = \frac{\|Z\|^2}{\|X\|^2}.$$

3) En déduire que A est une matrice symétrique définie positive.

On a donc prouvé le résultat suivant :

A est une matrice symétrique définie positive si et seulement si il existe L matrice triangulaire inférieure inversible telle que $A = L.{}^tL$.

Partie III. Étude d'un cas pratique

Dans cette partie on suppose $n = 4$ et on cherche une décomposition de Cholesky de la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

1) On admet que le polynôme caractéristique de S vaut :

$$\chi_S(X) = \det(S - XI) = X^4 - 24X^3 + 137X^2 - 134X + 36.$$

On sait que ce polynôme admet 4 racines réelles comptées avec leur ordre de multiplicité, on va montrer qu'elles sont strictement positives.

1a. On pose $f(x) = x^4 - 24x^3 + 137x^2 - 134x + 36$.

En étudiant les variations de f'' , montrer que f'' a deux racines strictement positives x_1 et x_2 que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty, 0]$.

1c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -\infty, 0]$ et conclure la démonstration.

La matrice S étant symétrique définie positive, elle admet donc une décomposition de Cholesky de la forme $S = L.{}^tL$, avec L matrice triangulaire inférieure.

2) En posant $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{pmatrix}$ et en supposant que les coefficients diagonaux

a, c, f et j sont positifs, montrer que l'équation $S = L.{}^tL$ admet une unique solution L que l'on déterminera.

3) Étude de l'inverse de S :

3a. On rappelle que L^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure. Former le produit $L.L^{-1}$ et déterminer L^{-1} .

3b. En utilisant la relation ${}^tI = I$, où I désigne la matrice identité d'ordre 4, montrer que

$$({}^tL)^{-1} = {}^t(L^{-1}).$$

3c. En déduire l'expression de S^{-1} en fonction de L .

3d. Montrer que S^{-1} est une matrice symétrique.

3e. À l'aide d'une matrice diagonale semblable à S , déterminer le spectre de S^{-1} en fonction du spectre de S : $\text{Sp}(S) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$.

3f. En déduire que S^{-1} est une matrice symétrique définie positive.

3g. Calculer S^{-1} en utilisant le résultat de la question **III.3c**.

4) Calcul du déterminant de S :

Montrer que $\det(S)$ s'exprime très facilement à l'aide de la matrice L . Calculer $\det(S)$.

Partie IV. Une famille de matrices symétriques définies positives

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite de matrices symétriques S_n d'ordre n telles que :

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

ou encore $S_n = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $s_{ij} = \inf(i, j)$.

1) Étude de cas particuliers

1a. En déterminant le spectre de chaque matrice, vérifier que les matrices S_1 et S_2 sont des matrices symétriques définies positives.

On admet que S_3 est elle aussi symétrique définie positive.

1b. Donner une décomposition de Cholesky $S_i = L_i \cdot {}^tL_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ avec L_i matrice d'ordre i triangulaire inférieure et inversible.

*De même que dans la partie **III**, on imposera aux coefficients diagonaux des matrices L_i d'être positifs.*

2) Cas général

Dans cette question, on va obtenir une décomposition de Cholesky des matrices S_n de la forme $S_n = L_n \cdot {}^tL_n$, avec L_n matrice triangulaire inférieure d'ordre n .

2a. En s'inspirant des résultats de la question **IV.1b**, quelle forme générique peut-on supposer pour la matrice L_n ?

Dans ce cas, donner l'expression des coefficients l_{ij} de L_n pour $j \leq i$, qui sont donc situés sur et sous la diagonale.

On a bien sûr $l_{ij} = 0$ si $i < j$.

2b. On pose ${}^tL_n = (l'_{ij})$, qui est triangulaire supérieure. On a donc $l'_{ij} = 0$ si $j < i$. Donner la valeur des coefficients l'_{ij} pour $i \leq j$.

- 2c.** On sait que la matrice $A_n = L_n \cdot {}^t L_n$ est symétrique d'après la partie **II**. Pour montrer que $A_n = S_n$, il suffit de prouver que les coefficients situés sur et au-dessus de la diagonale sont identiques dans les deux matrices.
Déduire de **IV.2a** et de **IV.2b** que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, j \rrbracket, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l'_{kj} = i.$$

- 2d.** En déduire que toute matrice S_n est une matrice symétrique définie positive.

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE 1 : NORMES ÉQUIVALENTES

On note E l'espace vectoriel des applications de classe C^1 définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt .$$

- (a) Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

De même, $\|\cdot\|'$ est une norme sur E , il est inutile de le démontrer.

- (b) i. Donner la définition de deux normes équivalentes.

ii. Démontrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E .

2. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|$?

EXERCICE 2 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR INTÉGRALE

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ soit intégrable sur J .

On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \int_J g(x, t) dt$.

Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I .

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_2(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$.

Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

La fonction f_2 est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

EXERCICE 3 : UNE INTÉGRALE CURVILIGNE

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ le long du cercle γ de centre 0 et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

PROBLÈME : COMPARAISON DE CONVERGENCES

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

1. (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .
(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .
2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
3. On pose pour $x \in [0; 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0; 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0; 1]$.
4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
6. (a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.
(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.
- (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra observer que pour $k \geq n + 1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
- (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
- (a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
- (b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
- (c) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP****MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants.

EXERCICE

1. Déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que $3^p \equiv 1$ modulo 11.
2. En utilisant des congruences modulo 11, démontrer que, pour tout entier naturel n , l'entier $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i -ème ligne et à la j -ième colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$ ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A .

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A . Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de φ_A , les parties III et IV en étudient les vecteurs propres. **Les quatre parties sont indépendantes.**

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\text{Ker}(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).
4. En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.
5. Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note

alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}.$$

- (a) Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .
- (b) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A .
- (c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j) , $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

(a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

- i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.
- ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de tA .
- iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$), tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \bar{z}Y$.

En calculant $\varphi_A(X^tY)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A .

(b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

(c) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

(d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

- 8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
- 9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\text{Ker}(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\text{Ker}(\varphi_A))$.

10. Un cas d'égalité

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

(a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$.

(c) En déduire $\text{Ker}(\varphi_A)$.

11. Cas où u est diagonalisable

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B . Démontrer que $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

(b) En déduire que $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.

(c) Préciser la dimension de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.

14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal π_B de la matrice B).

15. En déduire que $B^d = 0$.

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 7 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Dans tout le problème, on note n un entier naturel non nul et on désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . Lorsqu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on note A^{-1} sa matrice inverse.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace vectoriel de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Une application $A : I \rightarrow F$ est continue (respectivement dérivable), lorsque, pour t décrivant I , les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions continues (respectivement dérivables) de I dans $\mathbb{K}$. On dira en abrégé que A est une matrice continue (respectivement dérivable) sur I et on notera $A(t) = (a_{i,j}(t))$ pour tout t dans I . Lorsque cette matrice est dérivable, on note $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$ la matrice dérivée.

Pour deux matrices dérivables $M(t)$ et $N(t)$, dont le produit existe, on admettra la formule $(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

Équations différentielles matricielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient A une matrice carrée d'ordre n continue sur I et B une matrice colonne à n lignes continue sur I , les coefficients des matrices A et B étant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ où les solutions $X(t)$ sont des matrices colonnes à n lignes dérivables sur I , dont les coefficients sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note $(E_0) : X'(t) = A(t)X(t)$ l'équation différentielle homogène associée.

On dira que (E) et (E_0) sont des équations différentielles matricielles. On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) . On rappelle que :

- S_0 est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n ;
- les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à l'ensemble S_0 une solution particulière de (E) ;
- pour tout t_0 de I et pour toute matrice V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une solution et une seule X de (E) sur I vérifiant $X(t_0) = V$ (existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy).

On appelle système fondamental de solutions de (E_0) , toute base $(X_1, \dots, X_n)$ de S_0 .

On note $W(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ la matrice carrée d'ordre n dont les $X_j(t)$ sont les colonnes et on dit que $W(t)$ est la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions de (E_0) .

Objectifs

Dans la première partie, il faut résoudre un exemple d'équation différentielle matricielle à coefficients constants.

Dans la deuxième partie, on traite le cas général de l'équation différentielle matricielle (E) en définissant la matrice résolvante de (E_0) .

Dans la troisième partie, on utilise les résultats de la deuxième partie pour résoudre une équation différentielle scalaire du second ordre.

Partie I. Cas d'une matrice à coefficients constants

On considère les équations différentielles :

$$(E) : X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \text{et} \quad (E_0) : X'(t) = AX(t)$$

où A désigne une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que $I = \mathbb{R}$.

I.1 Soient V un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la matrice $X(t) = e^{\lambda t}V$ est une solution de (E_0) si et seulement si V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

I.2 Un exemple

On suppose $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}$.

I.2.1 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle (E_0) .

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .

En déduire un système fondamental de solutions, puis la solution générale complexe de (E_0) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

I.2.2 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$.

Écrire le système d'équations différentielles linéaires scalaires vérifié par les quatre fonctions $x_k(t)$.

Déterminer la solution générale réelle de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ (on pourra déterminer successivement $x_2(t)$, puis $x_3(t)$, puis $x_1(t)$ et $x_4(t)$).

Préciser la solution X de (E) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partie II. Matrice résolvante

On reprend le cas général d'une équation différentielle $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ définie dans la partie notations. On prendra I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t \in I$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note S_0 l'espace vectoriel de dimension n des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E_0) associée.

Pour $t_0 \in I$ donné, on note Φ_{t_0} l'application de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall X \in S_0, \Phi_{t_0}(X) = X(t_0) .$$

D'après le rappel sur le problème de Cauchy, l'application Φ_{t_0} est un isomorphisme de S_0 sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $X_1, \dots, X_n$ un système fondamental de solutions de (E_0) .

II.1 Soient t_0 et t dans I . Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $X \in S_0$ la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$. Justifier l'égalité $(\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1})(V) = X(t)$.

II.2 On rapporte l'espace vectoriel S_0 à la base $(X_1, \dots, X_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à sa base canonique $(C_1, \dots, C_n)$.

II.2.1 Soit $t_0 \in I$. Prouver que la matrice, dans ce couple de bases, de l'application linéaire Φ_{t_0} de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice wronskienne :

$$W(t_0) = (X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)) .$$

II.2.2 Soient t_0 et t dans I . On note $R(t, t_0) = W(t)(W(t_0))^{-1}$. Prouver que la matrice $R(t, t_0)$ ne dépend pas du système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions choisi.

La matrice $R(t, t_0)$ s'appelle la résolvante de l'équation différentielle linéaire (E_0) .

II.3 Propriétés de la résolvante

Soient t, t_0, t_1 et t_2 dans I .

II.3.1 Pour simplifier, on note $R'(t, t_0)$, la dérivée par rapport à t de la matrice $R(t, t_0)$.

Montrer que $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$. En déduire que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la matrice $X(t) = R(t, t_0)V$ est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

II.3.2 Montrer que $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$. En déduire $(R(t, t_0))^{-1} = R(t_0, t)$.

II.4 Application de la résolvante : recherche d'une solution particulière de l'équation (E)

Soient t et t_0 dans I , on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$X(t) = R(t, t_0)V(t) ,$$

où $V : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application dérivable à déterminer.

II.4.1 On suppose que $X(t) = R(t, t_0)V(t)$ est une solution de (E). Montrer que :

$$R(t, t_0)V'(t) = B(t) .$$

II.4.2 En déduire que $V(t) = \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)du$ est une solution de (E) (la matrice $V(t)$ étant la matrice colonne dont les coefficients sont les intégrales des coefficients de la matrice colonne $R(t_0, u)B(u)$).

II.4.3 Montrer que $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u)du$ est une solution particulière de (E).

Partie III. Une application de la résolvante

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

III.1 On considère l'équation différentielle :

$$(e_0) : t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0 ,$$

où $y = y(t)$ est une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle I .

III.1.1 En cherchant les polynômes solutions de (e_0) sous la forme $y(t) = a_mt^m + \dots + a_0$ avec $a_m \neq 0$, déterminer le degré de ces polynômes puis déterminer tous les polynômes solutions de (e_0) sur $\mathbb{R}$. Préciser le polynôme P solution de (e_0) et vérifiant $P(0) = 1$.

III.1.2 Vérifier que la fonction $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ est solution de (e_0) sur l'intervalle $] -1; 1[$.

III.1.3 On cherche les solutions non nulles de (e_0) développables en série entière : $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ pour $|t| < R$, où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série.

III.1.3.1 Pour tout entier naturel k , écrire, selon les valeurs de k , les relations entre a_k et a_{k+1} . Déterminer le rayon de convergence R .

III.1.3.2 Montrer qu'il existe un entier non nul k_0 à déterminer, tel que pour $k \geq k_0$, le coefficient a_k s'exprime en fonction de a_{k_0} . Donner l'expression de a_k en fonction de a_{k_0} . Comment retrouve-t-on les fonctions P et Q parmi ces solutions ?

III.2 On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = \varphi(t) ,$$

où a, b, φ sont des fonctions continues définies sur un intervalle I .

III.2.1 On définit la fonction z par $z(t) = y'(t)$ et on note $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée $A(t)$ et une matrice colonne $B(t)$ telles que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrive matriciellement sous la forme $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

III.2.2 On note $(f(t), g(t))$ une base de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Les matrices $\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ forment alors un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(E_0) : X'(t) = A(t)X(t)$.

Soit $W(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}$ la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions.

Pour t et t_0 dans I , on note en abrégé f pour $f(t)$, f_0 pour $f(t_0)$, g pour $g(t)$, g_0 pour $g(t_0)$, f' pour $f'(t)$, f'_0 pour $f'(t_0)$, g' pour $g'(t)$ et g'_0 pour $g'(t_0)$.

Exprimer les coefficients de la matrice $(W(t_0))^{-1}$ en fonction de f_0, g_0, f'_0, g'_0 . puis ceux de la matrice résolvante $R(t, t_0)$, en fonction de $f, f_0, g, g_0, f', f'_0, g', g'_0$.

III.3 On considère l'équation différentielle :

$$(e) : t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 20t^4$$

et on prend $I =]0; 1[$.

III.3.1 Écrire l'équation différentielle (e) sous la forme de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ de la question **III.2**.

En déduire les matrices $A(t)$ et $B(t)$ telles que l'équation différentielle (e) s'écrive matriciellement sous la forme $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

III.3.2 On applique les résultats de la question **III.2** avec $f(t) = P(t)$ et $g(t) = Q(t)$, où P et Q sont les fonctions définies dans **III.1**. Pour t et u dans $]0; 1[$, expliciter le déterminant de $W(u)$ et la valeur de $Q(t)P(u) - P(t)Q(u)$.

III.3.3 Soient t et t_0 dans $]0; 1[$. En appliquant les résultats précédents de cette partie et de la partie **II**, montrer que la fonction :

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (e) .

Montrer que cette solution est encore valable pour $t_0 = 0$.

Expliciter la solution générale de (e) sur l'intervalle $[0; 1[$. Quelles sont les solutions de (e) sur $[0; 1[$ qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$?

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet comporte 6 pages.

Le sujet comporte deux parties indépendantes.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On note tA la transposée d'une matrice A .

Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A , $\text{tr}(A)$ la trace de A ; on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_{\lambda}(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$. Soit I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

On note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers naturels k qui vérifient $1 \leq k \leq n$.

Pour tout nombre complexe z , on note $|z|$ le module de z .

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$ lorsque

$$(1) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,j} > 0,$$

$$(2) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

Objectifs

Dans ce problème, on considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

Dans la première partie, on démontre une caractérisation géométrique d'une classe de matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés sur les éléments propres des matrices vérifiant la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Étant donné un nombre complexe z , on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est-à-dire le point de coordonnées (x, y) . On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1)$, $Q(j)$, $R(j^2)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris. Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

I.1 Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin. En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, donner les équations cartésiennes des côtés du triangle PQR . Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ) , (QR) et (RP) . Montrer qu'un point $M(x + iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités :

$$2x + 1 > 0, \quad x - \sqrt{3}y - 1 < 0, \quad x + \sqrt{3}y - 1 < 0.$$

I.2 Dans cette question, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

I.2.1 Montrer que 1 est valeur propre de A .

Dans la suite de la question **I.2**, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts, λ et $\bar{\lambda}$, avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$.

I.2.2 Exprimer $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$ en fonction de λ et $\bar{\lambda}$, puis en fonction de a et b .

I.2.3 Montrer les inégalités $\text{tr}(A) > 0$ et $\text{tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $(\text{tr}(A))^2 < 3\text{tr}(A^2)$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u = (a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3})$ et $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$).

I.2.4 Déduire de **I.2.2** et **I.2.3** les inégalités :

$$2a + 1 > 0 \quad \text{et} \quad (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0.$$

I.2.5 Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

I.3 Dans cette question, on note $\lambda = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T .

$$\text{On note } \alpha = \frac{1 + 2r \cos(\theta)}{3}, \quad \beta = \frac{1 + 2r \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3}, \quad \gamma = \frac{1 - 2r \cos(\theta + \frac{\pi}{3})}{3}.$$

I.3.1 Montrer les égalités : $\alpha = \frac{1 + \lambda + \bar{\lambda}}{3}$, $\beta = \frac{1 + j\lambda + j^2\bar{\lambda}}{3}$, $\gamma = \frac{1 + j^2\lambda + j\bar{\lambda}}{3}$.

Dans la suite de la question **I.3**, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

I.3.2 Montrer que la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

I.3.3 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3 . Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J .

I.3.4 Exprimer la matrice A en fonction des matrices I_3 , J et J^2 . Déterminer un polynôme $\mathcal{P}$ de degré ≤ 2 tel que $A = \mathcal{P}(J)$. En déduire que 1, λ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres de A .

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$.

II.1 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU , en déduire que 1 est valeur propre de A .

II.2 Précision sur $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

II.2.1 Soient une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0, \text{ tel que } BX = 0. \text{ Soit } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } |x_k| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|.$$

Justifier l'inégalité :

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|.$$

II.2.2 Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant **II.2.1** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini dans **II.2.1**. En déduire $|\lambda| \leq 1$.

II.2.3 On suppose que $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$ de **II.2.2** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ .

II.3 Dimension de $E_1(A)$

II.3.1 Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

II.3.2 Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|v_i| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_{j,i} |v_j|$. En calculant $\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les coefficients sont les modules des coefficients de V . Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|v_i| > 0$.

II.3.3 Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \frac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$.

Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour

tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$.

II.3.4 Bilan des propriétés spectrales de A et de tA

Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de tA , qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

II.4 À l'aide de la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en **II.3.3**, on considère l'application

$N : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), N(X) = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \omega_i |x_i|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leq N(X)$. Retrouver le résultat de **II.2.2** : tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| \leq 1$.

II.5 Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A

À l'aide de la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$

définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i.$$

On note $\text{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ .

II.5.1 Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

II.5.2 Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \text{Ker}(\Phi)$.

II.5.3 Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \text{Ker}(\Phi)$.

II.5.4 En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice A .

Fin de l'énoncé



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

*L'objectif du problème est de définir et d'étudier la notion de **diagonalisabilité d'un couple de matrices** (A, B) dans plusieurs situations.*

Les parties I et V traitent chacune un cas particulier, respectivement en dimension 3 et 4. La partie II aborde le cas où B est inversible et la partie IV étudie un critère de diagonalisabilité. La partie III se réduit à l'étude du cas d'un couple de matrices symétriques réelles.

La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H une partie de $\mathbb{K}$.

Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques,

$\mathcal{D}_n(H)$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux dans H ,

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles,

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales,

I_n la matrice identité d'ordre n .

Définitions 1 : Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On note $E_\lambda(A, B)$ l'ensemble des matrices-colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = \lambda BX$.
- On dit que λ est **valeur propre** du couple (A, B) si $E_\lambda(A, B)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si $A - \lambda B$ n'est pas inversible.
- On note $\chi_{(A,B)}$ la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ et $\text{Sp}(A, B)$ l'ensemble des valeurs propres du couple (A, B) , c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$.

Dans le cas particulier où $B = I_n$, on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de A .

Ainsi, $E_\lambda(A, I_n)$ et $\chi_{(A,I_n)}$ sont notés plus simplement $E_\lambda(A)$ et χ_A .

Partie I : DIAGONALISABILITÉ DANS UN CAS PARTICULIER

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Montrer que B n'est pas inversible.

I.1.b. Montrer que A est inversible.

I.1.c. Vérifier que $C = A^{-1}B$.

I.2.

I.2.a. Montrer que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = -(2\lambda - 1)^2$.

I.2.b. En déduire $\text{Sp}(A, B)$.

I.2.c. Déterminer une base de $E_{1/2}(A, B)$ et en déduire que $\dim E_{1/2}(A, B) = 2$.

I.3.

I.3.a. Calculer $\chi_{(B,A)}(\lambda)$ et en déduire que $\text{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$.

I.3.b. Établir les identités suivantes :

$$E_0(B, A) = \text{Vect}(\mathbf{u}_1) = E_0(C) \quad \text{et} \quad E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = E_2(C).$$

I.3.c. En déduire que $\dim(E_0(B, A)) + \dim(E_2(B, A)) = 3$.

I.4.

I.4.a. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C .

I.4.b. Déterminer explicitement une matrice $R \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = RDR^{-1}$.

I.4.c. Montrer que $B = ARDR^{-1}$.

I.4.d. Justifier qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$.

Définitions 2 : Soit $(A, B, A', B') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$.

- On dit que le couple (A, B) est **régulier** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$.
- On dit que le couple (A, B) est **équivalent** au couple (A', B') et on note $(A, B) \sim (A', B')$ si :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad A = PA'Q \quad \text{et} \quad B = PB'Q.$$

- On dit que le couple (A, B) est **diagonalisable** si :

$$\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \exists D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad (A, B) \sim (D, D').$$

Partie II : RÉGULARITÉ ET DIAGONALISABILITÉ

II.1. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1.a. On suppose dans cette question que B est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, exprimer $\chi_{(A,B)}(\lambda)$ en fonction de $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$ et en déduire que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

II.1.b. On suppose dans cette question que $n \geq 2$. Donner un exemple de couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ pour lequel $\chi_{(A,B)}$ est la fonction nulle alors que ni A ni B n'est la matrice nulle.

II.1.c. Montrer que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

II.2.

II.2.a. Montrer que :

$$(A, B) \sim (A', B') \iff \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad | \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q.$$

II.2.b. Établir que si (A, B) est équivalent à (A', B') , alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $\chi_{(A,B)} = \alpha \cdot \chi_{(A',B')}$, puis que $\text{Sp}(A, B) = \text{Sp}(A', B')$.

II.3. On suppose dans cette question que (A, B) est régulier.

II.3.a. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

II.3.b. Montrer que (B, A) est régulier.

II.3.c. On suppose dans cette question que r et s sont deux entiers tels que $1 \leq r \leq s \leq n$ et $a_r, a_{r+1}, \dots, a_s$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_r \neq 0$ et $a_s \neq 0$. On suppose également que $\chi_{(B,A)}$ s'écrit sous la forme :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^s a_k \lambda^k.$$

Montrer que 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre de multiplicité r et que $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n - r$.

II.3.d. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- B est inversible ;
- $\chi_{(A,B)}$ est de degré n ;
- $0 \notin \text{Sp}(B, A)$.

II.4. On suppose dans cette question que B est inversible. Montrer que si $B^{-1}A$ est diagonalisable, alors (A, B) est diagonalisable.

Définitions 3 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que M est une matrice symétrique réelle. On confondra toute matrice $A = (a)$ de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec le réel a .

- On dit que M est **positive** si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geq 0$.
- On dit que M est **définie-positive** si M est positive et inversible.

Partie III : DIAGONALISABILITÉ DANS LE CAS SYMÉTRIQUE

III.1.

III.1.a. Montrer que pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^tXMY = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}x_iy_j$.

III.1.b. En déduire que pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, ${}^tXX > 0$.

III.1.c. Montrer que, pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) M est définie-positive ;
- ii) $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$;
- iii) il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $M = PD {}^tP$;
- iv) il existe $L \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tLL$.

Dans le cas où M est définie-positive, on pose : $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\langle X, Y \rangle_M = {}^tXMY$.

III.2. Montrer que si M est définie-positive, l'application $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_M$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III.3. On suppose dans cette question que $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec B définie-positive. On suppose alors que L est une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tLL$ et on définit, par III.2, un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$.

III.3.a. Trouver une matrice $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = \lambda BX \iff CZ = \lambda Z \quad \text{où on a posé } Z = LX.$$

III.3.b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{I_n}$ et telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ vérifiant : $C\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

III.3.c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui soit orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ et telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A\mathbf{e}'_i = \lambda_i B\mathbf{e}'_i$.

III.3.d. En déduire que le couple (A, B) est diagonalisable.

III.4. On suppose dans toute la fin de la partie III que le couple (A, B) est régulier et que A et B sont toutes les deux symétriques réelles positives.

III.4.a. Montrer l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $A - \lambda_0 B$ soit une matrice symétrique réelle définie-positive.

III.4.b. En déduire que le couple (A, B) est diagonalisable.

Définitions 4 : Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ un couple régulier.

- Pour $\lambda \in \text{Sp}(A, B)$, on note $m_\lambda(A, B)$ **l'ordre de multiplicité** de λ en tant que racine de $\chi_{(A, B)}$.
- Si B est inversible, on note $\text{Sp}_\infty(A, B) = \text{Sp}(A, B)$, $m_\infty(A, B) = 0$ et $E_\infty(A, B) = \{0\}$.
- Si B n'est pas inversible, on note $\text{Sp}_\infty(A, B) = \text{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}$, $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de $\chi_{(B, A)}$ et $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$.

On cherche un critère de diagonalisabilité de (A, B) faisant intervenir $\dim(E_\lambda(A, B))$.

- On dit que (A, B) vérifie **la propriété $\mathcal{H}$** si :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B), \dim(E_\lambda(A, B)) = m_\lambda(A, B).$$

Partie IV : UN CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ

Dans toute cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ un couple régulier. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda_0 B$ soit inversible.

Dans toute la suite de la partie IV, **on suppose pour simplifier les notations que $\lambda_0 = 0$ si bien que A est inversible.**

On note d le **degré** de $\chi_{(A, B)}$ et $C = A^{-1}B$.

Dans les questions suivantes, on pourra être amené à distinguer le cas où B est inversible du cas où B n'est pas inversible.

IV.1.

IV.1.a. Montrer que $E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$.

IV.1.b. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$.

IV.1.c. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des éléments distincts de $\mathbb{C}$. Justifier que si

$$\text{Sp}(C) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, \text{ alors } \text{Sp}_\infty(A, B) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k} \right\} \text{ où on a posé } \frac{1}{0} = \infty.$$

IV.2. Vérifier que $m_\infty(A, B) = n - d$, puis que :
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} m_\lambda(A, B) = n.$$

IV.3. On suppose dans toute la suite de la partie que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.3.a. Montrer que
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} \dim(E_\lambda(A, B)) = n.$$

IV.3.b. Montrer que C est diagonalisable.

IV.3.c. Établir que le couple (A, B) est diagonalisable.

Dans toute la suite du problème, on admettra que si (A, B) est régulier et que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (A, B) est diagonalisable si et seulement si (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

Partie V : EXEMPLE DE NON-DIAGONALISABILITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{et} \quad \text{si } n \geq 2, \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}.$$

On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et $B_n = {}^t A_n$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est B_n .

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{(A_n, B_n)}(\lambda)$ sera noté $c_n(\lambda)$. On définit de plus $c_0(\lambda) = 1$.

V.1. Donner la forme explicite des matrices A_n et B_n .

V.2. Vérifier que la matrice de $f - \lambda g$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -\lambda & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & & -\lambda & 0 & 1 \\ & & & & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

V.3.

V.3.a. Calculer $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ et $c_4(\lambda)$.

V.3.b. Montrer que pour $n \geq 2$, $c_n(\lambda) = \lambda \cdot c_{n-2}(\lambda)$.

V.3.c. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, les expressions de $c_{2k}(\lambda)$ et de $c_{2k+1}(\lambda)$.

V.3.d. Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que (A_n, B_n) soit régulier.

V.4.

V.4.a. Déterminer $\dim(E_0(A_4, B_4))$ et $\dim(E_\infty(A_4, B_4))$.

V.4.b. Calculer $m_0(A_4, B_4)$ et $m_\infty(A_4, B_4)$.

V.4.c. Le couple (A_4, B_4) est-il diagonalisable ?

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC****MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grâce à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle d'un cas particulier.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

I - 1.1.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

I - 1.2.

Justifier que l'application L_α est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

I - 1.3.

Montrer que :

$$\forall x \in] -1, 1[, L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

I - 2.1.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.

Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme de l'intégrale entre 0 et x d'une certaine fonction.

I - 2.2.

Pour $x \in]-1, 1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

I - 3.

Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq 1$.

Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

II - 1.1.

Montrer que la fonction L_α définie en I -1.1 est continue sur $[-1, 1]$.

II - 1.2.

Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

II - 2.1.

Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II - 2.2.

Pour tout réel $x \leq 1$, justifier l'existence de $K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du$.

II - 2.3.

Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.

II - 2.4.

Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.

Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.

II - 2.5.

On revient au cas général où $\alpha > 1$.

Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.

II - 3.1.

Prouver l'existence de $G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

II - 3.2.

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{e^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}.$$

II - 3.3.

En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, en utilisant $L_\alpha(x)$ défini dans I - 1.1 et $K_\alpha(x)$ défini dans II - 2.2, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

II - 4.1.

Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $] - \infty, 1]$ et de classe C^1 sur $] - \infty, 1[$.

II - 4.2.

Montrer que pour tout réel $x \leq 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt} dt.$$

II - 4.3.

Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus]1, +\infty[, \quad L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z} du.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On s'intéresse ici, pour tout $x \in [-1, 1]$, à : $L_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

III - 1.1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier « $b_n(f)$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III - 1.2.

Grâce à l'égalité de Parseval que l'on précisera, appliquée à f , en déduire la valeur de $L_2(1)$. Calculer aussi $L_2(-1)$.

III - 2.1.

Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]0, 1[, \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x) \ln(1-x)$$

est de classe C^1 sur $]0, 1[$.

III - 2.2.

Montrer que la fonction Φ est constante sur $]0, 1[$ et vaut $L_2(1)$.

III - 2.3.

En déduire la valeur de $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

III - 2.4.

Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2} (\ln(1-x))^2.$$

III - 3.

Grâce à II - 3, calculer $K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$.

III - 4.

Désormais, on s'intéresse au prolongement de L_2 considéré en II - 4, vérifiant en particulier la relation vue en II-4.2 dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0, L_2(x) = -\frac{x}{G_2} \int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs} ds.$$

III - 4.1.

Montrer alors que pour tout $x < 0$, on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t} dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

III - 4.2.

Pour tout $x < 0$, calculer $g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1} dt$.

III - 4.3.

Justifier l'existence de l'intégrale $A = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)} dt$.

III - 4.4.

Préciser $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (L_2(x) - g(x))$. En déduire un équivalent simple de $L_2(x)$ quand x tend vers $-\infty$, cet équivalent dépendant de $\ln(-x)$.

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On définit l'application φ qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$\varphi(P) = (X + 2)P - X P(X + 1).$$

Par exemple, on a $\varphi(X) = (X + 2)X - X(X + 1) = X$.

1. Vérifier que $\varphi(X^3) = -X - 3X^2 - X^3$ et $\varphi(1) = 2$.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
4. En déduire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Dans cette question, on considère le cas $n = 3$.

On note M la matrice de l'endomorphisme φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et Q le polynôme caractéristique de φ , c'est-à-dire $Q(X) = \det(M - X I_3)$ où I_3 désigne la matrice unité carrée d'ordre 3.

(a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (b) Calculer le polynôme caractéristique Q .
- (c) Quelles sont les valeurs propres de φ ?
- (d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
- (e) Déterminer les sous-espaces propres de φ .

Fin de l'exercice

PROBLÈME

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Notations

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices rectangulaires à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On identifie un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On note ${}^t M$ la transposée de la matrice M .

Partie I : un exemple numérique

On munit le plan euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x, y)$ désigne un point M du plan euclidien $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans ce repère.

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère trois points $B_1(-1, 1)$, $B_2(1, -1)$ et $B_3(2, 1)$.

Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère le point H_i appartenant à la droite $\mathcal{D}$ de même abscisse que le point B_i .

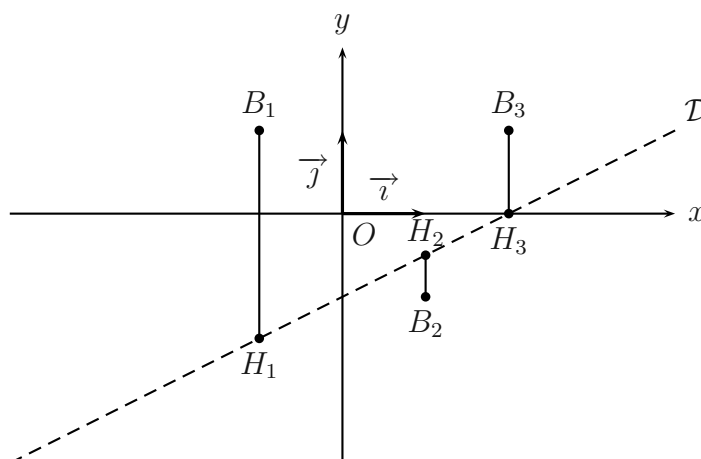
On définit la fonction δ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\delta(m, p) = (B_1 H_1)^2 + (B_2 H_2)^2 + (B_3 H_3)^2$$

où $B_i H_i$ désigne la distance du point B_i au point H_i .

Le but du problème est de chercher le minimum de la fonction δ .

Si (m, p) est un couple où le minimum de la fonction δ est atteint alors la droite $y = mx + p$ s'appelle la droite de régression linéaire de y en x associée au nuage de points (B_i) .



1. Établir que pour $i \in \{1, 2, 3\}$,

si B_i est le point de coordonnées (x_i, y_i) , alors : $(B_i H_i)^2 = (y_i - mx_i - p)^2$.

Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $\delta(m, p) = 6m^2 + 3p^2 + 4mp - 2p + 3$.

On considère q , la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$q(\alpha, \beta) = 6\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta.$$

On note S la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et U le vecteur colonne $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$.

3. Exprimer $q(m, p)$ en fonction de S , U et tU la transposée de U .

4. Déterminer les valeurs propres de S ; on les notera, dans la suite, λ et μ , avec $\lambda < \mu$.

5. Comment peut-on vérifier ce résultat à l'aide des quantités $\lambda + \mu$ et $\lambda \times \mu$?

6. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notée P , que l'on ne cherchera pas à déterminer, telle que $S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tP$.

7. En déduire que si on pose $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ alors, $q(m, p) = \lambda X^2 + \mu Y^2$.

8. Déterminer une base des sous-espaces propres de S . On détaillera les calculs.

9. En déduire une matrice orthogonale $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ avec $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,2} > 0$, telle que

$$S = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^tP.$$

10. Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} m &= \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \\ p &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y) \end{cases}.$$

11. Montrer que :

$$\delta(m, p) = \lambda \left(X + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \mu \left(Y - \frac{1}{7\sqrt{5}} \right)^2 + K$$

avec K une constante à déterminer.

12. Montrer que la fonction δ admet un minimum égal à K .

13. Montrer que le minimum de la fonction δ est atteint au point $(m_0, p_0) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7} \right)$.

14. Représenter dans le plan les trois points B_1 , B_2 et B_3 ainsi que la droite de régression linéaire.

Partie II : distance en dimension 3

Dans cette partie, on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$,

$$(X | Y) = {}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

La norme du vecteur X est $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A , c'est-à-dire que f est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est A .

1. (a) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (C_1, C_2)$, où C_1 et C_2 désignent les deux vecteurs colonnes de la matrice A est une base de $\text{Im}f$. Montrer que le rang de f est égal à 2. Que vaut $\dim(\text{Ker}f)$? On pourra utiliser le théorème du rang.
(b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\text{Im}f$.
(c) f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
(d) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\text{Im}f$ en appliquant la méthode de Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

On rappelle que si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, le projeté orthogonal $\vec{z}$ du vecteur $\vec{x}$ sur le sous-espace vectoriel F est donné par la formule :

$$\vec{z} = (\vec{x} | \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{x} | \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2$$

2. (a) On définit les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{B}'' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de $\text{Im}f$ et que cette base est orthonormée.

(b) Montrer que Z_0 , le projeté orthogonal du vecteur Y_0 sur $\text{Im} f$, est égal à $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On détaillera les calculs.

On pourra utiliser la formule rappelée au 1.d ainsi que la base orthonormée $\mathcal{B}''$.

(c) Déterminer un antécédent X_0 du vecteur Z_0 par f , c'est-à-dire un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^2$ tel que $Z_0 = f(X_0)$. Cet antécédent est-il unique ?

On rappelle que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est définie par :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, la distance de $\vec{x}$ à F est définie par :

$$d(\vec{x}, F) = \inf \{d(\vec{x}, \vec{y}) / \vec{y} \in F\} = \inf \{\|\vec{x} - \vec{y}\| / \vec{y} \in F\}.$$

On rappelle le résultat suivant : $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - \vec{z}\|$ où $\vec{z}$ est le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F .

3. (a) Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$. Calculer $AX - Y_0$ et en déduire que :

$$\delta(m, p) = \|AX - Y_0\|^2.$$

(b) Montrer que $\inf \{\delta(m, p) / (m, p) \in \mathbb{R}^2\} = d(Y_0, Z_0)^2$.

(c) Retrouver l'équation de la droite de régression linéaire $\mathcal{D}$ de la partie I.

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI****MATHEMATIQUES 2****Durée : 3 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$, ainsi que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, appelée intégrale de Gauss.

Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbf{R}$.

Partie I : existence de F et de I

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par, pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) = e^{-x^2}$.

1. **a.** Donner le tableau de variations de f . On fera figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
1. **b.** Tracer la courbe représentative de f . On précisera la demi-tangente en (0,1) et l'asymptote.
2. Démontrer que F est définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et donner sa dérivée. On citera précisément le théorème utilisé.

3. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

Partie II : calcul de I : première méthode

On pose, pour tout x de $[0, +\infty[$, $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que G est bien définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On pourra montrer que pour tout réel a strictement positif, la restriction de G à l'intervalle $[0, a]$ est de classe C^1 . Donner l'expression de $G'(x)$.

2. a. Montrer que la fonction $H = F^2 + G$ est constante. On pourra faire un changement de variable linéaire dans l'une des intégrales apparaissant dans la dérivée de H .

2. b. Calculer cette constante en considérant $x = 0$.

3. a. Montrer que, pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times [0, 1]$: $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$.
En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

3. b. Dédurre de ce qui précède que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Étudier les variations de F sur $[0, +\infty[$. Tracer sa courbe représentative en précisant la demi-tangente en $(0,0)$ et l'asymptote.

Partie III : calcul de I : deuxième méthode

1. Si R est un réel strictement positif, on note $D(R) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+, x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

On pose : $J(R) = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, montrer que :

$$J(R) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

2. Si R est un réel strictement positif, on note $\Gamma(R)$ le carré $[0, R] \times [0, R]$.

Exprimer $K(R) = \iint_{\Gamma(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ en fonction de $J(R)$.

3. a. Représenter les trois ensembles $D(R)$, $\Gamma(R)$ et $D(\sqrt{2}R)$ sur un même croquis.

3. b. Montrer que pour tout R strictement positif : $J(R) \leq K(R) \leq J(\sqrt{2}R)$.

4. En déduire que $K(R)$ admet une limite lorsque R tend vers $+\infty$ et la déterminer.

5. Retrouver, grâce à ce qui précède, la valeur de I .

Partie IV : développements en séries entières

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par, pour tout x de $\mathbf{R}$, $g(x) = e^{x^2} F(x)$.

Dans cette partie, on désire étudier le développement en série entière des fonctions F et g .

1. a. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière sur $\mathbf{R}$ de la fonction $u \mapsto e^u$.

1. b. En déduire que la fonction notée encore $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, et donner son développement.

2. a. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.

2. b. Donner le développement en série entière de F sur $\mathbf{R}$.

3. On s'intéresse maintenant à la fonction g définie au début de cette partie.

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' - 2xy = 1$.

On désire déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que g est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

3. a. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme sur l'intervalle $] -R, R[$ est notée y . En supposant que y est solution de (E) sur l'intervalle $] -R, R[$ et que $a_0 = 0$, montrer que $a_1 = 1$ et que, pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

3. b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

3. c. Réciproquement, on considère la série entière $\sum \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Calculer son rayon de convergence. En déduire que sa somme est solution de (E) sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

3. d. Montrer que g est solution de l'équation (E) sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

3. e. Dédurre de ce qui précède que g est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. Donner son développement. On citera précisément le théorème utilisé.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice

On considère la fonction paire, 2π -périodique définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi x + \alpha & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

où α est un réel que l'on va déterminer.

- 1) Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$?

Pour la suite de l'exercice, α prendra cette valeur, ainsi f est continue sur $[0, \pi]$.

- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et donner $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

- 3) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

- 4) **4a.** Que valent les coefficients $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

4b. Montrer que f' est impaire. En déduire la valeur des coefficients $a_n(f')$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f')$.

4d. Calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx$, puis $b_n(f')$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4e. En déduire les valeurs de $a_{2p}(f)$ et de $a_{2p+1}(f)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $a_0(f)$.

- 5) Étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier de f .

- 6) On pose $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$.

Calculer S à l'aide de la série de Fourier de f .

Fin de l'exercice

Problème 1

Partie I. Résultats préliminaires

- 1) Soit α un réel, donner le développement limité à l'ordre 2 en 0, de la fonction

$$f_\alpha(x) = (2+x)^\alpha$$

Indication : on pourra mettre 2 en facteur dans l'expression de $f_\alpha(x)$.

- 2) **2a.** Soit la fonction u_1 définie par $u_1(x) = x + 1 + \sqrt{x(x+2)}$.

2a1. Déterminer son domaine de définition et son domaine de dérivation.

2a2. Résoudre l'équation $u_1(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour le signe de $u_1(x)$?

Indication : $\sqrt{-3 \times (-1)} \simeq 1,73$.

- 2b.** Soit la fonction z_1 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $z_1(x) = \ln \left(x + 1 + \sqrt{x(x+2)} \right)$.

Montrer que z_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

- 2c.** Soit $g_1(x) = z_1(x^2) = \ln \left(x^2 + 1 + \sqrt{x^2(x^2+2)} \right)$, définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g_1(x)$.

- 2d.** En déduire que pour $x > 0$, on a, au voisinage de 0 :

$$z_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{x} + \alpha_2x + \alpha_3(\sqrt{x})^3 + o(x^{3/2})$$

Déterminer la valeur des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 .

- 3) **3a.** Soit la fonction z_2 définie par $z_2(x) = \arccos(x+1)$.

Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivation et calculer sa dérivée.

- 3b.** Soit $g_2(x) = z_2(-x^2) = \arccos(1-x^2)$.

3b1. Pour $x > 0$, former le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g_2'(x)$.

3b2. On admet que g_2 a un développement limité en 0 à l'ordre 3 pour $x > 0$. Déduire ce développement limité de **3b1**.

- 3c.** En déduire que pour $x < 0$, on a, au voisinage de 0 :

$$z_2(x) = \beta_0 + \beta_1\sqrt{-x} + \beta_2x + \beta_3(\sqrt{-x})^3 + o((-x)^{3/2})$$

Déterminer la valeur des coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et β_3 .

Partie II. Étude d'une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x+2)y' + (x+1)y = 1$$

1) Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) est-elle résoluble ?

2) On pose $I_1 =]-\infty, -2[$, $I_2 =]-2, 0[$ et $I_3 =]0, +\infty[$.

Déterminer a et b réels tels que : $\forall x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$.

On désigne désormais par J l'un des intervalles I_1 , I_2 ou I_3 .

3) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) sur J .

4) On cherche une solution particulière de (E) sur J , sous la forme $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$, où y_0 est une solution de (H) .

4a. Comment s'appelle cette technique de résolution ?

4b. Vérifier qu'une telle solution vérifie alors l'équation :

$$\lambda'(x)y_0(x) = \frac{1}{x(x+2)}$$

4c. Déterminer l'expression de $\lambda'(x)$ en distinguant les cas $J = I_1$, $J = I_2$ et $J = I_3$.

$$\text{Indication : se rappeler que } \frac{\sqrt{|a|}}{a} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} & \text{si } a > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}} & \text{si } a < 0 \end{cases} .$$

4d. Déterminer $\lambda(x)$ en utilisant les résultats des parties **I.2** et **I.3**.

5) Quelles sont les solutions de (E) sur J ?

6) On cherche à déterminer une solution y de (E) définie et dérivable sur $] -2, +\infty[$.

6a. Quelle est la valeur de $y(0)$?

6b. D'après **II.5**, quelles doivent être les expressions vérifiées par $y(x)$ sur I_2 et I_3 ?

6c. En utilisant les développements limités de $z_1(x)$ et $z_2(x)$ obtenus dans la partie **I**, montrer que y admet une limite finie en 0 si et seulement si :

$$y(x) = \frac{\arccos(1+x)}{\sqrt{-x(x+2)}} \text{ si } x \in]-2, 0[\text{ et } y(x) = \frac{\ln(x+1+\sqrt{x(x+2)})}{\sqrt{x(x+2)}} \text{ si } x > 0.$$

6d. En utilisant un développement limité en 0 de $\sqrt{x+2}$, montrer qu'on a alors :

$$y(x) = \frac{1 - \frac{1}{12}x + o(x)}{1 + \frac{1}{4}x + o(x)} \quad \text{si } x \in]-2, 0[\text{ ou si } x \in]0, +\infty[.$$

- 6e.** En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $y(x)$ en 0.
6f. Montrer que y est dérivable en 0 et donner la valeur de $y'(0)$.
6g. Montrer que la fonction ainsi obtenue est solution de (E) sur $] - 2, +\infty[$.

- 7)** On cherche une solution $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de (E) développable en série entière sur $] - R, R[$ avec $R > 0$.
7a. Déterminer la valeur de a_0 et une relation de récurrence liant les coefficients a_n et a_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-2)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.
7c. Déterminer la valeur du rayon de convergence R de la série ainsi déterminée.
7d. En utilisant les résultats de **II.6**, déterminer les expressions de la somme de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$, pour $x \in] - R, 0[$ et $x \in]0, R[$.
7e. Déterminer, à l'aide des calculs déjà effectués dans la partie **I**, l'expression d'une primitive de S pour $x \in]0, R[$, puis pour $x \in] - R, 0[$.

Partie III. Étude de deux séries entières

Pour l'ensemble de cette partie, on définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{(n!)^2}{n \cdot (2n)!} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(n!)^2}{n^2 \cdot (2n)!}$$

On rappelle aussi la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n \exp(-n) \sqrt{2\pi n}$.

- 1)** On considère la série entière de la variable réelle : $\sum_{n \geq 1} b_n x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{n \cdot (2n)!} x^n$.
1a. Déterminer la valeur du rayon de convergence, noté R_1 , de cette série.
1b. Déterminer un équivalent de $b_n R_1^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} b_n R_1^n$.
1c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n (-R_1)^n$ converge.
1d. On pose $\forall x \in] - R_1, R_1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

On rappelle que la série entière étudiée en **II.7** a pour rayon de convergence R et pour somme S .

Vérifier qu'on a $R_1 = 2R$, puis montrer que : $\forall x \in] - R_1, R_1[, \frac{x}{2} S(-\frac{x}{2}) = f(x)$.

- 1e.** En déduire les valeurs des sommes numériques :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{n \cdot (2n)!} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 (-1)^n}{n \cdot (2n)!}$$

- 2) On considère la série entière de la variable réelle : $\sum_{n \geq 1} c_n x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{n^2 \cdot (2n)!} x^n$.
- 2a.** Déterminer le rayon de convergence de cette série noté R_2 . Vérifier que l'on a $R_1 = R_2$.
- 2b.** Déterminer la nature des séries numériques $\sum_{n \geq 1} c_n R_2^n$ et $\sum_{n \geq 1} c_n (-R_2)^n$.
- 2c.** On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$. Quel est son domaine de définition ?
- 2d.** Soit $x \in]-R_2, R_2[$. Exprimer $x.g'(x)$ en fonction de $f(x)$, où f est définie en **III.1**.
- 2e.** En déduire que : $\forall x \in]-R_2, R_2[, g(x) = K + \frac{1}{2} \int_0^x S(-\frac{t}{2}) dt$.
Déterminer la valeur de K .
- 2f.** Déterminer l'expression de $g(x)$ en distinguant les cas $x \in]0, R_2[$, et $x \in]-R_2, 0[$.
- 2g.** Calculer les valeurs des sommes numériques :

$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{n^2 \cdot (2n)!} \quad \text{et} \quad S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2 (-4)^n}{n^2 \cdot (2n)!}$$

Fin du problème 1

Problème 2

Dans tout le problème, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une **base orthonormée directe** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on note $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Partie I. Préliminaires

Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ une famille de vecteurs de E avec leurs vecteurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \text{Coord}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

- 1) On suppose dans cette question que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
On rappelle qu'il existe un réel λ tel que $\forall (x, y, z) \in E^3, \det_{\mathcal{B}'}(x, y, z) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$.
Rappeler et prouver ce que vaut λ .
- 2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ pour que $\mathcal{B}'$ soit une base directe de E .
- 3) Rappeler la formule de calcul de $(u|v)$ et $\|u\|^2$ en fonction des coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$.
- 4) On suppose dans cette question que $\mathcal{B}'$ est une famille orthonormée.
 - 4a. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E .
 - 4b. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
 - 4c. Expliquer pourquoi ${}^tP \cdot P = I_3$.
 - 4d. En déduire, sans calcul, $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
 - 4e. Prouver de manière élémentaire que $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})$ appartient à $\{-1, 1\}$.
Dans quels cas a-t-on $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = 1$ ou $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = -1$?

Partie II. Définition du produit vectoriel sur E

On considère u et v deux vecteurs fixés de E et l'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que, pour tout $a \in E$, l'application

$$\begin{aligned} g_a : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (a|x) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E .

On admet que, réciproquement, si f est une forme linéaire sur E , alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = g_a$, i.e. $\forall x \in E, f(x) = (a|x)$.

- 2) Soit $(a, b) \in E^2$, on suppose que $\forall x \in E, (a|x) = (b|x)$. Montrer que $a = b$.
(On pourra utiliser le vecteur $a - b$).

3) Montrer que ψ est une forme linéaire sur E .

On sait donc qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \psi(x) = (a|x)$. Ce vecteur est noté $u \wedge v$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) = (u \wedge v|x)} \quad (1)$$

4) Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée directe de E .

Montrer que $\forall (u, v, x) \in E^3, \det_{\mathcal{B}'}(u, v, x) = \det_{\mathcal{B}}(u, v, x)$.

La définition faite du produit vectoriel est donc indépendante de la base orthonormée directe choisie.

Partie III. Propriétés élémentaires du produit vectoriel

Nous allons redémontrer toutes les propriétés élémentaires connues du produit vectoriel **à l'aide de la définition/formule (1) uniquement.**

On considère dans cette partie deux vecteurs u et v de E avec la même expression pour leurs coordonnées que dans la partie I.

1) Montrer que le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v .

2) Montrer que $\forall x \in E, (u \wedge v|x) = -(v \wedge u|x)$. En déduire que $u \wedge v = -(v \wedge u)$.
On a donc prouvé que le produit vectoriel est *antisymétrique*.

3) Soit $(\lambda, \mu, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$.

Montrer de la même manière que $u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w)$.

On vient de prouver que le produit vectoriel est *linéaire à droite*.

4) En déduire, **à l'aide de III.2**, que le produit vectoriel est linéaire à gauche.

On a ainsi prouvé que le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.

5) On suppose dans cette question que (u, v) est une famille orthonormée.

5a. Quelle est la dimension de $G = (\text{Vect}(u, v))^{\perp}$?

5b. Montrer qu'il existe un unique vecteur w de E tel que $\mathcal{B}'' = (u, v, w)$ soit **une base orthonormée directe**.

5c. Montrer que $u \wedge v$ est un vecteur colinéaire au vecteur unitaire w . Il existe donc un réel λ tel que $u \wedge v = \lambda w$.

5d. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$ de deux façons différentes, à l'aide d'un résultat de la partie I et à l'aide du produit vectoriel. En déduire que $u \wedge v = w$.

On vient donc de prouver que si (u, v) est une famille orthonormée alors :

(u, v, w) est une base orthonormée directe de $E \iff w = u \wedge v$.

- 6) Montrer que $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et enfin $e_3 \wedge e_1 = e_2$.
- 7) On suppose dans cette question que (u, v) est une famille liée. Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = 0$.
- 8) On suppose dans cette question que (u, v) est une famille libre et on la complète en une base (u, v, w) de E . Montrer que $u \wedge v \neq 0_E$.
- 9) Quel résultat usuel sur le produit vectoriel a-t-on ainsi prouvé avec **III.7** et **III.8**?
- 10) Prouver que le vecteur des coordonnées de $u \wedge v$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Partie IV. Application

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on considère le vecteur $e = ae_1 + be_2 + ce_3$, non nul, et l'application φ définie sur l'espace euclidien E par :

$$\forall u \in E, \varphi(u) = u + e \wedge u$$

On pensera à utiliser les résultats obtenus dans la partie **III**.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de E et calculer $\varphi(e)$.
- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 1$ et $u \in E$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Montrer que $u = 0$.
- 3) Sans utiliser de matrice, montrer que $\text{Sp}(\varphi) = \{1\}$ et déterminer $E_1(\varphi)$ ainsi que sa dimension.
- 4) Déterminer la matrice M de φ relativement à la base $\mathcal{B}$.
- 5) Sans faire de calculs, la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Est-elle inversible?

On pose $e'_1 = \frac{e}{\|e\|}$ et on considère une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E .

On ne demande pas d'explicitement des vecteurs e'_2 et e'_3 .

- 6) Déterminer la matrice M' de φ relativement à la base $\mathcal{B}'$, calculer son polynôme caractéristique et retrouver que $\text{Sp}(\varphi) = \{1\}$.

Fin du problème 2

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice 1 : une série de Fourier

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, vérifiant : pour tout réel $x \in]0, \pi[$, $f(x) = 1$ et $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la série de Fourier de la fonction f .
2. Justifier l'existence des sommes suivantes et utiliser la question précédente, en énonçant les théorèmes utilisés, pour donner leur valeur :

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad (b) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

Exercice 2 : un système différentiel

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t , donner l'expression de la matrice e^{tA} .
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ et donner sa valeur.
2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
 si I est un intervalle contenant le réel a , si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt .$$

ON RAPPELLE LE THEOREME SUIVANT :

Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $] -a, a[$, alors :

- la fonction f est de classe C^∞ sur $] -a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in] -a, a[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0 , \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} .$$

Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n , l'égalité $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$
6. Un théorème des moments

Soit f une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in] -R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

On suppose, que pour tout entier naturel n , $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $] -R, R[$.

- (a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.
- (b) A l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.
- (c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $] -R, R[$.

II. Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

- (a) Donner, à l'aide de la calculatrice (sans étude), l'allure de la courbe de la fonction f .
- (b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.
- (c) Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n , $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- (d) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul

Pour tout x réel, on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2} dt$.

- (a) Justifier que, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On admettra que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.
- (b) Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .
- (c) Quel est le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n , $|f^{(n)}(x)| \leq M$.
- (a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.
 - (b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : points à coordonnées entières sur une hyperbole

On munit le plan d'un repère orthonormé. On considère la conique $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 - 13y^2 = 1.$$

1. Tracer l'allure de l'hyperbole $\mathcal{H}$. On précisera les tangentes aux points d'ordonnée nulle ainsi que les branches infinies.
2. Ecrire un algorithme en français qui renvoie les éventuels couples d'entiers **naturels** (x, y) vérifiant :

$$(I) \quad \begin{cases} x^2 - 13y^2 = 1 \\ y \leq 200 \end{cases}.$$

3. Programmer cet algorithme sur calculatrice et donner les couples d'entiers naturels (x, y) solutions du système (I). On ne demande pas d'écrire le programme sur la copie.

Problème : matrices «toutes-puissantes»

Notations et objectifs

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0$.

Si $M_1, \dots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\text{diag}(M_1, \dots, M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \dots, M_k$.

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on note id_E l'application identité sur E .

Enfin, on note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est «**toute-puissante** sur $\mathbb{K}$ » et on notera en abrégé TPK si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.

On note $T_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$T_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant :

toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TPC.

Dans la partie **I**, on traite quelques exemples et contre-exemples.

Dans la partie **II**, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente.

Dans la partie **III**, on traite le cas des matrices unipotentes c'est-à-dire de la forme $I_p + N$ avec N nilpotente et on en déduit le théorème principal.

Les parties **I** et **II** sont dans une large mesure indépendantes. La partie **III** utilise les résultats des parties précédentes.

Partie I : quelques exemples

1. Le cas de la taille 1

- (a) Démontrer que $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
- (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n -ièmes du nombre complexe b , c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- (c) En déduire $T_1(\mathbb{C})$.

2. Une condition nécessaire...

- (a) Démontrer que si $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.
- (b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TPR.

3. ...mais pas suffisante

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4. Un cas où A est diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le détail des calculs n'est pas demandé).
- (b) Démontrer que la matrice A est TPR.
- (c) Pour chacun des cas $n = 2$ et $n = 3$, expliciter une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^n = A$ (on pourra utiliser la calculatrice).

5. Un exemple de nature géométrique

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.
- (b) En déduire que A est TPR.

6. Le cas des matrices nilpotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique de N , en déduire que $N^p = 0$.
- (b) Démontrer que si N est TPK, alors N est la matrice nulle.

Partie II : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_A = (-1)^p \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i},$$

avec $k, r_1, \dots, r_k$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A , éléments de $\mathbb{K}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Enfin, pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on note $C_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i .

7. Démontrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$.

8. (a) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec u et Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\text{Ker } Q(u)$ est stable par v .

(b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u .

On note ainsi u_{C_i} l'endomorphisme induit par u sur C_i .

9. Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i \text{id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

10. En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$A = P \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1},$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i = \dim C_i$ et N_i est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.

On rappelle que $\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{p_k} + N_k$.

11. Démontrer que, si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP $\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP $\mathbb{K}$.

Partie III : le cas des matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$.

On pourra confondre polynôme et fonction polynôme.

On rappelle que si f est une fonction, la notation $f(x) = o(x^p)$ signifie qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $f(x) = x^p \varepsilon(x)$ au voisinage de 0.

12. Une application des développements limités

- (a) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0.
Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$$

(on pourra utiliser un développement limité de $(1 + x)^\alpha$).

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$1 + X = U^n + X^p \times Q.$$

13. Applications

- (a) Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$.
- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP $\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$.

14. Le résultat annoncé

- (a) Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP $\mathbb{C}$.
- (b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP $\mathbb{C}$?

15. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est TP $\mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.**Notations :**

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel n on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Objectifs :

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée ψ) définie par une intégrale. Dans la **partie I**, on étudie une fonction f et l'on propose un procédé de calcul de la limite de f en $+\infty$. La **partie II** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées h et φ) qui seront utilisées dans la **partie III**.

Partie I

Etude d'une fonction et de sa limite

I.1 Etude de la fonction f

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2) dt = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

I.1.1 Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

I.1.2 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f . Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n , dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \exp(-x^2).$$

I.1.3 Que peut-on dire de la parité de p_n ?

I.1.4 Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

I.2 Développement en série de f

I.2.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

I.2.2 Expliciter $p_n(0)$.

I.3 Calcul de Δ

Pour tout entier n , on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

I.3.1 Montrer que pour tout réel u , on a $e^u \geq 1 + u$.

I.3.2 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leq e^{-nu} & \text{si } u \leq 1 \\ e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u > -1 \end{cases}$$

I.3.3 Démontrer que pour tout entier n non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

I.3.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, calculer Δ .

Partie II

Etude de deux fonctions

II.1 Etude de la fonction h

II.1.1 Justifier l'existence, pour tout réel b , de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt) \exp(-t^2) dt.$$

On note ω la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega(x, y) = e^{-(x^2-y^2)} (\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy).$$

II.1.2 La forme différentielle ω est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$?

II.1.3 Etant donnés deux réels strictement positifs a et b , on note P le pavé de $\mathbb{R}^2$ défini par : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note γ le bord de P orienté dans le sens trigonométrique. Quelle est la valeur de l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \omega$?

II.1.4 En évaluant l'intégrale curviligne de ω le long des segments qui forment γ , déterminer $h(b)$ en fonction de b et Δ .

II.2 Etude de la fonction φ

II.2.1 Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

II.2.2 Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II.2.3 Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

II.2.4 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie III

Calcul d'une intégrale

III.1 Etude de la fonction ψ

III.1.1 Vérifier que l'on définit une fonction ψ , continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2} dt.$$

III.1.2 Calculer $\psi(0)$.

III.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp(-(1+x^2)y^2) dy.$$

Montrer que $(j_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Expliciter sa limite.

III.3 Désormais, a désigne un réel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k_n fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax) dx.$$

Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
Expliciter sa limite.

III.4 Soit $u_{n,p} = \int_0^n j_p(x) \cos(2ax) dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1 Justifier l'existence de $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p}$ et l'exprimer sous forme d'une intégrale.

III.4.2 Montrer que $u_{n,p} = \int_0^p k_n(y) \exp(-y^2) dy$.

III.5 Justifier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y) \exp(-y^2)$.

III.6 Calculer $\psi(x)$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI****MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées.

Notations :

Pour ce problème, on désigne par :

- n un entier naturel non nul ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

- tA la matrice transposée de A ;
- $\det(A)$ le déterminant de A ;
- $\text{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté :

$$x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$$

où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k .

– L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x | y \rangle = {}^t x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est la norme euclidienne associée.

– La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

A toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) = \langle Ax | x \rangle.$$

Objectifs :

Dans la **partie I**, on étudie q_A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par :

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}, \text{ où } a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}.$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres et de l'intervalle $[\min \text{sp}(H_n), \max \text{sp}(H_n)]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I

Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Énoncer les propriétés de la sphère unité Ω_n ainsi que celles de la fonction q_A qui permettent d'affirmer que q_A est bornée sur Ω_n et qu'elle atteint ses bornes.

On note $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$ et $M_A = \max(q_A(\Omega_n))$.

I.1.2 Démontrer que $\mathbb{R} \cap \text{sp}(A) \subset [m_A, M_A]$.

I.1.3 Expliciter $\text{sp}(A)$, m_A et M_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On pourra remarquer que $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

I.2.1 Montrer que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

I.2.2 Si $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(y + z)$ (qui est nul d'après **I.2.1.**) en fonction de $\langle Ay \mid z \rangle$ et $\langle Az \mid y \rangle$.

I.2.3 Montrer que la matrice A est anti-symétrique (c'est-à-dire que ${}^t A = -A$) (entre autre méthode, on pourra par exemple considérer les vecteurs y et z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0) \Leftrightarrow (A = (0) \text{ (matrice nulle)})$$

I.4 Montrer que l'application $N : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme.

I.5 Bornes de q_A sur Ω_n

On rappelle le théorème spectral : étant donnée une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A , alors u étant symétrique réel, il se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire : il existe n nombres réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_n$ et une base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on conserve les notations de ce théorème dans les questions **I.5**.

I.5.1 Préciser $q_A(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

I.5.2 Soit $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$. Justifier les égalités $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1$, puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x .

I.5.3 Retrouver le résultat obtenu en **I.1.1** : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n .

Expliciter m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A .

I.5.4 Montrer que $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda|$. Etablir une inégalité entre $|\det(A)|$ et $(N(A))^n$.

I.5.5 Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par :

$$H_n = \left(\left(\frac{1}{j+k-1} \right) \right)_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j, k \leq n}$ avec $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$.

Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) = q_{H_n}(x) = \langle H_n x \mid x \rangle$$

Partie II

Sur les valeurs propres de H_n .

II.1 Une expression de $q_n(x)$

$$\text{Soit : } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

II.1.1 Montrer que :

$$q_n(x) = \langle H_n x \mid x \rangle = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}.$$

II.1.2 Développer :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)$$

où t est une variable réelle.

II.1.3 Montrer que :

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt.$$

II.1.4 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$$

et que $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

II.2 Une majoration de $q_n(x)$

II.2.1 Soit $P(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

(on pourra expliciter $\int_{-1}^1 t^k dt$ et $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$).

II.2.2 En gardant les notations introduites en **II.1** et en notant :

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$$

montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$ (on pourra utiliser les résultats obtenus en **II.1** et **II.2.1**).

II.2.3 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

II.3 Application à $\text{sp}(H_n)$

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$\mu_n = \min(\text{sp}(H_n)) \text{ et } \rho_n = \max(\text{sp}(H_n)).$$

II.3.1 Expliciter μ_2 et ρ_2 . Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

II.3.2 Montrer que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$.

On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux e_1 et e_n tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$, $H_n e_n = \rho_n e_n$, $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$ et le vecteur $x = \sqrt{1-t} \cdot e_1 + \sqrt{t} \cdot e_n$ où $t \in [0, 1]$.

II.3.3 Calculer $\langle H_n \varepsilon_n \mid \varepsilon_n \rangle$ où ε_n désigne le vecteur de base canonique :

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la limite de μ_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie III

Limite de $(N(H_n))_{n \geq 2}$ grâce à une intégrale double

Dans cette partie, on utilise la relation :

$$\forall t > 0, \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et on suppose $n \geq 2$.

III.1 Deux intégrales doubles

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$D_n = [1, n] \times [1, n], \quad \Gamma_n = [1, \sqrt{n}] \times [1, \sqrt{n}]$$

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \text{ et } J_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{du dv}{u^2 + v^2}.$$

III.1.1 En utilisant le changement de variable $(x, y) = (u^2, v^2)$, montrer que :

$$I_n \geq 4J_n.$$

III.1.2 On note :

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x} dx \text{ et } L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) dx.$$

Montrer que $J_n = K_n - L_n$.

III.2 Un équivalent de J_n

III.2.1 En majorant $\arctan(t)$, montrer que :

$$0 < L_n \leq 1.$$

III.2.2 Justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Montrer que $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

III.2.3 En déduire que $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

III.3 Limite de $N(H_n)$. On utilise les notations et les résultats de la **partie II**.

On note a l'élément de $\mathbb{R}^n$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

III.3.1 Montrer que $\|a\|^2 \leq 1 + \ln(n)$.

III.3.2 Montrer que $4J_n \leq q_n(a)$.

III.3.3 En déduire la limite de $N(H_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie IV

Sur le déterminant de H_n

H_n désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre n , pour $n \geq 2$.

IV.1 Une fraction rationnelle

On considère la fraction rationnelle $R_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x - k)}{\prod_{k=0}^n (x + k)}$.

On admettra qu'il existe des réels $\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -n\}, \quad R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{k,n}}{(x + k)}$$

cette décomposition (en éléments simples) de R_n étant unique.

Exprimer le coefficient $\lambda_{n,n}$ de $\frac{1}{x + n}$ à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$

IV.2 Matrice A_n

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice A_n définie par $A_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ avec :

$$a_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{j+k-1} & \text{pour } 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq n \\ R_{n-1}(j) & \text{pour } k = n, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$\text{où } R_{n-1}(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (x-k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}.$$

IV.2.1 Montrer que, pour tout i compris entre 1 et n , on a :

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j},$$

puis en déduire que $\det(A_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$.

IV.2.2 Montrer que $\det(A_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}}$.

En déduire l'expression de $\det(H_n)$ en fonction de $\det(H_{n-1})$.

IV.2.3 Montrer, pour tout $n \geq 2$, que $\det(H_n) \neq 0$, puis que $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

IV.3 Calcul de $\det(H_n)$

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n = \prod_{k=1}^n k!$ montrer que :

$$\forall n \geq 2, \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

Fin de l'énoncé



**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES**

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun** et d'en déduire une **forme normale pour des vecteurs propres**.

Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n . Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.

Les parties II, III et IV sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,

0_n la matrice nulle d'ordre n

et I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \text{tel que } MX = 0\},$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$

$\text{Sp}(M)$ le spectre de M ,

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$$

$$\text{et } \text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(M - \lambda I_n).$$

Définitions :

• Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :

i) $\mathbf{e} \neq 0$;

ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$;

iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.

On définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.

• Soient f et g , deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;

on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :

i) $\mathbf{e} \neq 0$;

ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$;

iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu\mathbf{e}$.

On définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ETUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Déterminer le spectre de A .

I.1.b. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

I.1.c. A est-elle diagonalisable ?

I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B .

I.2.

I.2.a. Déterminer le spectre de B .

I.2.b. Montrer que $\text{Im}_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B .

I.4.

I.4.a. Vérifier que $[A, B] = C$.

I.4.b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C .

Partie II : CONDITION NECESSAIRE ET CONDITIONS SUFFISANTES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B .

II.1.a. Montrer que $\mathbf{e} \in \text{Ker}([A, B])$.

II.1.b. Vérifier que $\text{rg}([A, B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété $\mathcal{H}$** s'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B]).$$

II.2. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

II.3.b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la **propriété suivante** :

pour tout $\mathbb{C}$ —espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\text{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ .

II.4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

II.5. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et que A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.

On note $C = [A, B]$, on suppose que $\text{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

II.5.a. Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b. Vérifier que $\text{Im}(C) = \text{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.

II.5.c. Montrer que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n-1$.

Pour tout $X \in \text{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

II.5.e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.

En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B .

II.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III : ETUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$ —espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.

Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P .

Pour tout polynôme P de E , on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)$.

III.1. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

III.2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E .

III.3.

III.3.a. Vérifier que si P est un vecteur propre de g , alors $\deg(P) \geq n$.

III.3.b. Montrer que X^n est vecteur propre de g .

Soit $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \dots \circ f$ où f est prise i fois.

III.4.

III.4.a. Vérifier que $\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b. Montrer que $\text{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III.5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geq n + 1$.

$\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$.

On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

III.6. Déterminer A_n et B_n .

III.7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

III.7.a. Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.

III.7.b. Déterminer le rang de $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

III.7.c. En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.

Partie IV : FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On note $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } x_i = 0 \right\}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur propre de A .

On dit que X est **sous forme normale** si :

- $X \in \mathcal{N}$

ou

- il existe $\lambda' \in \text{Sp}(A)$ et il existe $U \in \mathcal{N}$ tel que $X = (A - \lambda' I_n)U$.

IV.1. Dans cette question, on suppose que A possède une valeur propre λ telle que $\dim(E_\lambda(A)) \geq 2$.

Montrer que A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ .

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des **matrices** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **antisymétriques**, c'est-à-dire telles que ${}^t M = -M$.

Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\varphi(M) = AM + M {}^tA$ et $\psi(M) = AM {}^tA$.

IV.2.

IV.2.a. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$.

IV.2.b. Montrer que les colonnes d'une matrice $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ sont des éléments de $\mathcal{N}$.

IV.2.c. Montrer que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d. Vérifier que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3. Dans cette question, on suppose que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 .

On considère X_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et X_2 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 .

On note $B = X_1 {}^tX_2 - X_2 {}^tX_1$.

IV.3.a. Montrer que B vérifie chacune des propriétés suivantes :

- i) $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$;
- ii) $B \neq 0_n$;
- iii) $AB + B {}^tA = (\lambda_1 + \lambda_2)B$;
- iv) $AB {}^tA = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

IV.3.b. En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$.

IV.3.c. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$. Montrer qu'au moins l'une des colonnes de B est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4. Dans cette question, on suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre λ .

IV.4.a. Montrer l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant chacune des propriétés suivantes :

- i) il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $AB + B {}^tA = \alpha B$;
- ii) il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que : $AB {}^tA = \beta B$.

IV.4.b. Vérifier que $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$.

IV.4.c. Montrer qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0_n$.

IV.4.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B = 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.e. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta = \lambda$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.f. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta \neq \lambda$. Montrer que $A - \delta I_n$ est une matrice inversible et en déduire que $(A - \gamma I_n)B = 0$.

IV.4.g. Que conclure ?

Fin de l'énoncé



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales.

Dans la **partie I**, on calcule indépendamment deux intégrales particulières (les questions 1 et 2 pour l'une, la question 3 pour l'autre) qui interviennent dans les **parties II** et **III**. Les **parties II** et **III** sont indépendantes.

Partie I : calculs préliminaires

I - 1.

I - 1.1.

Justifier l'existence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

I - 1.2.

Pour tout $A > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \int_0^A \frac{\sin(t)}{t} dt$.

I - 1.3.

Grâce à une intégration par parties, prouver que $D(A)$ a une limite (réelle) quand A tend vers $+\infty$, égale à K . C'est-à-dire que : $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} D(A)$.

I - 2.

I - 2.1.

Justifier que l'application $L : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

I - 2.2.

Montrer que, pour tout réel $a > 0$, l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
Etablir ensuite que l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

I - 2.3.

Justifier que les fonctions $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0, +\infty[$.

Etablir alors que les fonctions $x \mapsto |xL'(x)|$ et $x \mapsto |xL(x)|$ sont majorées sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} L'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$.

I - 2.4.

Pour tout réel $x > 0$, exprimer $L''(x)$ sans utiliser d'intégrale.

On pourra remarquer que $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it})$.

I - 2.5.

En déduire $L'(x)$ pour $x > 0$, puis $L(x)$ pour $x \geq 0$. Conclure que $K = \frac{\pi}{2}$.

I - 3.**I - 3.1.**

Justifier que la fonction $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

I - 3.2.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\int_0^1 u^k \ln(u) \, du$.

I - 3.3.

Grâce à un développement en série de $\frac{1}{1-u}$ pour $u \in]0, 1[$ et en précisant le théorème utilisé,

justifier que : $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

Par ailleurs, on donne sans avoir à le justifier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II : étude de quelques suites d'intégrales

II - 1.

Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

II - 2.

II - 2.1. On considère ici une application continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t^n) \, dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

II - 2.2. On suppose ici de plus que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$. On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

II - 2.3. Application 1.

Déterminer un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 \sin(t^n) \, dt$ (grâce à une intégrale).

II - 3. On considère maintenant que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

II - 3.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \int_1^{+\infty} f(t^n) dt$.

II - 3.2.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

II - 4.

II - 4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \int_1^A \sin(t^n) dt$.

Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer $C_n(A)$ en fonction de $\int_1^{A^n} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}} du$ et de A .

II - 4.2.

En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand $A \rightarrow +\infty$, prouvant l'existence de $\int_1^{+\infty} \sin(t^n) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

II - 4.3. Application 2.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$ grâce à K calculée en **I-2.5**.

Partie III : étude de séries de fonctions

III - 1. Un premier exemple.

III - 1.1.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

III - 1.2.

Déterminer $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} F(x)$, $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1-x)F(x)$, $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1-x)F'(x)$ et $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1-x)^2 F'(x)$.

III - 2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose cette fois : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

III - 2.1.

Soit $a \in]0, 1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a, a]$.
En déduire que F est définie et continue sur $] -1, 1[$.

III - 2.2.

Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1 - x^n}{1 - x} \leq n$.

En déduire $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} F(x)$ et $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1 - x)F(x)$.

III - 3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0, 1[$ avec

$f(0) = 0$ et telle que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$.

III - 3.1.

Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$ et l'égalité $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

III - 3.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt.$$

III - 3.3.

En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x .

III - 3.4.

Conclure avec soin que : $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1 - x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

III - 4. Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - x^n)$.

III - 4.1.

Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

III - 4.2.

Grâce à **III - 3.4.**, montrer que $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} (1 - x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u - 1} du$ étudiée en **I - 3.**

III - 4.3.

Par une méthode similaire à celle de **III - 3.**, montrer que :

$$\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} \left((1 - x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1 - x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u - 1} du.$$

En déduire $\lim_{\substack{x < 1 \\ x \rightarrow 1}} ((1 - x)^2 F'(x))$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Cette épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .
2.
 - a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.
 - b) Simplifier l'expression $1 + \frac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).
 - c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $]1; 1,2[$ et que γ appartient à $]2,7; 2,8[$.
 - d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.
4. On cherche à obtenir une approximation de β . À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12} \end{cases}$$

- a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.
- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β .
- d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N .

EXERCICE 2

On considère dans cet exercice l'équation différentielle (E) suivante :

$$x^2 y'' - x(2x^2 - 1)y' - (2x^2 + 1)y = 0. \quad (E)$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Calculer f' et f'' puis vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sur l'intervalle $] -\infty, 0[$.

2. On cherche désormais des solutions de (E) qui soient développables en série entière. Pour cela, on considère $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence R supposé strictement positif.

Pour $x \in] -R, R[$, on écrit :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et on suppose que la fonction y est solution de (E) sur $] -R, R[$.

- a) Exprimer, pour $x \in] -R, R[$, $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide d'une série.

- b) Démontrer que $a_0 = 0$ et que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_n = \frac{2}{n+1} a_{n-2}.$$

- c) Calculer a_2 . Plus généralement, que vaut a_n si n est un entier pair ?

- d) Si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$ où p désigne un entier naturel.

Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1} .

Montrer que pour tout entier naturel p :

$$a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

4. Donner, sans démonstration, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \exp(x^2)$, ainsi que leurs rayons de convergence.

5. On note, pour tout x réel, $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$.

Que vaut $g(0)$?

Exprimer pour tout réel x non nul, $g(x)$ en fonction de $\exp(x^2)$ et de x .

6. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) , puis exprimer les solutions de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à l'aide des fonctions f et g .

7. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$?

PROBLÈME

On rappelle que, pour tout x réel, la notation $\sin^2(x)$ désigne $(\sin(x))^2$.

Partie A

1. Rappeler, sans démonstration, la nature (convergente ou divergente) de chacune des trois séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit α un réel. Justifier que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$$

est une série convergente.

Partie B

Dans cette partie, α désigne un réel fixé appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

On note f la fonction 2π -périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } t \in [-\alpha, \alpha], \\ f(t) = 0 & \text{pour } t \in]\alpha, \pi] \text{ et pour } t \in]-\pi, -\alpha[. \end{cases}$$

1. On suppose, **dans cette question 1 seulement**, que $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Représenter alors la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Donner la valeur des coefficients de Fourier $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on justifiera brièvement la réponse).

Calculer les coefficients de Fourier $a_0(f)$ et $a_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Énoncer le théorème de Parseval (avec ses hypothèses) et justifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

4. Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

Partie C

Dans cette partie, α désigne encore un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

On note h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad h(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$

1. Déterminer la limite de h en 0^+ . En déduire la nature de l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

2. Donner sans démonstration la nature de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

En déduire la nature de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ puis la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

3. Calculer la dérivée de h sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, les deux inégalités suivantes :

$$|x\sqrt{x}h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

et

$$|x\sqrt{x}h'(x)| \leq 4\sqrt{x}.$$

Pour montrer la deuxième inégalité, on rappelle que pour tout réel $x > 0$, $|\sin(x)| \leq x$.

5. En séparant les cas $x \geq 1$ et $0 < x < 1$, en déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad |h'(x)| \leq \frac{4}{x\sqrt{x}}.$$

6. Justifier que, pour tout entier N strictement positif

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt,$$

puis que :

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt.$$

7. À l'aide de la question 5. de la partie C et de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction h , démontrer que pour tout n entier strictement positif et tout réel t dans l'intervalle $[0, \alpha]$, on a :

$$\left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| \leq \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

8. Montrer ensuite que pour tout entier N strictement positif, on a :

$$\sum_{n=1}^N \int_0^\alpha \left| \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right| dt \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

9. En déduire avec soin que :

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx - \frac{\pi - \alpha}{2} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

puis déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

Fin de l'énoncé

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 3 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Les deux **parties A et B** de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : un arc de cercle apparent

On se place dans un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et le point $A(a, 0)$ où $a \in]1, +\infty[$.

On cherche l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ visibles du point A .

Définition : on dit qu'un point $M(x, y)$ du cercle $\mathcal{C}$ est **visible** du point A lorsque pour tout $M'(x', y')$, point d'intersection du cercle et de la droite (AM) , on a : $x' \leq x$.

Sur la figure 1, l'ensemble des points du cercle visibles du point A est en trait plein tandis que la partie non-visible du cercle est en pointillé. Les deux points distincts M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$. Les points M_1, M_2 et A sont alignés. Le point M_1 est visible du point A car il n'y a pas d'autre point du cercle sur le segment $[AM_1]$ alors que le point M_2 ne l'est pas car le point M_1 est sur le segment $[AM_2]$, ce qui se vérifie par la condition : $x_2 < x_1 < a$.

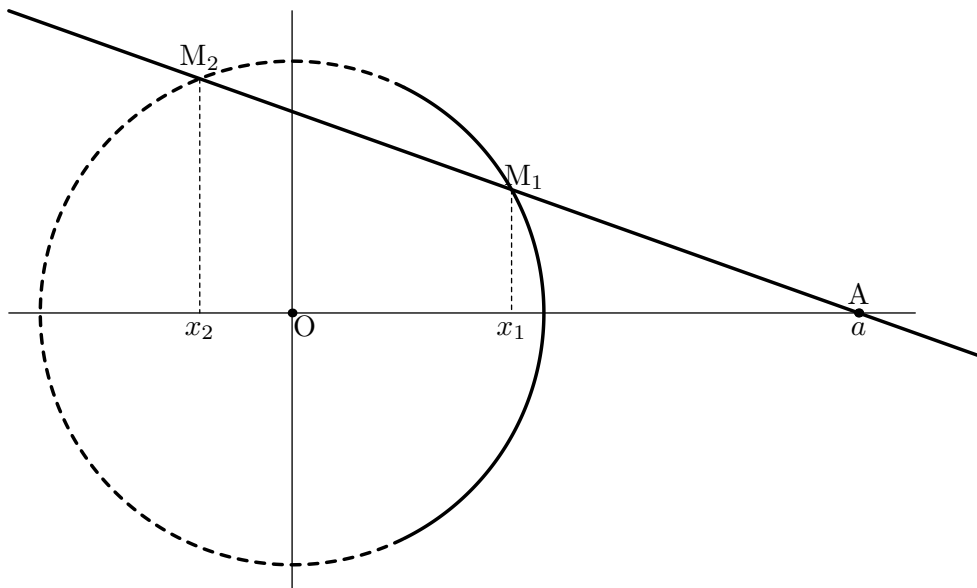


figure 1 : une illustration graphique

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $M(\theta)$ le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

De plus, on pose : $\omega = \text{Arc cos} \left(\frac{1}{a} \right)$.

1. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Justifier que le point $M(\theta)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$.
2. (a) Justifier l'existence de ω et que : $\omega \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}(\omega)$ et $\overrightarrow{AM}(\omega)$, en fonction des réels a et ω .
 (c) Exprimer a en fonction de ω .
 (d) Établir que la droite $(AM(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

On pourra utiliser un produit scalaire.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) - a}$.

3. (a) Montrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.
 (b) Étudier la parité de la fonction f .
 (c) Soit $x \in \mathbf{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ en fonction de a et de $\cos(x)$.
 (d) En déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \omega]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $[\omega, \pi]$.
 (e) Donner le tableau des variations de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$.

On **ne** cherchera **pas** à calculer $f(\omega)$.

4. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A coupant le cercle $\mathcal{C}$ en au moins un point.
 Montrer que $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme : $y = m(x - a)$ où $m \in \mathbf{R}$.

Pour $m \in \mathbf{R}$, on note $\mathcal{D}_m$, la droite d'équation : $y = m(x - a)$.

5. Soit m et θ deux réels. Montrer que : $M(\theta) \in \mathcal{D}_m$ si et seulement si $m = f(\theta)$.
6. Montrer que les points $M(0)$ et $M(\pi)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_0$, puis après avoir comparé leurs abscisses, que le point $M(0)$ est visible du point A alors que le point $M(\pi)$ ne l'est pas.
On rappelle qu'un cercle et une droite se coupent en au plus deux points.
7. Soit deux réels θ_1 et θ_2 tels que : $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ et $f(\theta_1) = f(\theta_2)$.
 - (a) Montrer que les points A, $M(\theta_1)$ et $M(\theta_2)$ sont alignés.
 - (b) Prouver que le point $M(\theta_1)$ est visible du point A alors que le point $M(\theta_2)$ ne l'est pas.
 - (c) Justifier brièvement que : $\theta_1 < \omega < \theta_2$.
8. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Établir que :
 - (a) si $\theta \leq \omega$, alors le point $M(\theta)$ est visible du point A.
 - (b) si $\omega < \theta$, alors le point $M(\theta)$ n'est pas visible du point A.
9. Sans justification, donner des résultats analogues à la question précédente pour $\theta \in [-\pi, 0]$.

Partie B : un contour apparent d'une quadrique

On se place dans un espace euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit la surface Σ d'équation : $3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1$.

On considère les matrices $S = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de la matrice S. On détaillera les calculs.
2. (a) Justifier, sans calcul, que l'on peut trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice orthogonale $\Omega \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $D = {}^t\Omega R \Omega$ où ${}^t\Omega$ désigne la transposée de la matrice Ω .
(b) Donner une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Ω telles que : $D = {}^t\Omega R \Omega$.
On pourra utiliser la calculatrice mais on explicitera la méthode utilisée.
3. En déduire la nature de la quadrique Σ .

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x = \frac{1}{3}$ et la courbe $\mathcal{E} = \mathcal{P} \cap \Sigma$, intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la surface Σ .

4. (a) Soit $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace. Montrer que : $M \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$.
(b) Justifier que la courbe $\mathcal{E}$ est une conique et que dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ noté $(O', \vec{J}, \vec{K})$, elle admet comme équation : $\frac{3Y^2}{4} + \frac{9Z^2}{4} = 1$.
On pourra utiliser la question 1 de la partie B. On **ne** cherchera **pas** à déterminer le point O' et les vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{K}$.

- (c) Préciser la nature de la conique $\mathcal{E}$ et les coordonnées de ses sommets dans le repère $(O', \vec{J}, \vec{K})$ et représenter cette conique dans le plan $\mathcal{P}$ muni de ce repère.

On considère les points $A(1, 0, 0)_{\mathcal{R}}$ et $N(0, 0, 1)_{\mathcal{R}}$.

Définition : on dit qu'un point $M(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ de la surface Σ est **visible** du point A lorsque que pour tout $M'(x', y', z')_{\mathcal{R}}$, point d'intersection de la surface Σ et de la droite (AM) , on a : $x' \leq x$.

5. (a) Justifier que le point N est sur la surface Σ .
 (b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (NA) .
 On pourra utiliser le point N et le vecteur $\overrightarrow{NA}$ pour le paramétrage de cette droite.
 (c) Donner les coordonnées des points d'intersection de la droite (NA) et de la surface Σ et en déduire que le point N n'est pas visible du point A.

On admet que la partie visible du point A de la surface Σ est délimitée par une courbe constituée des points M tels que la droite (AM) soit tangente à la surface Σ en M. Cette courbe est le contour apparent conique de la surface Σ issu du point A.

On note alors Γ l'ensemble des points M de la surface Σ tels que A appartienne au plan tangent à la surface Σ en M.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbf{R}^3$ par : $\varphi(u, v, w) = 3u^2 + v^2 - vw + w^2 - 1$.

6. Soit $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi(u, v, w)$.

7. On considère le point $B\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{3}\right)_{\mathcal{R}}$.

- (a) Justifier que : $B \in \Sigma$.

- (b) On note Π_B le plan tangent en B à la surface Σ .

Établir que le plan Π_B admet comme équation : $2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 2$.

On rappellera le lien entre le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{3}\right)$ et ce plan.

- (c) A-t-on : $A \in \Pi_B$? En déduire que : $B \in \Gamma$.

8. Soit $T \in \Sigma$, un point de coordonnées (u, v, w) dans le repère $\mathcal{R}$.

Établir que le plan tangent noté Π_T en T à la surface Σ admet comme équation :

$$6ux + (2v - w)y + (2w - v)z = 2.$$

9. Conclure que la courbe Γ est la conique $\mathcal{E}$.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{bmatrix}$$

On appelle F l'ensemble défini par $F = \{M(a, b, c) ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice unité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1) Etude de l'ensemble F

1a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1b. Déterminer une base de F .

1c. Soit une matrice $M(a, b, c)$ de F . Justifier, sans calculer les éléments propres, que $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2) Déterminer le spectre de J et ses sous-espaces propres.

3) Déterminer le spectre de K et ses sous-espaces propres.

4) Réduction simultanée de J et K

4a. Montrer que $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4b. En déduire une matrice P inversible appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = D_1$ et $P^{-1}KP = D_2$, avec D_1 et D_2 deux matrices diagonales que l'on explicitera.

5) Dédire de **1b.** et **4b.** que toute matrice $M(a, b, c)$ de F est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.

Fin de l'exercice

Problème 1

Partie I. Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}_p[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p , avec p un entier naturel non nul, **supérieur ou égal à 2**. Les éléments de E sont indifféremment désignés par l'écriture P ou $P(X)$.

Soit l'application Δ définie sur E par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

L'écriture $P(X+1)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant l'indéterminée X par $X+1$ dans l'expression de $P(X)$.

Par exemple, si $P = aX^2 + bX + c$, alors :

$$\begin{aligned} P(X+1) &= a(X+1)^2 + b(X+1) + c \\ &= aX^2 + (2a+b)X + a+b+c \end{aligned}$$

- 1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
- 2) Soit $\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^p)$ la base canonique de E .
Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, montrer que $\Delta(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$ dont on calculera le coefficient dominant.
- 3) **3a.** Montrer que la matrice M de Δ dans $\mathcal{B}_0$ est une matrice triangulaire supérieure.
3b. Montrer, sans calculs, que M n'est pas une matrice diagonalisable.
- 4) Montrer que $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- 5) Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$.
- 6) Montrer que :

$$\forall P, Q \in E, \Delta(P) = \Delta(Q) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, P(X) - Q(X) = c$$

- 7) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$\Delta(Q) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)dt = 0$$

La notation $Q(t)$ dans $\int_0^1 Q(t)dt$ désigne, de façon usuelle, la fonction polynomiale associée au polynôme Q .

Partie II. Étude d'une suite de fonctions polynomiales

Dans cette partie on étudie des fonctions polynomiales, ou polynômes, que l'on notera indifféremment $P(x)$ ou P .

Les résultats de la Partie I pourront être utilisés en étant directement transposés des polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ à leurs fonctions polynomiales associées.

On considère la suite de fonctions polynomiales à coefficients réels $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0 \end{cases}$$

1) Calculer B_1 , B_2 et B_3 .

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, B_n(0) = B_n(1)$

3) Montrer, **en utilisant une démonstration par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant égal à 1.

4) Démontrer par récurrence sur n , la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Indication : on pourra intégrer la relation de récurrence au rang n pour une variable $t \in [0, x]$.

5) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^p = \int_x^{x+1} B_p(t)dt$

6) **6a.** Soient n et p deux entiers naturels, déduire de la question précédente, l'expression de la somme

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$$

en fonction de n , p et B_{p+1} .

6b. Donner les expressions de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n .

7) On appelle **nombres de Bernoulli**, les nombres b_n définis par : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$. En identifiant $B_n(x)$ à son polynôme de Taylor de degré n , démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$$

Partie III. Fonctions génératrices des polynômes de Bernoulli

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$, qui est donc une série entière de la variable x , dont les coefficients dépendent de n et du paramètre t .

On admet que pour tout t réel, cette série entière a un rayon de convergence $R = +\infty$ et on note alors S_t sa somme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$$

On admet aussi l'expression de $S_t(x)$, valable pour x réel **non nul** :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad S_t(x) = \frac{x e^{tx}}{e^x - 1}$$

- 1) Soit $t \in \mathbb{R}$, quelle est la valeur de la somme $S_t(0)$ de la série entière pour $x = 0$?
Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 0} S_t(x) = S_t(0)$.
- 2) En calculant la quantité $D_t(x) = S_{t+1}(x) - S_t(x)$ de deux façons, avec la formule explicite en fonction de t et x , puis avec la série entière, redémontrer le résultat :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$$

Indication : ne pas utiliser le résultat de la question **II.4**) pour simplifier les calculs.

- 3) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, S_{1-t}(x) = S_t(-x)$
En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$
- 4) En déduire, avec le résultat de **II.2**) : $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n+1} = 0$.

Fin du problème 1

Problème 2

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α .

Partie I. Préliminaires et cas où $\alpha > 1$

- 1) Rappeler à quelle condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\beta}$ est convergente.
- 2) Rappeler la définition de la convergence absolue d'une série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes réels.
- 3) Montrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 4) On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

Partie II. Cas où α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$

On suppose, dans cette partie, que α appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$.

On définit la fonction ϕ sur $[1, +\infty[$ en posant $\phi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \phi(t)dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Nature de l'intégrale impropre (ou généralisée) $\int_1^{+\infty} \phi(t)dt$.

1a. En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{t}$, montrer que pour tout $x > 1$:

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}} dy$$

1b. En déduire que

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2 \left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$$

1c. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} dy$ est convergente.

1d. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \phi(t)dt$ est convergente.

- 2) Étude de la dérivée de la fonction ϕ .

2a. Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et calculer sa dérivée $\phi'(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$.

2b. 2b.1 Calculer, si elle existe, la limite de $u \mapsto \frac{\sin(\pi u)}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

Montrer que la fonction $u \mapsto \frac{\sin(\pi u)}{u}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

2b.2 En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$\forall t \in [1, +\infty[, |\phi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

2c. Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}} |a - b|$$

3) Nature de la série $\sum v_n$.

3a. Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^N v_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'une intégrale.

3b. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

4) Nature de la série $\sum (u_n - v_n)$.

4a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t)) dt$

4b. À l'aide de **II.2c** et **II.4a**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

4c. En déduire que $\sum_{n \geq 1} (u_n - v_n)$ converge.

5) Conclure sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Partie III. Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que α vaut $\frac{1}{2}$.

1) En vue du développement asymptotique de $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$.

1a. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+u}$ et e^u .

1b. Montrer que $\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ ($\mathcal{R}$).

1c. En admettant qu'on puisse prendre les parties réelles dans ($\mathcal{R}$), en déduire que

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi} \left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) \right) - \frac{\pi}{4n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

2) **2a.** Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}}$? Celle de $\sum_{n \geq 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$?

On admet que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

2b. On pose $\alpha_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Expliciter les suites de termes généraux $\beta_n = \alpha_{(2n)^2}$ et $\gamma_n = \alpha_{(2n+1)^2}$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\cos(\pi\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

2c. Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

Partie IV. Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que le réel α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-1/2}(S_n - S_{n-1})$$

En déduire que pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) + S_N(N+1)^{\alpha-1/2}$$

2) **2a.** Montrer qu'il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n| \leq M$.

2b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ est convergente.

2c. Montrer que la suite $(S_N(N+1)^{\alpha-1/2})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

3) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

4) Conclure sur la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Fin du problème 2

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

I : PREMIER EXERCICE

I.1. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer l'intégrale double $\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

II : DEUXIEME EXERCICE

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 .$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1. Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^- .

II.2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J .

Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

II.3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : x^2 y'' + xy' = 0 .$$

Déterminer S^+ et S^- .

Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

II.4. Dans cette question $(E) : x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).

En déduire S^+ puis S^- .

Déterminer S et donner la dimension de S .

II.5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

III : PROBLEME

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout

$$\text{entier naturel } n : S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n b_k .$$

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \text{ (transformation d'Abel).}$$

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

III.4. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

III.5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n , $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est uniformément bornée).

III.5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .

III.5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .

III.6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

III.6.a Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin(x/2)e^{ix/2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle

$[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

III.6.b Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n

entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx) \sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p , la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

III.6.c On se propose dans cette question de démontrer que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

i. Déterminer alors les coefficients de Fourier de la fonction U .

On pourra utiliser pour p et n entiers naturels non nuls :

$$p \neq n, \quad \int_0^\pi \sin(nx) \sin(px) dx = 0 \quad \text{et pour } p = n \quad \int_0^\pi \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{\pi}{2}.$$

ii. En utilisant la formule de Parseval, aboutir à une contradiction.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

III.7. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

III.8. On considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

III.8.a On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uni-

formément sur $] -1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

III.8.b On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z , tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

III.8.c Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos \alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

III.8.d On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n , si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos \alpha}.$$

III.8.e Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts

D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Partie I : EXERCICE 1

Soit les suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 3v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} &= 4v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et} \quad (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1).$$

I.1.

I.1.a Justifier sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

I.1.b Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.1.c Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser la calculatrice.

I.2. Expliciter les termes u_n , v_n et w_n en fonction de n .

Partie II : EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n . On appelle projecteur de E , tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

II.1. Soit p un projecteur de E .

II.1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E .

II.1.b En déduire que la trace de p (notée $\text{Tr}(p)$) est égale au rang de p (noté $\text{rg}(p)$).

II.1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\text{Tr}(u) = \text{rg}(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

II.2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

II.3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

II.3.a Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice $\text{Mat}_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$\text{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \dots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

II.3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

II.3.c On suppose que $\text{Tr}(u) = \text{rg}(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

II.3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Partie III : PROBLEME

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note tM sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle | \rangle$ et de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x) | y \rangle = \langle x | s(y) \rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \langle s(x) | x \rangle \geq 0 \quad (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle s(x) | x \rangle > 0).$$

Une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX S X \geq 0 \quad (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{inégalité arithmético-géométrique}).$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \text{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

III.1.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

III.2. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . Pour tout vecteur x de E , on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle.$$

III.2.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β .

III.2.b En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E .

III.3.

III.3.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

III.3.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \lambda_1 \leq s_{i,i} \leq \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.4. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leq 1.$$

III.6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \text{Tr}(AS)$.

III.7.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta).$$

III.7.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera t .

III.7.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \text{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t .

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

III.8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(S) \right)^n \quad (*).$$

III.9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = {}^t D S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\text{Tr}(S_\alpha)$.

III.10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité (*), démontrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

III.11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad (\text{inégalité d'Hadamard}).$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta {}^t \Omega$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

III.12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = {}^t \Omega A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta).$$

III.13. Démontrer que $\{\text{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m .

III.14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} (b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

III.15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\text{Tr}(B\Delta) \geq n (\det(S))^{1/n}$.

III.16. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} (\det(S))^{1/n}$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Déterminer le réel m .

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées**Notations, définitions et rappels**

Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f .

Partie I**Quelques exemples de calculs de longueurs**

I.1 Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.

I.2 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \operatorname{ch}(t)$.

I.3 Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question **I.3.1** sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4 Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$.

Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.

Partie II

Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole.

On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par $f(t) = \frac{1}{t}$.

II.1 Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1, 2]$.

II.2 Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1) 2^{2n} (n!)^2} t^{4n-2}.$$

II.2.3 On note, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1) 2^{2n} (n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

Partie III

Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], p_n(t) = t^n.$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} dt.$$

III.1 Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2 .

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

III.2 Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lambda_n - n \int_0^1 t^{n-1} dt = \mu_n$$

où :

$$\mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + n t^{n-1}}.$$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ainsi que la valeur de sa limite.

III.3 Plus généralement, montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

Partie IV

Un résultat inattendu

IV.1 Etude de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$

IV.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

IV.1.2 Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

IV.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

IV.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

IV.2 On désigne par g la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t) dt$.

IV.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

IV.2.2 Montrer que f est continue sur $[0, 1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0, 1]$.

IV.2.3 Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 |g(t)| dt = +\infty.$$

IV.3 Pour tout réel $x \in]0, 1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x, 1]$.

Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$, pour tout $x \in]0, 1]$, puis montrer que

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

Partie V

Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application :

$$f \mapsto \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note :

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}.$$

V.1 Comparaison des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\infty}$

V.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur l'espace E_1 .

V.1.2 Montrer que :

$$\forall f \in E_1, \|f\|_{\infty} \leq \|f\|.$$

V.1.3 Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

V.2 On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}.$$

V.2.1 Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

V.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \sqrt{n} \frac{\pi}{2}.$$

V.2.3 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|_{\infty})$?

V.2.4 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$?

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI****MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 4 pages.

Notations :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\llbracket 0, n \rrbracket$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}; 0 \leq p \leq n\}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier n , $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note encore P la fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'un polynôme P est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

Objectifs : on se propose d'étudier une famille de polynômes et leurs racines. Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_n) vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux. Enfin, dans la dernière partie, on étudie les valeurs propres d'une matrice pour démontrer une propriété des racines de ces polynômes.

Partie I

Etude d'un endomorphisme

Dans cette partie, on pose :

$$A(X) = X^2 - 1 \quad , \quad B(X) = 2X.$$

I.1 Une application linéaire

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\Phi(P) = AP'' + BP'.$$

I.1.1 Montrer que, pour tout entier n , la restriction, notée Φ_n de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$, définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.1.2 Montrer brièvement que :

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Vérifier que $\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$.

I.2 Une base de vecteurs propres

I.2.1 Soient P et Q deux polynômes. Déterminer deux polynômes U et V tels que :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 (A(t)U(t) + A'(t)V(t)) dt.$$

En déduire que pour tout entier n , l'endomorphisme Φ_n est auto-adjoint.

I.2.2 Ecrire la matrice de $\Phi_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique $\{1, X, \dots, X^n\}$ et en déduire les valeurs propres de Φ_n .

I.2.3 Montrer qu'il existe une base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de Φ_n unitaires tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

I.2.4 Montrer que si $i \neq k$ alors $\langle P_i, P_k \rangle = 0$. En déduire que P_n est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

I.2.5 Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 , puis déterminer leurs racines.

Partie II

Étude des racines de ces polynômes

II.1 Une relation de récurrence Soit $n \geq 2$ un entier.

Justifier l'existence d'un réel λ_n tel que :

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

II.2 Dans cette question, on suppose $n \geq 3$

En calculant $\langle XP_{n-1}, P_k \rangle$, pour tout polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ (avec $k \leq n-3$), montrer que $\langle S_n, P_k \rangle = 0$.

II.3 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_n > 0$, tels que :

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

Calculer de façon directe $\lambda_2, \mu_2, \lambda_3$ et μ_3 .

II.4 Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{-1}^1 P_k(t) dt = 0.$$

En déduire que P_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $] -1, 1[$.

II.5 Soient $x_1, \dots, x_k$, les racines distinctes d'ordre impair de P_n dans $] -1, 1[$ et soit Q le polynôme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)$. En considérant $Q \cdot P_n$, montrer que P_n a n racines simples dans $] -1, 1[$ (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $\int_{-1}^1 Q(t)P_n(t) dt$ en supposant $k < n$).

Partie III

Étude d'une matrice

III.1 Étude d'un déterminant

Pour tout entier $n > 0$, on considère la matrice :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\mu_2} & \lambda_2 & \sqrt{\mu_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_3} & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \sqrt{\mu_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\mu_n} & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

III.1.1 On pose $Q_0(X) = 1$ et, pour tout entier $n > 0$, $Q_n(X) = \det(XI_n - M_n)$. Calculer $Q_1(X)$. Exprimer $Q_n(X)$ en fonction de $Q_{n-1}(X)$ et de $Q_{n-2}(X)$ pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

III.1.2 Déterminer, pour tout entier $n \geq 3$, une relation entre $Q_n(X)$, $Q_{n-1}(X)$ et $Q_{n-2}(X)$.

III.1.3 En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles (résultat déjà démontré en **II.5**).

III.2 Valeurs propres de M_n On considère M_n comme la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel (noté $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$), dans la base canonique. On note $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$, les valeurs propres de M_n et $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M_n , tels que $u(e_i) = \alpha_i e_i$.

III.2.1 Soit F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_i)$. Montrer que sur la sphère unité de F_i , l'application $x \mapsto \langle u(x) | x \rangle$ atteint un maximum et le calculer.

III.2.2 Soit G_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_i, \dots, e_n)$. Montrer que sur la sphère unité de G_i , l'application $x \mapsto \langle u(x) | x \rangle$ atteint un minimum que l'on calculera.

III.3 Une expression des valeurs propres Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension i . Montrer que $G_i \cap F \neq \{0\}_{\mathbb{R}^n}$ et que si $x \in G_i \cap F$ vérifie $\|x\| = 1$, alors $\langle u(x) | x \rangle \geq \alpha_i$. En déduire que :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim F = i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x) | x \rangle \right\}.$$

III.4 Une démonstration analogue montre, ce que l'on admettra, que :

$$\alpha_i = \max_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim F = n+1-i}} \left\{ \min_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x) | x \rangle \right\}.$$

III.4.1 On note $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n-2} \leq \beta_{n-1}$ les valeurs propres de M_{n-1} . En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $\beta_i \geq \alpha_i$ et $\alpha_{i+1} \geq \beta_i$.

III.4.2 En déduire que :

$$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n.$$

III.4.3 Soit n un entier strictement positif. On sait que P_n admet n racines distinctes $(x_1, \dots, x_n)$ rangées par ordre croissant dans l'intervalle $] -1, 1[$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, le polynôme P_{n-1} admet une racine dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

L'objectif du problème est de définir et d'étudier les notions de *polynôme, de matrice et de système différentiel stable*.

La partie I traite le cas particulier de la dimension 2 et aborde un contre-exemple en dimension 3. La partie II introduit les outils théoriques qui se spécialisent dans la partie III pour montrer en partie IV le critère de Routh-Hurwitz pour la stabilité des polynômes unitaires de degré 3. La partie V est une application de la partie IV à un système différentiel d'ordre 3 particulier.

La partie I est indépendante des quatre autres parties. Les parties II, III, IV et V sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Le résultat principal de la partie II et celui de la partie IV sont résumés clairement en fin de partie.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Notations :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,

I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P qui sont dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont tels que : $P(\lambda) = 0$.

On dit que P est unitaire si P est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Tr}(A)$ la trace de A , tA la matrice transposée de A , $\det(A)$ le déterminant de A et χ_A le polynôme caractéristique de A , c'est-à-dire $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

L'ensemble $Z_{\mathbb{K}}(\chi_A)$ est noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tMM = I_n \text{ est noté } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$, on définit Ax comme étant l'élément $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re(z)$ la partie réelle de z , $|z|$ le module de z et $\bar{z}$ le complexe conjugué de z .

Définitions :

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est stable si :

$$\text{pour tout } \lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P), \Re(\lambda) < 0.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est stable si χ_A est stable.

Partie I : STABILITE DANS DES CAS PARTICULIERS

Soient a et b deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.

On note z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

Soit $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I.1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.

I.2. On suppose dans cette question que $\Delta > 0$.

I.2.a. Vérifier que si P est stable, alors $a > 0$ et $b > 0$.

I.2.b. Montrer réciproquement que si $a > 0$ et $b > 0$, alors P est stable.

I.3. On suppose dans cette question que $\Delta = 0$.

Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

I.4. On suppose dans cette question que $\Delta < 0$.

I.4.a. Justifier que $z_2 = \bar{z}_1$.

I.4.b. Montrer que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

I.5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I.5.a. Exprimer χ_A en fonction de $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

I.5.b. Etablir que A est stable si et seulement si $\text{Tr}(A) < 0$ et $(-1)^n \det(A) > 0$.

I.6. On suppose dans cette question que $n = 3$.

I.6.a. Trouver les racines complexes de Q .

I.6.b. Vérifier que $\text{Tr}(B) < 0$ et que $(-1)^n \det(B) > 0$.

I.6.c. Montrer que ni Q ni B ne sont stables.

Partie II : NORME SUBORDONNEE ET MESURE DE LOZINSKII

Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question II.1.c.).

On admet que l'application $A \mapsto \|A\|$ définit ainsi une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.

II.1.

II.1.a. Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{K}^n$.

II.1.b. Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

II.1.c. Montrer l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$. Cela justifie donc la définition de $\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} (\|Ax\|)$ et on a alors $\|A\| = \|Ax_0\|$.

II.1.d. Montrer que $\|I_n\| = 1$.

II.1.e. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

II.1.f. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

II.2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\Re(\lambda) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right)$.

II.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :

$$\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|I_n + uA\| - 1}{u} \right).$$

Ce réel est appelé mesure de Lozinskiï de A (il dépend du choix de la norme initiale).

Pour $u > 0$, on note $\mu(A, u) = \frac{\|I_n + uA\| - 1}{u}$.

II.3.a. Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) = \|u^{-1}I_n + A\| - \|v^{-1}I_n + A\| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

II.3.b. En déduire que si $0 < u \leq v$, alors : $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0$.

II.3.c. Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-\|A\| \leq \mu(A, u) \leq \|A\|$.

II.3.d. En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\mu(A, u))$.

II.4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II.4.a. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$ et puis que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\|(I_n + uA)x\| = |1 + u\lambda|$.

II.4.b. En déduire que : $\Re(\lambda) \leq \mu(A)$.

II.4.c. Donner une condition suffisante sur $\mu(A)$ pour que A soit stable.

Le résultat principal de cette partie II est que :

$$\text{pour tout } \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \Re(\lambda) \leq \mu(A)$$

où

$$\mu(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|I_n + uA\| - 1}{u} \right).$$

Partie III : NORMES ET MESURES DE LOZINSKII ASSOCIEES

Dans cette partie, à tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on associe la matrice-colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}). \text{ De plus, si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \text{ on note } \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

et ${}^tX = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique et de sa norme associée définis par les formules :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y \rangle = {}^t\overline{X}Y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

On remarque que ce produit scalaire et cette norme sur $\mathbb{C}^n$ donnent par restriction le produit scalaire canonique et sa norme associée sur $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet que les réels $\|A\|$ et $\mu(A)$ sont les mêmes selon que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$ ou que l'on considère A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$. On note alors ces deux réels $\|A\|_2$ et $\mu_2(A)$. On a ainsi :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathcal{B}_2} (\|Ax\|_2) \quad \text{où} \quad \mathcal{B}_2 = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\|_2 = 1\}$$

$$\text{et } \mu_2(A) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\|I_n + uA\|_2 - 1}{u} \right)$$

Dans toute cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $u > 0$:

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^tXX + u {}^tX(tA + A)X + u^2 {}^tXtAAX.$$

III.2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ et

$${}^tA + A = M \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^tM.$$

III.3. On suppose dans toute cette question que $x \in \mathbb{R}^n$ et $\|x\|_2 = 1$. On pose $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tMX$.

III.3.a. Montrer que $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

III.3.b. Vérifier que $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + u^2 {}^tXtAAX$.

III.3.c. Montrer l'existence de deux réels γ et δ tels que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tXX = 1$, on ait : $\gamma \leq {}^tXtAAX \leq \delta$.

III.3.d. Montrer que pour γ et δ choisis comme en III.3.c, on a, pour tout $u > 0$:

$$\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leq \|(I_n + uA)\|_2 \leq \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.$$

III.3.e. En déduire que $\mu_2(A) = \frac{\alpha_1}{2} = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}} \left(\frac{{}^tA + A}{2} \right) \right\}$.

III.4. Soit H une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|x\|_H = \|Hx\|_2$. On admet que l'on définit ainsi des normes sur $\mathbb{C}^n$ comme sur $\mathbb{R}^n$ qui donnent sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une même norme subordonnée notée $\|\cdot\|_H$ et une même mesure de Lozinskiï notée μ_H .

III.4.a. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_H = \|HAH^{-1}\|_2$.

III.4.b. En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$.

Partie IV : UN CRITERE DE STABILITE EN DEGRE 3

Soient a, b et c trois réels.

On considère le polynôme réel P unitaire de degré 3 écrit sous la forme :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

On dit que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si :

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad \text{et} \quad ab - c > 0.$$

Par le théorème de D'Alembert-Gauss, on note z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes tels que :

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3).$$

IV.1. Montrer que : $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, $c = -z_1z_2z_3$ et

$$ab - c = -z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3.$$

IV.2. Montrer que l'une des racines de P est un nombre réel.

On suppose dans toute la suite de cette partie que z_1 est un réel qui sera noté α_1 et que z_2 et z_3 s'écrivent sous la forme $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ et $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ avec des réels $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ et β_3 .

IV.3. On suppose dans cette question que $\beta_2 = 0$.

IV.3.a. Montrer que $\beta_3 = 0$.

IV.3.b. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.4. On suppose dans cette question que $\beta_2 \neq 0$.

IV.4.a. Justifier que $\alpha_3 = \alpha_2$ et que $\beta_3 = -\beta_2$.

IV.4.b. Vérifier que : $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2$, $c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$ et

$$ab - c = -2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 4\alpha_1\alpha_2^2.$$

IV.4.c. Montrer que si P est stable, alors P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV.5. Montrer que si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, alors $\Re(z_1), \Re(z_2)$ et $\Re(z_3)$ sont non nuls.

IV.6. On suppose dans cette question que P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

On pose alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -c' & 0 & 1 \\ 0 & -b' & -a' \end{pmatrix}$ avec $a' = a$, $b' = \frac{ab-c}{a}$ et $c' = \frac{c}{a}$ si bien que a', b' et c' sont trois réels strictement positifs.

On note H la matrice diagonale inversible suivante : $H = \begin{pmatrix} \sqrt{a'b'c'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a'b'} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} \end{pmatrix}$.

On pose $B' = HA'H^{-1}$.

IV.6.a. Montrer que $\chi_{A'}(X) = -P(X)$.

IV.6.b. Calculer explicitement B' et vérifier que : $\frac{B' + B}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

IV.6.c. En déduire que $\mu_H(A') = 0$.

IV.6.d. En conclure que P est stable.

Le résultat principal de cette partie IV est que :

un polynôme à coefficients réels, unitaire de degré 3 est stable si et seulement si ce polynôme vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

Partie V : EXEMPLE DE SYSTEME DIFFERENTIEL STABLE

Soit $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère le système différentiel (S) suivant, d'inconnue $t \mapsto X(t)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad X'(t) = CX(t).$$

On dit que ce système différentiel (S) est stable si, quelle que soit la solution X de (S), on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t)) = 0.$$

V.1. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

V.2. En déduire que C est stable.

V.3. Montrer l'existence d'une matrice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et de trois réels $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$

et $\beta_2 \neq 0$, tels que : $C = UDU^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + i\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix}$.

On ne cherchera pas à trouver explicitement U ni les réels α_1 , α_2 et β_2 .

V.4. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(t) = U^{-1}X(t)$.

V.4.a. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $Y'(t) = DY(t)$.

V.4.b. En déduire l'expression de $Y(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ dans ce cas.

V.4.c. Montrer qu'il existe X_1 , X_2 et X_3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$X(t) = e^{\alpha_1 t} X_1 + e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t) X_2 + e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t) X_3.$$

On ne cherchera pas à trouver explicitement les matrices X_1 , X_2 et X_3 .

V.4.d. Vérifier que le système différentiel (S) est stable.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse à des opérateurs définis sur l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques, en introduisant sur cet espace une loi dite produit de convolution.

Partie I : ETUDE D'UN PREMIER OPERATEUR

I.1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|.$$

I.1.a Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$.

I.1.b L'application φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? De classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? De classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? On justifiera brièvement les réponses.

I.2. Série de Fourier de φ .

I.2.a Déterminer les coefficients de Fourier (dits exponentiels) de φ : $c_n(\varphi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Préciser la convergence de la série de Fourier de φ .

I.2.b Justifier la convergence et calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$.

Dans la suite de cette partie, ainsi que dans la partie suivante, on considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques.

I.3. Soient $h \in E$ et $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $s \in \mathbb{R}$ par $H(s) = \int_s^{s+2\pi} h(t) dt$.

Justifier que H est une application constante sur $\mathbb{R}$.

I.4. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) \right| f(t) dt .$$

I.4.a Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.

I.4.b Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.c Justifier que l'application Φ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E .

I.5. Soient $f \in E$ et $g = \Phi(f)$.

I.5.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \int_{x-2\pi}^x \sin \left(\frac{x-t}{2} \right) f(t) dt$.

En déduire que l'on peut écrire : $g(x) = \sin \left(\frac{x}{2} \right) F(x) - \cos \left(\frac{x}{2} \right) G(x)$

où l'on a posé : $F(x) = \int_{x-2\pi}^x \cos \left(\frac{t}{2} \right) f(t) dt$ et $G(x) = \int_{x-2\pi}^x \sin \left(\frac{t}{2} \right) f(t) dt$.

I.5.b En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $g'' + \frac{g}{4} = f$.

I.5.c Soit $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant g'' , déterminer le coefficient de Fourier $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$. Grâce au calcul de I.2.a, donner une relation entre $c_n(g)$, $c_n(f)$ et $c_n(\varphi)$.

I.6. Isomorphisme.

I.6.a Soient $f \in E$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g = \Phi(f)$. Montrer que $g' = \Phi(f')$.

I.6.b Soit $h \in E$, h étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant $g = \Phi(h)$, montrer que : $\Phi \left(h'' + \frac{h}{4} \right) = h$.

I.6.c Montrer que Φ établit un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre E et son sous-espace noté E_2 constitué des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et 2π -périodiques).

I.7. Exemples de résolution.

I.7.a Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = -\frac{4}{3}f$; pour cela, on justifiera que $f \in E_2$ et que f est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on résoudra.

I.7.b Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.

Partie II : ETUDE D'UN DEUXIEME OPERATEUR

Soit $r \in]0, 1[$ fixé.

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt).$$

II.1.a Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général p_n .

II.1.b Pour tout réel t , on pose alors $P(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

En remarquant que $2 \cos(nt) = e^{-int} + e^{int}$, justifier l'égalité $P(t) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$.

II.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.

II.2.a Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

II.2.b Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t) dt$.

On note aussi $g_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = c_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)f(t)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)f(t)dt, \quad g_n(x) = r^n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Justifier alors l'égalité : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

II.2.c Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction somme d'une série de fonctions.

II.2.d g étant 2π -périodique, on veut calculer ses coefficients de Fourier. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $c_p(g) = r^{|p|} c_p(f)$, où $c_p(g)$ et $c_p(f)$ désignent les coefficients de Fourier (exponentiels) de f et g respectivement. Pour cela, on justifiera d'abord l'intégration terme-à-terme dans l'intégrale définissant $c_p(g)$.

II.3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui sont 2π -périodiques. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t) dt.$$

En procédant comme dans la question I.4, on montre que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E , ce que l'on admettra sans avoir à en faire la démonstration.

II.3.a Grâce à II.2.d, déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in E$ non nulle, vérifiant $\Pi(f) = \lambda f$.

II.3.b L'endomorphisme $\Pi : E \rightarrow E$ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Partie III : PRODUIT DE CONVOLUTION, OPERATEURS ASSOCIES

On considère ici l'espace vectoriel complexe noté $\mathcal{C}_{2\pi}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, qui sont 2π -périodiques.

On rappelle que l'on définit sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée notée ici $\|\cdot\|_2$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

Par ailleurs, on considère la norme usuelle $\|\cdot\|_{\infty}$, définie aussi sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

III.1. Pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit $h = f * g$ (dit produit de convolution de f et g), par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que h ainsi définie est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.2. Pour la suite de cette partie, on admettra sans démonstration la relation entre les coefficients de Fourier de $f * g$ et ceux de f et g :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$$

III.2.a Montrer que pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a : $f * g = g * f$.

III.2.b Montrer qu'il ne peut pas exister $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on ait : $f * \varepsilon = f$.

III.3. Soit ψ donnée dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

A toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on associe $\Theta(f) = \psi * f$.

III.3.a Montrer que l'application Θ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.3.b Montrer que $S_{\psi} = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, que $M = \sup\{|c_n(\psi)|, n \in \mathbb{Z}\}$ existe et vérifie $M \leq \|\psi\|_{\infty}$.

III.3.c Justifier que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|\Theta(f)\|_2 \leq M\|f\|_2.$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.d Montrer que S_{ψ} est exactement l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe f non nulle dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, vérifiant $\Theta(f) = \lambda f$.

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.e Caractériser à l'aide de S_{ψ} l'injectivité de Θ .

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème totalement indépendants entre eux et qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Exercice

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.

Autrement dit, $\mathbb{R}_1[X] = \{ aX + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$.

On désigne par φ l'application de $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt.$$

Par exemple, si $P = X + 1$ et $Q = X$, alors $\varphi(X + 1, X) = \int_0^1 (t + 1)t dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

I. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour alléger les notations, on notera désormais $(P|Q)$ le produit scalaire des polynômes P et Q à la place de $\varphi(P, Q)$.

La norme associée à ce produit scalaire sera notée $\|\cdot\|$.

Ainsi, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, $\|P\| = \sqrt{(P|P)}$.

II. Dans cette question, on se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ possédant la propriété suivante : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$.

On distinguera bien P_0 qui désigne un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ et $P(0)$ qui représente la valeur du polynôme P en 0.

II.A. Soit P_0 un polynôme fixé de $\mathbb{R}_1[X]$.

Montrer que l'égalité $(P|P_0) = P(0)$ est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$, si et seulement si, elle est vérifiée pour les deux polynômes $P = 1$ et $P = X$.

II.B. On pose : $P_0(X) = a_0X + b_0$ où a_0 et b_0 désignent deux réels.

II.B.1. Calculer $(1|P_0)$ et $(X|P_0)$ à l'aide de a_0 et b_0 .

En déduire que $(P|P_0) = P(0)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$,

$$\text{si et seulement si : } \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 + b_0 = 1 \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = 0 \end{cases}$$

II.B.2. Conclure qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on explicitera tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], (P|P_0) = P(0)$.

III. On désigne par S l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que $\|P\|=1$ et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

III.A. Première méthode.

On pose $P_1 = 1$.

III.A.1. Vérifier que $\|P_1\|=1$.

III.A.2. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer un polynôme P_2 de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

III.A.3. Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.

III.A.4. Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda \cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ .

III.A.5. En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S .

III.B. Deuxième méthode.

III.B.1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser les cas où cette inégalité est une égalité.

III.B.2. En utilisant le résultat obtenu dans la partie II., montrer que : $\forall P \in S, P(0) \leq \|P_0\|$.

III.B.3. Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.

III.B.4. Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S .

Problème

Définitions et notations utilisées :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n .

- On note Id l'application identique de E .
Soient f et g deux endomorphismes de E ; on note $f \circ g$ la composée de f et de g .

On convient que $f^0 = \text{Id}$, $f^1 = f$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

- Soit f un endomorphisme de E .
On dit que f est cyclique, si et seulement si, il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E .
Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a))$ soit une base de E .
De même, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a), f^2(a))$ soit une base de E .
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P .

La première partie du problème est consacrée à l'étude d'exemples.

La seconde partie propose l'étude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Elle est totalement indépendante de la première partie.

I. Etude d'exemples.

I.A. On considère dans cette section **I.A.** que $E = \mathbb{R}^2$.

Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\text{la matrice } A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

I.A.1. On choisit $a = (2, 3)$.

Déterminer le vecteur $\alpha(a)$ et montrer que α est cyclique.

I.A.2. Déterminer le vecteur $\alpha^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que :

$$\alpha^2(a) = x a + y \alpha(a).$$

I.A.3. Déterminer la matrice A' de α dans la base $(a, \alpha(a))$.

I.A.4. Montrer que le réel 2 est une valeur propre de α .

I.A.5. Déterminer un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^2$, tel que $(b, \alpha(b))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.

On donnera les coordonnées du vecteur b que l'on aura choisi dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.B. On considère dans cette section **I.B.** que $E = \mathbb{R}^3$.

Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\text{la matrice } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

I.B.1. Déterminer le polynôme caractéristique de β .

I.B.2. Montrer que β est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

I.B.3. Déterminer une base de chacun des sous espaces propres de β .

En déduire que β est diagonalisable, puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans

$$\text{laquelle la matrice de } \beta \text{ soit la matrice } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I.B.4. Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2\text{Id} = 0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

I.B.5. En déduire que β n'est pas cyclique.

I.C. On considère dans cette section **I.C.** que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit γ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le polynôme P' .

On admettra que γ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\gamma(X^2 - 3X + 1) = 2X - 3$.

I.C.1. Déterminer $\gamma(X^{n-1})$ et plus généralement $\gamma^k(X^{n-1})$ pour tout entier k compris au sens large entre 1 et $n-1$.

On effectuera un raisonnement par récurrence sur k .

I.C.2. En déduire que γ est cyclique.

II. Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.

On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\delta(X^2 - 3X + 1) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 1) - (X^2 - 3X + 1)$.

On rappelle également le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans avoir à le démontrer :

soit $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ une famille de polynômes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier i compris au sens large entre 0 et $n-1$, $\deg(Q_i) = i$.

Alors, la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.A. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.

II.A.1. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 1 et $n-1$.

En utilisant la formule du binôme, montrer que le polynôme $\delta(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.

II.A.2. Soit maintenant P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1.

En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.

II.A.3. Montrer enfin que δ est cyclique en considérant la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \delta^2(X^{n-1}), \dots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$.

II.B. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ .

II.B.1. En utilisant le résultat de la question **II.A.2.**, montrer que le noyau de l'endomorphisme δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.

II.B.2. Montrer que l'image de l'endomorphisme δ est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.B.3. En utilisant le théorème du rang, montrer finalement que l'image de l'endomorphisme δ coïncide avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.C. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique.

On définit les polynômes $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = \frac{1}{1!} X, \quad P_2(X) = \frac{1}{2!} X(X-1), \quad \dots$$

$$P_{n-1}(X) = \frac{1}{(n-1)!} X(X-1)(X-2) \dots (X-n+2).$$

On a donc, pour tout entier j compris au sens large entre 1 et $n-1$,

$$P_j(X) = \frac{1}{j!} X(X-1)(X-2) \dots (X-j+1) = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (X-k).$$

II.C.1. Montrer que $(P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- II.C.2.** Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$.
 Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
 Indication : on pourra remarquer que 0 est racine de P_1, P_2 et P_3 , puis que 1 est racine de P_2 et P_3 ...
- II.C.3.** Soient i et j deux entiers naturels, tels que : $i \neq 0$ et $1 \leq j \leq n-1$.
 Montrer que $\delta(P_j) = P_{j-1}$ puis déterminer $\delta^i(P_j)$ en distinguant les cas $i \leq j$ et $i > j$.
 On donnera le résultat sans avoir besoin de le justifier.
- II.C.4.** En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 3 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

La fonction *Dilogarithme*

Dans tout le problème, $\ln$ désigne le logarithme népérien.

On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & t = 0 \end{cases}.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction *Dilogarithme* définie pour tout x de $[-1, 1[$ par :

$$L(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^x f(t) dt.$$

Dans la partie I, on calcule $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. La partie II est consacrée à une étude de la régularité de f .

Dans la partie III, on détermine le développement en série entière de L et on déduit ensuite le prolongé de L en 1. Dans la partie IV, on résout une équation différentielle.

Les différentes parties de ce problème ont un lien entre elles, mais peuvent être traitées séparément.

I. Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 2π , telle que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad g(x) = x.$$

Soit $S : x \longmapsto \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ la somme de la série de Fourier de g . On admet provisoirement l'existence de cette somme, existence qui sera démontrée à la question 4.

1. Représenter graphiquement la restriction de la fonction g à l'intervalle $]-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}$, la valeur de a_n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$.
4. Pour quelles valeurs de x , a-t-on l'égalité $S(x) = g(x)$? On précisera le théorème utilisé, et notamment ses hypothèses.
5. En appliquant avec soin l'égalité de Parseval, en déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II. Régularité de la fonction f

1. Donner le développement limité de $x \longmapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que f est continue en 0.
3. f est-elle dérivable en 0? Si oui, préciser le nombre dérivé $f'(0)$.
4. Calculer pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x)$.
5. Prouver que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
(On pourra à nouveau utiliser la question 1. de cette partie)

III. Développement en série entière de L

On rappelle la fonction Dilogarithme définie pour tout x de $[-1, 1[$ par :

$$L(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1[$ (d'après la partie II).

1. Dérivée de L .

1.a. Vérifier que la fonction L est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1[$.

1.b. Déterminer pour tout x de $[-1, 1[$, $L'(x)$.

2. Développement en série entière de f .

2.a. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$.

2.b. En déduire le développement en série entière de la fonction f sur $] -1, 1[$.

3. Prolongement par continuité de L en 1.

3.a. Montrer que $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Rappeler le théorème utilisé.

On rappelle le théorème radial d'Abel :

Soit une série entière de coefficients (a_n) , de rayon non nul R et de somme S .

On suppose que la série converge en un point x_0 tel que $|x_0| = R$. Alors :

- si $x_0 = -R$, alors $\lim_{x \rightarrow (-R)^+} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$,

- si $x_0 = R$, alors $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

3.b. Vérifier que le développement de la question précédente est encore valable en $x = -1$.

3.c. Montrer que L admet un prolongement par continuité en 1.

On note désormais ce prolongement $L(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} L(x)$.

3.d. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt$ converge et que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt = L(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Application 1.

On considère l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, dx$.

4.a. Montrer que J converge.

4.b. Calculer en fonction de π la valeur de J .

(On peut utiliser le changement de variable $t = 1 - e^{-x}$).

5. Application 2.

5.a. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

(On peut par exemple dériver les deux membres de l'égalité).

5.b. En déduire en fonction de π la valeur de $L(-1)$.

IV. Etude d'une équation différentielle

On se propose de résoudre dans $[-1, 1[$ l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$xy'' + y' = \frac{1}{1-x}$$

où y est une fonction réelle de la variable x .

On considère sur $[-1, 0[\cup]0, 1[$ l'équation différentielle $\mathcal{E}'$:

$$xz' + z = \frac{1}{1-x}$$

où z est une fonction réelle de la variable x .

K désigne un des deux intervalles $[-1, 0[$ ou $]0, 1[$.

1.

1.a. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à $\mathcal{E}'$ sur K .

1.b. Démontrer que les solutions de $\mathcal{E}'$ sur l'intervalle K sont les fonctions z de la forme :

$$x \mapsto z(x) = f(x) + \frac{A}{x} \text{ où } A \text{ est une constante réelle.}$$

2. En déduire que les solutions de $\mathcal{E}$ sur l'intervalle K sont les fonctions y de la forme :
 $x \mapsto y(x) = L(x) + A \ln |x| + B$ où A et B sont des constantes réelles.

3. Soit y une solution éventuelle de l'équation $\mathcal{E}$ sur $[-1, 1[$.

3.a. Déterminer l'expression explicite de y sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$.

3.b. En exprimant la continuité et la dérivabilité de y en 0, déterminer les solutions éventuelles de $\mathcal{E}$ sur $[-1, 1[$.

3.c. Vérifier que les fonctions ainsi déterminées conviennent.

Fin de l'énoncé

Les calculatrices sont interdites

* * * * *

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Problème 1

Soient a et b deux réels et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

Notations :

- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .
- Id_E désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{L}(E)$.
- $0_{\mathcal{L}(E)}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$.
- Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Sp}(g)$ désigne le spectre de g .

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$(f - a\text{Id}_E) \circ (f - a\text{Id}_E) \circ (f - b\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Le but du problème est d'étudier la diagonalisabilité de f .

Partie I. Spectre et polynômes d'endomorphismes

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de la forme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$

on note $P(g)$ l'endomorphisme de E défini par $P(g) = \sum_{k=0}^p a_k g^k$ où

$$g^0 = \text{Id}_E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{k+1} = g \circ g^k$$

c'est-à-dire $g^k = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k \text{ fois } g}$. $P(g)$ est appelé polynôme de l'endomorphisme g .

- 1) Soit $P = (X - a)^2(X - b)$, montrer, à l'aide de la définition de $P(g)$, que $P(g) = (g - a\text{Id}_E)^2 \circ (g - b\text{Id}_E)$.

On admet, de manière plus générale, que si $P = QR = RQ$, avec Q et R deux polynômes à coefficients réels, alors $P(g) = Q(g) \circ R(g) = R(g) \circ Q(g)$.

- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de g et que x est un vecteur propre associé.

2a. Montrer que x est un vecteur propre de g^2 pour la valeur propre λ^2 .

2b. Montrer que, pour tout entier naturel k , λ^k est une valeur propre de g^k .

2c. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(g)$.

- 3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ l'ensemble de ses racines réelles.

On suppose, dans cette question, que $P(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, P est alors appelé *polynôme annulateur* de g . Montrer, à l'aide de **2c.**, que $\text{Sp}(g) \subset Z(P)$.

- 4) On suppose, dans cette question que g est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Sp}(g) = \{0\}$.

- 5) On considère l'endomorphisme f donné en début de problème.

5a. Montrer que $\text{Sp}(f) \subset \{a, b\}$.

5b. Montrer que $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$.

Partie II. Décomposition des noyaux

On rappelle que l'endomorphisme f vérifie :

$$(f - a\text{Id}_E)^2 \circ (f - b\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

1) On suppose, dans cette question, que $a = b$.

1a. Montrer que $\text{Sp}(f) = \{a\}$.

1b. Soit B une base quelconque de E et M la matrice de f dans la base B .

On suppose que f est diagonalisable, montrer que $M = aI_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1c. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $f = a\text{Id}_E$.

On suppose à présent, dans cette partie, que $a \neq b$.

2) 2a. Montrer que $\text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - b\text{Id}_E) = \{0\}$.

2b. En déduire, à l'aide de **I.5**, que

f est diagonalisable si et seulement si $E = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$.

3) Montrer les inclusions suivantes :

3a. $\text{Im}(f - b\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$

3b. $\text{Im}(f - a\text{Id}_E)^2 \subset \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$

3c. $\text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$

4) Soit $x \in E$

4a. On suppose, dans cette question, qu'il existe $y \in \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$ et $z \in \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.

4a.1 Montrer que $z = \frac{1}{(b-a)^2}(f - a\text{Id}_E)^2(x)$.

4a.2 Montrer que $y = x - z = -\frac{1}{(b-a)^2}(f - b\text{Id}_E) \circ (f + (b-2a)\text{Id}_E)(x)$

4b. Montrer qu'il existe $y \in \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$ et $z \in \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.

5) En déduire que $E = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2 \oplus \text{Ker}(f - b\text{Id}_E)$.

6) Démontrer l'équivalence suivante :

$$E = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - b\text{Id}_E) \iff \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$$

On pourra s'aider de **II.3c.** et **II.5**.

7) 7a. On suppose, dans cette question, que $\text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - a\text{Id}_E) = \{0\}$.

Montrer que $\text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2 \subset \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)$.

7b. On suppose, dans cette question, que $\text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - a\text{Id}_E) \neq \{0\}$.

Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \in \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2$ et $x \notin \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)$.

7c. En déduire l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(f - a\text{Id}_E) = \text{Ker}(f - a\text{Id}_E)^2 \iff \text{Ker}(f - a\text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - a\text{Id}_E) = \{0\}$$

8) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f - a\text{Id}_E$ pour que f soit diagonalisable.

Fin du problème 1

Problème 2

Soient p et q deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. Ce problème est consacré à l'étude de certaines propriétés des solutions *réelles* sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (E)$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sera noté S .

Une fonction f sera dite *identiquement nulle* sur $\mathbb{R}$ si f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

On rappelle, associé à l'équation (E) , l'existence du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Pour tout réel x_0 et tout couple de réels (a, b) ,

il existe *une et une seule* solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$

Partie I. Wronskien

Pour f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'application $W_{f,g}$ définie par

$$\begin{aligned} W_{f,g} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = (fg' - f'g)(x) \end{aligned}$$

est appelée *wronskien* de (f, g) .

1) Montrer que S , l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_x : S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\longmapsto (y(x), y'(x)) \end{aligned}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

2a. Montrer que φ_{x_0} est une application linéaire.

2b. Montrer, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, que φ_{x_0} est un isomorphisme.

2c. Montrer que S est de dimension finie égale à 2.

3) On considère les fonctions $f_1 = \varphi_0^{-1}((1, 0))$ et $f_2 = \varphi_0^{-1}((0, 1))$.

3a. Expliquer, sans calcul, pourquoi (f_1, f_2) est une base de S .

3b. Soit $y \in S$ la solution de (E) vérifiant $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$.

Exprimer y comme combinaison linéaire de f_1 et f_2 (justifier).

3c. Calculer $W_{f_1, f_2}(0)$ puis montrer, à l'aide de **2c.**, que $\forall x \in \mathbb{R}, W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$.

Soient f et g deux fonctions de S .

4) **4a.** Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (f, g) est une base de S
- $\exists x \in \mathbb{R}, W_{f,g}(x) \neq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, W_{f,g}(x) \neq 0$

4b. En déduire que $W_{f,g}$ est soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, soit ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

5) **5a.** Justifier que $W_{f,g}$ est dérivable, calculer $(W_{f,g})'$ puis déterminer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un dont $W_{f,g}$ est solution.

5b. En déduire, d'une nouvelle façon, que $W_{f,g}$ est soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, soit ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Zéros des solutions

Pour un réel α et une fonction f , on dit que α est un zéro de f si $f(\alpha) = 0$.

Deux solutions de (E) seront dites *linéairement indépendantes* si elles forment une famille libre.

1) Soit y une solution non identiquement nulle de (E) sur $\mathbb{R}$.

1a. Montrer que y et y' n'ont pas de zéro en commun.

1b. On suppose qu'il existe un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ tel que y admette une infinité de zéros sur $[a, b]$. On admet qu'on peut alors construire une suite strictement monotone $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de y sur $[a, b]$.

Quitte à considérer $-y$, on supposera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1b.1 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell \in [a, b]$ qui est un zéro de y .

1b.2 Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis sur les intervalles $[u_n, u_{n+1}]$, qu'il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de y' telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n < u_{n+1}$.

1b.3 En déduire que ℓ est également un zéro de y' et que cela établit une contradiction.

1c. Que peut-on en déduire sur les zéros de y sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$?

On admet alors qu'il y a un sens à parler de zéros consécutifs dans la suite du problème. a et b sont des zéros consécutifs de y si $a < b$ et y n'a pas de zéro sur $]a, b[$.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions non identiquement nulles de (E) sur $\mathbb{R}$.

On suppose que y_1 admet au moins deux zéros dans $\mathbb{R}$ et on note a et b deux zéros consécutifs de y_1 .

2a. Montrer que y_1 est de signe fixe sur $]a, b[$.

2b. On suppose, dans cette question, que y_1 est strictement positive sur $]a, b[$.
Montrer que $y_1'(a) > 0$ et $y_1'(b) < 0$.

2c. Montrer que $y_1'(a)y_1'(b) < 0$.

On suppose à présent et pour la suite de cette partie que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

2d. Expliquer pourquoi W_{y_1, y_2} ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $W_{y_1, y_2}(a)W_{y_1, y_2}(b) > 0$.

2e. En déduire, après simplification du produit $W_{y_1, y_2}(a)W_{y_1, y_2}(b)$, que y_2 a au moins un zéro sur $]a, b[$.

2f. Expliquer, par un argument de symétrie, pourquoi y_2 a un unique zéro sur $]a, b[$.

Partie III. Théorème de comparaison

On considère à présent que la fonction p est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ de telle sorte que l'équation (E) devient :

$$\boxed{y'' + qy = 0 \quad (E)}$$

1) Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad q_1(x) \leq q_2(x)$.

On définit alors les deux équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + q_1y = 0 \quad (E_1)$$

$$y'' + q_2y = 0 \quad (E_2)$$

Soient y_1 et y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur $\mathbb{R}$ non identiquement nulles. On suppose que y_1 possède deux zéros consécutifs a et b et on cherche à prouver que y_2 possède au moins un zéro dans $[a, b]$.

1a. On suppose, dans cette question, que y_2 ne s'annule pas sur $]a, b[$.

Par hypothèse, y_1 ne s'annule pas sur $]a, b[$. Quitte à changer y_1 en $-y_1$ et y_2 en $-y_2$, on supposera que y_1 et y_2 prennent des valeurs strictement positives sur $]a, b[$.

1a.1 Montrer, à l'aide de **II.2c.**, que $W_{y_1, y_2}(a) \leq 0$ et $W_{y_1, y_2}(b) \geq 0$.

1a.2 Etudier les variations de la fonction W_{y_1, y_2} sur $[a, b]$ et en déduire qu'elle est nulle sur $[a, b]$.

1a.3 En déduire que a et b sont des zéros de y_2 .

1b. Montrer que y_2 possède au moins un zéro dans $[a, b]$.

On considère un réel λ strictement positif.

2) 2a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ (solutions réelles) l'équation différentielle $(E_{0, \lambda})$: $y'' + \lambda^2 y = 0$.

2b. Montrer que pour tout réel φ , la fonction $f_\varphi : x \mapsto \sin(\lambda x + \varphi)$ est solution de $(E_{0, \lambda})$.

3) On suppose, dans cette question, que la fonction q vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) \geq \lambda^2$.

Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ non identiquement nulle.

Montrer, à l'aide de **III.1b.**, que y s'annule au moins une fois dans tout segment de $\mathbb{R}$ de longueur $\frac{\pi}{\lambda}$.

Indication : raisonner avec une fonction f_φ s'annulant aux bornes du segment.

4) On suppose, dans cette question, que la fonction q vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) \leq \lambda^2$.

Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ non identiquement nulle.

Montrer, à l'aide de **III.1b.**, que si a et b sont deux zéros consécutifs de y alors $b - a \geq \frac{\pi}{\lambda}$.

Indication : raisonner par l'absurde avec une fonction f_φ ne s'annulant pas sur $[a, b]$.

Fin du problème 2

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I.

I.1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

EXERCICE II.

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

II.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n , les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Que vaut alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$?

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I . Déterminer sa fonction

somme S et démontrer que S est intégrable sur I . Que vaut alors $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$?

II.3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right)$.

PROBLEME.

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

III.1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1], \quad x \mapsto \frac{1}{x}$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

III.2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N . Justifier que $\mathcal{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

III.3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) = \sup_{x \in [-2, -1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [1, 2]} |P(x)|.$$

III.3.a. Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

III.3.b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2, -1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = x^3$.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2 .

Partie 2. Application : un théorème des moments

III.4. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que pour tout entier naturel k ,

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad \left(\int_a^b x^k f(x) dx \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a, b] \right).$$

III.4.a. Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b P(x)f(x)dx$?

III.4.b. Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I , alors la suite de fonctions $(f.g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f.g$.

III.5. Application

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f, g) d'éléments de E par $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a, b]$ et $F^\perp$ l'orthogonal de F . Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

III.6.

III.6.a. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul,

$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

III.6.b. En déduire que, pour tout entier naturel k , $\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x dx = 0$.

III.6.c. Proposer une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^{+\infty} u^k f(u) du = 0.$$

III.6.d. Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0, +\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

III.7. Question préliminaire

Soit $x \in [0, 1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \left(x - (u_n)^2 \right) = g_x(u_n).$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x , sa limite.

III.8. Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle-même continue sur $[a, b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a, b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

III.9. Application

Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} \left(x - (P_n(x))^2 \right).$$

III.9.a. Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

III.9.b. Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

III.10. Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

III.10.a. Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

III.10.b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a, b) \in [0, 1]^2$, $|a - b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $|f(\frac{k}{n}) - f(x)|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $|\frac{k}{n} - x| \leq \alpha$.

III.11.b. Justifier que $\left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x)) P(S_n = k) \right| \leq 2 \|f\|_{\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$

III.11.c. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I. INFORMATIQUE

Les algorithmes demandés doivent être écrits en Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

Voici, par exemple, un code Python attendu si l'on demande d'écrire une fonction nommée `maxi` qui calcule le plus grand élément d'un tableau d'entiers :

```
def maxi(t):
    """Données: t un tableau d'entiers non vide
       Résultat: le maximum des éléments de t"""
    n = len(t) # la longueur du tableau t
    maximum = t[0]
    for k in range(1, n):
        if t[k] > maximum:
            maximum = t[k]
    return maximum
```

L'instruction `maxi([4, 5, 6, 2])` renverra alors 6.

I.1. Donner la décomposition binaire (en base 2) de l'entier 21.

On considère la fonction `mystere` suivante :

```
def mystere(n, b):
    """Données: n > 0 un entier et b > 0 un entier
       Résultat: ....."""
    t = [] # tableau vide
    while n > 0:
        c = n % b
        t.append(c)
        n = n // b
    return t
```

On rappelle que la méthode `append` rajoute un élément en fin de liste. Si l'on choisit par exemple `t = [4, 5, 6]`, alors, après avoir exécuté `t.append(12)`, la liste `t` a pour valeur `[4, 5, 6, 12]`.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note c_k , t_k et n_k les valeurs prises par les variables `c`, `t` et `n` à la sortie de la k -ème itération de la boucle “while”.

I.2. Quelle valeur est renvoyée lorsque l'on exécute `mystere(256, 10)` ?

On recopiera et complètera le tableau suivant, en ajoutant les éventuelles colonnes nécessaires pour tracer entièrement l'exécution.

k	1	2	...
c_k			...
t_k			...
n_k			...

I.3. Soit $n > 0$ un entier. On exécute `mystere(n, 10)`. On pose $n_0 = n$.

I.3.a. Justifier la terminaison de la boucle `while`.

I.3.b. On note p le nombre d'itérations lors de l'exécution de `mystere(n, 10)`. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a $n_k \leq \frac{n}{10^k}$. En déduire, une majoration de p en fonction de n .

I.4. En s'aidant du script de la fonction `mystere`, écrire une fonction `somme_chiffres` qui prend en argument un entier naturel et renvoie la somme de ses chiffres. Par exemple, `somme_chiffres(256)` devra renvoyer 13.

I.5. Ecrire une version récursive de la fonction `somme_chiffres`, on la nommera `somme_rec`.

EXERCICE II. PROJECTION ORTHOGONALE

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $(A|B) = \text{trace}({}^tAB)$.

II.1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?

II.2. On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.

II.3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

PROBLEME III. SURJECTIVITE DE L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ VERS $GL_n(\mathbb{R})$

On note, pour n entier $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

On notera $1 \leq i, j \leq n$ pour indiquer que : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Partie préliminaire

Une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une norme d'algèbre si elle vérifie la propriété :
pour tout couple de matrices (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

III.1. On note pour $A = (a_{i,j})$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ et $\|A\| = n \|A\|_\infty$.

L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que c'est une norme d'algèbre.

Dans la suite de cette partie préliminaire, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de cette norme d'algèbre.

III.2. Justifier simplement qu'une série de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente.

III.3. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que la série de réels positifs $\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|$ converge et en déduire que la série de matrices $\sum \frac{1}{k!} M^k$ converge.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$, exponentielle de la matrice M .

Première partie

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

si T est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alors la matrice $\exp(T)$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$.

III.4. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rappeler pourquoi la matrice M est trigonalisable et déterminer une relation entre $\det(\exp(M))$ et $e^{\text{tr}(M)}$.

III.5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Donner le déterminant de la matrice A . En déduire qu'il n'existe aucune matrice B à coefficients réels vérifiant $B^2 = A$ et qu'il n'existe aucune matrice M à coefficients réels vérifiant $\exp(M) = A$.

Objectifs et exemple

Ce paragraphe ne comporte aucune question, il permet de se familiariser avec les objectifs du problème.

Si A est une matrice carrée inversible à coefficients réels, nous allons démontrer dans ce problème :

- que pour tout entier naturel non nul p , il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^p = A$,
- qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

On se limitera dans ce sujet aux matrices carrées de taille 3.

Le problème a pour objectif de prouver l'existence de ces matrices et de les expliciter.

On commence par un exemple développé dont le candidat pourra s'inspirer notamment pour la troisième partie.

On utilise toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X-2)^2(X+3)$.

On cherche le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme χ_A de la forme $aX^2 + bX + c$ où a , b et c vont dépendre de n .

Pour cela on remplace dans la relation $X^n = \chi_A Q + aX^2 + bX + c$, X par -3 , puis par 2 . Ensuite, on dérive cette expression et on remplace à nouveau X par 2 (Q est le quotient).

On obtient le système suivant
$$\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n \\ 4a + 2b + c = 2^n \\ 4a + b = n2^{n-1} \end{cases}$$

admettant pour unique solution
$$\begin{cases} a = \frac{1}{25}((-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1}) \\ b = \frac{1}{25}(-4(-3)^n + 4 \cdot 2^n + 5n2^{n-1}) \\ c = \frac{1}{25}(4(-3)^n + 21 \cdot 2^n - 30n2^{n-1}) \end{cases}$$

On déduit du théorème de Cayley-Hamilton que pour tout entier naturel n ,

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -(-3)^n + 6 \cdot 2^n & -6(-3)^n + 6 \cdot 2^n & 6(-3)^n - 6 \cdot 2^n \\ 2(-3)^n - 2 \cdot 2^n + 5n2^{n-1} & 12(-3)^n - 7 \cdot 2^n + 5n2^{n-1} & -12(-3)^n + 12 \cdot 2^n - 5n2^{n-1} \\ (-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1} & 6(-3)^n - 6 \cdot 2^n + 5n2^{n-1} & -6(-3)^n + 11 \cdot 2^n - 5n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose alors, pour tout réel t , la matrice $\gamma(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3^t e^{i\pi t} + 6 \cdot 2^t & -6 \cdot 3^t e^{i\pi t} + 6 \cdot 2^t & 6 \cdot 3^t e^{i\pi t} - 6 \cdot 2^t \\ 2 \cdot 3^t e^{i\pi t} - 2 \cdot 2^t + 5t2^{t-1} & 12 \cdot 3^t e^{i\pi t} - 7 \cdot 2^t + 5t2^{t-1} & -12 \cdot 3^t e^{i\pi t} + 12 \cdot 2^t - 5t2^{t-1} \\ 3^t e^{i\pi t} - 2^t + 5t2^{t-1} & 6 \cdot 3^t e^{i\pi t} - 6 \cdot 2^t + 5t2^{t-1} & -6 \cdot 3^t e^{i\pi t} + 11 \cdot 2^t - 5t2^{t-1} \end{pmatrix}.$$

On a les résultats suivants :

- $\gamma(-1) = A^{-1}$,
- pour tout entier naturel p non nul : $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = A$,
- $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Par exemple,

$$B = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} + 6\sqrt{2} & -6i\sqrt{3} + 6\sqrt{2} & 6i\sqrt{3} - 6\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & 12i\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & -12i\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ i\sqrt{3} - \sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & 6i\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & -6i\sqrt{3} + 11\sqrt{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = A$.

Deuxième partie

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$ où $k \in \{0, 1, 2\}$, $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi]$.

(Rappel : pour $\rho \in]0, +\infty[$, $\rho^x = e^{x \ln \rho}$.)

III.6.

III.6.a. Déterminer un élément f de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$, si α et β sont deux constantes complexes.

III.6.b. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, expliquer pourquoi $x \mapsto f(x + x_0)$ est encore un élément de F .

III.7.

III.7.a. Soit θ un réel. Démontrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right)$ converge vers 0.

III.7.b. Soit $k_1 \in \{0, 1, 2\}$, $\rho_1 \in]0, +\infty[$, $\theta_1 \in]0, 2\pi]$, $k_2 \in \{0, 1, 2\}$, $\rho_2 \in]0, +\infty[$ et $\theta_2 \in]0, 2\pi]$, $\theta_1 \neq \theta_2$.

Démontrer que si α et β sont deux constantes complexes vérifiant, pour tout entier naturel n ,

$$\alpha n^{k_1} (\rho_1)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} (\rho_2)^n e^{i\theta_2 n} = 0, \text{ alors } \alpha = \beta = 0.$$

On pourra, par exemple, supposer $\rho_1 \leq \rho_2$ et commencer par examiner les cas $\rho_1 < \rho_2$ et $\rho_1 = \rho_2$.

III.7.c. On admet alors que si f est un élément de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = 0$, alors f est l'application nulle.

Que peut-on dire de deux applications f et g de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = g(n)$?

III.8. Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Expliquer pourquoi on peut trouver 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que, pour tout entier naturel n , $A^n = \left(\omega_{i,j}(n) \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Discuter en fonction du nombre de racines du polynôme caractéristique de la matrice A .

On ne demande pas de résoudre des systèmes, une explication de la méthode pourra suffire.

III.9. On pose pour tout réel t , la matrice $\gamma(t) = \left(\omega_{i,j}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

III.9.a. Quelles sont les matrices $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$?

III.9.b. Justifier que, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) , on a la relation :

$$\gamma(n+m) = \gamma(n)\gamma(m).$$

III.9.c. Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \sum_{k=1}^3 \omega_{i,k}(x) \omega_{k,j}(m)$.

Démontrer que l'on a $f = g$ et en déduire, pour tout entier naturel m , la relation $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. En déduire que, pour tout couple (x, y) de réels, $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. Démontrer que $\gamma(-1) = A^{-1}$ et que, pour tout entier naturel p non nul, $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right) \right)^p = A$.

III.11. Justifier que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = \left(\omega_{i,j}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction γ est une solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t) \text{ vérifiant } u(0) = I_3$$

où la fonction inconnue u vérifie, pour tout réel t , $u(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'(t) = \gamma'(0)u(t)$ vérifiant $u(0) = I_3$ et en déduire que l'on a : $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Troisième partie : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.12. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A .

La matrice A est-elle diagonalisable?

III.13. Déterminer, par la méthode développée dans ce problème, les éléments suivants :

III.13.a. La matrice A^{-1} .

III.13.b. Une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.

III.13.c. Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$.
- Si I est un intervalle réel non réduit à un point, on note $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est noté :

$$X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$$

où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k .

- On dit qu'une application :

$$\begin{aligned} M : I &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto M(t) = ((a_{j,k}(t)))_{1 \leq j,k \leq n} \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , si pour tout couple (j, k) la fonction $t \mapsto a_{j,k}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et dans ce cas, on note $M'(t)$ la matrice $((a'_{j,k}(t)))_{1 \leq j,k \leq n}$.

Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue.

Dans ce problème, on s'intéresse au système différentiel :

$$X'(t) = A(t) X(t) \quad (E)$$

où $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

A l'exception de la question I.2 utilisée tout au long du sujet, les trois parties sont indépendantes.

Partie I

Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

I.1 Qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire quant à la structure de l'ensemble des solutions de (E) ?

I.2 Vecteurs propres communs

On suppose qu'il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{C}^n$ et une fonction continue $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait :

$$A(t) V = \lambda(t) V.$$

Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} X : I &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto \alpha(t) V \end{aligned}$$

est solution de (E) si, et seulement si, la fonction α est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera et pour laquelle on donnera une expression des solutions.

I.3 Un premier exemple

On suppose pour cette question que $n = 2$. Soient a et b deux complexes tels que $a - 1 - b \neq 0$. On suppose que, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .

I.4 Un deuxième exemple

On suppose également pour cette question que $n = 2$. Soient μ une constante complexe et a, b des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$, la fonction b ne s'annulant jamais sur I . On suppose que pour tout réel $t \in I$, on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \mu b(t) \\ b(t) & a(t) + (\mu - 1)b(t) \end{pmatrix}.$$

I.4.1 Traiter le cas particulier où $\mu = 1$.

I.4.2 Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls V_1 et V_2 dans $\mathbb{C}^2$ et deux fonctions continues λ_1 et λ_2 de I dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait :

$$A(t) V_1 = \lambda_1(t) V_1 \text{ et } A(t) V_2 = \lambda_2(t) V_2.$$

I.4.3 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t).$$

On supposera cette condition vérifiée pour la question suivante.

I.4.4 Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .

Partie II

Développement en série entière des solutions pour A constante

II.1 Norme matricielle induite

On se donne une norme vectorielle $X \mapsto \|X\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on lui associe la fonction N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

II.1.1 Montrer que l'application N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.1.2 Montrer que, pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$N(AB) \leq N(A) N(B).$$

II.2 Développement en série entière des solutions

II.2.1 On suppose pour cette question, que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction A est constante.

Montrer que si X est solution de (E) , elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que pour tout entier naturel k , on a :

$$X^{(k)}(t) = A^k X(t)$$

(avec la convention que $X^{(0)} = X$ et $A^0 = I_n$).

II.2.2 On note $X_0 = X(0)$. Montrer que pour tout entier naturel p et tout réel $t \in I$, on a :

$$X(t) = \left(\sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0 + \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} A^{p+1} X(u) du.$$

II.2.3 Montrer que :

$$X(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0$$

et en déduire que les coordonnées de X sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

II.3 Un exemple

On suppose pour cette question, que $n = 4$, que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction $t \mapsto A(t)$ est constante et égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

II.3.1 Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A .

II.3.2 Soit k un entier naturel non nul.

Montrer que la famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{C}_3[X]$, puis exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$ dans cette base.

II.3.3 En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, une expression de A^k en fonction de A , $A(A - I_4)$ et $A(A - I_4)^2$.

II.3.4 Calculer $A(A - I_4)$ et $A(A - I_4)^2$.

II.3.5 Préciser le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (n-1)$$

ainsi que sa somme.

II.3.6 Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$. Déterminer la solution du problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{cases}.$$

Partie III

Etude de deux fonctions

III.1 L'intégrale de Gauss

III.1.1 Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}^+$.

III.1.2 Montrer que les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G .

III.1.3 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

III.1.4 Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

III.1.5 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

III.2 Les fonctions u et v

III.2.1 Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(tx)}{\sqrt{x}} dx \text{ et } v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin(tx)}{\sqrt{x}} dx$$

sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.2 Montrer que la fonction $w = u + iv$ est solution d'une équation différentielle, puis en déduire que :

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

est solution d'un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = A(t) X(t) \quad (E_1)$$

où la fonction matricielle $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est à déterminer.

III.2.3 Déterminer, pour tout réel t , les valeurs propres complexes et les sous-espaces propres de $A(t)$.

III.2.4 Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{C}$ du système (E_1) et en déduire la solution générale de (E_1) .

III.2.5 Calculer $u(0)$, $v(0)$ et en déduire l'expression réelle de u et de v .

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLEME 1 : ANALYSE ET PROBABILITE

On propose d'étudier dans ce premier problème le comportement d'une certaine suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous différents points de vue. Dans la partie 1, on étudie les aspects analytiques de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, propriétés d'intégrales associées à f_n et modes de convergence de la série $\sum f_n$.

La partie 2 correspond à l'étude de la formule de Bernstein : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$.

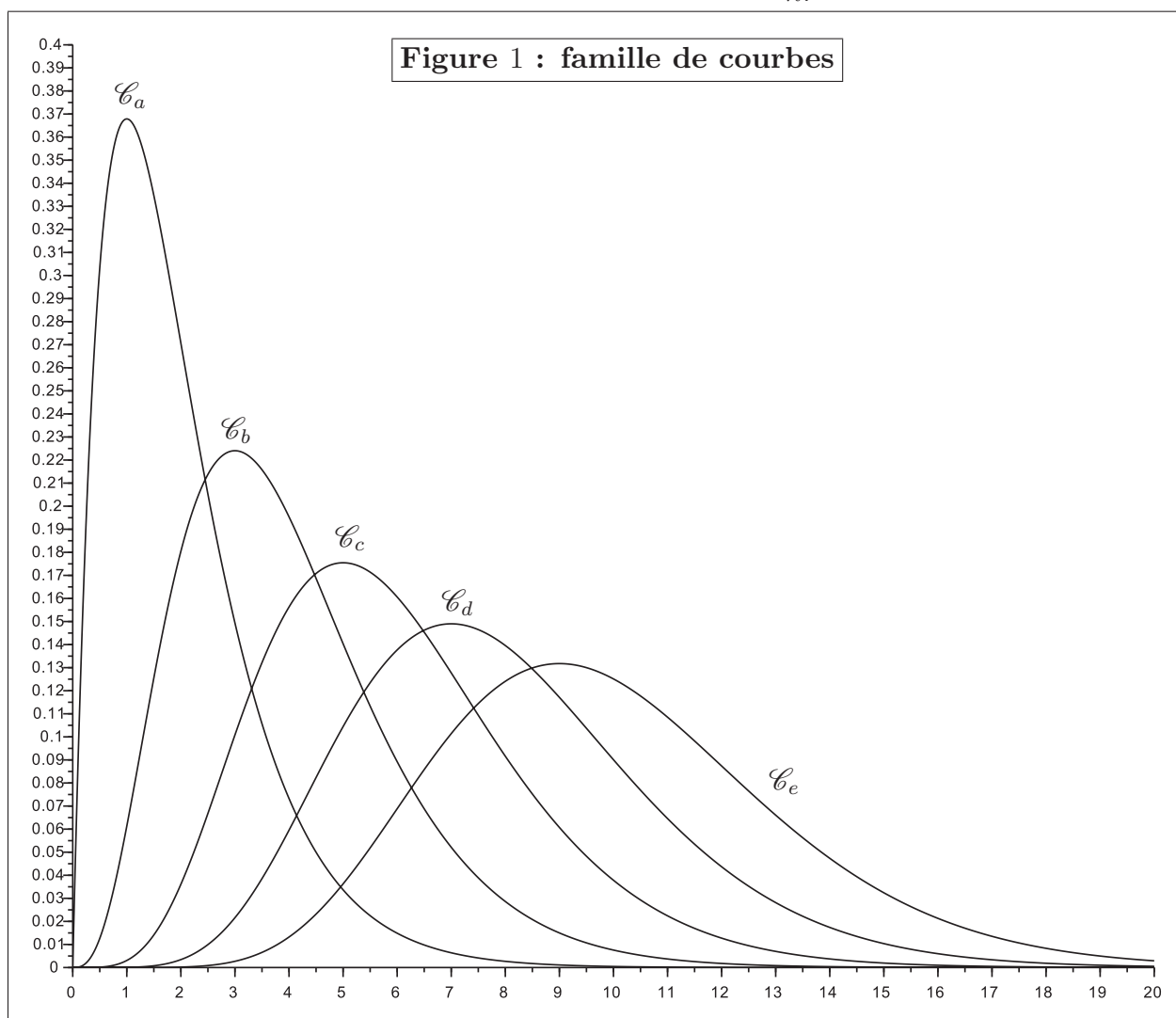
Cette formule, en lien avec la suite de fonctions introduites dans la partie 1, peut être avantageusement interprétée en terme de suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson. Le point de vue probabiliste permet alors d'éclairer le lien avec une intégrale intervenant en partie 1 et l'existence d'une limite ℓ pour $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$. Cela permet aussi d'approcher la valeur de ℓ par différentes méthodes.

Les parties 1 et 2 peuvent être traitées, en grande partie, indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE 1 : ANALYSE

On considère la fonction f et, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, f(t) = 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}.$$



1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
 - 1.a. Etudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire son maximum.
 - 1.b. Montrer que $f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n^{1/2}}$ quand n tend vers $+\infty$.
 - 1.c. Etablir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
2.
 - 2.a. Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente et vérifier que $\mathbb{R}_+ \subset D$.
 - 2.b. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.
 - 2.c. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - 2.d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.
 - 2.e. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.
 - 3.a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.
 - 3.b. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H'_n .
 - 3.c. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
 - 3.d. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
4. Dans la figure 1 de la page 2, on peut visualiser certaines des représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont celle de f_1 et f_5 .
 - 4.a. Lesquelles des courbes $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_d$ ou $\mathcal{C}_e$ de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?
 - 4.b. Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?
5.
 - 5.a. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
 - 5.b. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.
 - 5.c. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE 2 : PROBABILITE

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et mutuellement indépendantes. On admet que dans ce cas, pour tout $n \geq 2$, $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.

On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1.

1.a. Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et en déduire son espérance et sa variance.

1.b. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^* .

1.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

2. Soit $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I , alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^r f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t) \frac{(b-t)^r}{r!} dt.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t} \cdot t^n}{n!} dt.$$

3.

3.a. Montrer que : $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^n dt = H_n(n)$ où H_n est définie dans la partie 1.

3.b. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3.c. En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$.

3.d. Proposer une méthode numérique et une méthode probabiliste pour conjecturer la valeur de ℓ . Quels sont les avantages et les inconvénients respectifs de ces deux méthodes ?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la série génératrice de S_n . On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G}_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k)t^k$.

4.a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $\mathbf{G}_{S_n}(t)$.

4.b. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $t^{S_n^*}$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(t^{S_n^*})$, et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

4.c. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{E}(t^{S_n^*}))$.

PROBLEME 2 : ALGEBRE

On propose d'étudier, dans ce second problème, différents aspects des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$ (matrices binaires) : inversibilité, orthogonalité des colonnes (matrices de Hadamard) et propriétés du spectre.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On débute l'étude par des exemples en petite dimension. En dimension n , on aboutit notamment à trois résultats sur de telles matrices :

- une matrice de Hadamard ne peut exister que si $n = 2$ ou si n est un multiple de 4 ;
- on peut construire une matrice binaire inversible à n'importe quel ordre n ;
- les valeurs propres des matrices binaires sont de module inférieur ou égal à n .

Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n ,

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et 1 colonne,

A^T la matrice transposée d'une matrice A ,

I_n la matrice identité d'ordre n ,

$\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A .

Dans tout le problème, on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini de la façon suivante :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^T \cdot Y.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note :

$A_{i,j}$ le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne de A ,

$C_j(A)$ la j -ème colonne de A et $L_i(A)$ la i -ème ligne de A .

On définit les trois ensembles suivants :

$$\mathcal{B}_n = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{tel que} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{i,j} \in \{-1, 1\} \right\},$$

$$\mathcal{G}_n = \{ A \in \mathcal{B}_n \quad \text{tel que} \quad A \text{ est inversible} \},$$

$$\mathcal{H}_n = \{ A \in \mathcal{B}_n \quad \text{tel que} \quad A^T \cdot A = nI_n \}.$$

On admettra que le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des entiers relatifs est aussi un entier relatif.

1. Donner un exemple de matrices A_2 et A'_2 dans $\mathcal{B}_2$ telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A'_2 \notin \mathcal{G}_2$.

2. Soit $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A_3 appartient-elle à $\mathcal{B}_3$? à $\mathcal{H}_3$? à $\mathcal{G}_3$?

3. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \frac{1}{2}A_4$.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à S .

3.a. Montrer que A_4 est une matrice de $\mathcal{H}_4$.

3.b. Montrer que φ est une symétrie et en déduire $\text{Sp}(S)$.

3.c. Montrer que A_4 est diagonalisable et établir que $\text{Sp}(A_4) = \{-2, 2\}$.

3.d. Proposer une méthode pour trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A_4 = PDP^{-1}$.

4. Vérifier que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{B}_n$ est un ensemble fini dont on donnera le cardinal.

5. Montrer que, pour une matrice $A \in \mathcal{B}_n$, les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $A \in \mathcal{H}_n$;

ii) $(C_j(A))_{1 \leq j \leq n}$ est une famille orthogonale de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

iii) $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est une matrice orthogonale.

6. Soit $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en une matrice A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, L_i \leftarrow A_{1,1} \cdot L_i - A_{i,1} \cdot L_1$ si bien que $L_i(A') = A_{1,1} \cdot L_i(A) - A_{i,1} \cdot L_1(A)$.

6.a. Donner la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

6.b. Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec B' une matrice carrée d'ordre $n-1$,

qui est inversible et dont tous les coefficients sont dans l'ensemble $\{-2, 0, 2\}$.

6.c. Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1} .

6.d. On suppose, dans cette question, que $A \in \mathcal{H}_n$ et que $n \geq 3$.

Montrer que $|\det(A)| = n^{n/2}$ et en déduire que n est un multiple de 4.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$ et $r = n-1$. On définit la fonction $\tau_r : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ par :

pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $\tau_r(x_1, \dots, x_r) = (x_2, x_1, x_3, \dots, x_r)$.

7.a. Montrer que τ_r définit un automorphisme de $\mathbb{R}^r$.

7.b. Déterminer la matrice, notée T_r , associée à τ_r dans la base canonique de $\mathbb{R}^r$.

On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 2T_r & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

On transforme A en A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $L_i \leftarrow L_1 - L_i$ si bien que $L_i(A') = L_1(A) - L_i(A)$.

7.c. Montrer que A' est un élément de $\mathcal{G}_n$.

8. Donner un exemple explicite de matrice A qui soit dans $\mathcal{G}_6$ mais pas dans $\mathcal{H}_6$.

9. Soit $A \in \mathcal{B}_n$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λ soit une valeur propre de A .

9.a. Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

i) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j = \lambda x_i$,

ii) il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $x_k \neq 0$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_k|$.

9.b. Montrer que $|\lambda| \leq n$.

9.c. Montrer que : $\sup \left(\left\{ |\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ et } A \in \mathcal{B}_n \right\} \right) = n$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PROBLEME I – DES APPROXIMATIONS DE π

Présentation et objectifs

On s'intéresse dans ce problème à la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On cherche ensuite à obtenir, par deux méthodes, des approximations de π à l'aide de séries numériques.

Partie A – Questions préliminaires

- I.A.1.** Soient q un réel et n un entier naturel. Rappeler, sans preuve, une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?
- I.A.2.** Soit α un réel. Donner, sans justification, une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ soit convergente.
- I.A.3.** On rappelle que la notation Arctan désigne la fonction Arctangente.
Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction Arctan, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et son tableau de variation, qui fera apparaître les limites.

Partie B – Etude de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

- I.B.1.** La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est-elle absolument convergente ? On justifiera la réponse.

- I.B.2.** Pour tout entier naturel k , calculer le réel I_k défini par $I_k = \int_0^1 t^{2k} dt$.

Calculer aussi l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

- I.B.3.** Soit n un entier naturel. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$, puis en utilisant la question **I.A.1.**, en déduire que

$$S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

- I.B.4.** Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3}.$$

- I.B.5.** A l'aide des trois questions précédentes, montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Partie C – Un procédé élémentaire d'approximation de π

I.C.1. Démontrer, à l'aide de la partie **B**, que pour tout entier naturel n ,

$$|4S_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

I.C.2. Déterminer, par un calcul ou à l'aide de votre calculatrice, le plus petit entier naturel N tel que

$$\frac{4}{2N+3} \leq 10^{-6}.$$

I.C.3. Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près à l'aide des questions précédentes. On ne demande pas dans cette question de déterminer une telle approximation.

Partie D – Un autre procédé d'approximation de π

I.D.1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et en préciser le rayon de convergence. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

On indiquera le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses.

I.D.2. Calculer la valeur exacte de $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Exprimer, en utilisant la question **I.D.1.**, le réel

$\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ comme somme d'une série numérique. En déduire que

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

I.D.3. Pour tout entier naturel n , on note $T_n = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$ et on **admet** que pour tout entier naturel n

$$|T_n - \pi| \leq \frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}.$$

Déterminer, en expliquant votre démarche, le plus petit entier naturel N' tel que

$$\frac{2\sqrt{3}}{(2N'+3)3^{N'+1}} \leq 10^{-6}.$$

Que constatez-vous ? On comparera l'efficacité des deux méthodes d'approximation de π proposées dans ce problème.

I.D.4. Donner une valeur approchée de $T_{N'}$ en faisant figurer sept décimales après la virgule.

PROBLEME II – LOCALISATION DES VALEURS PROPRES

Objectifs et notations

Le but de ce problème est d'introduire, dans le cadre des matrices 3×3 à coefficients complexes, la notion de matrices à diagonale strictement dominante, pour en déduire un théorème de localisation des valeurs propres, appelé théorème de Gerschgorin.

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le module de z est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lorsque z est un nombre réel, alors $|z|$ désigne sa valeur absolue (qui coïncide alors avec son module).

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A chaque complexe $z = a + ib$, on associe le point A de $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b) . On dit que A est le point d'affixe z et on le notera $A(z)$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées à 3 lignes et 3 colonnes à coefficients complexes et I la matrice identité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit que la matrice

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est à **diagonale strictement dominante** si les trois inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} |m_{1,1}| > |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \\ |m_{2,2}| > |m_{2,1}| + |m_{2,3}| \\ |m_{3,3}| > |m_{3,1}| + |m_{3,2}| \end{cases}.$$

Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

est à diagonale strictement dominante car $|-3| > |-1| + |1|$ et $|2| > |0| + |1|$ et $|-4| > |-1| + |2|$.

Partie A – Le théorème d’Hadamard dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

On se propose, dans cette partie, de démontrer le résultat suivant :

Théorème d’Hadamard : “Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante, alors M est inversible.”

II.A.1. On considère dans cette question les trois matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ i & 2 & 0 \\ 3i & 1 & 3+4i \end{pmatrix}.$$

II.A.1.a) Déterminer si les matrices A , B et C sont à diagonale strictement dominante.

II.A.1.b) Montrer que les matrices A , B et C sont inversibles.

II.A.1.c) La réciproque du théorème d’Hadamard est-elle vraie ?

II.A.2. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ une matrice non inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

II.A.2.a) Justifier qu’il existe un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^3$ non nul tel que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.A.2.b) En déduire qu’on a les relations :

$$\begin{cases} m_{1,1}x_1 &= -m_{1,2}x_2 - m_{1,3}x_3 \\ m_{2,2}x_2 &= -m_{2,1}x_1 - m_{2,3}x_3 \\ m_{3,3}x_3 &= -m_{3,1}x_1 - m_{3,2}x_2 \end{cases}.$$

II.A.2.c) Soit $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $|x_k| = \text{Max}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$. Justifier que le nombre complexe x_k est non nul.

II.A.2.d) On suppose par exemple que $k = 1$, c’est-à-dire que $\text{Max}\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = |x_1|$.

Montrer alors que $m_{1,1} = -m_{1,2}\frac{x_2}{x_1} - m_{1,3}\frac{x_3}{x_1}$ puis que $|m_{1,1}| \leq |m_{1,2}| + |m_{1,3}|$.

Ecrire sans justification une inégalité analogue dans le cas où on aurait $k = 2$ ou $k = 3$.

II.A.2.e) Conclure.

Partie B – Localisation des valeurs propres

Soit ω un nombre complexe et soit $r \in \mathbb{R}^+$. On rappelle que l’ensemble

$$\{A(z) \in \mathcal{P} \quad / \quad |z - \omega| \leq r\}$$

est le disque fermé ayant pour centre le point d’affixe ω et de rayon r . Par la suite, on notera ce disque $D(\omega, r)$.

A la matrice $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on associe les trois disques $D_1 = D(m_{1,1}, r_1)$, $D_2 = D(m_{2,2}, r_2)$ et $D_3 = D(m_{3,3}, r_3)$ avec

$$\begin{cases} r_1 = |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \\ r_2 = |m_{2,1}| + |m_{2,3}| \\ r_3 = |m_{3,1}| + |m_{3,2}| \end{cases}.$$

Les disques D_1 , D_2 et D_3 sont appelés les disques de Gerschgorin.

On considère les matrices :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -1 + i & -1 & -1 + 2i \\ 2 & 2 + i & 1 - 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.B.1. Dans cette question, on s'intéresse à la matrice E .

II.B.1.a) Représenter dans le plan complexe les trois disques D_1 , D_2 et D_3 de Gerschgorin de la matrice E .

II.B.1.b) Déterminer, sans justification, l'ensemble $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.1.c) Déterminer les valeurs propres complexes λ_1 , λ_2 et λ_3 de E et représenter les points d'affixes λ_1 , λ_2 et λ_3 sur le schéma de la question **II.B.1.a)**

II.B.1.d) Montrer que les points d'affixes λ_1 , λ_2 et λ_3 appartiennent à l'union $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.2. Dans cette question, on s'intéresse à la matrice F .

II.B.2.a) On note $P_F(X) = \det(X.I - F)$ le polynôme caractéristique de la matrice F . Montrer que

$$P_F(X) = (X - 1) [X^2 - (1 + 2i)X - 1 + i].$$

On détaillera les calculs.

II.B.2.b) Déterminer les valeurs propres complexes μ_1 , μ_2 et μ_3 de F .

II.B.2.c) Représenter dans le plan complexe les trois disques de Gerschgorin D_1 , D_2 et D_3 associés à la matrice F ainsi que les points d'affixes μ_1 , μ_2 et μ_3 .

II.B.2.d) Montrer que les points d'affixes μ_1 , μ_2 et μ_3 appartiennent à l'union $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

II.B.3. On se propose dans cette question de démontrer le résultat suivant, appelé théorème de Gerschgorin :

"Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Pour toute valeur propre complexe λ de M , le point d'affixe λ appartient à l'union des trois disques de Gerschgorin associés à M ."

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note D_1 , D_2 et D_3 les trois disques de Gerschgorin associés à M .

II.B.3.a) Soit λ un complexe. Donner la définition de " λ est une valeur propre de M " sans utiliser la notion de déterminant.

II.B.3.b) Expliciter les coefficients de la matrice $M - \lambda.I$.

II.B.3.c) Montrer à l'aide du théorème d'Hadamard que, si λ est une valeur propre de M , on a l'une des inégalités :

$$\begin{aligned} |m_{1,1} - \lambda| &\leq |m_{1,2}| + |m_{1,3}| \\ &\text{ou} \\ |m_{2,2} - \lambda| &\leq |m_{2,1}| + |m_{2,3}| \cdot \\ &\text{ou} \\ |m_{3,3} - \lambda| &\leq |m_{3,1}| + |m_{3,2}| \end{aligned}$$

II.B.3.d) Prouver alors le théorème de Gerschgorin.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC**

MATHEMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , où n est un entier naturel.

I. Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

1) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (2X - 1)P' + (X^2 - X - 2)P''.$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$, notée f_n , est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Donner la matrice M_n de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Déterminer les valeurs propres de f_n et en déduire que f_n est diagonalisable.

5) Comment, à partir du spectre de f_n , peut-on déterminer le noyau de f_n et le rang de f_n ?

6) On suppose que $n \geq 2$. On note $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f_n rangées par ordre croissant : $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Exprimer λ_k en fonction de k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Montrer que si un polynôme P est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ_k , alors P est de degré k .

Indication : on pourra raisonner sur le degré de P .

7) Montrer qu'il existe une unique famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k soit un polynôme unitaire de degré k et un vecteur propre de f .

8) Etude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose $n = 3$.

Donner la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, le spectre de f_3 et déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 .

Rappel : la définition des polynômes P_k est donnée à la question précédente.

II. Etude d'un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$

On définit l'application φ par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^2 P(t)Q(t)dt.$$

De façon usuelle, on confond un polynôme formel P et sa fonction polynomiale associée $t \mapsto P(t)$.

- 1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$ le produit scalaire de deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

- 2) a) Montrer que :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \langle f(P), Q \rangle = - \int_{-1}^2 (t^2 - t - 2) P'(t) Q'(t) dt.$$

- b) En déduire que :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \langle f(P), Q \rangle = \langle P, f(Q) \rangle.$$

Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie en **I.7**) est une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- 3) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

- b) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Indications : on pourra utiliser les résultats de **I.8**).

On rappelle que $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$.

Exercice 2

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Le Comité des Fêtes d'une Ecole d'Ingénieurs organise le Gala annuel de l'école.

I. Modélisation du nombre de participants

En observant le nombre de participants des manifestations des années précédentes, le Comité suppose que le nombre de participants à la soirée peut être modélisé par une variable aléatoire N , suivant une loi de Poisson de paramètre 3 000.

- 1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? Rappeler la formule donnant $P(N = k)$.
- 2) Calculer l'espérance mathématique de N . Pour les organisateurs, que représente $E(N)$?

- 3) La soirée est prévue dans un château. A l'arrivée, chaque participant devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires.
On appelle les vestiaires V1, V2 et V3. Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire, indépendamment du choix des autres participants.

On suppose, dans cette question uniquement, qu'il y a 2 500 participants à la soirée.

On considère la variable aléatoire X , où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire V1.

- a) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
- b) Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire V1.
- c) Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire V1.
- d) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

II. Où est Séverine ?

Séverine est la Présidente du Club Danse. On désigne par E l'évènement "Séverine est dans la salle de bal" et on estime que la probabilité de cet évènement est $p(E) = 0,8$.

- 1) Léa est inscrite au Club Danse. Les informations qu'elle fournit sont fiables à 70 %, c'est-à-dire que, en moyenne, sur 100 affirmations, 70 seront justes.
Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?
On désignera par $E1$ l'évènement "Léa dit que Séverine est dans la salle de bal".
- 2) Benoît est aussi membre du Club et ses propos sont fiables à 90 %.
On désignera par $E2$ l'évènement "Benoît dit que Séverine est dans la salle de bal".
On considère que les affirmations de Léa et de Benoît sont indépendantes.
Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal et si Benoît dit qu'elle n'y est pas, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?

III. Quatre salles, quatre ambiances

Le château dispose de deux grandes salles de réception et de deux salles plus petites. Le Comité des Fêtes a donc décidé de prévoir des animations différentes dans chaque salle. On appelle S1 et S2 les deux grandes salles, S3 et S4 les deux petites salles.

On suppose que, toutes les heures, les participants décident de changer de salle. On s'intéresse à la localisation d'un participant appelé Z.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n la variable aléatoire désignant la salle dans laquelle se trouve Z à l'instant n .

Y_n peut prendre les valeurs S1, S2, S3 et S4, selon le choix de salle fait par Z.

1) Si Z est dans une grande salle, il peut choisir d'aller dans l'une ou l'autre des petites salles S3 et S4 avec la même probabilité q , ou d'aller dans l'autre grande salle avec la probabilité $2 \times q$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve.
Déterminer la valeur de q .

2) Si Z est dans une petite salle, il peut choisir d'aller dans l'autre petite salle avec la probabilité q' , ou dans l'une ou l'autre des grandes salles S1 et S2 avec la même probabilité $2 \times q'$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve.
Déterminer la valeur de q' .

3) Montrer que :

$$P(Y_{n+1} = S1) = \frac{1}{2}P(Y_n = S2) + \frac{2}{5}P(Y_n = S3) + \frac{2}{5}P(Y_n = S4).$$

4) De façon analogue, déterminer, en fonction de $P(Y_n = S1)$, $P(Y_n = S2)$, $P(Y_n = S3)$, et $P(Y_n = S4)$, l'expression des probabilités $P(Y_{n+1} = S2)$, $P(Y_{n+1} = S3)$ et $P(Y_{n+1} = S4)$.

5) Si on considère la matrice $V_n = \begin{bmatrix} P(Y_n = S1) \\ P(Y_n = S2) \\ P(Y_n = S3) \\ P(Y_n = S4) \end{bmatrix}$, montrer qu'il existe une matrice A , telle

que : $V_{n+1} = AV_n$.

Déterminer la matrice A .

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer V_n en fonction de A , V_0 et n .

7) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{-3}{10}\right)^n, \quad c_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n.$$

On suppose qu'au début de la soirée, 50 % des participants sont dans la salle S1 et les 50 % restant dans la salle S3. Les salles S2 et S4 sont donc vides.

a) Que peut-on en déduire pour V_0 ?

b) Si la soirée était sans fin, quelle serait la probabilité de localisation de Z pour $n \rightarrow +\infty$?

- c) Il est prévu que la soirée dure de 22 h 00 à 4 h 00. Dans quelle salle Z se trouvera-t-il à 4 h 00 avec la plus forte probabilité ?

Problème

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise certains résultats établis dans les parties I et II.

I. Décomposition en série de Fourier

Soit l'application g , 2π -périodique, définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, g(x) = x^2.$$

- 1) Donner l'allure de la représentation graphique de g sur $[-2\pi, 2\pi]$.
- 2) Déterminer la série de Fourier de la fonction g .
- 3) Etudier la convergence de la série de Fourier de g .
- 4) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.
- 2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$.
- 3) Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Etude de la fonction dilogarithme et calcul de sommes de séries numériques

Soit la fonction L définie par $L(x) = \int_x^0 f(t)dt = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

- 1)
 - a) Justifier que $L(x)$ est définie pour tout $x \in]-\infty, 1[$.
 - b) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$?
 - c) Expliquer pourquoi L est continue sur $] -\infty, 1]$.
 - d) Montrer que L est développable en série entière sur un intervalle I à préciser. On donnera le développement en série entière de L .
- 2)
 - a) En utilisant le changement de variable $s = 1 - t$ et une intégration par parties, démontrer la relation :

$$\forall x \in]0, 1[, L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x).$$

- b) En utilisant les résultats de la partie **I.** et de la question **III.1)**, déduire de la relation précédente la valeur numérique de $L\left(\frac{1}{2}\right)$.
 - c) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

- 3)
 - a) On rappelle que L est développable en série entière sur I . Montrer que :

$$\forall x \in I, L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

- b) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
- 4) L'objectif de cette question est d'établir et d'utiliser la relation suivante :

$$\forall x \in]0, 1[, L(x) - L(-x) + L\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - L\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \times \ln(x).$$

- a) Vérifier que : $\forall x \in]0, 1[, \frac{1-x}{1+x} \in]0, 1[$.
 - b) Que peut-on dire de la quantité $\frac{x-1}{x+1}$ pour $x \in]0, 1[$?

c) Soit $x \in]0, 1[$, on pose :

$$\varphi(x) = L(x) - L(-x) + L\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - L\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \times \ln(x).$$

Montrer que φ est définie et constante sur $]0, 1[$.

d) Justifier soigneusement la valeur de φ sur $]0, 1[$.

e) Déterminer $x_0 \in]0, 1[$ solution de l'équation $x = \frac{1-x}{1+x}$.

En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x) y' + 2y = 0$.

I.1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de $\mathbb{R}$?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. Soit $x \in]0, +\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.1.b. On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ dans tout le sujet (γ est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ telle que :
pour tout $t \in]0, n]$, $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et pour tout $t \in]n, +\infty[$, $f_n(t) = 0$.

III.3.a. Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$.

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

III.4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ (formule de Gauss).

III.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$, démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$ (formule de Weierstrass).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

III.6.b. On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

III.7.b. Calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k .

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k , $P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k} \right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).$$

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Jeudi 5 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I : INFORMATIQUE

Les algorithmes demandés doivent être écrits en Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. Cet exercice étudie deux algorithmes permettant le calcul du pgcd (plus grand commun diviseur) de deux entiers naturels.

I.1. Pour calculer le pgcd de 3705 et 513, on peut passer en revue tous les entiers $1, 2, 3, \dots, 512, 513$ puis renvoyer parmi ces entiers le dernier qui divise à la fois 3705 et 513. Il sera alors bien le plus grand des diviseurs communs à 3705 et 513. Écrire une fonction `gcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers naturels non nuls, selon la méthode décrite ci-dessus. On pourra éventuellement utiliser librement l'instruction `min(a, b)` qui calcule le minimum de a et b . Par exemple `gcd(3705, 513)` renverra 57.

I.2. L'algorithme d'Euclide permet aussi de calculer le pgcd. Voici une fonction Python nommée `euclide` qui implémente l'algorithme d'Euclide.

```
def euclide(a, b):
    """Donn\ees: a et b deux entiers naturels
       R\esultat: le pgcd de a et b, calcul\e par l'algorithme d'Euclide"""
    u = a
    v = b
    while v != 0:
        r = u % v
        u = v
        v = r
    return u
```

Écrire une fonction «réursive» `euclide_rec` qui calcule le pgcd de deux entiers naturels selon l'algorithme d'Euclide.

I.3. On note $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

I.3.a. Écrire les divisions euclidiennes successivement effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de $F_6 = 8$ et $F_5 = 5$ avec la fonction `euclide`.

I.3.b. Soit $n \geq 2$ un entier. Quel est le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} ? On pourra utiliser librement que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n = 2$. En déduire, sans démonstration, le nombre u_n de divisions euclidiennes effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} avec la fonction `euclide`.

I.3.c. Comparer pour n au voisinage de $+\infty$, ce nombre u_n , avec le nombre v_n de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul du pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} par la fonction `gcd`. On pourra utiliser librement que F_n est équivalent, au voisinage de $+\infty$, à $\phi^n / \sqrt{5}$ où $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

I.4. Écrire une fonction `fibonacci` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie le nombre de Fibonacci F_n . Par exemple, `fibonacci(6)` renverra 8.

I.5. En utilisant la fonction `euclide`, écrire une fonction `gcd_trois` qui renvoie le pgcd de trois entiers naturels. Par exemple, `gcd_trois(18, 30, 12)` renverra 6.

EXERCICE II

Pour tout entier naturel non nul n , on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

II.1. Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.

II.2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.3. Démontrer que si A est inversible alors $\det(A) = 1$.

PROBLÈME III

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de Hermite et la troisième partie quelques propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On note $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n , on note $P^{(n)}$ le n -ième polynôme dérivé de P . Pour tout entier naturel non nul n , on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

III.1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

III.1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

III.1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même du polynôme PQ .

III.2. Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q \in \mathbb{R}(X)$ définis par $P = \prod_{i=1}^n P_i$ et $Q = \frac{P'}{P}$.

Démontrer par récurrence que $Q = \sum_{i=1}^n \frac{P'_i}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ deux familles de réels quelconques.

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, démontrer que :
si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X - a)^2$ divise P .

III.3.b. En utilisant la question préliminaire **III.1**, démontrer que l'application φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \dots, P'(x_p))$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

III.3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$.

Le polynôme P_H est appelé polynôme d'interpolation de Hermite.

III.4. Étude d'un exemple

Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite (défini à la question **III.3**) lorsque $p = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = -1$ et $b_2 = 2$ (si, au cours de ses calculs, le candidat a besoin d'inverser une matrice, il pourra le faire sans justification à l'aide de sa calculatrice).

III.5. Une formule explicite

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on considère le polynôme $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2$.

III.5.a. Soit i un entier vérifiant $1 \leq i \leq p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$ et démontrer qu'on a

$$Q'_i(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \text{ et } Q'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{2}{x_i - x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire **III.2**.

III.5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P = \sum_{i=1}^p \left[\left(1 - Q'_i(x_i)(X - x_i) \right) a_i + (X - x_i) b_i \right] Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de Hermite défini à la question **III.3**.

III.5.c. Retrouver le polynôme de la question **III.4** en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H'_n$.

III.6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n .

III.7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

III.8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.

III.8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.9. Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

III.9.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$.

III.9.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.9.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i ($0 \leq i \leq 3$) tels que $P = \sum_{i=0}^3 a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

III.10. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n , $a_1, a_2, \dots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \text{ et } S = \prod_{i=1}^p (X - a_i) \text{ sinon.}$$

III.10.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S | H_n \rangle = 0$.

III.10.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

III.10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Notations et définitions

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$] l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement dans $\mathbb{C}$]. Comme $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels est aussi à coefficients complexes.
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$].
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite $(M_n(i, j))_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i, j) de M_n converge vers le coefficient, noté $L(i, j)$, d'indice (i, j) de L .
- Un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$].
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max \{|x_i| ; 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

On rappelle que $\rho(A)$ est le rayon spectral de A .

- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

Partie I

Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

I.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha, \beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Q2. Montrer que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.

Q3. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha, \beta)^p$.

Q4. Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

I.2 Application

Soient α et β deux réels de $]0, 1[$. Un message binaire de longueur ℓ , c'est-à-dire une suite finie $(a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $a_i \in \{0, 1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0, 1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n -ième relais, le résultat du transfert est noté X_n . On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

Q5. Cas $\ell = 1$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $n > 0$, $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.

Si $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$, montrer que la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 est supérieure ou égale à :

$$r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n.$$

Q6. Cas $\ell > 1$

On pose $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^\ell)$ où, pour $k \in \{1, \dots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k -ième bit au n -ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :

$$Q_n \geq (r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n)^\ell.$$

Q7. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?

Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, déterminer un entier n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n -ième relais soit supérieure ou égale à ε (on dit que n_c est la *taille critique* du réseau).

Partie II

Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées et d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique [respectivement strictement stochastique] si et seulement si elle est à coefficients positifs [respectivement strictement positifs] et :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

II.1 Coefficients

Q8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ [respectivement } 0 < a_{ij} < 1].$$

Q9. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre associé.

Q10. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques [respectivement strictement stochastiques] est une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique].

II.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

Q11. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty.$$

Q12. Montrer que $\rho(A) = 1$.

II.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Q13. Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Q14. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

II.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

Q15. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I$?

Q16. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

Q17. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

Partie III

Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i , elle reste au point i avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

III.1 Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n .

Q18. Montrer qu'il existe une matrice Q , que l'on déterminera, telle que :

$$P_1 = QP_0.$$

Calculer P_n en fonction de Q et de P_0 .

Q19. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^4 p_i = 1 \quad \text{et} \quad \Pi = Q\Pi.$$

III.2 Rapidité de convergence

Q20. Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q21. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q .

Q22. En déduire que $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π et qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que :

$$\|Q^p - R\| = O(r^p).$$

En déduire que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

Partie IV

Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note :

$$m = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}.$$

Pour tout entier naturel non nul p , on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{i,j}^{(p)} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n , on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}, \quad M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}.$$

Q23. Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

Q24. Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

Q25. Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m) \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

Q26. Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n , les suites $\left(m_j^{(p)} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q27. Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLEME

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

On propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés "polynômes de Bernstein".

Dans la partie 1, on considère des exemples de courbes dont le paramétrage fait intervenir des polynômes de Bernstein dans des cas simples. Dans la partie 2, on s'intéresse à deux endomorphismes φ_n et B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les propriétés sont liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathbb{R}_n[X]$. La loi binomiale permet de faire le lien avec l'endomorphisme B_n dont on étudie en détail la restriction à $\mathbb{R}_2[X]$. On étudie, dans la partie 3, les aspects analytiques de $B_n(f)$ pour une fonction f définie sur $[0, 1]$ avec B_n défini sur le modèle de la partie 2. Par l'usage des probabilités, on obtient une démonstration "naturelle" de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0, 1]$ sous l'hypothèse forte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. La partie 4 complète la partie 3 par l'étude d'intégrales impropres et d'intégrales à paramètres. La partie 5 aborde la question des séries de fonctions liées aux polynômes de Bernstein.

Les parties 1 et 5 sont indépendantes des autres parties. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et cela uniquement par la question 5 faisant intervenir les probabilités. La partie 4 dépend seulement de la partie 3 et uniquement par la question 11.d).

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 1)$ et $A_2 = (1, 0)$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geq 1\}$.

Pour $t \in [0, 1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1, \quad B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2 \quad \text{et} \quad C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t).$$

1. Soit $t \in [0, 1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t .

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k$.

2. Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $\mathcal{C}$ l'arc paramétré défini à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} t & \mapsto & C(t) \\ [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2. \end{array}$

3.a) Justifier que tous les points de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{T}$.

3.b) Pour $t \in [0, 1]$, déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{D}_t$ à $\mathcal{C}$ en $C(t)$.

3.c) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, le segment $[A(t), B(t)]$ est inclus dans $\mathcal{D}_t$.

3.d) Représenter dans un même repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$, la partie $\mathcal{T}$ et les segments $[A(t), B(t)]$ pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.

PARTIE 2. ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Pour $P(X)$ un polynôme réel, on note $P'(X)$ le polynôme dérivé.

On note $\mathcal{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

et

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

4.

4.a) Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k p_{k,n}(X)$.

4.c) En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n est diagonalisable.

4.d) Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et T_r une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$. On note $\bar{T}_r = T_r/r$.

Pour Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbf{E}(Y)$ l'espérance de Y et $\mathbf{V}(Y)$ la variance de Y .

On rappelle que si $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, r \rrbracket$ et h est une fonction à valeurs réelles définie sur $\llbracket 0, r \rrbracket$, alors $h(Y)$ admet une espérance et $\mathbf{E}(h(Y)) = \sum_{k=0}^r h(k) \mathbf{P}(Y = k)$.

5.a) Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$.

5.b) Donner $T_r(\Omega)$ et justifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, on a : $\mathbf{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

5.c) Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$\mathbf{E}(T_r), \mathbf{E}(\bar{T}_r), \mathbf{V}(T_r), \mathbf{V}(\bar{T}_r), \mathbf{E}(T_r^2) \text{ et } \mathbf{E}((\bar{T}_r)^2) ;$$

vérifier en particulier que $\mathbf{E}((\bar{T}_r)^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)$.

5.d) En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t.$$

5.e) Montrer que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par B_n .

On note $\tilde{B}_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n ; on rappelle que dans ce cas, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\tilde{B}_n(P) = B_n(P)$. On note A_n la matrice de $\tilde{B}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note aussi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H$.

8.

8.a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

8.b) Soit a et b deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible.

8.c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b tels que $H = QDQ^{-1}$.

9. On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte

que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée (M_ℓ) , converge vers une matrice M , on note $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on a : $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

9.a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = I_3$.

9.b) Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

9.c) En déduire que si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$, alors $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

9.d) Montrer que $A_n = QD_n Q^{-1}$.

9.e) Déterminer explicitement, pour $n \geq 2$, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (A_n^\ell)$.

9.f) Déterminer explicitement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^n)$.

PARTIE 3. ANALYSE ET PROBABILITES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 5 avec $r = n$. On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$f(t) - B_n(f)(t) = \mathbf{E}(f(t) - f(\bar{T}_n)) = \sum_{k=0}^n (f(t) - f(k/n)) p_{k,n}(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 5.

10.

10.a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète Y admettant une variance, on a l'inégalité suivante : $\mathbf{E}(Y) \leq \sqrt{\mathbf{E}(Y^2)}$.

10.b) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}(|t - \bar{T}_n|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

11. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

11.a) Justifier l'existence d'un réel M_f tel que : $\forall(a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f|a - b|$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que M_f est un réel choisi de telle sorte que :

$$\forall(a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f|a - b|.$$

11.b) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{E}(|f(t) - f(\bar{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

11.c) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

11.d) Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

PARTIE 4. INTEGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

On reprend les notations de la partie 3 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 11.d).

12. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx$.

13. On note $S_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

13.a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1} dx$.

13.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le réel $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx$ est indépendant de l'entier k et que $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{(n+1)}$.

13.c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$.

14. Montrer que le résultat de la question 13.c) reste vrai pour la seule hypothèse que f est continue sur $[0, 1]$.

15. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

15.a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est convergente.

15.b) Montrer que, pour $b \geq 1$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

15.c) Montrer que la fonction $h : \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \frac{t}{1-t} \\ [0, 1[& \longrightarrow & [0, +\infty[\end{array}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est strictement croissante et bijective.

15.d) En utilisant le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$, calculer $F(0)$; en déduire la valeur de $F(1)$.

PARTIE 5. SERIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t) & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \quad \text{si bien que} \quad f_n(t) = \begin{cases} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

16. Montrer que $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire, pour tout $t \in]0, 1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

17. Etablir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

18. Déterminer $S(t)$ pour $t = 0$ et pour $t = 1$.

19.

19.a) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

19.b) En déduire que, pour tout $u \in [0, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$.

19.c) Montrer que, pour tout $t \in]0, 1]$, $S(t) = \frac{1}{t}$.

19.d) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois problèmes totalement indépendants.

La rédaction comptera pour une part importante de la note.

Problème I

On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

I.1. a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est bien définie.

c) Déduire de la question **1.a)** que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

I.2. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $f'(x)$.

On détaillera les calculs effectués.

Déterminer le tableau des variations de f sur $[0, 1]$.

b) Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq x$.

c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0, 1]$.

On se placera dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on utilisera l'échelle suivante : 10 cm pour 1 unité.

On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.

Dans cette question uniquement, on suppose $u_0 = \frac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.3. a) Calculer $f(1)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.

c) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Fin du premier problème

Problème II

Étude d'une intégrale

II.1. Justifier que $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et calculer sa valeur.

II.2. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

a) Soit $A \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt = -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} dt.$$

b) Déterminer (et justifier) la limite de $A^{n+1} e^{-A}$ quand A tend vers $+\infty$.

c) En déduire que $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$ converge et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

II.3. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$.

Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $\mathbf{R}_3[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3.

Pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

II.4. Justifier rapidement en utilisant **II.3** que, pour tous P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ converge.

II.5. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_3[X] \times \mathbf{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

Construction d'une base orthogonale

Soit Φ l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_3[X], \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X).$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est la famille $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$.

II.6. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

II.7. Vérifier que la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

II.8. Montrer alors que les valeurs propres de Φ sont 0, -1 , -2 et -3 .

L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

II.9. Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, déterminer un vecteur propre P_k de Φ associé à la valeur propre $-k$ et dont le coefficient dominant vaut 1.

On présentera et on expliquera les calculs effectués.

On supposera dans la suite que P_3 désigne un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre -3 et de coefficient dominant égal à 1.

II.10. Soient P et Q dans $\mathbf{R}_3[X]$.

a) On pose $f : t \mapsto tP'(t)e^{-t}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $t \geq 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\Phi(P)(t)$ et de e^{-t} .

b) Montrer que

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \int_0^{+\infty} f'(t)Q(t)dt.$$

c) En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^A f'(t)Q(t)dt$ avec $A \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.$$

d) En déduire que $\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$.

II.11. On rappelle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, P_i est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-i$.

Soient i et j dans $\{0, 1, 2, 3\}$ tels que $i \neq j$.

En remarquant que $\langle \Phi(P_i), P_j \rangle = \langle P_i, \Phi(P_j) \rangle$, montrer que $(i - j)\langle P_i, P_j \rangle = 0$ puis que P_i et P_j sont orthogonaux.

II.12. En déduire que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$ constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Fin du second problème

Problème III

Rappels des notations

On rappelle que, pour X une variable aléatoire, $E(X)$ désigne l'espérance de X et $V(X)$ désigne la variance de X .

Étant donnés deux événements A et B , la notation $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B .

Contexte

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants $0, 1, 2, 3, \dots$

Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.

À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n . On remarquera que X_n peut prendre les valeurs $0, 1$ et 2 , c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

Mise en place du problème

III.1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.

Déterminer la variance de X_0 .

III.2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

III.3. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0),$$

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0).$$

III.4. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Espérance et variance des X_n

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi.
On introduit les matrices de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

III.5. Calcul de l'espérance

- a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.
- b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1 .
En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n)$.
- c) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n .

III.6. Calcul du moment d'ordre 2.

On rappelle la *formule de transfert* : pour une variable aléatoire finie X et une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \mathbf{P}(X = k).$$

- a) En appliquant cette formule de transfert, exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n .
- b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2.$$

- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{4}E(X_n^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
On pourra utiliser les résultats de la question III.5.

- d) On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

- e) Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = E(X_n^2) - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- f) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n .

III.7. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de $V(X_n)$ en fonction de n .

Fin du troisième problème

Fin de l'énoncé

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC**

MATHEMATIQUES**Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

Dans l'ensemble de l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

- 1) Soit α un réel, on considère la matrice A à coefficients réels, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 + \alpha \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer qu'il existe une unique valeur de α telle que 5 soit une valeur propre de A .

On suppose que α prend désormais la valeur déterminée à la question précédente.

- b) Déterminer le spectre de A .
c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

- 2) Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice B à coefficients réels, définie par :

$$B = \begin{pmatrix} a + c & 0 & c \\ 0 & a + 2c & 0 \\ c & 0 & a + c \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le spectre de B .

- b) Montrer que B est diagonalisable.

- c) Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que :

$$P^{-1}BP = D.$$

- d) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On veut résoudre l'équation matricielle :

$$B \times N = N \times B \quad (E1)$$

d'inconnue N .

Montrer que N est solution de (E1), si et seulement si, la matrice N' , définie par $N' = P^{-1}NP$, est solution de l'équation (E2) :

$$DN' = N'D. \quad (E2)$$

- e) On suppose dans cette question et dans la suivante que $c \neq 0$.
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de (E2).
f) Exprimer les solutions de (E1) à l'aide des matrices P et P^{-1} . On ne demande pas le détail des coefficients des matrices N solutions de (E1).

3) Soit l'ensemble $F = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- b) Déterminer une base de F et la dimension de F .

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on va désormais étudier certaines propriétés de $M(a, b, c)$, élément quelconque de F .

- c) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b, c)$, associé à une valeur propre que l'on déterminera. On note λ_1 cette valeur propre.
- d) Calculer le polynôme caractéristique de $M(a, b, c)$ sous forme factorisée.
Indication : faire apparaître le coefficient $X - \lambda_1$ dans le polynôme caractéristique $P(X)$, à l'aide d'une opération élémentaire très simple sur les lignes ou les colonnes.
On pourra utiliser la relation : $b^2 - bc + c^2 = (b - \frac{1}{2}c)^2 + \frac{3}{4}c^2$.
- e) À quelles conditions portant sur le triplet (a, b, c) , la matrice $M(a, b, c)$ admet-elle une valeur propre triple ?
Dans ce cas, la matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?
- f) À quelles conditions portant sur le triplet (a, b, c) la matrice $M(a, b, c)$ admet-elle une valeur propre double non triple ?

Exercice 2

I. Dans cette partie, sont établis des résultats préliminaires qui serviront dans la suite de l'exercice.

q désigne un réel quelconque de l'intervalle $] -1, 1[$.

- 1) Rappeler, sans démonstration, la valeur de la somme infinie convergente $S(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.
- 2) Justifier la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$S_1(q) = \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1}, \quad S_2(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2}.$$

- 3) En déduire la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$T(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n q^n, \quad U(q) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 q^n.$$

II. On désire mettre au point un jeu vidéo dont le principe est le suivant : un joueur traverse successivement plusieurs salles d'un château. Lorsqu'il entre dans une salle, celle-ci peut être vide, sinon le joueur y rencontre des monstres qu'il doit affronter et vaincre avant de passer à la salle suivante. La partie s'arrête lorsque le joueur traverse successivement deux salles vides.

On admet que le joueur réussit toujours à vaincre les monstres rencontrés dans une salle. Le jeu prévoit un nombre éventuellement illimité de salles.

On note M_i l'évènement : "le joueur rencontre des monstres dans la salle numéro i ".

Les différents évènements M_i sont mutuellement indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $P(M_i) = p$.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de salles à traverser pour finir la partie.

- 1) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
- 2) Décrire les évènements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$ et $(X = 5)$.
- 3) Déterminer en fonction de p , les probabilités $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$ et $P(X = 5)$.
- 4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note q_n la probabilité de l'évènement $(X = n)$.

En distinguant les cas M_1 et $\overline{M_1}$, montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que l'on a :

$$\forall n \geq 4, q_n = a \times q_{n-1} + b \times q_{n-2},$$

où a et b sont deux constantes à exprimer en fonction de p .

- 5) On suppose désormais que $p = \frac{1}{3}$.
 - a) Vérifier que : $\forall n \geq 4, q_n = \frac{1}{3}q_{n-1} + \frac{2}{9}q_{n-2}$.
 - b) En déduire que : $\forall n \geq 2, q_n = \frac{4}{3} \left(\frac{-1}{3} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.
- 6) Déterminer l'espérance $E(X)$. On pourra exprimer $E(X)$ à l'aide de la fonction T définie en **I.3**.
Combien de salles faudra-t-il traverser en moyenne pour terminer une partie ?
- 7) Déterminer la variance $V(X)$. On pourra exprimer $V(X)$ à l'aide de la fonction U définie en **I.3**.

Problème

La partie **I** établit des résultats qui seront réutilisés dans les parties **II**, **III** et **IV**. La partie **II** est indépendante des parties **III** et **IV**. La partie **IV** utilise certains résultats établis dans la partie **III**.

I. Etude des fonctions ch et sh

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2},$$

où exp désigne de façon usuelle la fonction exponentielle.

- 1) Étudier le caractère "pair" ou "impair" des fonctions ch et sh.
- 2) On note ch^2 le produit $\text{ch} \times \text{ch}$ et sh^2 le produit $\text{sh} \times \text{sh}$. Montrer la propriété calculatoire :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$
- 3) Étudier la dérivabilité des fonctions ch et sh et montrer que leurs dérivées respectives s'expriment facilement en fonction de ch et de sh.
- 4) Étudier les variations de la fonction sh sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 5) Étudier les variations de la fonction ch sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

II. Etude d'une courbe paramétrée

On se place dans $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit deux réels strictement positifs a et b , on note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \text{ch}(t) \\ y = b \text{sh}(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 1) Montrer qu'il est possible de réduire l'étude de Γ à un paramétrage $t \in I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ à déterminer. Quelles sont alors les symétries vérifiées par Γ ?
- 2) La courbe Γ admet-elle des points stationnaires ?
- 3) Étudier les variations de x et y pour $t \in I$, où I est l'intervalle déterminé à la question **II.1**. À défaut, on pourra étudier les variations pour $t \in \mathbb{R}$.
Donner le tableau de variations associé aux variations simultanées de x et de y .

- 4) On donne le point $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ et la droite Δ d'équation $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $e = \frac{c}{a}$.

- a) Montrer que tout point M de Γ vérifie :

$$MF = eMH,$$

où H désigne le projeté orthogonal de M sur Δ .

De façon usuelle, $MF = \|\overrightarrow{MF}\|$ et la distance de M à Δ vérifie $d(M, \Delta) = MH$.

- b) Réciproquement, soit $M(x, y)$ un point du plan vérifiant :

$$\begin{cases} x \geq a \\ MF = eMH \\ H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \Delta \end{cases}.$$

Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}^+$, tel que $x = ach(t)$.

En déduire que M appartient à la courbe Γ .

- c) On suppose, pour cette question uniquement, que $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.

Déduire des questions précédentes une méthode de construction point par point de la courbe Γ , sans calculs des coordonnées $(ch(t), \sqrt{3}sh(t))$.

III. Etude de la fonction th

On considère la fonction notée th, définie par $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

- 1) Montrer que th est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) Étudier les variations de la fonction th sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3) a) Montrer que la fonction dérivée th' vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th'(x) = 1 - th^2(x).$$

- b) On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'écriture $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième d'une fonction f , avec la convention : pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$.

On peut alors écrire : $th^{(n+1)} = (th')^{(n)}$.

En utilisant la formule de Leibniz et la relation de la question **III.3.a**, exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $th^{(n+1)}(x)$ en fonction des valeurs $th^{(k)}(x)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- 4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = \frac{th^{(k)}(0)}{k!}$. Déduire de la question **III.3.b** le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

- 5) On rappelle que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?
- 6) On admet que la fonction th est développable en série entière sur $]R, R[$, où $R > 0$. Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur exacte de R .
- Donner l'expression du développement en série entière de th à l'aide des a_n .
 - En utilisant les questions **III.4** et **III.5**, donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de th . On donnera les valeurs exactes des coefficients b_k du développement limité : $\text{th}(x) = \sum_{k=0}^5 b_k x^k + o(x^5)$.

IV. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\text{ch}(x))}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\ln \circ \text{ch}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa dérivée en tout point de $\mathbb{R}$.
 - En déduire que, sur un intervalle J , non réduit à un point, que l'on précisera, la fonction f est égale à la somme d'une série entière convergente.
 - En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- On rappelle que pour $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'écriture $o(u(x))$ désigne une quantité $o(u(x)) = u(x) \times \varepsilon(x)$ où ε est une fonction de x vérifiant $\lim_{x \rightarrow \ell} \varepsilon(x) = 0$.
 - En factorisant par $\exp(x)$ dans l'expression de $\text{ch}(x)$, montrer que f admet un développement asymptotique pour x tendant vers $+\infty$ de la forme :

$$f(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3 \frac{\exp(-\alpha x)}{x} + o\left(\frac{\exp(-\alpha x)}{x}\right),$$
 où c_1, c_2, c_3 et α sont quatre constantes réelles que l'on déterminera.
 - En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} (1 - f(x)) \, dx$?

Fin

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 1**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

On définit deux fonctions :

- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

Q1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x, y) .

Q2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :

1. en calculant $f \circ g$;
2. en utilisant le produit de deux matrices jacobienes.

EXERCICE 2

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Q3. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2} \right)_{(p,q) \in A}$ est sommable et calculer sa somme.

Q4. Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

PROBLÈME

Séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π .

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type :

$$\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \text{ où } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites de réels.}$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une fonction f élément de $C_{2\pi}$, on notera, pour tout entier naturel n :

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx .$$

Partie I - Exemples

- Q5.** Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left[\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right]$ (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
- Q6.** Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos x) \cos(\sin x)$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme la somme d'une série de fonctions.
- Q7.** Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle, telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
- Q8.** On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie II - Propriétés

Une condition suffisante

- Q9.** Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

- Q10.** Soient a et b deux réels quelconques.

Démontrer que le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |a \cos x + b \sin x|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

- Q11.** Démontrer que si la série trigonométrique $\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

- Q12.** On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

- Q13.** Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$ pour $k \neq n$.

- Q14.** On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Démontrer que pour tout

entier naturel n non nul $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0 . On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

Q15. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\text{pour tout réel } x, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx)].$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Q16. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie, pour tout entier naturel n : $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum [\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)]$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)] .$$

Q17. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$.

Q18. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Q19. En déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Déduire alors de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Q21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

MATHEMATIQUES 2**Jeudi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un seul problème.

Notations

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme «infinie» définie par :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}.$$

- On dit que x est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p x_i = 1.$$

- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1, c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1.$$

- Une matrice A est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement blocs diagonaux) sont $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Objectifs

Le sujet est constitué d'un seul problème qui traite de matrices stochastiques dans un contexte probabiliste de chaîne de Markov (partie I). On étudie le spectre d'une matrice stochastique A (partie II) et la suite des itérés de A (partie III). On introduit aussi la notion de probabilité invariante par A (partie IV), suivie de son calcul effectif par ordinateur (partie V).

La partie I est indépendante des autres parties. La partie IV utilise les deux résultats démontrés dans les parties II et III. La partie V est une partie informatique liée à la partie IV, mais qui peut être traitée de manière indépendante.

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n . L'état de la particule au temps $n + 1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n + 1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n + 1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

Q1. Déterminer en justifiant la loi de X_1 .

On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n .

Q2. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Q3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5 (on demande les résultats arrondis au centième).

Q4. Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Q5. Justifier que A est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice Q inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag} \left(1, \frac{1}{4} \right) Q^{-1}.$$

Q6. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

Q7. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis de la suite de vecteurs lignes $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n + 1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi de X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Q8. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

Q9. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$.

Q10. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , on a $|\lambda| \leq 1$.

Localisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

Q11. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

Q12. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}.$$

Étude d'un exemple

Q13. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier sur l'exemple que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

Cas des matrices stochastiques strictement positives

Q14. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice A est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note B' la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de B .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B' .

On admet qu'il existe un entier $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similaire à celle de la question **Q12**.

Déduire de cette inégalité que B' est inversible.

Q15. En déduire que $\dim \text{Ker}(A - I_p) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de A . On dit alors que 1 est une valeur propre simple de A . Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la **Proposition 1** ci-dessous.

Proposition 1. *Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1.*

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

Proposition 2. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

Un contre-exemple

Q16. On considère s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice B de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Q17. La **Proposition 2** reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

Résultat préliminaire

Soit λ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Q18. Démontrer que $N^p = 0$.

Q19. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que pour n au voisinage de $+\infty$, $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\frac{n^k}{k!}$. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k} \lambda^{n-k}$.

Q20. En déduire que la suite de matrices $((\lambda I_p + N)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Convergence d'une suite de matrices

Soit A une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la **Proposition 1**, que 1 est valeur propre simple de A . Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de A , un théorème du cours montre que A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\text{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r),$$

avec $p_1, \dots, p_r$ des entiers et $N_1, \dots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

Q21. Dédurre des questions **Q18** à **Q20** que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. On dit que A admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que μ est une probabilité invariante par A).

Le but de cette partie est de démontrer la propriété énoncée dans la **Proposition 3** ci-dessous.

Proposition 3. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. On note $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$. Alors, la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur μ_∞ est l'unique probabilité invariante par A (il ne dépend donc pas du choix de μ_0).

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie ci-dessus.

Q22. Démontrer que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Convergence de la suite

Q23. Démontrer que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur μ_∞ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

Q24. Soit $\mu = (m_1, \dots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. Démontrer que μA est encore un vecteur stochastique.

Q25. En déduire que μ_∞ est une probabilité invariante par A .

Unicité de la probabilité invariante

Q26. Lien avec le spectre de la transposée de A : soit $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Justifier que μ est une probabilité invariante pour A , si et seulement si le vecteur colonne ${}^t\mu$ est un vecteur propre de tA associé à la valeur propre 1.

Q27. Justifier, en utilisant la **question Q15**, que $\dim \text{Ker}({}^tA - I_p) = 1$.

Q28. En déduire que A admet une unique probabilité invariante.

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Si A est une matrice stochastique strictement positive, on a établi dans la partie précédente la convergence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à la matrice A . Ceci fournit un algorithme de calcul de la probabilité invariante par A . On en propose une implémentation en langage Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

Un vecteur x de $\mathbb{R}^p$ sera représenté en Python par une liste de flottants. Par exemple, le vecteur $x = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ sera représenté par la liste `[1,2,3]`. De même, une matrice A sera représentée par une liste dont les éléments sont les lignes de la matrice. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ sera représentée par la liste `[ [1,2,3], [4,5,6] ]`.

Q29. On exécute le script suivant `A = [ [1,2,3], [4,5,6], [7,8,9], [10,11,12] ]` qui représente la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs renvoyées lorsque l'on exécute `len(A)`, `A[1]` et `A[2][1]`.

Q30. Écrire une fonction `difference` qui prend en arguments deux vecteurs x et y de même taille et renvoie le vecteur $x - y$. Par exemple si $x = (5, 2)$ et $y = (3, 7)$, `difference(x,y)` renverra `[2,-5]`.

Q31. Écrire une fonction `norme` qui prend en arguments un vecteur $x = (x_1, \dots, x_p)$ et renvoie sa norme infinie $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ (on pourra utiliser librement la fonction `abs` qui renvoie la valeur absolue d'un nombre, mais on s'interdit l'utilisation de la fonction `max` déjà implémentée dans Python).

Q32. Écrire une fonction `itere` qui prend en arguments un vecteur ligne x et une matrice A carrée de même taille que x et qui renvoie le vecteur xA . Par exemple si $x = (1, 1)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, on a $xA = (5, 7)$ et donc `itere(x,A)` renverra `[5,7]`.

Q33. On a vu, dans la **Partie IV**, que si A est une matrice strictement positive, la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ associée $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$ convergeait vers un vecteur μ_∞ indépendant du choix de μ_0 vecteur stochastique.

Écrire une fonction `probaInvariante` qui prend en arguments une matrice stochastique strictement positive A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et un réel $\varepsilon > 0$ et qui renvoie le premier terme μ_k de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mu_0 = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ tel que $\|\mu_k - \mu_{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon$. On ne demandera pas à l'algorithme de vérifier que la matrice passée en argument est bien stochastique et strictement positive.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$,

`probaInvariante(A,eps)` renverra `[0.33333396911621094, 0.6666660308837891]`.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

MATHEMATIQUES**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées
--

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants : un d'algèbre et un d'analyse.

PROBLÈME 1

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble des matrices orthogonales.

Notations

- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels et, pour tout entier $n > 0$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ *antisymétriques* à coefficients réels et par $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices $n \times n$ *orthogonales* à coefficients réels. Le groupe *spécial orthogonal* est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

Partie I - Un exemple en dimension 2

- Q1.** Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A .
- Q2.** Calculer $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.
- Q3.** Pour tout réel $\theta \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Calculer $M = (I_2 + R_\theta)^{-1}(I_2 - R_\theta)$.

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

- Q4.** Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
- Q5.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons

$${}^t(AX)\overline{X},$$

montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

- Q6.** Dédurre de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et :

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A).$$

Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.

- Q7.** Calculer le déterminant de R .

- Q8.** Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R)$ est antisymétrique.

Q9. On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien orienté par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R \in O_3(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique.

Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in M_3(\mathbf{R})$ telle que :

$$R = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A).$$

PROBLÈME 2

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phénomène de Gibbs.

Notations

– $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie I - Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ désigne une fonction continue 2π -périodique telle que :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0.$$

Q10. Si $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction de classe C^1 , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0.$$

Q11. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π -périodique et bornée sur $\mathbf{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = 0.$$

Q12. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Soient ε un réel strictement positif et g une fonction de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\sup_{[\alpha, \beta]} |h - g| \leq \varepsilon$, montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que :

$$\left| \int_\alpha^\beta h(t) \varphi(nt) dt \right| \leq M |\beta - \alpha| \varepsilon + \left| \int_\alpha^\beta g(t) \varphi(nt) dt \right|.$$

En déduire que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = 0.$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ et toute fonction continue $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

Q13. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt.$$

Partie II - L'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ soit bornée.

Q14. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$ puis $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ sont convergentes et que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt - \frac{F(a)}{a}.$$

Q15. Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit absolument convergente.

Q16. Montrer que la fonction

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbf{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}^+$.

Q17. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Q18. Soit $f : t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \quad (\mathbf{E})$$

sur $]0, +\infty[$.

2. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x) \cos(x) + \beta(x) \sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérifient :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0.$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t) dt$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t) dt$ où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ est une solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \mathcal{L}(f)(x) = a \cos x + b \sin x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt.$$

- Q19.** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt.$$

- Q20.** Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ . En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- Q21.** Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie III - Phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction 2π -périodique et impaire définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases} . \quad (\text{E.1})$$

On désigne par $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

- Q22.** En calculant la dérivée de S_n , montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0, \pi], S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

- Q23.** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Q24. En déduire que $S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Q25. Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$. En utilisant le résultat de la **question Q12**, montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1.$$

Q26. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par (E.1) sur $\mathbf{R}$.

Q27. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Q28. Montrer que φ est continue sur $[0, \pi/2]$ et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Q29. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1.$$

Q30. Comparer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \right) > 0.17.$$

En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0, \pi/2[$.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

MATHEMATIQUES**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.

Lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n -ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

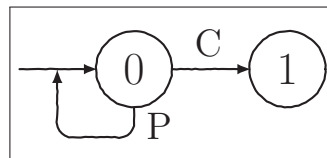


Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geq 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \quad G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n)t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \frac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left] -\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right[$, $G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt}$.

Q3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G_Y'(1) = \frac{1}{q}$ et $G_Y''(1) = \frac{2p}{q^2}$.

Q4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\frac{1}{a^{n+1}}$.

Q5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que

$$|t| < |a|, f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}.$$

Q7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

Q8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leq |b| \leq |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \frac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

Q11. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geq |a|$.

Partie III - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

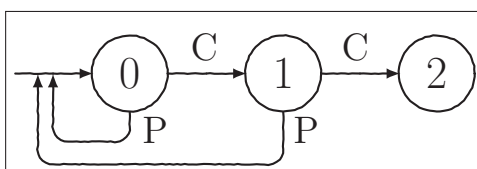


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geq 1$.

Q12. Calculer p_1 , p_2 et p_3 .

Q13. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements.

Q14. En déduire que pour tout $n \geq 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q15. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q16. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q17. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q19. Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q20. Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|]$, on a : $G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q21. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q22. Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geq \mathbf{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie I.

Q23. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie IV - Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A , si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $A - tI_4$.

Q24. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q25. Trouver les réels α , β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Q26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q27. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t)$.

Q28. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q29. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S .

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note U_k la k -ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) .

Q30. Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

Q31. En déduire que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q32. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A . On note λ une valeur propre complexe non nulle de A .

Q33. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A .

Q34. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathcal{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q35. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

Q36. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = t(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3).$$

Q37. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$$\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t - a)(t - b)(t - c).$$

Partie V - Étude d'un dernier cas

Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Q38. Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie V.

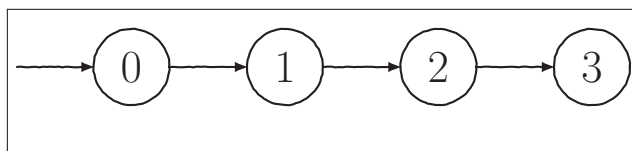


Figure 3

Pour $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n -ième lettre, l'automate se trouve au niveau i » et $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau i ». On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note T l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de T (notée G_T) est alors S_3 et on note R_T son rayon de convergence. On rappelle que $R_T \geq 1$.

Q39. Déterminer $p_{0,0}, p_{0,1}, p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

Q40. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{cases} p_{n,0} &= p \cdot p_{n-1,0} + p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} &= q \cdot p_{n-1,0} + q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} &= p \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,3} &= q \cdot p_{n-1,2} \end{cases}.$$

Soit $t \in [-1, 1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante :
$$S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}.$$

Q41. Montrer que
$$\begin{cases} S_0(t) &= tp \cdot S_0(t) + tp \cdot S_2(t) + 1 \\ S_1(t) &= tq \cdot S_0(t) + tq \cdot S_1(t) \\ S_2(t) &= tp \cdot S_1(t) \\ S_3(t) &= tq \cdot S_2(t) \end{cases}.$$

Q42. Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie **IV**.

Q43. Montrer que $\forall t \in]-R_T, R_T[, G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$ et montrer que $R_T > 1$.

Q44. Montrer que T admet une espérance et une variance.

Q45. Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de q seulement.

Q46. Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC : on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce problème.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

MATHEMATIQUES**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.

Le problème 1 nécessite l'usage du document-réponse (feuille de papier millimétré), qui est à rendre avec la copie.

PROBLÈME 1

Étude d'une courbe

On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$.

On note C la courbe paramétrée $\{M(t) / t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\}$.

Partie I - Deux fonctions

- Q1.** Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g .
- Q2.** Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.
- Q3.** Justifier que f est une fonction paire et g une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ de C par rapport au point $M(t)$?
- Q4.** Déterminer des fonctions équivalentes aux fonctions f et g en $+\infty$. En déduire les limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.
- Q5.** Déterminer les quatre limites $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t)$.
- Q6.** Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ avec pour dérivées respectives

$$f' : t \mapsto f'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \quad \text{et} \quad g' : t \mapsto g'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

Les calculs seront détaillés.

- Q7.** Déduire des questions précédentes les tableaux de variations des fonctions f et g sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ dans lesquels figureront les limites ainsi que les valeurs de $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.

Partie II - Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$

- Q8.** Rappeler sans justification le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.
- Q9.** Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.
- Q10.** Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'' des fonctions f et g , montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. Le théorème utilisé sera mentionné.
- Q11.** En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe C en l'origine du repère.
- Q12.** Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent à la courbe C au point $M(\sqrt{3})$.

Partie III - Asymptotes

On note $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et, pour t appartenant à l'ensemble de définition de f , $N(t)$ le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse $f(t)$.

Q13. Sachant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$, donner une interprétation graphique de la courbe C vis-à-vis de la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

Dessiner sur la copie l'allure de la courbe C et la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

Q14. Déterminer l'ordonnée $y_{N(t)}$ de $N(t)$ en fonction de $f(t)$.

On se propose dans la suite de cette partie d'examiner la quantité $g(t) - y_{N(t)}$ qui représente la distance algébrique entre les points $M(t)$ et $N(t)$.

Q15. Factoriser le trinôme $P(t) = -2t^2 + t + 1$.

Q16. On considère dans $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ la fonction $\delta : t \mapsto \delta(t) = g(t) - f(t) + \frac{1}{2}$.

Montrer que, pour tout t de $[0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\delta(t) = \frac{P(t)}{2(t+1)}$.

Q17. Quel est le signe de $\delta(t)$ lorsque t est dans un voisinage de 1 ?

Q18. Combien vaut la limite $\lim_{t \rightarrow 1} (g(t) - y_{N(t)})$? Dessiner sur la copie l'allure de la courbe au voisinage de $t = 1$.

Partie IV - Tracé de la courbe

Q19. En tenant compte des informations issues des questions précédentes et en utilisant le document-réponse (à rendre avec la copie), tracer la courbe suivante :

$$C_1 = \{M(t) / t \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\}.$$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées. On considèrera par ailleurs que $\sqrt{3} \simeq 1,73$.

On fera apparaître :

- la droite $\mathcal{D}$;
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $M(\sqrt{3})$;
- la droite d'équation $x = -1$.

Q20. En utilisant une couleur différente ou en pointillés, compléter le tracé précédent en traçant la courbe suivante :

$$C_2 = \{M(t) / t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\}.$$

PROBLÈME 2

Marche aléatoire sur le net

Internet peut être modélisé par un graphe dont les sommets sont les pages internet (ou sites) et les arêtes les liens entre les pages. L'idée de l'algorithme du «PageRank» est de surfer au hasard sur Internet et de compter combien de fois on passe sur chaque page. Une page p peut être considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p .

Dans ce problème, nous étudions deux exemples avec quatre pages puis trois pages. La partie **I** traduit le premier exemple sous une forme matricielle. Dans les parties **II** et **III**, on s'intéresse à l'étude du second exemple. La partie **IV** classe les trois pages du second exemple par ordre de popularité.

Partie I - Un premier exemple

Dans le schéma suivant, on considère un internet simplifié constitué de quatre pages internet. Par exemple, la page 1 possède un lien vers la page 2, un vers la page 3 et un vers la page 4, etc. La page 3 ne possède qu'un seul lien vers la page 1.

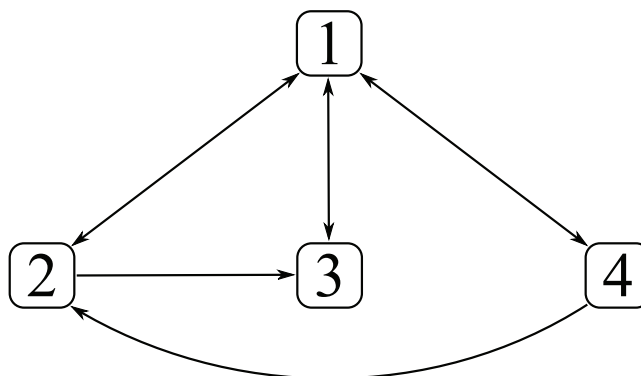


Figure 1 – Exemple n° 1

- i et j sont des indices de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ et n est un entier naturel de $\mathbb{N}$.
- $p_n(j)$ est la probabilité que l'internaute soit sur la page j à l'instant $\tau = n$.
- On note $t_{i,j}$ la probabilité de se trouver à la page i à l'instant $\tau = n + 1$ sachant qu'on était sur la page j à l'instant $\tau = n$. On fait l'hypothèse qu'il y a équiprobabilité entre les liens d'une page. Comme la page 1 pointe sur trois autres pages, la probabilité $t_{3,1}$ d'aller de la page 1 vers la page 3 est $\frac{1}{3}$.
- On fait également l'hypothèse qu'une page a une probabilité nulle de pointer sur elle-même, donc pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, $t_{i,i} = 0$.
- On note $A_n(j)$ l'événement " être sur la page j à l'instant $\tau = n$ " et on supposera que ces événements sont de probabilité non nulle.
- On note T_4 la matrice $(t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$. Cette matrice s'appelle matrice de transition dont le schéma présenté sur la **figure 1** s'appelle graphe.

Q21. Compléter la matrice T_4 correspondante à l'exemple n°1 en remplaçant les $t_{i,j}$ par leurs valeurs :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ \frac{1}{3} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ \frac{1}{3} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Q22. Pour j de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer les sommes $\sum_{i=1}^4 t_{i,j}$. Justifier soigneusement le résultat.

Q23. En précisant le théorème utilisé, montrer que :

$$p_{n+1}(1) = t_{1,1}p_n(1) + t_{1,2}p_n(2) + t_{1,3}p_n(3) + t_{1,4}p_n(4).$$

Q24. Donner sans justification l'expression de $p_{n+1}(2)$, $p_{n+1}(3)$ et $p_{n+1}(4)$ en fonction des $p_n(j)$.

Q25. On note U_n le vecteur colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_4 U_n$.

Q26. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_4^n U_0$.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

On définit dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $S(X) = 4X^3 - 3X - 1$.

Q27. Vérifier que $\lambda = 1$ est une racine simple et $\mu = -\frac{1}{2}$ est une racine double de S .

Q28. Soit n un entier naturel. Justifier l'existence d'un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ et d'un polynôme $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n \quad (1).$$

On ne cherchera pas à déterminer le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q29. En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q30. En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ , en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

Q31. Après résolution des équations précédemment obtenues, on admet que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \alpha_n &= \frac{1}{9} \left(4 - 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n - 6n \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \beta_n &= \frac{1}{9} \left(4 - 4 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 3n \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \\ \gamma_n &= \frac{1}{9} \left(1 + 8 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 3n \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \end{cases}.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ puis montrer que les trois suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des limites qu'on déterminera.

Partie III - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie la matrice :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Q32. En s'inspirant de l'exemple n°1 de la partie I, dessiner le graphe dont la matrice de transition est la matrice T_3 .

Q33. Montrer que le polynôme caractéristique de T_3 est égal à $\frac{1}{4}S$.

Q34. Déterminer les valeurs propres de T_3 .

Q35. Pour chaque valeur propre, déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé.

Q36. En précisant le théorème utilisé, montrer que la matrice T_3 n'est pas diagonalisable.

Q37. Si $M(X) = m_0 + m_1X + \dots + m_rX^r$ désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $M(T_3)$ la matrice telle que $M(T_3) = m_0.I_3 + m_1.T_3 + \dots + m_r.T_3^r$ avec :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer T_3^2 et T_3^3 puis montrer que $S(T_3) = O_3$ où O_3 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.

Q38. Comme dans la partie I, on pose pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Que vaut la somme $a + b + c$?

Q39. On admet, comme dans la partie I, que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = T_3^n U_0$.

On admet également qu'en remplaçant dans l'égalité (1) de la question Q28, la variable X par la matrice T_3 , on obtient, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité matricielle :

$$T_3^n = S(T_3)Q(T_3) + \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3.$$

En déduire que :

$$T_3^n = \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3.$$

Q40. Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression du vecteur U_n en fonction du triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et du triplet (a, b, c) .

Q41. Montrer que les trois suites $(p_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$, $(p_n(2))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n(3))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des limites qui seront déterminées.

On note, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $p_\infty(i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(i)$.

Quelle interprétation peut-on donner aux limites $p_\infty(1)$, $p_\infty(2)$ et $p_\infty(3)$?

Partie IV - Popularité d'une page

Un moteur de recherche consiste à classer les pages par pertinence. Un des algorithmes possible repose sur l'hypothèse qu'une page p est considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p .

Q42. Parmi les 3 sites de l'exemple donné dans la partie II, quel(s) site(s) vous semble(nt) le(s) plus populaire(s) ? Vous devez justifier votre opinion.

Dans la suite de cette partie, on reprend le deuxième exemple donné dans la partie III.

On mesure la popularité du site $n^o i$ par le réel $r(i)$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le site i est plus populaire que le site i' si $r(i) \geq r(i')$.

Un site qui émet par exemple deux liens ne transmet que pour moitié sa popularité aux sites vers lesquels il pointe.

On admet que le triplet $(r(1), r(2), r(3))$ vérifie le système :

$$\begin{cases} r(1) = \frac{1}{2}r(2) + \frac{1}{2}r(3) \\ r(2) = \frac{1}{2}r(3) \\ r(3) = r(1) + \frac{1}{2}r(2) \end{cases} \quad (2).$$

Q43. On pose $R = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{pmatrix}$.

Réécrire le système (2) à l'aide de la matrice T_3 et du vecteur colonne R .

Lorsque R n'est pas le vecteur nul, comment s'appelle R vis-à-vis de la matrice T_3 ?

Q44. On pose $\|R\|_1 = |r(1)| + |r(2)| + |r(3)|$.

Déterminer un vecteur R avec $r(1) > 0$ puis calculer $\|R\|_1$.

Q45. Déterminer les coordonnées du vecteur $R' = \frac{1}{\|R\|_1} R$.

Justifier sans calcul que R' est encore solution du système (2).

Q46. Dédire de R' l'ordre des sites du plus populaire au moins populaire.

FIN

DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE

Académie :		Session :	
Examen ou Concours : Concours Communs Polytechniques		Série* :	
Spécialité/option* : FILIERE TSI		Repère de l'épreuve :	
Épreuve/sous-épreuve : MATHÉMATIQUES			
NOM : (en majuscules, suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)			
Prénoms :		N° du candidat	
Né(e) le		(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)	
Examen ou Concours : Concours Communs Polytechniques		Série* :	
Spécialité/option : FILIERE TSI			
Repère de l'épreuve : MATHÉMATIQUES			
Épreuve/sous-épreuve : (Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)			
Note : 20		Appréciation du correcteur* :	
* Uniquement s'il s'agit d'un examen.			

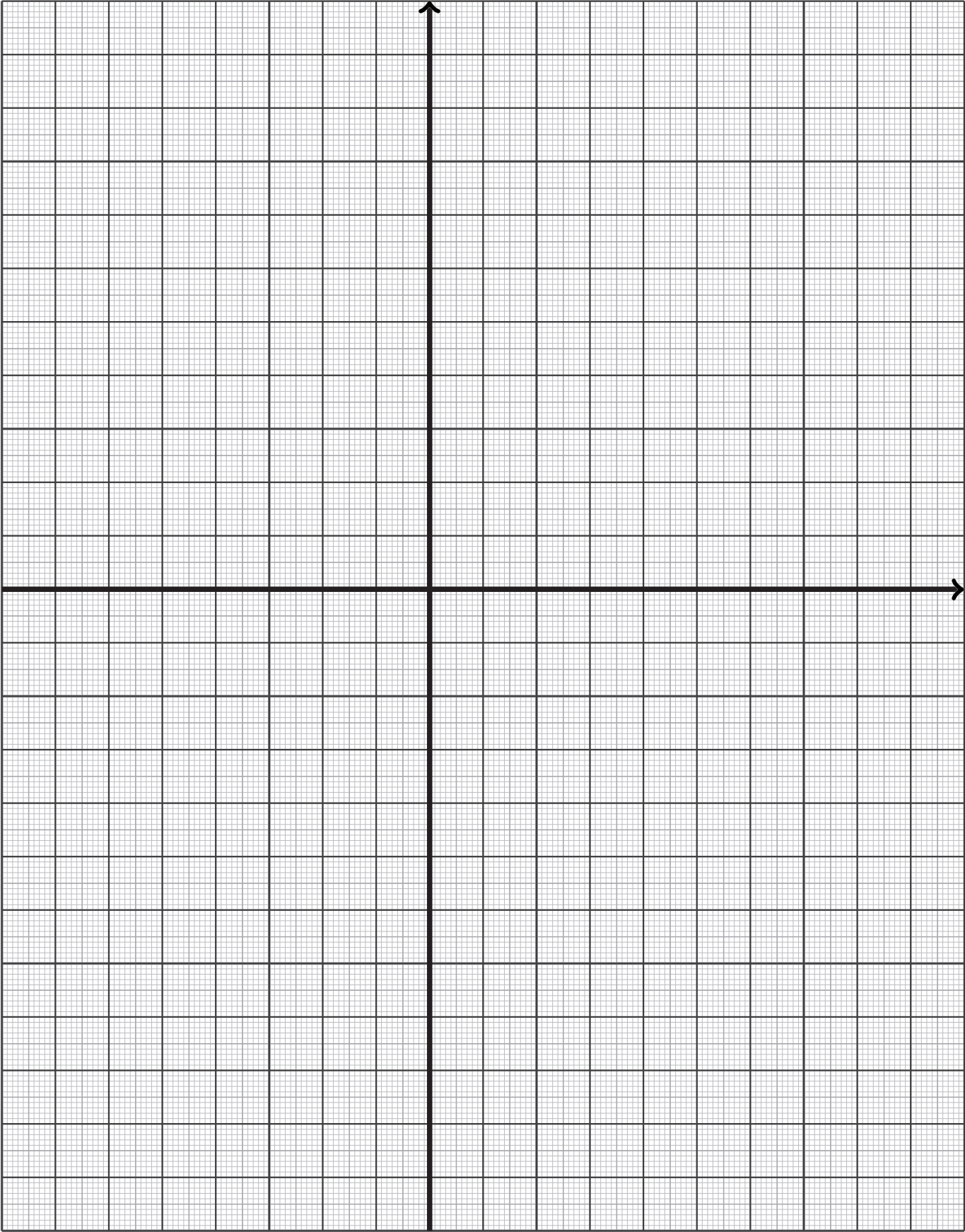
Si votre composition comporte plusieurs feuilles, numérotez-les et placez les intercalaires dans le bon sens.

TSIMA02

DOCUMENT RÉPONSE
(à rendre avec la copie)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS LA PARTIE BARRÉE



**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC**

MATHEMATIQUES**Mardi 2 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , avec $n \in \mathbb{N}$.

Dans l'ensemble de l'exercice, P_1, P_2, P_3 désignent trois polynômes distincts de $\mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts.

On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Q1. Soient les polynômes :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}(X - a_2)(X - a_3), \\ L_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}(X - a_1)(X - a_3), \\ L_3 = \frac{1}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}(X - a_1)(X - a_2). \end{cases}$$

- a) Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$.
- b) Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

Q2. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Q3. L'application f est-elle surjective ? On pourra s'intéresser aux degrés respectifs des polynômes P_1, P_2, P_3 et $f(P)$ pour $P \in E$.

- Q4.**
- a) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.
Montrer que, dans ce cas, P appartient à $\ker(f)$ si et seulement si les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P .
 - b) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.
Montrer que, dans ce cas, il existe un polynôme P non nul et non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$, appartenant à $\ker(f)$.
On pourra exprimer P en fonction des polynômes L_1, L_2 et L_3 .
 - c) L'application f est-elle injective ?

Partie II - Restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$

On suppose dans cette partie que la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de E_n et que n est un entier naturel **supérieur ou égal à 3**.

Q5. Montrer que la restriction de f à E_n définit un endomorphisme de E_n .

On notera désormais f_n l'application définie par :

$$\begin{aligned} f_n : E_n &\longrightarrow E_n \\ P &\longmapsto f_n(P) = f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3 \end{aligned} .$$

Q6. On rappelle que $\text{Im}(f_n)$ et $\ker(f_n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n .

a) Montrer que $\text{Im}(f_n) = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

b) Montrer que $\dim(\ker(f_n)) = n - 2$.

c) Déterminer une base de $\ker(f_n)$.

Q7. On suppose, dans cette question uniquement, que les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont de degré 2 et admettent pour racines respectivement a_2 et a_3, a_1 et a_3, a_1 et a_2 .

a) Montrer que la réunion de la famille (P_1, P_2, P_3) et de la base de $\ker(f_n)$ déterminée à la question **Q6.c)**, constitue une base de E_n .

b) Montrer que f_n est un endomorphisme diagonalisable.

Partie III - Étude d'un cas particulier avec $n = 3$

Dans cette partie $n = 3$, $E_3 = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 2X, \quad P_3 = -3X + 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1.$$

Q8. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?

Q9. Déterminer la matrice de f_3 dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ de E_3 .

Q10. Déterminer $\ker(f_3)$ et une base de $\ker(f_3)$.

Partie IV - Étude d'un cas particulier avec $n = 6$

Dans cette partie $n = 6$, $E_6 = \mathbb{R}_6[X]$ et :

$$P_1 = X^2 - 3X + 2, \quad P_2 = X^2 - X - 2, \quad P_3 = 2X^2 - 2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

Q11. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?

Q12. Déterminer $\ker(f_6)$ et une base de $\ker(f_6)$.

Q13. a) L'endomorphisme f_6 est-il diagonalisable ?

b) Préciser le spectre de f_6 et la multiplicité des valeurs propres de f_6 .

Exercice 2

On dispose de deux pièces de monnaie différentiables, dénommées dans la suite de l'exercice "pièce 1" et "pièce 2". On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec l'une ou l'autre pièce selon un protocole décrit ensuite. Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé.

Pour chaque pièce, l'obtention du côté pile au cours d'un lancer peut être modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre p_1 pour la première pièce et de paramètre p_2 pour la seconde pièce. On a : $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère les événements suivants :

- "le i -ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile", noté P_i ,
- "le i -ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face", noté $F_i = \overline{P_i}$,
- "le i -ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile", noté P'_i ,
- "le i -ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face", noté $F'_i = \overline{P'_i}$.

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où Ω désigne l'ensemble des séries de n lancers possibles, on a : $P(P_i) = p_1$, $P(F_i) = q_1 = 1 - p_1$ et $P(P'_i) = p_2$, $P(F'_i) = q_2 = 1 - p_2$.

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard et on effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.

On itère le processus jusqu'au n^e lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsqu'on obtient face.

On note C_1 l'évènement "choisir la pièce 1 au premier lancer" et C_2 l'évènement "choisir la pièce 2 au premier lancer". On a $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$.

Q14. Dans cette question, on considère une série de 2 lancers ($n = 2$).

- a) Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?
- b) On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

Q15. Dans cette question, on considère une série de 6 lancers ($n = 6$).

- a) On suppose que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer.
On note A l'évènement : "obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1, puis deux fois pile avec la pièce 2".
Déterminer $P(A)$ en fonction des données p_1 et p_2 .
- b) On suppose que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer.
On note B l'évènement : "jouer cinq fois de suite avec la pièce 2, puis jouer le sixième lancer avec la pièce 1".
Déterminer $P(B)$ en fonction des données p_1 et p_2 .
- c) Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivants avec deux pièces différentes ?
- d) Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?

Q16. Dans cette question, on considère une série de 12 lancers ($n = 12$).
Sachant que l'on a effectué le dixième lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le douzième lancer avec la pièce 2 ?

Q17. Dans cette question, on considère une série de n lancers, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On note D_n l'évènement "on utilise la pièce 1 pour la première fois au n -ième lancer".

- a) Déterminer $P(D_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : distinguer les cas $n = 1$ et $n > 1$.
- b) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} P(D_n)$ converge et calculer sa somme.
- c) En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'évènement "ne jamais utiliser la pièce 1" ?

Pour la suite de l'exercice, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on effectue N lancers selon le protocole étudié précédemment. On gagne 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 1 et on perd 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 2.

La variable aléatoire X_N désigne le nombre de points obtenus à l'issue des N lancers. X_N peut donc prendre des valeurs entières $k \in \llbracket -N, N \rrbracket$.

La variable aléatoire U_N désigne le nombre de fois où on joue avec la pièce 1 au cours des N lancers.

Q18. Déterminer $P(X_N = N)$ et $P(X_N = -N)$.

Pour la suite de l'exercice, on pose $p_1 = p_2 = 0,3$.

Q19. Dans cette question, on suppose $N = 3$.

- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3 .
- b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_3 : $E(X_3)$.

Q20. Dans cette question, on suppose $N \geq 2$.

- a) Soit $k \in \llbracket -N, N \rrbracket$. Exprimer l'évènement " $X_N = k$ " en fonction de U_N .
- b) En déduire $P(X_N = N - 1)$.
- c) Que vaut $P(X_N = 0)$ lorsque N est un entier impair ?
- d) Déterminer $P(X_N = N - 2)$ et $P(X_N = -N + 2)$.

Problème

On note I l'intervalle $] -1, +\infty[$. Soit la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si } x \in] -1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie I - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction φ définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq -1, \varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x).$$

Q21. Calculer les dérivées φ' et φ'' et préciser les valeurs $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

Q22. Etudier les variations de φ sur I . On étudiera la limite de φ' en $+\infty$.

Q23. En déduire que φ est strictement négative sur $[-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Partie II - Étude de la fonction f

Q24. a) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.

b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Q25. Montrer que la fonction f est strictement monotone sur I .

Q26. Soit la fonction g définie sur I par : $\forall x \in I, g(x) = f(x) - x$.

a) Déterminer le sens de variation de g .

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$.

c) Montrer que : $0,4 \leq \alpha \leq 0,6$.

d) Déterminer le signe de g sur I .

Q27. On considère les fonctions ψ et h définies sur I par :

$$\psi(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x \in] -1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que h est développable en série entière sur $] -1, +\infty[$.

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

c) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = (-1)^n \times n! \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!}.$$

- d) Si f était développable en série entière sur $] - r, r[$ avec $r > 0$, quelle serait la forme de ce développement ?

Q28. Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{(1+t)t} dt$.

Partie III - Étude d'une suite récurrente

Q29. On admet que la fonction dérivée f' est strictement croissante sur I .
Montrer que : $\forall x \in [0, 4; 0, 7], |f'(x)| \leq 0, 8$.

Q30. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 4; 0, 7]$.

- Q31.** a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq 0, 8 \times |u_n - \alpha|$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie IV - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1 \quad (E).$$

Q32. Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.

Indication : on pourra décomposer $\frac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Q33. On cherche à déterminer une solution de (E) sur $I =]-1, +\infty[$. Soit y une telle solution.

- a) Donner les expressions vérifiées par y sur I_1 et I_2 .
b) Déterminer, en utilisant la continuité de y en 0, les valeurs des constantes d'intégration intervenant dans les expressions de y obtenues à la question précédente.
c) Vérifier que la fonction y ainsi définie est effectivement dérivable en 0 et solution de (E) sur I .
d) Vérifier que f est l'unique solution de (E) sur I .

Q34. On cherche à déterminer les séries entières solutions de (E) sur $] - R, R[$ avec $R > 0$.

- a) En écrivant $\forall x \in] - R, R[, y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, établir les équations vérifiées par les coefficients a_n lorsque y est solution de (E) .

b) Montrer, en utilisant une récurrence à deux pas, que les coefficients a_n vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!}.$$

c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est égal à 1.

Q35. Dédurre des questions précédentes qu'il existe $r > 0$, tel que f est développable en série entière sur $] -r, r[$. Préciser la forme du développement en série entière et donner la valeur maximale de r .

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

MATHÉMATIQUES 1**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé d'un problème avec quatre parties.

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie I est indépendante des autres parties. À travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ».

Les parties II et III peuvent être traitées de manière indépendante. La partie IV utilise des résultats des parties II et III.

Les parties II, III et IV traitent de l'utilisation des polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dites de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Le sujet comporte aussi quelques questions notées *Informatique* portant sur le programme « informatique pour tous ». Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python.

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Q2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Q3. Informatique : écrire une fonction récursive factorielle qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.

Q4. Informatique : en déduire un script, qui détermine un entier N , tel que $|I - s_N| \leq 10^{-6}$.

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$.

En déduire que :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans $[a, b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i , un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i , c'est-à-dire tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i , puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

- Q8. Informatique :** si $y_0, \dots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^n y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i . Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i , y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x , a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a .
Par exemple, si $x = [-1, 0, 1]$ et $y = [4, 0, 4]$, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi, `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.
- Q9. Informatique :** chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n + 1$.

Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n , lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i .

On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^n (X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x).$$

Q10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p -fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ . Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t).$$

Q12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q13. Démontrer que F s'annule $n + 2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Q15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Q16. On définit f sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par : pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Vect}\{1, X, \dots, X^k\} = \text{Vect}\{P_0, P_1, \dots, P_k\}.$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n .

Q17. Calculer P_0 et P_1 .

Q18. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n .

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

Q19. Justifier que $\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1, 1]$.

Supposons par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racines simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1) \dots (X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q20. Justifier que $\int_{-1}^1 H(t) dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1, 1]$).

Partie IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynômes interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\int_a^b f(x) dx$ pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$. À cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f . Approximer $\int_a^b f(x) dx$ par $\int_a^b L_N(f)(x) dx$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Q21. Justifier que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt \text{ avec } g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right).$$

On est donc ramené à estimer $\int_{-1}^1 g(t) dt$ où $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \dots, t_n$ dans $[-1, 1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \sum_{i=0}^n g(t_i) l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose :

$$J(g) = \int_{-1}^1 L_n(g)(t) dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i g(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(t) dt.$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^1 g(t) dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i g(t_i),$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \dots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Q22. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Q23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1 . Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \dots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie III.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1} , on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R.$$

Q24. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^1 Q(t)P_{n+1}(t) dt$, puis conclure que $J(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt$.

Q25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

MATHÉMATIQUES 2**Jeudi 3 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

Q1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Q2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = \text{vect}\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F .

Q3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire

la valeur du réel $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (e^t - (a + bt))^2 dt \right]$.

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

EXERCICE II

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q4. Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \right] = 1$ et déterminer

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0,01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q5. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q6. Dans le cas où l'examineur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0,6}$.

PROBLÈME

On note, pour n entier tel que $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.

On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \text{ (chaque matrice bloc étant une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{)}.$$

On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si T est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : "une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$ ".

Pour cela on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

Q7. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \geq 1$) les valeurs propres distinctes de u . Démontrer que le polynôme $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_p)$ est annulateur de u .

Q8. Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ sont r nombres réels distincts ($r \geq 1$) tels que $Q = (X - \mu_1)(X - \mu_2) \dots (X - \mu_r)$ est un polynôme annulateur de u . En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q9. On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D vérifiant : $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

Q10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q11. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs : $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

Q12. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q13. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Q14. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Q15. On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F , scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U .

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Q16. Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X . En déduire la valeur de la matrice A .

Q17. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q18. On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A . En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q19. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

Q20. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de

$$\mathbb{R}^4 \text{ est } M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u .
On pourra s'inspirer de la question **Q10**.

Q21. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème (page 4),

démontrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une

matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

Q22. Utiliser la question **Q21** pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases} \quad (\text{on ne demande pas de détails}).$$

Q23. Sachant que la solution φ sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = MX$ vérifiant $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est

la fonction $t \mapsto e^{tM} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où e^{tM} désigne l'exponentielle de la matrice tM , déterminer la matrice e^M .

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

MATHÉMATIQUES**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Notations et définitions

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2 .

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2 y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre linéaire qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carrée.

Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Delta(P) = XP'.$$

Calculer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta(X^k)$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2 P'' = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ .

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Phi(P) = X^2 P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a - 1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n .
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n .

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a - 1)s + b = 0. \quad (1)$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $m_1, m_2 \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q12. Déterminer le noyau de φ . En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad (2)$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I , alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0. \quad (3)$$

Q15. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I .

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I .

On suppose dans les deux questions suivantes uniquement que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur J , alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbf{R}$.

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (4)$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4)

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $] -R, R[$.

Q20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}.$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière obtenue : $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$.

Q22. Soit $r > 0$ et soit f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} &= 0 \end{cases} \quad (5)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soit $r > 0$ et soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ désigne celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que X* . Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}(e^{tX})$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g'_a est décroissante sur $\mathbf{R}$.
En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t).$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, B_n est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbf{N}^*$.

En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

MATHÉMATIQUES**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est constitué d'un seul problème en six parties.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0 , L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n .

Q3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U'_n = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1) \cdots (X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1) \cdots (X-\beta_{k+1}).$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$, en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **Q8** à **Q13**, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ . Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question Q9.*

Q11. Vérifier que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n , en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question Q12.*

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ .

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15. Justifier que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Q16. Établir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

Q17. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On pourra utiliser la question **Q13**.

Q18. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, L_n \rangle = 0$.

Q19. On admet que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(P))^2, \text{ où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle.$$

Q21. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Partie IV - Fonction génératrice

On admet dans la suite du problème que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$ et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$. On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

Q22. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |L_n(x)| \leq r^n$. On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.

Q23. Pour $x \in [-1, 1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geq \frac{1}{r}$.

Q24. Pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$, on pose $S_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$. Montrer que S_x est solution sur $\left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0.$$

Q25. En déduire que : $\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Q26. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question **Q25**, de retrouver l'expression des polynômes L_0 , L_1 et L_2 .

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

Pour $\theta \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n du$.

Q27. Soit $t \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $v_n(u) = t^n (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n$. Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

Q28. Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - i t \sin \theta \cos u}$.

Dans les questions **Q29** et **Q30**, a désigne un réel strictement positif.

Q29. Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$. On pourra utiliser le changement de variable défini par $v = \pi - u$.

Q30. Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+a^2 \cos^2 u} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.

Q31. En déduire que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \forall \theta \in [0, \pi], \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}.$$

Q32. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, \pi], L_n(\cos \theta) = w_n(\theta)$.

Q33. Justifier que : $\forall x \in [-1, 1], \forall t \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Q34. Prouver que : $\forall x \in [-1, 1], R(x) = 1$. On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, on a : $(z^2 - 2xz + 1) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n \right)^2 = 1$.

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions **Q35** à **Q43**, n désigne un entier naturel non nul.

Q35. Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \dots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, h(t_i) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que : $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

Q36. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ell_i(P) = P(x_i)$ (on rappelle que $x_1, \dots, x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

Q37. En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell_k$.

Q38. Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n).$$

Q39. Montrer que la relation de la question **Q38** reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question **Q18**.

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1, 1]$.

Q40. Montrer que : $\exists ! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H'_n(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$. On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à P associe : $(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$.

On rappelle que A_n a été défini à la question **Q6**.

Q41. Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \neq x_i$.

Montrer que : $\exists c \in [-1, 1], f(x) - H_n(x) = \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$. On pourra considérer l'application g définie sur $[-1, 1]$ par $g(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} K$, où K est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question **Q35** à la fonction g' .

Q42. Montrer que : $\forall y \in [-1, 1], \exists c \in [-1, 1], f(y) - H_n(y) = \frac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.

Q43. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt.$$

Q44. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt$.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI**

MATHÉMATIQUES**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants qui peuvent être traités dans un ordre choisi par le candidat.

PROBLÈME 1

On note $\mathcal{V}_d^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes X , définies sur un espace probabilisé Ω muni d'une probabilité P , telle que $E(X^2)$ existe. Lorsqu'une variable aléatoire réelle discrète X appartient à $\mathcal{V}_d^2$, on dit alors que X admet un moment d'ordre 2.

Partie I - Étude de l'ensemble des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2

I.1 - Exemple simple

Soit V une variable aléatoire sur Ω suivant la loi de Bernoulli de paramètre p .

Q1. Rappeler la loi de Bernoulli de paramètre p .

Q2. Montrer que V appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

I.2 - Cadre général

Soient X et Y deux variables aléatoires de $\mathcal{V}_d^2$ ayant respectivement pour ensemble image $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ avec pour tout entier i , x_i dans $\mathbb{R}$ et tout entier j , y_j dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = r_{ij}, \\ P([X = x_i]) = p_i, \\ P([Y = y_j]) = q_j. \end{cases}$$

Q3. Quelle(s) condition(s) doit(ven)t vérifier X et Y pour que $r_{ij} = p_i \times q_j$?

Q4. Exprimer $E(X^2)$ en fonction de p_i et de x_i .
Proposer une formulation équivalente pour $E(Y^2)$.

Q5. Montrer que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $p_i = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij}$. En déduire que $E(X^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} r_{ij} x_i^2$.

De la même manière, montrer que $E(Y^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} r_{ij} y_j^2$.

Q6. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Q7. Pour cette question, on admettra le résultat suivant :

Si Z et T sont deux variables aléatoires réelles telles que Z est d'espérance finie et $\forall \omega \in \Omega$, $|T(\omega)| \leq Z(\omega)$, alors T est d'espérance finie et $E(T) \leq E(Z)$.

Montrer que l'espérance de la variable produit XY existe et que :

$$E(XY) \leq \frac{1}{2} (E(X^2) + E(Y^2)).$$

Q8. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω .

I.3 - Artifice de calcul : utilisation de la loi certaine

Sur l'espace Ω muni de la probabilité P , on considère Z une variable aléatoire certaine égale à 1.

Q9. Donner l'ensemble image de Z et sa loi.

Q10. Calculer $E(Z^2)$ et en déduire que Z appartient à $\mathcal{V}_d^2$.

Q11. Déduire des questions **Q7** et **Q10** que si $X \in \mathcal{V}_d^2$ alors X admet une espérance et que :

$$E(X) \leq \frac{1}{2} (1 + E(X^2)).$$

Q12. Dans le cas de deux variables aléatoires *finies* X et Y , on rappelle que la covariance de X et Y est définie par $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$. Montrer que :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \quad (1)$$

Q13. Pour $(X, Y) \in (\mathcal{V}_d^2)^2$, on définit, si elle existe, la covariance de X et Y par la formule (1). Déduire des questions précédentes que si $(X, Y) \in (\mathcal{V}_d^2)^2$, alors X et Y admettent une variance et que leur covariance $\text{cov}(X, Y)$ existe.

Partie II - Étude de la matrice de covariance

Soient $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{V}_d^2$, on définit K , la matrice de covariance des variables aléatoires V_1, V_2, V_3 , comme la matrice carrée d'ordre 3 avec $K = (k_{i,j})$ où pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, $k_{i,j} = \text{cov}(V_i, V_j)$.

II.1 - Étude d'un exemple

On suppose uniquement dans cette sous-partie, que les trois variables aléatoires V_1, V_2 et V_3 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et qu'elles vérifient les conditions suivantes :

il existe $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$ tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et

$$P([V_1 = i] \cap [V_2 = j] \cap [V_3 = k]) = \begin{cases} p_1 & \text{si } j = k = 1, i = 0, \\ p_2 & \text{si } i = k = 1, j = 0, \\ p_3 & \text{si } i = j = 1, k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Q14. Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des variables de Bernoulli respectivement de paramètres $1 - p_1, 1 - p_2$ et $1 - p_3$.

Q15. On pose $S = V_1 + V_2 + V_3$, calculer $P(S = 2)$ et en déduire la variance de S .

Q16. Montrer que $\text{cov}(V_1, V_2) = -p_1 p_2$ et $\text{var}(V_1) = p_1(1 - p_1)$.

Q17. Vérifier que la matrice K est égale à $\begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix}$.

Réduction de la matrice K dans un cas particulier

Q18. Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice K associé à la valeur propre 0.

Q19. Déterminer le rang de K puis son noyau.

Q20. On suppose de plus que $p_2 = p_3 = p$. Exprimer K uniquement en fonction de p , puis montrer que p est une valeur propre de K et préciser la dimension de l'espace propre.

Q21. Toujours dans le cas où $p_2 = p_3 = p$, et en utilisant la trace de K , déterminer toutes les valeurs propres de K et donner son polynôme caractéristique.

II.2 - Retour au cas général

On se place maintenant dans le cas général : V_1, V_2 et V_3 sont trois variables aléatoires discrètes de $\mathcal{V}_2^d$ quelconques. On rappelle que la matrice K est la matrice carrée d'ordre 3 dont le coefficient placé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est $\text{cov}(V_i, V_j)$, avec la définition de la covariance vue à la question **Q12**.

Q22. Montrer que K est une matrice symétrique ; en déduire qu'elle est diagonalisable.

Q23. En calculant la variance de la variable aléatoire $W = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$, montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j) \geq 0. \quad (3)$$

Q24. Montrer que la relation (3) peut s'écrire sous la forme

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad {}^t X K X \geq 0.$$

En déduire que les valeurs propres de K sont positives ou nulles.

PROBLÈME 2

Le problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en les précisant dans la copie.

Étant donné un réel μ , on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \quad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

Dans cette partie, on suppose $\mu = 0$, on cherche donc à résoudre sur $]0, 1[$, l'équation

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' = 0. \quad (E_0)$$

Q25. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Q26. Montrer que toute fonction constante sur $]0, 1[$ est solution de (E_0) .

Q27. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1}$.

Q28. On pose $z = y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à :

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x - 1} \right) z = 0. \quad (E^\star)$$

Q29. Résoudre $(E^\star)$ sur $]0, 1[$.

Q30. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$.

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas où $\mu \neq 0$

On se place dans le cas où $\mu \neq 0$.

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q31. Justifier que y est de classe C^∞ sur un ensemble que vous préciserez.

Q32. Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} [(16n^2 - \mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}] x^n = 0$.

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ) .

Q33. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} a_0$.

Q34. Si $a_0 = 0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ avec p un entier, montrer que y est polynomiale et préciser son degré.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu \neq 16p^2$ pour tout entier p , préciser le rayon de convergence de y .

Partie III - Étude d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.

Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $] -R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **Q33** et R est le rayon de convergence obtenu à la question **Q36**.

Q37. À partir de la relation obtenue à la question **Q33**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)}{4^n (2n)!}.$$

Q38. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (4n)! = -2^{2n} \times (2n)! \times (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$.

Q39. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n} \times ((2n)!)^2 \times (4n-1)}$.

Q40. En admettant la formule de Stirling : $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$, montrer que $a_n \sim \frac{-1}{4 \sqrt{2\pi n}^{3/2}}$.

Q41. Rappeler le rayon de convergence de ϕ et préciser la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Q42. En déduire que l'équation (E_1) admet une solution non-nulle f sur l'intervalle $]0, 1[$.

FIN

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC**

MATHÉMATIQUES**Lundi 30 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

EXERCICE 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la **partie I** on établit des résultats généraux concernant les matrices A et P . Ces résultats sont utilisés dans les **parties II** et **III**, qui sont indépendantes.

Partie I

Q1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .

Q2. Calculer les matrices A^2 et A^3 . Vérifier que $A^3 = 2A - A^2$.

Q3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on admet que λ est une valeur propre de A et on désigne par X un vecteur propre associé à λ . Dédire de la question précédente que λ vérifie la relation :

$$\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2.$$

Q4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 - 2x = 0$.
Que peut-on en déduire pour le spectre de A ?

Q5. Pour chacune des racines obtenues à la **question Q4**, déterminer $\ker(A - \lambda_i I)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q6. a) Dédire de la question précédente que A est diagonalisable.

b) Soit la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Expliquer sans calculs pourquoi on a : $A = PA'P^{-1}$.

Partie II

Q7. On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, résoudre le système (S).

Partie III

Q8. Soit $k \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $\mathcal{C}_k = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = kMA\}$.
Montrer que $\mathcal{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q9. On rappelle que la matrice P est inversible et que A' désigne la matrice qui vérifie $A = PA'P^{-1}$, ou encore $A' = P^{-1}AP$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on lui associe la matrice $N = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$AM = kMA \iff A'N = kNA'.$$

Q10. En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'') \in \mathbb{R}^9$, établir le système d'équations, noté (S') , vérifié par $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'')$ caractérisant l'égalité :

$$A'N = kNA'.$$

Q11. Soit k un réel, on pose $\mathcal{C}'_k = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / A'N = kNA'\}$. On admet que $\mathcal{C}'_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Déterminer la forme des matrices des sous-espaces $\mathcal{C}'_0$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_{-2}$ et $\mathcal{C}'_{-1}$.
- Déterminer une base de $\mathcal{C}'_1$ et une base de $\mathcal{C}'_{-1}$. On rappelle que les ensembles $\mathcal{C}_k$ ont été définis à la question **Q8**.

EXERCICE 2

Q12. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, G désigne une variable aléatoire réelle définie sur Ω . On suppose que G suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- Que vaut $G(\Omega)$? Rappeler les valeurs $P(G = k)$ pour tout $k \in G(\Omega)$.
- Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de G .

Dans la suite de l'exercice, on considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $(n, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

Q13. On tire une boule au hasard dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ? On notera p la valeur trouvée.

Quelle est la probabilité q d'obtenir une boule blanche ?

On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne décrite précédemment. Après chaque tirage la boule piochée est remise dans l'urne. La composition de l'urne est donc identique pour tous les tirages.

On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant d'étudier cette expérience aléatoire.

Q14. a) On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire et B la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

Déterminer les lois de N et de B .

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(N = k \cap B = k)$. Les variables aléatoires N et B sont-elles indépendantes ?

Q15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k l'évènement "obtenir une boule noire au k -ième tirage" et B_k l'évènement "obtenir une boule blanche au k -ième tirage".

On effectue à nouveau une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne. On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient tout d'abord i boules successives d'une même couleur ($i \in \mathbb{N}^*$), puis j boules successives de l'autre couleur ($j \in \mathbb{N}^*$), puis une boule de la couleur initiale et on ne s'intéresse pas aux couleurs obtenues dans les tirages suivants. La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage.

Exemple : l'évènement $(X = 4 \cap Y = 2)$ est réalisé par les évènements "obtenir successivement 4 boules noires, puis 2 boules blanches puis 1 boule noire" ou "obtenir successivement 4 boules blanches, puis 2 boules noires puis 1 boule blanche".

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

a) Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer $P(X = i \cap Y = j)$.

On admet les résultats suivants :

- pour $i \in \mathbb{N}^*$, la série numérique $\sum_{j \geq 1} P(X = i \cap Y = j)$ est convergente ;
- pour $j \in \mathbb{N}^*$, la série numérique $\sum_{i \geq 1} P(Y = j \cap X = i)$ est convergente ;
- les sommes des séries convergentes précédentes vérifient :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}^*, P(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) \\ \forall j \in \mathbb{N}^*, P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = j \cap X = i) \end{cases}$$

b) Déterminer la loi de X .

c) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, P(Y = j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$.

d) i) Montrer que X a une espérance et la calculer.

ii) Montrer que $E(X) \geq 2$.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que Y a une espérance et que $E(Y) = 2$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $P(X = n \cap Y = n) = (pq)^n$. En déduire $P(X = Y)$.

Q16. On considère la variable aléatoire $S = X + Y$.

a) Que vaut $S(\Omega)$?

Soit $k \in S(\Omega)$, décrire l'évènement $(S = k)$ à l'aide des évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$.

b) Si $p = q = \frac{1}{2}$, déterminer $P(S = k)$ en fonction de k .

c) Si $p \neq q$, déterminer $P(S = k)$ en fonction de k .

PROBLÈME

Ce problème est constitué de deux parties. Dans la **partie I**, on établit des résultats préliminaires qui seront utilisés dans la **partie II**.

Partie I - Résultats préliminaires

Q17. a) Résoudre l'équation différentielle (H)

$$y' - y = 0$$

avec la condition de Cauchy $y(0) = 1$.

- b) Déterminer les solutions développables en série entière de (H) .
- c) Retrouver ainsi le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Q18. a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, 6 \times k! \leq (k+3)!$.

- b) Soit $u > 0$, montrer, en utilisant les résultats des **questions Q17c) et Q18a)**, que :

$$\left| \exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

Partie II

Q19. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

- a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Montrer que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner son tableau de variations en précisant les limites de φ aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

Q20. Soit l'application f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

- a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f à l'aide d'une primitive Φ de φ . On justifiera brièvement l'existence de Φ .
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = 2 - \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)$, avec
$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
- d) Résoudre $u(x) > 0$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q21. a) En utilisant un encadrement de $\varphi(t)$ sur $[x, 2x]$, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

b) Dédurre du résultat précédent les limites de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$, puis pour x tendant vers 0.

c) Montrer que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Q22. a) Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t}$.

À l'aide des résultats de la **partie I**, montrer que :

$$\forall x > 0, \forall t \in [x, 2x], \quad \left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t) \right| \leq \frac{1}{6t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{t\sqrt{t}} \varphi(x).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad \left| f(x) - \int_x^{2x} g(t) dt \right| \leq \varphi(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt.$$

Q23. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = x + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln(2).$$

a) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x > 0, \quad |f(x) - h(x)| \leq \beta \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}.$$

En déduire que la courbe représentative de h est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

b) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? Justifier la réponse.

Q24. a) À l'aide de l'équivalent de $f(x)$ déterminé à la **question Q21c)**, déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

b) En utilisant l'encadrement obtenu à la **question Q21a)**, calculer la limite de $x \times f(x)$ pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures.

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est divergente.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

- Q1.** Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

- Q2.** Démontrer que l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X .

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in] -1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

- Q3.** Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in] -1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n .

PROBLÈME

Introduction

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si $x \in]-1, 1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1, 1[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière

On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right), \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer,

pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière

de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

FIN

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

MATHÉMATIQUES 2**Jeudi 2 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

On définit la valuation p -adique pour p nombre premier et n entier naturel non nul.

Si p divise n , on note $v_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n .

Si p ne divise pas n , on pose $v_p(n) = 0$.

L'entier $v_p(n)$ s'appelle la valuation p -adique de n .

- Q1.** Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie le booléen `True` si n est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier $n \geq 2$ qui n'est divisible par aucun entier $d \geq 2$ tel que $d^2 \leq n$, est premier.
- Q2.** En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n .
- Q3.** Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :
- 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20
 - 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10
 - 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5
 - 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n, p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel n non nul et un nombre premier p et renvoie la valuation p -adique de n . Par exemple, puisque $40 = 2^3 \times 5$, `valuation_p_adique(40, 2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40, 5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

- Q4.** Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive**, `val(n, p)` qui renvoie la valuation p -adique de n .
- Q5.** En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$. Cette fonction doit renvoyer la liste des couples $(p, v_p(n))$ pour tous les nombres premiers p qui divisent n . Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.

EXERCICE II

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

- Q6.** Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
- Q7.** Étant donné un endomorphisme u de E , on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$.

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- i. $uov = vov$.
- ii. $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle v(x), v(y) \rangle$.
- iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications :

i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii, iii $\Rightarrow$ ii et ii $\Rightarrow$ i.

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

Partie I – Étude de quelques exemples

- Q8.** Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

- Q9.** On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Ont-elles le même polynôme minimal ?

- Q10.** On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;

deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ .

Q11. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A .

Q12. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

On pourra calculer U^2 .

Q13. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q14. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non

nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A .

Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A .

Préciser une base de vecteurs propres de A .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

Q15. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ , les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q16. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q18. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$

est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition P_n :

« Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q20. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

Q21. Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)} dt.$$

Q1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q2. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .

Q3. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la valeur de Γ_p .

Q4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q7. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$.

Q8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Partie II - Le théorème de Borel

Q9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q10. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \psi(x) = \frac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p -ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :

$$|\varphi_1^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Pour tout réel α , notons φ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot |\varphi_\alpha^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2}.$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x , on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u_n^{(p)}(0) = 0$ et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout réel x , on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q17. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q18. Montrer que $U(0) = a_0$ et pour tout entier $p \geq 1$, $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p$.

Q19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée.
- $\mathbf{M}_p(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$. $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
- On note I_p la matrice identité de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ et 0_p la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ ne comportant que des 0.
- On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M .

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A et un vecteur

propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Q20. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$.

Q21. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q22. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.

Q23. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

Q24. En utilisant la question **Q23**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0, 1)}(2X)$.

Q25. Établir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0, 1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0, 1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0, 1)}$.

En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n , U_{n-1} et U_{n-2} .

Q26. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Considérons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

Q28. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre

$2 \cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q29. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont on précisera la dimension.

Q30. Déterminer l'ensemble E des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q31. En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$.

Q32. En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II - Système différentiel

II.1 - Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

Q33. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC). \quad (1)$$

Q34. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q35. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$, $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

Q36. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q37. Montrer que $\text{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C} ; \mu^2 \in \text{Sp}(M)\}$.

Q38. Soient $\mu \in \text{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2 .

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ .

Q39. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 - Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'' &= -2x_1 + x_2 \\ x_2'' &= x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (2)$$

Q40. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier

ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

Q41. En utilisant la question **Q37**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Q42. En utilisant la question **Q38**, déterminer une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q43. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q44. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x'_1(0), x'_2(0)) = (1, 0, 0, 0)$.

FIN

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

MATHÉMATIQUES**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- Q1.** Justifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.
- Q2.** Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

- Q3.** Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

- Q4.** Conclure que $(X^k | 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

- Q5.** Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Q6.** Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
- Q7.** En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Q8.** Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
- Q9.** En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
- Q10.** Justifier que P_k est de degré k .
- Q11.** Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- Q12.** Montrer que $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.
- Q13.** En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.
- Q14.** Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

- Q15.** Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

- Q16.** En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
- Q17.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

EXERCICE 2

Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Q18.** Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
- Q19.** Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

- Q20.** Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Q21.** En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

- Q22.** Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur]0, 1[ou]1, +∞[

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

Q23. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .

Q24. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

Q25. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

Q26. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Partie III - Solutions de (E) sur]0, +∞[

Q27. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 3

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

- Q28.** Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Q29.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
- Q30.** En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q31.** Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \bar{A}_n \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

Q32. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \dots + X_n)$.

Q33. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q34. En déduire une expression de a_n .

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

Q35. Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\bar{B}_n$ en fonction de A_n et C_n .

Q37. Établir que $P(B_3 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_1)$, puis en déduire que $P(B_3 \mid \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k\right) = \frac{1}{4}.$$

Q38. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?

Q39. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 3 problèmes, tous indépendants.

PROBLÈME 1

Partie I - Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit A la matrice définie par :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Q1.** Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R})$.
- Q2.** L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?
- Q3.** Démontrer que $\ker(A - I_3) = \text{Vect}(\vec{u})$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
- Q4.** Soit $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u})$.
- Q5.** Déterminer les caractéristiques de l'isométrie associée à A dans $\mathbb{R}^3$.

Partie II - Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 et E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc'$.

- Q6.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(E) = 3$.
- Q7.** Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
- Q8.** Soit $\mathcal{B}$ la famille définie par :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Partie III - Application linéaire sur E

On considère E muni du produit scalaire φ défini dans la partie II.

On définit l'application f sur E par : $\forall M \in E$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}.$$

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Q10. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Q11. À l'aide de la partie I, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice B de f dans cette base soit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q12. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $u_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Q13. Calculer u_0, u_1, u_2 .

Q14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q15. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$, pour $n \geq 1$.

Q16. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Q17. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q18. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geq 1$.

Q19. En déduire que $u_n \sim_{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Partie II - Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \text{ pour tout } x \in]-R; R[.$$

Q20. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle ?

Q21. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Q22. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1; 1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x \cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t) dt}{1 - x \cos(t)}.$$

Q23. En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x \cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Q24. Montrer que $S(x) = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2} du$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Q25. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

PROBLÈME 3

Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n , il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0; 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

Partie I - Loi de X

Q26. Donner l'univers-image de $X(\Omega)$.

Q27. Déterminer la loi de X .

Q28. Soit $Y = X - s + 1$.

Montrer que Y est une loi géométrique de paramètre p dont on donnera l'espérance et la variance.

Q29. En déduire l'espérance et la variance de X .

Partie II - Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d . Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

La distance à l'objectif est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet que D_s existe).

Pour simplifier, on prend $p = \frac{1}{10}$ dans cette partie.

Q30. Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^d (d - n)P(X = n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{\infty} (n - d)P(X = n)$.

Q31. Soit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0, u_k = \sum_{i=0}^k (k-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geq 0, u_{k+1} = \frac{9}{10}u_k + k + 1$.

On pourra effectuer un changement d'indice $j = i - 1$.

Q32. Montrer, par récurrence, que pour tout $k \geq 0, u_k = 10k - 90 + 90 \left(\frac{9}{10}\right)^k$.

Q33. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s .

Q34. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X - d)$.

En déduire la valeur de S_2 puis D_s .

Partie III - Optimisation

On admet que, pour tout $p \in]0; 1[, D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Q35. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

Q36. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.

En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α ,

avec $\alpha = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Q37. Dans cette question, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \frac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0,9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

Q38. Simulation : recopier et compléter le programme en **Python** suivant pour simuler notre stratégie.

```
def Bernoulli(q):
    return (random() < q)

def distance(s,d,p):
    X = .....
    while (.....):
        X = .....
    return (abs(X-d))
```

La fonction `Bernoulli` simule une variable de Bernoulli X . Elle prend comme paramètre un nombre à virgule flottante q . La variable q correspond au paramètre de la variable de Bernoulli X . Elle renvoie un booléen qui vaut `True` si $X = 1$ et `False` si $X = 0$.

La fonction `distance` simule notre stratégie. Elle prend comme paramètres des entiers s et d et un nombre à virgule flottante p . Ces variables correspondent aux valeurs introduites dans les sections précédentes. Elle renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

EXERCICE 1

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ avec

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On note Id l'application identité de E .

- Q1.** a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_1 = 1 + X + X^2$ soit un vecteur propre de f . Quelle est alors la valeur propre de f associée au vecteur propre P_1 ?
- b) On suppose que $(a, b) = (4, 1)$. Vérifier que -1 est une valeur propre de f . Déterminer $\ker(f + Id)$.

Pour la suite de l'exercice, on pose $a = 4$ et $b = 1$.

- Q2.** Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f .

- Q3.** On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p_0 + p_1X + p_2X^2, q_0 + q_1X + q_2X^2) &\longmapsto p_0q_0 + p_1q_1 + 2p_2q_2. \end{aligned}$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .

- Q4.** a) Pour tout λ réel appartenant au spectre de f , on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ .
On sait que -1 est une valeur propre de f .
Montrer qu'il existe une valeur propre μ de f telle que E_{-1} et E_μ sont orthogonaux pour le produit scalaire φ . Déterminer μ .
- b) La base $\mathcal{B}'$ de la question **Q2** est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ ?

- Q5.** Soit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (1 + X + X^2, 2X - X^2, 1 + X^2)$.

- a) Montrer que $\mathcal{C}$ forme une base de E .
- b) En utilisant une méthode similaire au processus de Gram-Schmidt, déterminer une famille de vecteurs (Q_1, Q_2, Q_3) , orthogonale pour le produit scalaire φ , vérifiant les conditions suivantes :
- $\text{Vect}(Q_1) = \text{Vect}(1 + X + X^2)$,
 - $\text{Vect}(Q_1, Q_2) = \text{Vect}(1 + X + X^2, 2 - X^2)$,
 - (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de E .
- c) Déterminer les normes des vecteurs Q_1 , Q_2 et Q_3 pour le produit scalaire φ .

- Q6.** a) Soit $P \in E$. On note (α, β, γ) les coordonnées de P dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) déterminée précédemment.
Montrer que les réels α, β, γ peuvent être déterminés à l'aide des produits scalaires de P et des vecteurs Q_i .
- b) Montrer que les sous-espaces $F = \text{Vect}(Q_1)$ et $G = \text{Vect}(Q_2, Q_3)$ sont supplémentaires dans E .
- c) Rappeler la définition de la projection vectorielle sur F parallèlement à G .
Déterminer la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de E .

EXERCICE 2

- Q7.** Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{3}{1+x^2}$.
- a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 + x - 3 = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée α .
Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

- Q8.** On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = f \circ f(x) - x$.
On admet que l'on peut factoriser h sous la forme :

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}.$$

- a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a exactement trois solutions distinctes : α, β, β' , avec $0 < \beta < \alpha < \beta'$, où α est le réel défini à la question **Q7b**.
- b) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}^+$.
- c) Montrer que $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$ et $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère désormais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
où f est la fonction définie et étudiée à la question **Q7**.

- Q9.** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs.
- Q10.** a) On suppose que $u_0 = 1$, calculer les valeurs de u_1 et u_2 . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
- b) On suppose que $u_0 = 2$, calculer les valeurs de u_1 et u_2 . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

- Q11.** a) Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
 b) On suppose que $u_0 \in [0, \beta]$. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

Pour la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant : quelle que soit la valeur donnée à $u_0 \in \mathbb{R}^+$, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

- c) Comparer les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ pour les deux cas particuliers $u_0 = 1$ et $u_0 = 2$.
 d) On appelle ℓ une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $\ell \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$.
 e) Si ℓ' est une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ' ?

On étudie désormais la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon quelques cas particuliers de valeurs de u_0 .

- Q12.** On suppose que $u_0 = \alpha$. Quelle est la particularité de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? La suite est-elle convergente ?
Q13. On suppose que $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$. Quelle est la particularité des suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$?
 Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
Q14. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.
 a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \beta]$.
 b) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\beta', 3]$.
 c) En utilisant les variations de suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
 d) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

EXERCICE 3

- Q15.** a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ est convergente.
 b) En déduire que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ est convergente.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de I .

- Q16.** a) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
 b) i) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2).$$

- ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt, \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2) dt.$$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)_{n \geq 1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$.

- i) Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq I_n.$$

- iii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq I_n \leq v_n.$$

Q17. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. On admet le résultat : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- a) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1} .
 b) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan x$, montrer que :

$$\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}.$$

Indication : on rappelle la relation $\cos^2 t = \frac{1}{1 + \tan^2 t}$.

- c) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

EXERCICE 4

On considère un jeu où une équipe de trois joueurs, J_1 , J_2 et J_3 , doit résoudre une énigme. Les joueurs peuvent obtenir de l'aide en interrogeant deux sources d'information susceptibles de leur communiquer au maximum quatre indices notés i_1 , i_2 , i_3 et i_4 . Les deux sources d'information sont appelées S_A et S_B . Une seule source peut être interrogée par l'ensemble de l'équipe. Le choix de la source d'information se fait de la façon suivante : on jette successivement deux dés à 6 faces, équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note S la valeur obtenue en ajoutant le nombre de points donné par le lancer de chacun des dés. Si $S \leq 6$, on interroge S_A , sinon on interroge S_B .

Q18. On note A l'évènement "interroger S_A " et B l'évènement "interroger S_B ". Déterminer les probabilités de chacun de ces évènements.

Lorsqu'une source est interrogée, elle peut révéler de 0 à 4 indices parmi les 4 possibles. L'information fournie peut être modélisée comme étant un sous-ensemble de $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. On rappelle que l'ensemble des parties de I est noté $\mathcal{P}(I)$ et que $\text{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^4 = 16$. Ainsi, l'ensemble vide $\emptyset$ et les sous-ensembles $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ représentent 3 informations susceptibles d'être communiquées, fournissant respectivement 0, 2 et 3 indices parmi les 4 possibles.

La source S_A connaît 8 informations et la source S_B connaît les 8 informations restantes. La répartition entre S_A et S_B est effectuée de façon aléatoire pour chaque partie jouée par l'équipe. À l'issue de cette répartition, S_A dispose de k informations permettant de connaître l'indice i_4 et les $8 - k$ informations restantes ne donnent pas l'indice i_4 .

La source interrogée révèle à chaque joueur, successivement et de façon indépendante, une information choisie au hasard parmi les 8 dont elle dispose. Il est ainsi possible que la même information soit communiquée à deux ou trois joueurs de l'équipe.

Q19. Combien y a-t-il d'informations contenant l'indice i_4 ? On pourra raisonner en distinguant les valeurs possibles du cardinal d'un sous-ensemble de I .

Q20. Déterminer, en fonction de k , les probabilités des évènements suivants :

- évènement C_i : "le joueur J_i obtient de la source S_A une information contenant l'indice i_4 ", pour $i \in \{1, 2, 3\}$;
- évènement C'_i : "le joueur J_i obtient de la source S_B une information contenant l'indice i_4 ", pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q21. Quelle est la probabilité que l'équipe obtienne exactement deux informations fournissant l'indice i_4 ?

Q22. Quelle est la probabilité que chacun des joueurs obtienne une information fournissant l'indice i_4 ?

Q23. L'équipe a obtenu trois informations fournissant chacune l'indice i_4 . Quelle est la probabilité que ces informations proviennent de la source S_A ?

Q24. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la probabilité obtenue à la question précédente est supérieure ou égale à 0,8.

Indication : on pourra tester les valeurs numériques possibles avec une calculatrice.

EXERCICE 5

On décide de simuler des tirages répétés avec remise à l'aide d'un programme informatique. Ce programme détermine aléatoirement un entier $n \in \mathbb{N}^*$, puis génère une liste de n valeurs, elles aussi choisies aléatoirement parmi les nombres 0 et 1. Les choix des n valeurs sont indépendants et à chaque étape de génération d'un élément de la liste, la probabilité d'obtenir 1 est égale à λ , avec $\lambda \in]0, 1[$.

On note :

- L_n l'évènement : "on a généré une liste de n valeurs" ;
- S_k l'évènement : "la liste obtenue contient exactement k fois la valeur 1" ;
- T_k l'évènement : "la liste obtenue contient au moins k valeurs".

Q25. Soient $p \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que la probabilité d'obtenir la valeur n est égale à $a \times p^n$.

Rappeler la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(X = n)$.

En déduire la valeur de a .

Q26. Déterminer la probabilité de l'évènement T_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Q27. a) Déterminer $P(S_k | L_j)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j \geq k$.

b) En déduire que la probabilité d'obtenir exactement k fois la valeur 1 dans une liste générée contenant au moins k valeurs est égale à :

$$P(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!} (\lambda p)^k \sum_{j=k}^{+\infty} j(j-1) \cdots (j-k+1) \left((1-\lambda)p \right)^{j-k}.$$

Q28. a) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, rappeler l'expression de son développement en série entière au voisinage de 0 et la valeur du rayon de convergence de la série obtenue. On ne demande pas de démontrer ces résultats.

b) Énoncer le théorème de dérivation d'une série entière sur son intervalle de convergence. En déduire la probabilité de l'évènement S_k conditionné par l'évènement T_k .

On pourra utiliser le résultat : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1**Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un problème qui comprend quatre parties indépendantes.

Objectifs

L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels.

La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue.

La **partie III** étudie des développements ternaires aléatoires.

La **partie IV** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue.

Notations

On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0; 1; 2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n \in \{0; 1; 2\}.$$

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n|$.

On note $[y]$ la partie entière d'un réel y .

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que l'application $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ .

Q2. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, démontrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.
On note alors :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Q3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞ .

Q4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

Q5. On note $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \tau_n = 0 \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \tau_n = 2.$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n(x) = [3^n x] - 3[3^{n-1} x].$$

Q6. Démontrer que $t(x) \in T$.

Q7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x . En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\begin{cases} T \rightarrow [0,1] \\ u \mapsto \sigma(u) \end{cases}$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est appelée *développement ternaire propre* de x .

Q8. Informatique pour tous. Écrire en langage Python une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \dots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x .

Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Q9. Informatique pour tous. Si $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ .

Écrire en langage Python une fonction `ternVersFlot( $\ell$ )` d'arguments une liste d'entiers ℓ . Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.

Par exemple `ternVersFlot([1,1,1,1])` renvoie `0.493827.....`

Q10. Informatique pour tous. Si $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $\ell_1 + \dots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.

Écrire en langage Python une fonction `ajout( $\ell$ )` qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.

Écrire en langage Python une fonction `verif( $\ell$ )` qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.

Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q11. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q12. Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} \right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q13. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q14. À l'aide de $\int_0^\pi \varphi(x) dx$ démontrer que :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 3^{n+1}} ((-1)^{n-1} + 1)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)} dx.$$

Q15. Retrouver cette valeur par un calcul direct.

PARTIE III - Développement ternaires aléatoires

Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n \geq 1, N \geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T_{n,N} = 0) = \mathbb{P}(T_{n,N} = 1) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbb{P}(T_{n,N} = 2) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^N \frac{T_{n,N}}{3^n}.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Q16. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leur valeur en fonction de N .

Q17. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) = 0$$

Q18. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0.$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q19. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0 , f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q20. Informatique. Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q21. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Q22. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée f .

On l'appelle *fonction de Cantor-Lebesgue*.

Q23. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2**Mardi 5 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites
--

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Q1.** Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
- Q2.** Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$.
- Q3.** Déterminer, pour tout entier naturel non nul n , les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P .
- Q4.** Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2 .

EXERCICE II

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q5.** L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Q6.** Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Q7.** Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :
$$\exists \rho > 0, \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Q8.** Application
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
À l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

Q9. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \mid \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E , $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k .

On notera $\text{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E .

$O(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

Q10. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

Q11. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les trois points $M(2, 1)$, $N(4, 1)$, $P(4, 2)$ et on définit les points M' , N' , P' par les relations $u(\vec{OM}) = \vec{OM'}$, $u(\vec{ON}) = \vec{ON'}$, $u(\vec{OP}) = \vec{OP'}$.

Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

Q12. Démontrer que tout élément de $\text{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\text{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

Q13. Soient u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Démontrer que u est un automorphisme orthogonal de E , si et seulement si, ${}^t A.A = I_n$.

Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k .

Q14. Exemple

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

d'une similitude u dont on donnera le rapport. Donner la matrice de la similitude u^{-1} .

Vérifier que, pour tout élément f de $O(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$.

Q15. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$. Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E .

On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q16. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αid_E .

Démontrer que $u \in \text{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.

Q17. Exemple

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

Q18. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

En déduire que u est une similitude de rapport k , si et seulement si,

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle.$$

Q19. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k , alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) | u(y) \rangle = 0$.

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Démontrer que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0, \text{ puis que : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

Après avoir justifié que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u(e_i)\| = k \|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k .

Q20. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$.

Démontrer que u est un endomorphisme de E , puis que u est une similitude de E .

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES**Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Autour de la fonction sinus cardinal

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

- Q1.** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(t)| \leq t$.
- Q2.** Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.
- Q3.** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
- Q4.** Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .
- Q5.** Trouver une expression simple pour G et pour H . On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \cos(\alpha t) dt$.
- Q6.** En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Partie II - Autour de la formule de Viète

- Q7.** Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

- Q8.** Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

Q9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Q10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}.$$

Q11. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

Q12. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}.$$

Q14. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **Q11**.

PROBLÈME 2

Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**. La **Partie IV** est une utilisation probabiliste d'une des deux matrices de Kac.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Q15.** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
- Q16.** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
- Q17.** Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.
- Q18.** La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C}).$$

- Q19.** Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B .

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Q20. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q21. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n .

Q22. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q23. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

Q24. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_k \in V_n$.

Q25. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer g'_k . En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q26. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q27. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n + 1$

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice A_n . On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général a_{kl} de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leq k \leq n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leq k \leq n + 1$,
- $a_{kl} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k -ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

Q28. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p . Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl} , puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl} .

Q29. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -i B_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n .

Q30. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et que :

$$\text{Ker}(A_n - n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Objectifs

Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n . Seul le résultat de la question **Q30** est utilisé, cette partie peut être traitée en admettant si besoin ce résultat.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n . On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1 .

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k .

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2 . On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1 . On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k .

Q31. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$?

Q32. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k , combien peut-elle en contenir à l'instant $k + 1$?

Q33. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q34. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Q35. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

où A_n est la matrice introduite dans la **Partie III**.

On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2 .

Q36. Déterminer la loi π de N_0 .

Q37. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0 . *On pourra utiliser la question Q30 de la Partie III.*

Q38. Démontrer que π est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π , alors toutes les variables N_k suivent la loi π .

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES**Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

- Q1.** Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Q2.** En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

- Q3.** Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

- Q4.** Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
- Q5.** Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

- Q6.** En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Q7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

Q8. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I .

EXERCICE 2

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et on considère l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n . On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i = j \\ \frac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

- Q11.** Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2 .
- Q12.** En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2 .
- Q13.** Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- Q14.** En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1 .
- Q15.** Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2 .

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.

On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Q17. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q18. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

Q19. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.

Q20. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n .

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

Q22. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

EXERCICE 3

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'évènement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q23. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q24. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .

Q25. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Q26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q27. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .

Q28. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. Montrer que $R_p \geq 1$.

Q30. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

Q31. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q32. Calculer q_1 et q_2 .

Q33. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

Q34. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q35. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q36. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q37. En utilisant **Q33** et **Q35**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q38. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES**Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

(Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre)

Partie I - Préliminaires

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodiques.

Soit k un élément de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f_k : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(kx) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g_k : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array}$$

On pose $C_k = \text{Vect}(f_k)$ et $S_k = \text{Vect}(g_k)$.

Q1. Montrer que C_k et S_k sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.

Soient (f, g) des éléments de E^2 , on définit : $\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Q2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

On munit pour la suite l'espace vectoriel E du produit scalaire φ .

Q3. Calculer la norme de f_k et en déduire une base orthonormée de C_k .

Q4. Soit f un élément E , donner l'expression de la projection orthogonale de f sur C_k .

Q5. Soient f un élément de E et k un élément $\mathbb{N}$, exprimer $\varphi(f, f_k)$ en fonction des coefficients de Fourier de f .

Q6. Soit f un élément de E , donner le lien entre la projection de f sur C_k et les coefficients de Fourier de f .

Partie II - Série de Fourier

Soit f la fonction définie pour tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |\sin(2x)|$.

Q7. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

Q8. Étudier f sur un domaine le plus restreint possible. Donner la représentation graphique de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Q9. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

Q10. Linéariser $\sin(2x) \cos(4nx)$.

Q11. Montrer que pour tout élément n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(4nx) dx = \frac{-1}{4n^2 - 1}$.

Q12. Donner les coefficients de Fourier de f .

Q13. En utilisant le développement de Fourier de f pour $x = \frac{\pi}{4}$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4}$.

PROBLÈME 2

Partie I - Exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{4}(x + 3y, 3x + y)$.

Q14. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id)$.

Q15. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Partie II - Cas général

Dans cette **partie**, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E .

On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id)$.

Q16. Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de Id_E et de f .

Q17. Justifier que $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Q18. Montrer que : $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}Id_E)$.

Q19. Calculer $(f + \frac{1}{2}Id_E) \circ (f - Id_E)$. En déduire que $\ker(f + \frac{1}{2}Id_E) = \text{Im}(f - Id_E)$.

Q20. Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et Id_E .

Q21. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que : $f^n = a_n f + b_n Id_E$.

Déterminer a_0, b_0, a_1 et b_1 . Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour n dans $\mathbb{N}$.

Q22. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour n élément de $\mathbb{N}$.

Q23. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n) de termes général a_n respectivement b_n .

PROBLÈME 3

Partie I - Préliminaires

Q24. Justifier que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Q25. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q26. En déduire que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q27. En déduire que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.

Pour la suite, on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

Q28. Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

Q29. Montrer que pour tout p élément de $\mathbb{N}$, $I_{2p+1} = 0$.

Q30. Montrer que pour tout p appartenant à $\mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

Partie II - Recherche des extrema

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$.

Q31. Montrer que pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

Q32. Calculer les dérivées partielles premières de F et en déduire les trois points critiques de F .

Q33. Calculer pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $F(x, x) - F(0, 0)$ et $F(x, -x) - F(0, 0)$.

Q34. Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local ?

Partie III - Intégrale dépendant d'un paramètre

Q35. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent.

Pour la suite, on note $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$.

Q36. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral sans oublier les hypothèses.

Q37. En appliquant la formule précédente à la fonction $\sin$, montrer que pour tout (λ, a) éléments de $\mathbb{R}^2$, $|\sin(\lambda + a) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

Q38. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0$.

Q39. En déduire que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Q40. Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$ (on pourra effectuer une intégration par partie).

Q41. Donner une équation différentielle dont S est solution sur $\mathbb{R}$.

Q42. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES**Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -(4a + a^2) & -(2a + 2) \end{pmatrix}$.

- Q1.** a) Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle inversible ?
b) Déterminer le rang de M_a lorsque M_a n'est pas inversible.

Q2. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a associé à une valeur propre λ que l'on précisera. Déterminer le sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ .

- Q3.** a) Calculer le polynôme caractéristique de M_a .
b) Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a .
c) Montrer que M_a n'est pas diagonalisable. On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.

Q4. Étude d'un cas particulier

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $\varepsilon_1 = (1, -2, 4)$.

- a) Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.
b) Montrer qu'il existe un vecteur ε_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Q5. Étude du cas $a \neq -2$

On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, λ désigne la valeur propre déterminée à la question **Q2**. On rappelle que U est un vecteur propre de M_a , associé à la valeur propre λ .

- a) Expliquer pourquoi M_a a exactement deux valeurs propres réelles λ et $-a$.
b) Déterminer un vecteur propre V de M_a , de première composante égale à 1, associé à la valeur propre $-a$.
c) Déterminer $W = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_a W = V - aW$.
d) Montrer que M_a est semblable à la matrice $T_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

Q6. Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -18u_n + 3u_{n+1} + 4u_{n+2} \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$. Identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = M_a$.

b) Déterminer une matrice triangulaire supérieure T et une matrice P inversible, telles que $A = PTP^{-1}$.

c) En décomposant T sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Donner l'expression de X_n en fonction de X_0 , T , P et P^{-1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Un professeur interroge une classe de N élèves, avec $N \in \mathbb{N}^*$. Il dispose d'une liste de questions, éventuellement infinie et pour chaque question il interroge au hasard un élève. Les élèves sont appelés $E_1, E_2, \dots, E_N$, on note $E = \{E_i / i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ l'ensemble des élèves.

On introduit les notations suivantes : pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Q_{i,k}$ l'évènement "l'élève E_i est interrogé pour répondre à la question numéro k ".

On considère que les désignations d'élèves pour les différentes questions sont des évènements mutuellement indépendants et que, pour une question donnée, tous les élèves ont la même probabilité d'être choisis.

L'univers Ω permettant de décrire cette situation est l'ensemble $\Omega = E^{\mathbb{N}^*}$ des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans E . Ce sont donc les suites notées $(e_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant : $\forall p \in \mathbb{N}^*, e_p \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'élèves différents interrogés sur l'ensemble des n premières questions posées.

Par exemple pour $n = 6$ et $N = 15$, si on a interrogé successivement les élèves : $E_3, E_1, E_7, E_1, E_{12}$ et E_3 , on a $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 3, X_5 = 4$ et $X_6 = 4$.

On notera qu'on a obligatoirement $X_1 = 1$.

On note U_n la matrice à N lignes et 1 colonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$, où $P(X_n = i)$

désigne la probabilité d'avoir interrogé i élèves différents sur l'ensemble des n premières questions, avec $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Partie I - Étude de X_2

Considérons dans cette partie que le professeur pose deux questions.

Q7. Déterminer $X_2(\Omega)$.

Q8. Montrer que $P(X_2 = 1) = \frac{1}{N}$, puis finir de déterminer la loi de probabilité de X_2 .

Q9. Calculer l'espérance de X_2 .

Partie II - Modélisation dans le cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n \geq 2$. On considère la variable aléatoire X_n .

Q10. a) Déterminer $X_n(\Omega)$.

b) Si $n < N$, déterminer $P(X_n = i)$ pour $i \in \llbracket n + 1, N \rrbracket$

c) Que vaut $P(X_n = 1)$?

d) Soit $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$, montrer que :

$$P(X_n = i) = \frac{i}{N}P(X_{n-1} = i) + \frac{N - i + 1}{N}P(X_{n-1} = i - 1).$$

Q11. Montrer qu'il existe une matrice $A_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad U_n = A_N \cdot U_{n-1}.$$

Préciser les coefficients de la matrice A_N .

Partie III - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on étudie le cas particulier $N = 5$.

Q12. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \quad U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} U_{n-1}.$$

On pourra utiliser les résultats de la question **Q11** ou calculer directement $P(X_n = i)$ pour $n \geq 2$ et $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Q13. On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} V_1 + 4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} V_2 + 6\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} V_3 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} V_4 + V_5.$$

Q14. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q15. a) Justifier que X_n admet une espérance $E(X_n)$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = E(X_n)$.

On admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1.$$

b) Déterminer une suite constante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_{n+1} = \frac{4}{5}\lambda_n + 1$.

On note λ la valeur de cette suite constante.

c) Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - \lambda$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique et déterminer l'expression générale de v_n .

d) En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat est-il compatible avec la valeur $E(X_2)$ calculée à la question **Q9** ?

e) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$. Quelle interprétation peut-on donner du résultat ?

EXERCICE 3

Soit un réel α vérifiant $\alpha \in]0, 1]$. On appelle série de Gregory de paramètre α , la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\alpha^n}{2n+1}$.

Dans l'ensemble de l'exercice, on note G_α une série de Gregory ainsi définie.

Partie I - Étude de la convergence de la série G_1

On note de façon usuelle $g_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ le terme général de la série G_1 .

Q16. Expliquer pourquoi la série G_1 n'est pas absolument convergente.

Q17. On définit la suite (S_n) des sommes partielles de la série G_1 par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On a ainsi : $u_2 = S_4 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, et $v_2 = S_5 = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5$.

- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$.
- b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- c) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
- d) Montrer que la suite (v_n) est majorée par u_0 . En déduire qu'elle est convergente de limite ℓ_1 .
- e) De façon similaire, montrer que (u_n) est convergente de limite ℓ_2 .
- f) Montrer que la série G_1 converge et exprimer sa somme en fonction de ℓ_1 et ℓ_2 .

Partie II - Étude d'une série de Fourier, calcul de la somme de G_1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodique, impaire, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \pi[, f(x) = 1 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Q18. Représenter graphiquement f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Q19. Déterminer la série de Fourier de la fonction f .

Q20. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .

Q21. En déduire la valeur de la somme de la série de Gregory G_1 , définie en **partie I**.

Partie III - Séries de Gregory pour $\alpha \in]0, 1[$

Q22. Montrer que G_α est absolument convergente pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

On note désormais $G(\alpha)$ la somme de la série G_α . Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a : $G(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{2n+1}$.

Q23. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

- Q24.** En déduire que la fonction $\arctan$ est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série entière ainsi déterminée ?
- Q25.** En déduire l'expression de $G(\alpha)$ à l'aide de la fonction $\arctan$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

On pourra remarquer que $\alpha = (\sqrt{\alpha})^2$ et faire apparaître $\sqrt{\alpha}$ dans l'expression du terme général de la série $(-1)^n \frac{\alpha^n}{2n+1}$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE II

Q3. Justifier que la fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x; y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

PROBLÈME

Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}.$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):  
    if not (0 <= p <= n):  
        return 0  
    return factorielle(n) // (factorielle(p) * factorielle(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30, 10)` ?

Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par

`return factorielle(n) / (factorielle(p) * factorielle(n-p))` ?

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n . On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n . On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A, ab = n\}$.

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

FIN

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

MATHÉMATIQUES 2**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Notations pour l'ensemble du sujet :

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(K)$ le K -espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans K .
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE

Q1. On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B \rangle = \text{trace}({}^t A.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(K)$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur K , alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(K)$ vérifiant les quatre propriétés :

- (1) $A = D + N$;
- (2) D est diagonalisable dans $M_n(K)$ (pas nécessairement diagonale) ;
- (3) N est nilpotente ;
- (4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A .

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(K)$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(K)$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A , puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q5. Application

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A .

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en Q4.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, $\exp(M + N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2 .

Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})^2$.

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$\ker(u - \text{id}) = \text{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\text{id}) = \text{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\text{id})^2 = \text{vect}\{e_2, e_3\}$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A .

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes

U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\text{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{id})$.

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \text{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\text{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\text{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \text{id})$.

- Q12.** On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question Q8).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

- Q13.** Soit E un K -espace vectoriel de dimension n .
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i .
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v .
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
- Q14.** Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(K)$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
- Q15.** Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(K)$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.
- Q16.** Déterminer les matrices de $M_n(K)$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
- Q17.** Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(K)$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A .
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

- Q18.** On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
 $\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.
- Q19.** Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Q20.** Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A , on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D .
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES**Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

EXERCICE

Étude d'extremums

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f .

- Q1.** Déterminer les points critiques de f .
- Q2.** Expliciter des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) < 0$.
Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) > 0$.
La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.

- Q3.** Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, $g(u, v)$ puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, $g(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- Q4.** Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, on a : $g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r \right)$.
Que peut-on en conclure ?
- Q5.** La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

PROBLÈME 1

Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α .

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

- Q6.** Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α .
- Q7.** Déterminer, suivant les valeurs du réel α , le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α . *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.*
- Q8.** On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
- Q9.** Expliciter f_0 , f_{-1} et f_1 .
- Q10.** Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.
- Q11.** Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1 .*

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

- Q12.** Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.

- Q13.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.

Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II - Un logarithme complexe

Q14. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q15. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S . Pour tout x réel élément de $] - R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q16. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .

Q17. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q18. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q19. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$.

Q20. Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q21. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.
Pour tout $x \in]0, 1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1 - \alpha)$.

Q22. Prouver que, pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q23. En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt.$$

Q24. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

PROBLÈME 2

Pour tout $C \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$ (respectivement $\mathbf{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.

On montre d'abord que $\det(I_n + C\bar{C}) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C , où $\bar{C}$ désigne la matrice conjuguée de C , c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C .

On montre ensuite que $\det(I_n + C^2) \geq 1$ dans le cas particulier des matrices symétriques réelles C .

On considère enfin le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det(I_n + C^2) \in \mathbf{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}^+$.

Partie I - Trois cas particuliers

Q25. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale. Démontrer que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}$ et que :

$$\det(I_n + C\bar{C}) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathbf{M}_n(\mathbf{C})}$.

Q26. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$\det(I_n + C^2) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathbf{M}_n(\mathbf{R})}$.

Q27. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}), \det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$.

Q28. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det(I_n + C^2) \in \mathbf{R}^+$ et que $\det(I_n + C^2) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

Partie II - Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et on démontre que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbf{R}^+$.
Seule la Q27 de la partie I sera utile pour la suite.

Q29. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}.$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$.

Q30. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbf{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1) .

Q31. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathbf{M}_n(\mathbf{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

Q32. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}), \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Q33. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :

- a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$, $C_0 \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \Omega \left(C_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$;
- b) $\Omega \circ \Omega = -\text{id}_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}$;
- c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $\Omega \left(\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \overline{\lambda} \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$.

Q34. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est libre et que le plan $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right)$ est stable par Ω .

Q35. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C}) \setminus E$.

Montrer que :

$$E \cap \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \right) = \{0_{\mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbf{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \ker \left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} \right).$$

On admet, pour traiter la **Q38**, que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

Q36. Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.

Q37. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(C_0) \cap \mathbf{R}$, alors F_λ est de dimension paire.

Q38. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbf{R}^+$.

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

- Q1.** Déterminer la loi de X_1 .
- Q2.** Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .
- Q3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Q4.** Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
- Q5.** À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

- Q6.** Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

EXERCICE 2

Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{P})$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q12. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.

Q13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

Q14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q16. Montrer que si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème (P).

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Q19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+ .

Q20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

Q23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q24. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = - \int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt.$$

EXERCICE 3

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et par $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M .

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q27. Dédurre des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right).$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A .

Q30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.

Q31. Étudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Q32. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Q33. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S .

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie C_P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+\}.$$

Q34. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in C_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.$$

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_P par :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2} (U_{k-1} + S U_{k-1}^{-1}).$$

On considère également la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1} U_k P$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q35. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1} . En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie **I** de cet exercice.

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{\text{Tr}(BB^T)}.$$

On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q36. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.

Q37. En déduire à l'aide de la question **Q29** que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leq \frac{\text{Tr}(S) + n}{2^k}.$$

Q38. Conclure que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers R .

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

**Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.
Le problème 1 est composé de trois parties et les problèmes 2 et 3 de deux parties.**

PROBLÈME 1

On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$ et on pose $I =]0, +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

- Q1.** Calculer $g(1)$ et justifier que g est dérivable sur I .
- Q2.** Dresser le tableau de variations de g et préciser ses limites aux bornes de I .
- Q3.** Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
- Q4.** On admet que $g(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$ $\underset{x \rightarrow 1}{}$. Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .
- Q5.** Représenter sur l'intervalle $]0, 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue dans la question précédente sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \approx 0,37$ et $g(e^{-1}) \approx 0,69$.
- Q6.** En utilisant le graphique, justifier l'encadrement $e^{-1} < \int_0^1 x^x dx < 1$.

Partie II - Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x dx$

II.1 - Un calcul d'intégrales

- Q7.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 x^n dx$.
- Q8.** Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n \ln(x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera la fonction prolongée de la même façon.

- Q9.** Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln(x))^{k-1} dx.$$

- Q10.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire par récurrence sur k , que pour tout entier naturel k , on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln(x))^k dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n, k) = (0, 0)$.

II.2 - Expression de $\int_0^1 x^x dx$ à l'aide d'une série

Q11. Rappeler le développement en série entière de $z \mapsto e^z$ ainsi que son rayon de convergence.

Q12. Justifier que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln(x))^n}{n!} dx$.

Q13. En déduire l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Q14. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ le reste au rang p de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ et on admet l'inégalité $|R_p| \leq \frac{1}{(p+2)^{p+2}}$.

Dans le langage Python, écrire une fonction `approximation(e)` qui prend en paramètre un nombre réel strictement positif e et qui renvoie un nombre réel représentant l'approximation de $\int_0^1 x^x dx$ dont l'erreur maximale commise est e .

Donner ensuite une valeur approchée de $\int_0^1 x^x dx$ à $\frac{1}{27}$ près.

Partie III - Étude du point critique de la surface $z = x^y - x$

Dans cette partie, on suppose l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct. Soit f la fonction de deux variables définie par $f : (x, y) \mapsto x^y - x$.

Q15. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et le représenter dans le plan.

Q16. Montrer que f admet un et un seul point critique dans D_f et vérifier que la valeur de f en ce point critique vaut 0.

Q17. Montrer que :

$$f(1+h, 1-h) \underset{h \rightarrow 0}{=} -h^2 + o(h^2).$$

Q18. À l'aide des **questions Q4 et Q17**, justifier que le point critique n'est pas un extremum.

Q19. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(1, 1, 0)$.
Que peut-on affirmer sur la position relative de ce plan tangent à la surface ?

PROBLÈME 2

Calcul d'une limite à l'aide d'une série de Fourier

Pour n un entier naturel, on s'intéresse à l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} e^{-x} dx.$$

Partie I - Existence des I_n et réécriture

Q20. Déterminer la nature de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Q21. Montrer que la série $\sum_{p \geq 0} e^{-p\pi}$ converge et préciser la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p\pi}$.

Q22. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer l'égalité $1 - e^{i2\theta} = -2ie^{i\theta} \sin(\theta)$.

Q23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}.$$

On pourra effectuer le changement d'indice $k \leftarrow k + n$.

Q24. En déduire que, pour tout réel x positif, on a :

$$\left| \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} e^{-x} \right| \leq (2n+1)e^{-x}.$$

Q25. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge, puis justifier que l'on peut écrire :

$$I_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \left(\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} \right) e^{-x} dx.$$

Partie II - Étude de la convergence de (I_n)

On considère f la fonction définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$f : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}.$$

On note encore f son prolongement 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ et on considère les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\begin{aligned} - \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) \, dt; \\ - \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) \, dt. \end{aligned}$$

Q26. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $a_k(f) + a_{-k}(f)$ en fonction de $a_k(f)$ et calculer $b_k(f) + b_{-k}(f)$.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du changement de variables $t = 2x - 2p\pi$, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} e^{-\frac{t}{2} - p\pi} \, dt \right).$$

Q28. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la **question Q21**, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{2} \frac{\pi}{1 - e^{-\pi}} \sum_{k=-n}^n a_k(f) + i b_k(f).$$

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la **question Q26**, montrer que :

$$I_n = \frac{\pi}{1 - e^{-\pi}} \left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \right).$$

Q30. En appliquant le théorème de Dirichlet à f évaluée en 0, montrer enfin que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

PROBLÈME 3

Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) . Pour X une variable aléatoire sur Ω , on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.

On dit qu'une variable aléatoire X sur (Ω, P) suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P(X = -1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Partie I - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1 - Rotations du plan

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Q31. Donner la matrice de rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'angle θ .

On note f_θ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à cette matrice de rotation.

Q32. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy$ dans $\mathbb{C}$.

Q33. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}z \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

I.2 - Racines n -ièmes de l'unité

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

Q34. Montrer que $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ sont précisément les racines n -ièmes de l'unité.

Q35. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$.

Q36. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ω_3 .

I.3 - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n . Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, i, -1, -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n$.

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\}$ est un système complet d'événements de Ω , justifier que :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i).$$

Q39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = i)$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -i)$.

On note la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Q40. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q41. La matrice M est-elle inversible ?

Q42. Montrer que -1 est valeur propre de M .

Q43. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Q44. Déterminer une base de l'image de M et retrouver le fait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ grâce aux dimensions des sous-espaces propres.

Q45. Soit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$. On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique

l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Expliquer la démarche, sans mener les calculs, pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = i)$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -i)$.

Partie II - Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, X(\Omega) \text{ est fini}\}.$$

Q46. Montrer que si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et montrer que $E(X) = 0$.

Q47. Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par :

$$\Phi(X, Y) = E(XY)$$

où E désigne l'espérance et (X, Y) est un couple dans $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$.

Q48. Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

II.2 - Orthonormalité et projection

On considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

Q49. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ .

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$.

Q50. Déterminer la dimension de F .

Q51. Montrer que si $X \in V_f(\Omega)$ est indépendante de chacune des variables $X_1, \dots, X_n$, alors $X \in F^\perp$ où $F^\perp$ désigne l'orthogonal de F pour le produit scalaire Φ .

Q52. Soit $X = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$. Déterminer la loi de X puis la distance de X à F .

FIN



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de E .

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Q1.**
- a) Déterminer les valeurs propres de f et vérifier que -1 est une valeur propre de f . Peut-on savoir à ce stade si f est diagonalisable ?
 - b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f . *La première coordonnée de chaque vecteur sera prise égale à 1.*
 - c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

Q2. On note $(f + id)^2$ l'application composée $(f + id) \circ (f + id)$.

- a) Déterminer une base de $\ker((f + id)^2)$ vérifiant les conditions suivantes :
 - la première coordonnée de chaque vecteur de la base est égale à 1 ;
 - le premier vecteur de la base appartient à $\ker(f + id)$.
- b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker((f + id)^2) \oplus \ker(f - 3id)$.

Q3. a) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Préciser la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}'$.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En décomposant

$$T = D + N \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de T^n en fonction de n .

- c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

Q4. Application

On considère les suites réelles $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 3v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 4v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre X_n, P, T, n et X_0 .
 b) En déduire qu'il existe trois matrices C, C', C'' de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (-1)^n(C + nC') + 3^n C''.$$

On ne demande pas de calculer C, C', C'' ou P^{-1} .

- c) Le résultat précédent montre qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n(\alpha + \beta n) + 3^n \gamma.$$

On donne $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $u_2 = -1$. Déterminer l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Q5. Questions de cours

- a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$.
 b) En déduire les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$, puis $x \mapsto \ln(1+x)$. On précisera les intervalles de convergence et les théorèmes du cours utilisés.

Q6. Calcul d'une somme

Soit φ une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in [0, 2\pi[, \varphi(x) = x^2$.

- a) Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
 b) Le développement en série de Fourier de φ est :

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Montrer que $a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n^2}$.

Déterminer α .

Il n'est pas demandé de calculer les coefficients b_n .

- c) Étudier la convergence simple de cette série de Fourier.
 d) En choisissant judicieusement une valeur de x , montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

- Q7.** a) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.
 b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$.
 c) Montrer que f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et préciser les coefficients a_n obtenus dans l'écriture $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

On définit la fonction F par :

$$\forall x \in] - \infty, 1[, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- Q8.** a) Expliquer pourquoi F est bien définie sur $] - \infty, 1[$ et préciser le lien entre les fonctions f et F .
 b) Étudier les variations de F sur $] - \infty, 1[$. *On ne cherchera pas à calculer les limites de F aux bornes de son domaine de définition.*
 c) Déterminer le signe de $F(x)$ pour $x \in] - \infty, 1[$.

Q9. Montrer que F est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Q10. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, \quad F(x) = \int_{1-x}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0, 1[$, on pose :

$$I_n(x) = \int_{1-x}^1 t^n \ln(t) dt.$$

Q11. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, \quad I_n(x) = \frac{-(1-x)^{n+1} \ln(1-x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Q12. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, \quad F(x) = \sum_{k=0}^n I_k(x) + \int_{1-x}^1 \frac{t^{n+1}}{1-t} \ln(t) dt$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1[, \quad \left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| = \int_0^x |f(u)| (1-u)^{n+1} du$.
On pourra utiliser un changement de variable .

- d) Soit $x \in]0, 1[$. Expliquer pourquoi la fonction $|f|$ est majorée par une constante M_x sur $[0, x]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| \leq \frac{M_x}{n+2}.$$

- e) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x)$.

En déduire que :

$$\forall x \in]0, 1[, F(x) = \ln(x) \ln(1-x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}.$$

- Q13.** À l'aide du résultat précédent et des résultats des **Q6** et **Q9**, déterminer β et γ réels tels que :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \beta (\ln(2))^2 + \gamma \pi^2.$$

- Q14.** Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

- a) Justifier le résultat : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x) = 0$.

- b) Soit $x \in]0, 1[$.

En utilisant le résultat $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n^2} \leq (1-x)^n$, montrer que :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} \leq \frac{1-x}{x}.$$

- c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

EXERCICE 3

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Notations

Si $n_1 \leq n_2$, la notation $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers $\{n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2\}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \dots, n$, indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante :

- on pioche une boule dans l'urne ;
- on note son numéro, puis on la remet dans l'urne ;
- on recommence *indéfiniment* les deux étapes précédentes.

On admet qu'avec un tel protocole, les différents tirages sont mutuellement indépendants.

On adopte alors les notations suivantes :

- pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Y_k la variable aléatoire égale au " nombre de tirages nécessaires pour obtenir k boules distinctes " ;
- pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on pose $Z_k = Y_{k+1} - Y_k$. Par convention $Z_0 = Y_1$.

Par exemple, en prenant $n = 3$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

$$2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1 \dots$$

on aura $Y_1 = 1, Y_2 = 4, Y_3 = 10$ et donc $Z_1 = 1, Z_2 = 3, Z_3 = 6$.

A - Étude du cas particulier $n = 2$

Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$; l'urne contient donc deux boules numérotées de 1 à 2.

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on note D_k l'évènement " au k -ième tirage, on pioche une boule différente de celle du premier tirage ".

Les évènements D_k sont mutuellement indépendants.

Q15. Quelle est la loi de Y_1 ?

Q16. Donner l'univers image de Y_2 .

Q17. a) Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Exprimer l'évènement $(Y_2 = m)$ à l'aide d'évènements D_k avec $k \geq 2$.

b) En déduire que :

$$\forall m \in Y_2(\Omega), P(Y_2 = m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}.$$

c) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Soit $x \in [0, 1[$, calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$.

d) Justifier que Y_2 admet une espérance qui vaut 3.

Montrer que Y_2 admet une variance et calculer sa valeur.

B - Étude du cas général

On suppose dans cette partie que le nombre n de boules dans l'urne est supérieur ou égal à 2. On cherche à déterminer la loi de Z_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q18. Préciser l'univers image de Z_k et Y_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Q19. Démontrer que :

$$\forall m \geq 1, \forall l \geq k, P(Z_k = m | Y_k = l) = \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Q20. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que Z_k suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

Q21. Justifier que $E(Z_k) = \frac{n}{n-k}$. Donner la variance de Z_k .

Les **Q22** et **Q23** peuvent être traitées en admettant le résultat de la **Q21**.

Q22. Montrer que $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$, puis que : $E(Y_n) = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Q23. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$\forall x \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

c) À l'aide de l'inégalité précédente, établir que :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n} + \ln n \leq u_n \leq 1 + \ln n.$$

d) Conclure que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

e) En déduire un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème dont les parties sont largement indépendantes.

EXERCICE

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres dont chacun est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

- Q1.** Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ puis en déduire son espérance.
- Q2.** En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?
- Q3.** M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi par les codes non encore testés. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code. Déterminer la loi de X et donner son espérance.
- Q4.** À la place de la stratégie précédente, M. Toutlemonde essaye des codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non. On note encore X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code. Déterminer la loi de X et donner son espérance.
- Q5. Informatique Pour Tous.**
Compléter, en langage Python, le script suivant pour qu'il simule une personne essayant de deviner le code 4714 :
- ```
code=4714
n=int(input('Taper un code à 4 chiffres : '))
k=
while

print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```
- (..... représente une instruction ou une partie d'instruction à compléter.)

Pour ne plus oublier le code, M. Toutlemonde décide de l'écrire sur un papier qu'il garde dans sa poche. Pour ne pas se faire dérober le code il le crypte de la manière suivante : il remplace chacun des 4 chiffres par lui-même additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté 9269.

- Q6. Informatique Pour Tous.**  
Écrire, en langage Python, une fonction `crypte(m)` qui reçoit en entrée une liste `m` de 4 chiffres et renvoie en sortie la version cryptée de cette liste. Par exemple, `crypte([4,7,1,4])` renvoie `[9,2,6,9]`.

# PROBLÈME - Intégrales de Fresnel

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

## Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction  $H$  par l'expression  $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$ , où  $e^{it^2}$  signifie  $\exp(it^2)$ .

**Q7.** Démontrer que  $H$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner une expression de  $H'(x)$ .

**Q8.** Étudier la parité de la fonction  $H$ .

**Q9.** Démontrer que la fonction  $t \mapsto e^{it^2}$  est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction  $H$  au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

**Q10.** Si  $x > 0$ , démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$

**Q11.** Pour  $x > 4\pi^2$ , en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

**Q12.** En déduire que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$  converge.

**Q13. Informatique Pour Tous.**

Proposer, en langage Python, une fonction  $I(f, a, b, n)$  qui prend en entrée une fonction  $f$  à valeurs réelles ou complexes, deux réels  $a$  et  $b$  et un entier naturel  $n$  et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de  $\int_a^b f(t) dt$  calculée avec  $n$  rectangles.

**Q14. Informatique Pour Tous.**

Proposer, en langage Python, une fonction  $H(x, n)$  qui prend en entrée un réel  $x$  et un entier naturel  $n$  et qui renvoie une valeur approchée de  $H(x)$  calculée avec la fonction de la question précédente. On rappelle que le code Python, pour  $e^{it^2}$ , est `exp(1j*t**2)`.

## Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction  $g$  d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt.$$

Pour cela, on pose  $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ .

**Q15.** Si  $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer les modules des nombres complexes  $e^{-x^2(t^2-i)}$  et  $t^2-i$ .

**Q16.** Démontrer que  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  (on pourra utiliser un argument de parité).

**Q17.** Soit  $(x_n)_n$  une suite divergente vers  $+\infty$ . À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = 0$ . En déduire la limite de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Q18.** Démontrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Q19.** On admet dans cette question que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge et est égale à  $\sqrt{\pi}$ .

Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

**Q20.** Décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $\frac{1}{X^2-i}$ .

On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right).$$

Démontrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \pi\sqrt{2}$ . Donner la valeur de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$  puis déterminer la valeur de  $g(0)$ .

**Q21.** En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x)$$

où la fonction  $H$  a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de  $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ , de  $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$  et de  $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ .

### Partie III - Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction  $S$  d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $f_n$  la fonction d'expression  $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ .

**Q22.** On suppose que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0,$$

démontrer que la série  $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$  converge.

**Q23.** Soient  $x \in ]0, 2\pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

**Q24.** À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que  $S$  est définie sur  $]0, 2\pi[$ .

**Q25.** On admet dans cette question que si  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}.$$

Démontrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C.$$

**Q26.** Déterminer la limite, quand  $x$  tend vers  $0^+$ , de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt.$$

**Q27.** Déterminer la limite en  $0^+$  de la fonction  $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$ . Donner alors un équivalent de  $S(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

|                                           |
|-------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont interdites.</b> |
|-------------------------------------------|

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

# EXERCICE 1

Pour  $n$  entier,  $n \geq 2$ , on définit le déterminant de Vandermonde de  $n$  nombres complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a :  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

**Q1.** Calculer  $V(x_1, x_2)$ . Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour  $n$  nombres complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  deux à deux distincts.

Dans la suite,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  nombres complexes deux à deux distincts.

**Q2.** On considère la fonction  $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$ .

Démontrer que  $P$  est une fonction polynomiale de degré au plus  $n-1$  et justifier que le coefficient de  $t^{n-1}$  est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

**Q3.** Première application

Calculer le déterminant de la matrice  $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  en faisant apparaître le déterminant de

Vandermonde  $V(1, 2, \dots, n)$ .

**Q4.** Deuxième application

Donner un exemple de  $n$  nombres complexes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  deux à deux distincts et tous non

nuls, tels que  $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0$ .

Soit  $n$  nombre complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que

l'une au moins des sommes  $\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n$  est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

## EXERCICE 2

Dans cet exercice,  $\| \cdot \|$  désigne une norme d'algèbre sur  $M_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple  $(A, B)$  de matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

**Q5.** Démontrer que pour toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$  converge. On notera  $e^A$  sa somme.

**Q6.** Démontrer que l'application  $A \mapsto e^A$  est continue sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Q7.** Si  $H \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon  $r > 0$ , déterminer la limite de  $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$  lorsque  $H$  tend vers 0.

En déduire que l'application  $A \mapsto e^A$  est différentiable en la matrice 0.  
On précisera sa différentielle en 0.



# PROBLÈME

Pour toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , on note  $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

Dans ce problème, on note  $S_n$  l'espace vectoriel des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  symétriques.

On dit que la matrice  $A \in S_n$  est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On note  $S_n^+$  l'ensemble des matrices symétriques positives.

## Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour  $a$  et  $b$  deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q8.** Démontrer, en détaillant les calculs, que  $A \in S_3^+$ , si et seulement si,  $(a + 2b \geq 0 \text{ et } a \geq b)$ .

**Q9.** Calculer  $J^k$  pour tout entier  $k$  non nul. Cette relation est-elle valable pour  $k = 0$  ?

En utilisant la relation  $A = (a - b)I_3 + bJ$ , calculer et expliciter  $e^A$ .

On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{R})$  commutent, alors  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

Vérifier que  $e^A \in S_3^+$ .

**Q10.** Soit  $P$  une matrice inversible de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Justifier que l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est continue sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

Si  $A \in S_n^+$  est semblable à une matrice diagonale  $D$ , déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice  $e^A$ .

En déduire que  $e^A \in S_n^+$ .

## Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , on note  $E(A)$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ , de terme général  $e^{a_{i,j}}$  :  $E(A) = (e^{a_{i,j}})$ .

Nous allons démontrer que si  $A \in S_n^+$ , alors  $E(A) \in S_n^+$ .

On définit le produit de Hadamard de deux matrices  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  de  $M_n(\mathbb{R})$  noté  $*$  par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices  $A$  et  $B$  par  $AB$ .

On confond une matrice de  $M_{1,1}(\mathbb{R})$  avec son terme réel.

**Q11.** Vérifier que, lorsque la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in S_3^+$ , la matrice  $E(A) \in S_3^+$ .

**Q12.** Si  $D$  est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si  $Y$  est matrice de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ , quel est le signe de  ${}^tYDY$  ?

En déduire qu'une matrice  $A$  de  $S_n$  appartient à  $S_n^+$  si, et seulement si, pour toute matrice  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  ${}^tXAX \geq 0$ .

**Q13.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $S_n^+$  et  $\alpha, \beta$  deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question **Q12**, que  $\alpha A + \beta B$  est une matrice de  $S_n^+$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $S_n^+$  a-t-on nécessairement  $AB \in S_n^+$  ?

**Q14.** Si  $A \in S_n^+$ , démontrer qu'il existe une matrice  $R \in S_n^+$  telle que  $A = R^2$ .

**Q15.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $S_n^+$ , si on pose  $A = U^2$  et  $B = V^2$  avec  $U = (u_{i,j}) \in S_n^+$ ,  $V = (v_{i,j}) \in S_n^+$  et si  $A * B = (c_{i,j})$ , vérifier que, pour tout couple  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$c_{i,j} = \left( \sum_{k=1}^n u_{k,i} u_{k,j} \right) \left( \sum_{l=1}^n v_{l,i} v_{l,j} \right).$$

En déduire que, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $S_n^+$ , on a  $A * B \in S_n^+$ .

**Q16.** Pour toute matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  et pour tout entier naturel  $p \geq 2$ , on note  $A^{*p}$  la matrice  $A * A * \dots * A$  ( $p$  fois).

On note  $A^{*0} = (1)$  la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et  $A^{*1} = A$ .

Soit une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , déterminer la limite de la suite de matrices  $(T_N)$  définie pour

$$\text{tout entier naturel } N \text{ non nul par } T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}.$$

**Q17.** Pour  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , justifier que l'application  $M \mapsto {}^tXMX$  est continue sur  $M_n(\mathbb{R})$ , puis démontrer que  $S_n^+$  est une partie fermée de  $S_n$ .

En déduire que si  $A \in S_n^+$  alors  $E(A) \in S_n^+$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

# PROBLÈME 1

## Intégrales de Gauss et théorème de Moivre-Laplace

### Présentation

Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$  par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où  $p = \frac{1}{2}$ .

La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact d'une intégrale de fonction gaussienne dite "intégrale de Gauss". La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

### Partie I - Convergence d'une suite

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt.$$

**Q1.** Montrer que la suite  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**Q2.** Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

**Q3.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \quad \text{et} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

**Q4.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leq 2\pi(a_{n,n})^2 \leq 1.$$

**Q5.** En déduire la convergence de la suite  $(a_{n,n})_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

## Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

**Q6.** À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q5** que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et donner sa limite.

**Q7.** Montrer que la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  et donner sa limite.

**Q8.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $1 + x \leq e^x$  et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t^2}.$$

**Q9.** Montrer que l'intégrale  $K$  est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de  $K$ .

## Partie III - Calcul d'une majoration

**Q10.** Montrer qu'il existe une fonction  $g: \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  et un réel  $M \geq 0$ , tels que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq Mx^3.$$

Indication : pour obtenir la majoration, on pourra écrire  $g(x)$  sous forme d'intégrale.

**Q11.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$  :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}.$$

**Q12.** En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n + 1 \leq k \leq \frac{3n}{2} + 1$ , il existe  $b_{k,n} \in \mathbb{R}$  tel que

$$|b_{k,n}| \leq \frac{M}{n^3}(k - n - 1)^4 \text{ et :}$$

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{b_{k,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

## Partie IV - Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \Sigma, P)$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_n$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$  et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , on pose  $t_{k,n} = \frac{2k - 2n}{\sqrt{2n}}$  et  $J_{k,n} = \left[ t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right]$ . On admet que les intervalles  $J_{k,n}$ , pour  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ , sont disjoints deux à deux et que :

$$\left[ -\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} ; \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] = \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit une fonction  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{2} P(X_n = k) & \text{s'il existe } k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket \text{ tel que } t \in J_{k,n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Q13.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $Z_n$ .

**Q14.** Proposer une représentation graphique de la fonction  $h_2$ .

**Q15.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Vérifier que la fonction  $h_n$  possède un maximum sur  $\mathbb{R}$  et déterminer pour quelles valeurs ce maximum est atteint.

**Q16.** Soit  $x \in ]0; +\infty[$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , vérifiant  $n \geq n_0$ , il existe  $k_n \in \mathbb{N}$ , tel que  $x \in J_{k_n,n}$ . Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} \quad ; \quad t_{k_n,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x \quad ; \quad k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

**Q17.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Vérifier que pour tout  $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ ,  $h_n(t_{k,n}) = a_{k,n}$ . Montrer ensuite, en utilisant les résultats des **Q5**, **Q12**, **Q16**, que la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et préciser sa limite.

La convergence simple de cette suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

|                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Théorème</b>                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>Pour tous réels <math>a \in \mathbb{R}</math>, <math>b \in \mathbb{R}</math>, tels que <math>a &lt; b</math> :</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$ |

# PROBLÈME 2

## Factorisation $QR$

### Présentation

Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation  $QR$  pour une matrice carrée quelconque.

### Notations

Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $M_{n,p}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des matrices réelles carrées de taille  $n$  est noté  $M_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  : on note également  $A$  l'endomorphisme de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  qui à  $X$  associe  $AX$ .

Pour tout  $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $A^T$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite nilpotente s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $A^k = 0$ .

L'ensemble  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  est muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\| \cdot \|$ . En identifiant  $M_1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}$ , on a pour tous  $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle .$$

On suppose dans tout ce problème que  $n \in \mathbb{N}$  est un entier naturel vérifiant  $n \geq 2$ .

## Partie I - Matrices de rang 1

### I.1 - Une expression des matrices de rang 1

**Q18.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe  $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tels que  $A = XY^T$ .

**Q19.** Réciproquement, soient  $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Montrer que la matrice  $XY^T$  est de rang 1.

### I.2 - Quelques propriétés

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

**Q20.** Montrer que  $A^2 = \text{tr}(A)A$ .

**Q21.** En déduire, par récurrence sur  $k$ , une expression de  $A^k$  en fonction de  $A$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Q22.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de  $A$  pour que  $A$  soit nilpotente.

**Q23.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de  $A$  pour que  $A$  soit diagonalisable.



## Partie II - Matrices de Householder

### II.1 - Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**Q24.** Calculer  $A^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ .

**Q25.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

**Q26.** Montrer que les sous-espaces propres de  $A$  sont orthogonaux.

**Q27.** Déterminer une matrice  $P \in O_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in M_3(\mathbb{R})$ , telles que  $P^T A P = D$ .

**Q28.** Interpréter géométriquement l'endomorphisme  $A$  de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

### II.2 - Matrices de Householder

Soit  $V \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On définit  $P_V, Q_V \in M_n(\mathbb{R})$  par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T \quad \text{et} \quad Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} V V^T. \quad (1)$$

**Q29.** Montrer que  $\text{Im } P_V = \text{Vect}(V)$  et que  $\text{Ker } P_V = \text{Vect}(V)^\perp$ .

**Q30.** Montrer que  $P_V$  est la projection orthogonale sur la droite  $\text{Vect}(V)$ .  
Préciser le rang et la trace de la matrice  $P_V$ .

**Q31.** Montrer que  $Q_V$  est symétrique et orthogonale.

**Q32.** Montrer que  $Q_V$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(V)^\perp$ .

## Partie III - Factorisation $QR$

### III.1 - Un résultat préliminaire

Soient  $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , tels que  $\|U\| = \|V\|$ . On note  $D = \text{Vect}(U - V)$ .

**Q33.** Montrer que  $D^\perp$  est l'ensemble des  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , tels que  $\|X - U\| = \|X - V\|$ .

**Q34.** Donner la décomposition de  $U$  sur la somme directe  $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$ .

**Q35.** On suppose  $U$  et  $V$  non colinéaires. Calculer  $Q_{U-V}U$  où  $Q_{U-V}$  est définie en (1).

**Q36.** En déduire que pour tous  $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , il existe une matrice orthogonale  $Q$ , telle que  $Q\widetilde{U}$  est colinéaire à  $\widetilde{V}$ .

### III.2 - Factorisation $QR$

**Q37.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $Q_1$ , telle que  $Q_1 A$  soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

**Q38.** En raisonnant par récurrence sur  $n$ , montrer que pour tout  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , il existe une matrice  $Q$  orthogonale, telle que  $QA$  soit triangulaire supérieure.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont autorisées.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

### Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

#### Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si  $U \in \mathbb{C}[X]$  et  $V \in \mathbb{C}[X]$  sont deux polynômes avec  $V \neq 0$ , alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes  $Q$  et  $R$  sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme  $U$  par  $V$ .

Dans cet exercice, on se donne un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et un couple  $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$  tel que  $\deg(B) = n+1$ . On considère également l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{C}_n[X]$  qui à un polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  associe le reste dans la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a  $\varphi(P) = 2X^2 + X$ .

#### Partie I - Généralités sur l'application $\varphi$

Dans cette partie, on démontre que l'application  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Q1.** Justifier que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on a  $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ .

On considère deux polynômes  $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$  et  $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ . Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe  $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  et  $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$  tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

**Q2.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $A(P_1 + \lambda P_2)$  par  $B$  en fonction de  $\lambda$  et des polynômes  $Q_1, Q_2, R_1$  et  $R_2$  en justifiant votre réponse. En déduire que  $\varphi$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_n[X]$ .

#### Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

**Q3.** Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

**Q4.** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice  $M$ .

**Q5.** Justifier que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable. Déterminer une base de  $\mathbb{C}_2[X]$  formée de vecteurs propres de  $\varphi$ .

### Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $n = 2$  et que  $B = X^3$ . Comme  $A$  est un élément de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_2[X]$ , il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$  tel que  $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ .

**Q6.** Montrer que la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans la base  $(1, X, X^2)$  est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

**Q7.** Montrer que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $A$  est constant.

### Partie IV - Étude du cas où $B$ est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que  $n = 2$  : le nombre  $n$  est un entier quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que  $B$  est un polynôme scindé à racines simples. On note  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  les racines de  $B$  qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange  $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$  associés aux points  $x_0, \dots, x_n$  par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

#### IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

**Q8.** Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ . Montrer que  $x_0, \dots, x_n$  sont des racines du polynôme  $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$ .

**Q9.** Dédurre de la question précédente que pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , on a  $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$ .

**Q10.** Montrer que  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

#### IV.2 - Réduction de l'endomorphisme $\varphi$

Pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on désigne respectivement par  $Q_k \in \mathbb{C}[X]$  et  $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$  le quotient et le reste dans la division euclidienne de  $AL_k$  par  $B$ .

**Q11.** Soit  $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ . Montrer que  $R_k(x_j) = 0$  si  $j \neq k$  et que  $R_k(x_k) = A(x_k)$ .

**Q12.** En utilisant **Q9**, en déduire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  que  $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$ .

**Q13.** Justifier que l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

## EXERCICE 2

### Étude de séries de pile ou de face

#### Présentation générale

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité  $1/2$  et face avec la probabilité  $1/2$ ). Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $P_k$  l'évènement [le  $k$ -ième lancer de la pièce donne pile] et par  $F_k$  l'évènement [le  $k$ -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin la série n°1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\begin{array}{l} \textbf{Exemple 1 :} \quad \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n°3}} \cap F_8 \cap \dots \\ \textbf{Exemple 2 :} \quad \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left( \bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n°3}}. \end{array}$$

#### Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire  $L_1$  de la manière suivante :

- si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose  $L_1 = 0$  ;
- sinon, on désigne par  $L_1$  la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a  $L_1 = 2$  tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a  $L_1 = 3$ .

##### I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

**Q14.** Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k.$$

**Q15.** En déduire que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la série  $\sum_{k \geq 0} kx^k$  converge et que  $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ .

## I.2 - Étude de $L_1$

Dans cette partie, on considère un entier  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Q16.** Exprimer l'évènement  $(L_1 = k)$  en fonction des évènements  $P_i$  et  $F_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ .

**Q17.** Montrer que  $P(L_1 = k) = 2^{-k}$ .

**Q18.** En déduire la valeur de  $P(L_1 = 0)$ .

**Q19.** Démontrer que la variable aléatoire  $L_1$  admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

## Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $N_n$  le nombre de séries apparues lors des  $n$  premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### II.1 - Généralités

**Q20.** Déterminer les lois de  $N_1$  et  $N_2$ .

**Q21.** Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $N_n$  ?

### II.2 - Relation de récurrence pour la loi $N_n$

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de  $N_{n+1}$  et la loi de  $N_n$ .

**Q22.** Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  les relations :

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n).$$

**Q23.** En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

### II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de $N_n$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction génératrice de la variable aléatoire  $N_m$ , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m P(N_m = k)x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

**Q24.** Dédurre de **Q23** que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

**Q25.** Déterminer une expression explicite de  $G_n(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Q26.** Rappeler l'expression de l'espérance de  $N_n$  en fonction de sa fonction génératrice  $G_n$ . En déduire l'espérance de la variable aléatoire  $N_n$ .

**Q27.** Déterminer la loi de la variable aléatoire  $N_n$  à partir de l'expression de  $G_n$ .



## EXERCICE 3

### La constante d'Euler

#### Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

#### Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n).$$

et on considère la suite  $(\Delta_n)_{n \geq 2}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

**Q28.** Déterminer un nombre  $a \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\Delta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$ .

**Q29.** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$  est convergente.

**Q30.** En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

#### Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q30**, on a montré que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un nombre réel que l'on note  $\gamma$  dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de  $\gamma$  sous la forme d'une intégrale.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

##### II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité  $\ln(1+x) \leq x$  valable pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ .

**Q31.** Soit  $t \in ]0, +\infty[$ . Justifier qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $n \geq n_0$ , on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

**Q32.** Dédurre de la question précédente que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

**Q33.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , on a  $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$ .

**Q34.** Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

## II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du.$$

On considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q35.** Montrer que l'intégrale  $I_n$  est convergente.

**Q36.** Dédire des résultats de la sous-partie II.1 que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

**Q37.** Montrer que l'intégrale  $J_n$  est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale  $J_n$  est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

**Q38.** Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + nJ_n.$$

**Q39.** Dédire des questions précédentes que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

**FIN**



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

# PROBLÈME 1

**Application sur  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Phi : P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$**

Le but de cet exercice est l'étude de l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  avec  $n$  un entier fixé non nul par :

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.

On note pour tout  $k$  entier non nul  $\Phi^k$  la composée  $k$ -ième de l'application  $\Phi$ .

## Partie I - Préliminaires

**Q1.** Donner la formule du binôme de Newton.

**Q2.** Soit  $k$  un entier non nul. Montrer que :

$$(X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i.$$

**Q3.** On considère les polynômes  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ ,  $P_2(X) = X^2$  et  $P_3(X) = X^3$ .  
Montrer que :

$$\Phi(P_0)(X) = 0,$$

$$\Phi(P_1)(X) = 1,$$

$$\Phi(P_2)(X) = 2X + 1,$$

$$\Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1.$$

**Q4.** Calculer  $\Phi^2(P_2)(X)$  et  $\Phi^3(P_2)(X)$ .

**Q5.** Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q6.** Montrer que pour tout polynôme non constant  $P$  de degré  $k$  avec  $k$  un entier non nul,  $\Phi(P)$  est un polynôme de degré  $k - 1$ .

**Q7.** Calculer le noyau de  $\Phi$ .

**Q8.** Donner l'image de  $\Phi$ .

**Q9.** Soient  $P$  et  $Q$ , deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , tels que  $\Phi(Q) = P$ .  
Montrer que :

$$\sum_{i=0}^n P(i) = Q(n + 1) - Q(0).$$

## Partie II - Une famille de polynômes

**Q10.** Considérons la famille  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  où pour chaque  $i$  non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (X-k)}{i!}$$

et  $H_0 = P_0$  le polynôme constant égal à 1.

Prouver que  $(H_i)_{i \in [0, n]}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

**Q11.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $H_i(0) = 0$ .

**Q12.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi(H_i) = H_{i-1}$ .

**Q13.** Montrer que pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$ ,  $\Phi^i(H_i) = 1$ .

**Q14.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$  avec  $a_k$  réel pour tout  $k$  entier entre 0 et  $n$ .

Montrer que  $P(0) = a_0$  et que pour  $l$ , un entier fixé entre 1 et  $n$ ,  $a_l = \Phi^l(P)(0)$ .

**Q15.** En déduire que tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

**Q16.** Vérifier que  $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$ .

**Q17.** Déduire à l'aide de **Q9**, de **Q12** et de **Q16** que :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Q18.** Vérifier que  $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$ .

**Q19.** En déduire que  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Q20.** Proposer en **Python** une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des  $n$  premiers entiers prenant en argument un entier naturel  $n$  passé en paramètre.

## PROBLÈME 2

### Trajectoires orthogonales

**Le problème ne nécessite aucune connaissance sur les courbes orthogonales.**

Soient  $(S)$  un plan et  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de courbes tracées sur  $(S)$ ,  $\Lambda$  étant un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On appelle **trajectoire orthogonale** de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sur  $(S)$ , toute courbe  $C$ , tracée sur  $(S)$  et coupant orthogonalement chacune des  $\Gamma_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ).

On se place dans la situation suivante.

Soit  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de courbes du plan. Chaque courbe  $\Gamma_\lambda$  est la courbe représentative d'une fonction  $y$  d'une variable réelle  $x$  de classe  $C^1$  qui vérifie une équation différentielle :

$$(ED) \quad f(x, y, y') = 0$$

appelée équation différentielle du premier ordre de la famille de courbes  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

On admet qu'une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est :

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

On remplace donc  $y'$  par  $-\frac{1}{y'}$  dans  $(ED)$ . On caractérisera les courbes orthogonales à la famille  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  par les solutions de l'équation  $(EDO)$ .

On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel et du repère orthonormé usuel  $(O, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  est la base orthonormée directe usuelle  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Nous allons montrer sur un exemple qu'il est possible de se ramener au plan  $(xOy)$  d'équation  $z = 0$ .

On considère le plan  $(S)$  d'équation :

$$(E) : \quad x + y + z = 0.$$

### Partie I - Quelques calculs dans le plan $S$

- Q21.** Montrer que l'origine  $O$  et les points  $M, N$  de coordonnées respectives  $(1, 0, -1)$  et  $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$  appartiennent au plan  $(S)$ .
- Q22.** Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{ON}$  forment une base du plan  $(S)$ .
- Q23.** Calculer le produit vectoriel des vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{ON}$ .
- Q24.** Donner une interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel des vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{ON}$ .
- Q25.** Montrer que le point  $A$  de coordonnées  $(0, 1, 1)$  n'appartient pas au plan  $(S)$ .
- Q26.** Calculer le produit mixte des vecteurs  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$  et  $\overrightarrow{OA}$ .
- Q27.** Donner une interprétation géométrique du produit mixte des vecteurs  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$  et  $\overrightarrow{OA}$ .
- Q28.** Donner un vecteur normal au plan  $(S)$ .
- Q29.** Donner les coordonnées du projeté orthogonal  $A'$  de  $A$  sur le plan  $(S)$ . On pourra réaliser un schéma pour expliciter la démarche utilisée.
- Q30.** Calculer la distance du point  $A$  au plan  $(S)$ .

## Partie II - Changement de repère

On souhaite effectuer un changement de base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  de telle sorte qu'une équation du plan  $(S)$  soit définie  $z = 0$  dans l'espace affine muni de la nouvelle base orthonormée directe.

On considère la famille  $\mathcal{B}'$  formée par les vecteurs :

$\vec{u}_x$  de coordonnées  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\vec{u}_y$  de coordonnées  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$  et  $\vec{u}_z$  de coordonnées  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

**Q31.** Montrer que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q32.** Montrer que la base  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale.

**Q33.** Montrer que la base  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale directe.

**Q34.** Donner la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .

**Q35.** Justifier que la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}'$  vers la base  $\mathcal{B}$  est :

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

**Q36.** Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  a pour coordonnées  $(0, 0, \sqrt{3})$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Q37.** Justifier que l'équation du plan  $(S)$  dans le repère  $(O, \mathcal{B}')$  est  $z = 0$ .

**Q38.** Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni du repère  $(O, \mathcal{B}')$ , donner la matrice  $R$  de la projection orthogonale sur le plan  $(S)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Q39.** Donner la relation permettant d'obtenir la matrice  $Q$  de la projection orthogonale sur le plan  $(S)$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de  $R$ ,  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  et  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . On admet que l'on obtient après calculs :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Q40.** Justifier que  $Q$  est diagonalisable. Sans calcul et à l'aide des questions précédentes, justifier que les valeurs propres sont 0 et 1.

**Q41.** Montrer que l'espace propre associé à la valeur 1 est engendré par les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{ON}$ . On rappelle que les points  $M$  et  $N$  sont définis à **Q21**.

On admet que le travail effectué dans cette partie peut être aussi réalisé pour un plan quelconque. Dans la suite de tout le problème, le plan  $(S)$  aura pour équation  $z = 0$ .

### Partie III - Soit $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille des droites du plan $(S) : z = 0$ passant par l'origine. Détermination des trajectoires orthogonales de la famille de droites $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$

L'espace est rapporté à son repère habituel. On considère le plan  $(S)$  d'équation  $z = 0$ . Il est possible, en toute généralité, de se placer dans le cas où  $(S)$  est le plan d'équation  $z = 0$  dans la base usuelle de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q42.** Déterminer l'équation dans le plan  $(S) : z = 0$  de la droite  $D_\lambda$  passant par l'origine  $O$  et par le point  $M_\lambda$  de coordonnées  $(1, \lambda, 0)$  avec  $\lambda$  réel. Faire un dessin mettant en jeu  $D_\lambda$ ,  $O$  et  $M_\lambda$  pour expliquer la situation.

**Q43.** En déduire que la famille de courbes  $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  admet pour équation différentielle du premier ordre :

$$(ED_1) \quad y - xy' = 0.$$

**Q44.** En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème 2, démontrer que les courbes orthogonales ont pour équation différentielle :

$$(EDO_1) \quad y'y + x = 0.$$

**Q45.** Soit  $\mu$  un réel positif. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction :

$$f_\mu : x \mapsto \sqrt{\mu - x^2}.$$

**Q46.** Montrer que la fonction  $f_\mu$  est solution de  $(EDO_1)$  sur  $] -\sqrt{\mu}; 0[ \cup ]0; \sqrt{\mu}[$ .

**Q47.** Montrer que les trajectoires orthogonales obtenues vérifient l'équation :

$$(EC_1) \quad x^2 + y^2 = \mu \quad \text{avec } \mu \text{ un réel positif non nul.}$$

**Q48.** Donner la nature géométrique des courbes avec leurs éléments caractéristiques vérifiant l'équation  $(EC_1)$ .

### Partie IV - Détermination des trajectoires orthogonales de la famille des hyperboles équilatères $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ du plan $(S)$

On considère la courbe paramétrée  $C$  d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos(t)} \\ y(t) = \tan(t) \end{cases}.$$

**Q49.** Proposer un ensemble d'étude de la courbe paramétrée  $C$  en justifiant votre démarche.

**Q50.** Étudier la courbe paramétrée  $C$  sur l'ensemble  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ . On indiquera en justifiant les tangentes parallèles aux axes le cas échéant.

**Q51.** Tracer sur votre copie dans un repère orthonormé d'unité 1 cm les droites d'équation  $D : y = x$  et  $D' : y = -x$ .  
On admet que ce sont les asymptotes à la courbe.

**Q52.** Montrer que  $D$  et  $D'$  sont orthogonales.

**Q53.** Tracer la courbe  $C$  sur le graphique précédent réalisé à la **Q51**.

Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes forment un angle droit. L'équation caractéristique des hyperboles équilatères dont la famille est notée  $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  est :

$$(EC_2) \quad x^2 - y^2 + \lambda y = 1.$$



**Q54.** Trouver la valeur de  $\lambda$  pour que  $C$  vérifie l'équation  $(EC_2)$ .

**Q55.** Démontrer que famille  $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  admet pour équation différentielle :

$$(ED_2) \quad 2xy + (1 - x^2 - y^2)y' = 0.$$

**Q56.** En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème et rappelé ici :

*Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est :*

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Démontrer que les courbes orthogonales à la famille  $(H_\lambda)$  ont pour équation différentielle :

$$(EDO_2) \quad 2xyy' - 1 + x^2 + y^2 = 0 \text{ avec } y' \neq 0.$$

**Q57.** En prenant la fonction  $z = y^2$ , justifier que  $z$  est de classe  $C^1$ , montrer que l'équation  $(EDO_2)$  peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1) \quad xz' + z - 1 + x^2 = 0.$$

**Q58.** Trouver une solution particulière de  $(E_1)$  sous forme polynomiale.

**Q59.** Résoudre  $(E_1)$ .

**Q60.** Dédurre que les courbes orthogonales  $(C_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$  à la famille  $(H_\lambda)$  vérifient l'équation :

$$x(x^2 + 3y^2 - 3) - 3\mu = 0.$$

**FIN**



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont autorisées.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

# EXERCICE 1

## Partie I - Questions préliminaires

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . On confondra de façon usuelle un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E$ .

Enfin, on définit l'application  $f$  sur  $E$  par :

$$f : P \mapsto (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'.$$

**Q1.** Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Q2.** Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^k)$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Déterminer ensuite la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

**Q3.** On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx. \end{aligned}$$

- a) Rappeler la définition d'un produit scalaire sur  $E$ .
- b) Montrer que  $\varphi$  est effectivement un produit scalaire sur  $E$ .

Par la suite, on pourra noter  $\langle P, Q \rangle$  au lieu de  $\varphi(P, Q)$ . La norme associée à  $\varphi$  sera notée  $\|\cdot\|$ .

## Partie II - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie, on prend  $n = 2$ . On a donc  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .  $E$  est muni du produit scalaire  $\varphi$  défini en **Q3b**.

**Q4.** Soit  $A_2$  la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Montrer que :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Q5.** L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif ? Justifier.

**Q6.** Préciser les valeurs propres de  $f$ .  
Peut-on, à ce stade, conclure à la diagonalisabilité de  $f$  ?

**Q7.** Déterminer des bases des sous-espaces propres de  $f$  (le terme de degré 0 de chaque vecteur des bases sera pris égal à 1).

**Q8.** a) Déterminer une matrice  $P$ , inversible, telle que :

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } \alpha > \beta > \gamma.$$

Préciser  $\alpha, \beta, \gamma$ .

b) Calculer  $P^{-1}$ .

**Q9.** On considère maintenant les polynômes :

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - 2X, \quad L_2 = 1 - 6X + 6X^2.$$

a) Montrer que  $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2)$  est une base orthogonale de  $E$ . On rappelle que  $E$  est muni du produit scalaire  $\varphi$  étudié dans la partie I.

b) Calculer  $\|L_0\|$  et  $\|L_1\|$ .

c) Déterminer une base orthonormale de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

d) Rappeler la définition de  $\Pi_1$ , projection orthogonale de  $E$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ .

Soit  $P_2 = X^2$ . Exprimer  $\Pi_1(P_2)$  en fonction de  $L_0$ ,  $L_1$  et de  $L_2$ .

*On demande ici de faire explicitement les calculs.*

e) Montrer que la distance de  $P_2$  au plan vectoriel  $\mathbb{R}_1[X]$  vérifie :

$$d(P_2, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

## EXERCICE 2

Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt.$$

**Q10.** Calculs préliminaires

a) Déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}.$$

b) Soit la fonction  $\Phi : t \mapsto \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$ . Calculer sa dérivée.

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$u_1 = \alpha \ln(2) + \beta\pi.$$

Préciser les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

**Q11.** Étude de la suite  $(u_n)$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 1.$$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone.

c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  que l'on ne demande pas de calculer.

**Q12.** Étude de la série  $\sum u_n$

a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{(1+t^3)^n}$ .

b) Établir le résultat :  $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

c) En déduire la nature de la série numérique  $\sum u_n$ .

**Q13.** Étude de la série  $\sum \frac{u_n}{n}$

a) En écrivant  $\frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{(1+t^3)^n} \cdot 1$ , effectuer une intégration par parties dans l'expression de  $u_n$  et montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1}).$$

Identifier les expressions de  $a_n$  et de  $b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) En utilisant le développement en série entière de  $\ln(1-x)$ , établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$  et montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$ .

c) Déduire des questions **Q13a** et **Q13b** que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$  converge et calculer sa somme.

On exprimera le résultat en fonction de  $\ell$  défini à la question **Q11c**.

**Q14.** On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) En utilisant les résultats des questions **Q10a** et **Q10b**, déterminer la valeur de  $v_1$ .

c) En comparant les termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la nature de la série  $\sum v_n$ .

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} v_n.$$

On pourra utiliser une intégration par parties similaire à celle de la question **Q13a**.

e) En déduire le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, v_n = \frac{2 \times 5 \times \dots \times (3n-4)}{3^n \times (n-1)!} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## EXERCICE 3

Les questions **Q17** à **Q19** peuvent être traitées sans avoir abordé les questions **Q15** et **Q16**.

Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $q = 1 - p$ .

Une entreprise dispose de  $N$  machines identiques en service. Chaque machine a, chaque jour, une probabilité égale à  $p$  de tomber en panne, indépendamment des autres. Lorsqu'une machine tombe en panne, elle est retirée définitivement du service.

Au jour numéro 0, toutes les machines sont en service.

Pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au numéro du jour où la  $i^{\text{ème}}$  machine tombe en panne.

- Q15. a)** Justifier que  $X_1$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  notée  $\mathcal{G}(p)$ .  
Préciser l'univers-image  $X_1(\Omega)$  et pour  $k \in X_1(\Omega)$ ,  $P(X_1 = k)$ .  
Donner enfin l'espérance de  $X_1$ .

- b)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $P(X_1 > k) = q^k$ . En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, P_{X_1 > n}(X_1 > k + n) = P(X_1 > k).$$

Pourquoi peut-on dire que la loi de  $X_1$  est sans mémoire ?

Toutes les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  sont donc indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

On pose pour la suite de l'exercice :  $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$ .

- Q16. a)** Expliquer pourquoi la variable aléatoire  $Y$  désigne le numéro du jour où la machine la plus robuste tombe en panne.  
Préciser l'univers image  $Y(\Omega)$ .
- b)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier brièvement que :

$$(Y \leq k) = \bigcap_{i=1}^N (X_i \leq k),$$

puis montrer que  $P(Y \leq k) = (1 - q^k)^N$ .

- c)** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , justifier que :  $P(Y \leq k - 1) + P(Y = k) = P(Y \leq k)$ .
- d)** Soit  $k \in Y(\Omega)$ , déduire de la question **Q16c** l'expression de  $P(Y = k)$  en fonction des paramètres  $q$ ,  $k$  et  $N$ .

**Q17.** On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 - (1 - q^n)^N$ .

- a)** Déterminer un équivalent de  $(1 + x)^N - 1$  lorsque  $x$  tend vers 0.  
En déduire un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- b)** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente.

On admet, pour toute la suite de l'exercice, que l'on a :  $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

c) Lorsque  $N = 2$ , calculer  $E(Y)$ .

On cherche maintenant à déterminer un équivalent de  $E(Y)$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

**Q18.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = 1 - (1 - q^x)^N$ .

a) Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Nq^x$ . En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  est convergente.

On rappelle que pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $q^x = e^{x \ln q}$ .

b) i) À l'aide d'une suite géométrique, montrer que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} q^x (1 - q^x)^k.$$

ii) Soit  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

À l'aide du changement de variable  $t = q^x$ , calculer  $\int_0^{+\infty} q^x (1 - q^x)^k dx$ .

En déduire que  $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ .

c) i) Justifier que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n.$$

iii) En déduire :  $\forall N \in \mathbb{N}^*, \int_0^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \int_0^N f(x)dx + 1$ .

iv) Conclure enfin que :

$$-\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq E(Y) \leq 1 - \frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

**Q19.** On admet le résultat classique  $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln N$ .

Déterminer un équivalent simple de  $E(Y)$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .  
Interpréter le résultat obtenu pour les machines de l'entreprise.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**



# EXERCICE I

Dans cet exercice d'informatique commune, on se propose d'écrire des algorithmes dans le but de faire du calcul matriciel et plus particulièrement afin d'utiliser les matrices d'adjacence d'un graphe. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. L'usage de toute librairie est **interdit**.

## Notation

Les matrices sont carrées et représentées par des listes dont les éléments correspondent aux lignes de la matrice. Par exemple, la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  est représentée par la liste  $[[1,2],[3,4]]$ .

Dans la suite, pour définir la matrice d'adjacence  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'un graphe ayant  $n$  sommets, on numérote ses sommets de 0 à  $n-1$ .

- Q1.** Écrire une fonction *produit*( $A,B$ ) prenant en arguments deux matrices carrées  $A$  et  $B$  de mêmes dimensions et qui renvoie  $AB$  le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$ .
- Q2.** Écrire une fonction *oriente*( $A$ ) prenant en argument la matrice d'adjacence  $A$  d'un graphe et qui retourne *True* si le graphe est orienté et *False* sinon.
- Q3.** On admet que le nombre de chemins de longueur  $p$  reliant  $i$  et  $j$  dans un graphe de matrice d'adjacence  $A$  est égal au coefficient d'indice  $(i,j)$  de la matrice  $A^p$ .  
Écrire une fonction *distance*( $A,i,j$ ) où  $A$  est la matrice d'adjacence d'un graphe et qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet  $j$  depuis le sommet  $i$  (on suppose qu'un tel chemin existe).

On considère deux tables : CLIENTS et PARTENAIRES. La première contient des informations sur les clients et la deuxième permet d'identifier qui sont les partenaires des clients.

La table CLIENTS contient les attributs suivants :

- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom (chaîne de caractères) ;
- prenom (chaîne de caractères) ;
- ville (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères).

La table PARTENAIRES contient les attributs suivants :

- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- id\_client : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table CLIENTS (entier) ;
- partenaire : nom du partenaire (chaîne de caractères).

- Q4.** Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de « Toulouse ».
- Q5.** Écrire une requête SQL permettant d'extraire les emails de tous les clients ayant « SCEI » comme partenaire.

## EXERCICE II

On définit la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Q6.** Établir que l'équation  $e^{-x} = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .
- Q7.** Démontrer que  $f$  possède un unique point critique  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .
- Q8.** À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$ .  
Est-ce un minimum ou un maximum ?

## PROBLÈME

Dans tout le problème,  $\alpha$  est un réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ . On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

### Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

**Q9.** Démontrer que  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et sur  $[1, +\infty[$ .

**Q10.** Démontrer que  $J(\alpha) = I(1-\alpha)$ .

On se propose maintenant d'écrire  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q11.** 1<sup>re</sup> tentative

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$ . Montrer que :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, 1[$  ?

**Q12. 2<sup>e</sup> tentative**

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx.$$

En déduire une expression de  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q13. En déduire que :**

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

**Q14. Démontrer que :**

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

## Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt.$$

**Q15. Démontrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .****Q16. Démontrer que  $f_\alpha$  est bien définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .**

**Q17.** Démontrer que  $f_\alpha$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.

**Q18.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ .

**Q19.** Démontrer que  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

### Partie III - Vers la formule des compléments

**Q20.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

**Q21.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que  $g_\alpha$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ .

En déduire que  $\forall x \in ]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ .

**Q22.** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

**Q23.** Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

**Q24.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

|                                           |
|-------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont interdites.</b> |
|-------------------------------------------|

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

## EXERCICE 1

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$ .

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $x \mapsto x^n e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ .

**Q1.** Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant, pour tout couple  $(P, Q)$  de polynômes de  $E$ ,  $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ . On notera  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

**Q2.** Déterminer le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F = \mathbb{R}_1[X]$  noté  $P_F(X^2)$ .

**Q3.** Justifier que  $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$  puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx.$$

## EXERCICE 2

Soit  $p \in ]0, 1[$ ,  $q = 1 - p$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires  $Z$  et  $T$  définies par  $Z = \sup(X, Y)$  et  $T = \inf(X, Y)$ .

**Q4.** Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers naturels, déterminer  $P((Z = m) \cap (T = n))$  en distinguant trois cas :  $m > n$ ,  $m < n$  et  $m = n$ .

**Q5.** En déduire la loi de la variable aléatoire  $Z$ .

# PROBLÈME

Dans ce problème,  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

## Partie I

### Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

Démontrer que les matrices  $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont des matrices de projecteur puis calculer  $\Pi_1 + 5\Pi_2$ ,  $\Pi_1 + \Pi_2$  et  $\Pi_1\Pi_2$ .

### Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :

Si  $P_1, P_2, \dots, P_r$  sont des éléments de  $\mathbb{C}[X]$  deux à deux premiers entre eux de produit égal à  $T$ , si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  alors :

$$\text{Ker}[T(u)] = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier  $r = 2$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes premiers entre eux.

Justifier que  $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$  (de même, on a :  $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ ).

Démontrer que :  $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$ .

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

### Q8. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et soit $\pi_u$ son polynôme minimal.

On suppose que  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$  où les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier  $i \in \{1, 2\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ .

Justifier qu'il existe deux polynômes  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$ .

Pour la suite de cette partie, on notera  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$  la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ , il existe des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$ .

**Q9.** On pose alors pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ .

Démontrer que pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = id_E,$$

et chaque  $p_i$  est un projecteur de  $E$ .

Les  $p_i$  seront appelés projecteurs associés à  $u$ .

**Q10.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $\chi_u$  son polynôme caractéristique :  $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

(avec les  $\lambda_i$  deux à deux distincts et les  $\alpha_i$  des entiers naturels non nuls) et pour tout entier

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$  le sous-espace caractéristique associé à  $\lambda_i$ .

Justifier que  $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$ .

**Q11.** Démontrer que  $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$ .

**Q12.** Démontrer que pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\text{Im } p_i = N_i$ .

## Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable et on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ses valeurs propres distinctes.

**Q13.** Quel est alors le polynôme minimal  $\pi_u$  de  $u$  ?

**Q14.** On note toujours, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$  où  $P_i = X - \lambda_i$ , et on pose

$$\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}.$$

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{\pi_u}$  puis démontrer que les

projecteurs associés à  $u$  sont, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$ .

**Q15.** Démontrer que  $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$  puis que  $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$  (décomposition spectrale de  $u$ ).



**Q16.** Exemple : on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable et calculer la matrice  $A^2$ .
- b) En déduire le polynôme minimal  $\pi_A$  de la matrice  $A$  puis la décomposition spectrale de la matrice  $A$ . On notera  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  les matrices des projecteurs associés.
- c) Calculer, pour tout entier naturel  $q$ ,  $A^q$  en fonction des matrices  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

**Q17.** On note  $\mathbb{C}[v]$  l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme  $v$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.  
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[v]$  est égal au degré du polynôme minimal  $\pi_v$  de l'endomorphisme  $v$ .

**Q18.** On revient au cas  $u$  diagonalisable avec  $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ .

Démontrer que la famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  des projecteurs associés à  $u$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q19.** Dans le cas d'un endomorphisme  $u$  non diagonalisable, la famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  des projecteurs associés à  $u$  est-elle toujours une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[u]$  ?

**Q20.** Nous avons vu que si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  diagonalisable, il existe  $m$  endomorphismes non nuls  $p_i$  de  $E$ , tels que pour tout entier  $q$  on ait  $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$ .

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe  $m$  endomorphismes non nuls  $f_i$  de  $E$  et  $m$  complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  distincts, tels que pour tout

entier naturel  $q$  on ait  $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$ .

Démontrer que  $u$  est diagonalisable.

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 1**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**

## EXERCICE I

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier naturel non nul.

Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

**Q1.** Démontrer que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On munit l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie, pour tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , par :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On note  $S$  la sphère unité définie par :  $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty = 1\}$ .

**Q2.** Démontrer que  $\forall X \in S, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)$ .

En déduire, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'existence de  $\sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$ .

On pose alors, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\| = \sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$ .

**Q3.** Démontrer que  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$ .

**Q4.** Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = N(A)$ .

**Q5. Application.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\|A\|$ .

## EXERCICE II

On définit la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Q6.** Établir que l'équation  $e^{-x} = x$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

**Q7.** Démontrer que  $f$  possède un unique point critique  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

**Q8.** À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$ .  
Est-ce un minimum ou un maximum ?

## PROBLÈME

Dans tout le problème,  $\alpha$  est un réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ . On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

### Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

**Q9.** Démontrer que  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et sur  $[1, +\infty[$ .

**Q10.** Démontrer que  $J(\alpha) = I(1-\alpha)$ .

On se propose maintenant d'écrire  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q11.** 1<sup>re</sup> tentative

Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$ . Montrer que :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, 1[$  ?

**Q12. 2<sup>e</sup> tentative**

Pour tout  $x \in ]0,1[$ , on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx.$$

En déduire une expression de  $I(\alpha)$  sous forme d'une somme de série.

**Q13. En déduire que :**

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

**Q14. Démontrer que :**

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

## Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt.$$

**Q15. Démontrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .****Q16. Démontrer que  $f_\alpha$  est bien définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .**

**Q17.** Démontrer que  $f_\alpha$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.

**Q18.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ .

**Q19.** Démontrer que  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

### Partie III - Vers la formule des compléments

**Q20.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

**Q21.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que  $g_\alpha$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ .

En déduire que  $\forall x \in ]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ .

**Q22.** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

**Q23.** Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

**Q24.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 2**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

## EXERCICE 1

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$ .

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $x \mapsto x^n e^{-x}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ .

**Q1.** Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant, pour tout couple  $(P, Q)$  de polynômes de  $E$ ,  $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ . On notera  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

**Q2.** Déterminer le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F = \mathbb{R}_1[X]$  noté  $P_F(X^2)$ .

**Q3.** Justifier que  $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$  puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx.$$

## EXERCICE 2

Soit  $p \in ]0, 1[$ ,  $q = 1 - p$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires  $Z$  et  $T$  définies par  $Z = \sup(X, Y)$  et  $T = \inf(X, Y)$ .

**Q4.** Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers naturels, déterminer  $P((Z = m) \cap (T = n))$  en distinguant trois cas :  $m > n$ ,  $m < n$  et  $m = n$ .

**Q5.** En déduire la loi de la variable aléatoire  $Z$ .



# PROBLÈME

Dans ce problème,  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

## Partie I

### Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

Démontrer que les matrices  $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sont des matrices de projecteur puis calculer  $\Pi_1 + 5\Pi_2$ ,  $\Pi_1 + \Pi_2$  et  $\Pi_1\Pi_2$ .

### Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :

Si  $P_1, P_2, \dots, P_r$  sont des éléments de  $\mathbb{C}[X]$  deux à deux premiers entre eux de produit égal à  $T$ , si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  alors :

$$\text{Ker}[T(u)] = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier  $r = 2$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes premiers entre eux.

Justifier que  $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$  (de même, on a :  $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ ).

Démontrer que :  $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$ .

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

### Q8. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et soit $\pi_u$ son polynôme minimal.

On suppose que  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$  où les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier  $i \in \{1, 2\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ .

Justifier qu'il existe deux polynômes  $R_1$  et  $R_2$  de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$ .

Pour la suite de cette partie, on notera  $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$  la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$ , il existe des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$ .

**Q9.** On pose alors pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ .

Démontrer que pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers distincts de  $\{1, 2, \dots, m\}$ , on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = \text{id}_E,$$

et chaque  $p_i$  est un projecteur de  $E$ .

Les  $p_i$  seront appelés projecteurs associés à  $u$ .

**Q10.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  et soit  $\chi_u$  son polynôme caractéristique :  $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

(avec les  $\lambda_i$  deux à deux distincts et les  $\alpha_i$  des entiers naturels non nuls) et pour tout entier

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$  le sous-espace caractéristique associé à  $\lambda_i$ .

Justifier que  $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$ .

**Q11.** Démontrer que  $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$ .

**Q12.** Démontrer que pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\text{Im } p_i = N_i$ .

## Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable et on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ses valeurs propres distinctes.

**Q13.** Quel est alors le polynôme minimal  $\pi_u$  de  $u$  ?

**Q14.** On note toujours, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$  où  $P_i = X - \lambda_i$ , et on pose

$$\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}.$$

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{\pi_u}$  puis démontrer que les

projecteurs associés à  $u$  sont, pour tout entier  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$ .

**Q15.** Démontrer que  $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$  puis que  $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$  (décomposition spectrale de  $u$ ).

**Q16.** Exemple : on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable et calculer la matrice  $A^2$ .
- b) En déduire le polynôme minimal  $\pi_A$  de la matrice  $A$  puis la décomposition spectrale de la matrice  $A$ . On notera  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  les matrices des projecteurs associés.
- c) Calculer, pour tout entier naturel  $q$ ,  $A^q$  en fonction des matrices  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

**Q17.** On note  $\mathbb{C}[v]$  l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme  $v$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.  
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[v]$  est égal au degré du polynôme minimal  $\pi_v$  de l'endomorphisme  $v$ .

**Q18.** On revient au cas  $u$  diagonalisable avec  $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ .

Démontrer que la famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  des projecteurs associés à  $u$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[u]$ .

**Q19.** Dans le cas d'un endomorphisme  $u$  non diagonalisable, la famille  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  des projecteurs associés à  $u$  est-elle toujours une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[u]$  ?

**Q20.** Nous avons vu que si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  diagonalisable, il existe  $m$  endomorphismes non nuls  $p_i$  de  $E$ , tels que pour tout entier  $q$  on ait  $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$ .

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe  $m$  endomorphismes non nuls  $f_i$  de  $E$  et  $m$  complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  distincts, tels que pour tout

entier naturel  $q$  on ait  $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$ .

Démontrer que  $u$  est diagonalisable.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

### MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

# EXERCICE

## Fonction de Bessel

Soit une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \, dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) \, dt.$$

- Q1.** Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Q2.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donner des expressions sous forme d'intégrales de  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Q3.** Soit une fonction  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , puis déterminer  $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

- Q4.** En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0. \quad (\text{E})$$

- Q5.** On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que  $a_1 = 0$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

- Q6.** En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de  $f$  en fonction des termes de la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Q7.** Déduire des questions précédentes que  $f$  est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant  $f(0) = \pi$ .
- Q8.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

# PROBLÈME 1

## Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial  $t = 0$  est  $k = 0$ . À chaque instant  $t \in \mathbb{N}^*$ , elle se déplace aléatoirement de sa position  $k \in \mathbb{Z}$  à la position  $k + 1$  ou  $k - 1$ .

Soit  $p \in ]0;1[$ . On définit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \Sigma, P)$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_t$  modélise le déplacement de la particule à l'instant  $t$ . Si  $X_t = 1$ , la particule se déplace vers la droite. Si  $X_t = -1$ , la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n$  modélise la position de la particule après  $n$  déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

### Partie I - Un développement en série entière

**Q9.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

**Q10.** En déduire que pour tout  $x \in ]-1;1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

### Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(S_n = 0).$$

**Q11.** Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_t + 1}{2}$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Q12.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

**Q13.** Déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  selon les valeurs de  $p$  et interpréter le résultat.

### Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant  $t = 2j$ , 0 sinon. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . On note  $\mathbb{E}(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

Dans cette partie, on souhaite déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

**Q14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Que modélise la variable aléatoire  $T_n$  ?

**Q15.** Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $O_{2j}$ . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

**Q16.** On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ . En utilisant le résultat de la **Q10**, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$  et interpréter le résultat.

**Q17.** On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

## PROBLÈME 2

### Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  avec  $p = 1$  (matrices colonnes) ou  $p = n$  (matrices carrées). Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note alors  $M_k = (m_{i,j}^{(k)})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket}$  ou plus simplement  $M_k = (m_{i,j}^{(k)})$ .

On suppose que l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  est muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  indifféremment des valeurs de  $n$  et  $p$ . En particulier, si  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $V$  est une matrice colonne assimilée à un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  et on note  $\|V\|$  sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ ;
2. la suite des normes  $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 ;
3. pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;p \rrbracket$ , la suite de nombres complexes  $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$  (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'une matrice donnée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on définit la matrice  $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note  $P_{a,b}$  le polynôme caractéristique de la matrice  $M(a, b)$ .

On note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on remarque que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$M(a, b) = bI_n + aM(1, 0).$$

**Q18.** On suppose, dans cette question uniquement, que  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que dans ce cas  $M(a, b)$  est diagonalisable.

**Q19.** Montrer que  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  est un vecteur propre de  $M(a, b)$  et déterminer la valeur propre associée à  $V$ .

**Q20.** Montrer que  $P_{1,0}(X) = (X - (n - 1))(X + 1)^{n-1}$ .

**Q21.** On suppose que  $a \neq 0$ . Montrer que  $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$ . En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $M(a, b)$  ainsi que leurs multiplicités.



- Q22.** On définit le polynôme  $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$  par  $Q_{a,b}(X) = (X - (b - a))(X - (b + (n - 1)a))$ .  
Montrer que  $Q_{a,b}$  est un polynôme annulateur de  $M(a, b)$  et en déduire que  $M(a, b)$  est diagonalisable (on distinguera les cas  $a = 0$  et  $a \neq 0$ ).
- Q23.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $a \neq 0$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^k$  par le polynôme  $Q_{a,b}$  et en déduire une expression de  $M(a, b)^k$  comme combinaison linéaire de  $M(a, b)$  et de  $I_n$ .
- Q24.** Supposons que  $|b - a| < 1$  et  $|b + (n - 1)a| < 1$ . Déterminer la limite de la suite de matrices  $(M(a, b)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

## Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . On note sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . On note  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'objectif de cette partie est de montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

On suppose (sauf à la **Q29**) que  $A = T$  où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Q25.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$  et en déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0$ .

On suppose qu'il existe  $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1; i \rrbracket$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$ .

**Q26.** Montrer qu'il existe  $x \in \text{Vect}(e_j)_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket}$  tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

**Q27.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$ . En déduire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ .

**Q28.** Montrer alors que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$ .

**Q29.** On ne suppose plus que  $A$  est triangulaire supérieure. Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

### Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

On dit alors que  $A$  est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet que dans ce cas  $A$  est inversible.

On définit ensuite  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de la manière suivante : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,

- si  $i \geq j$ ,  $m_{i,j} = a_{i,j}$  et  $f_{i,j} = 0$ ;
- si  $i < j$ ,  $m_{i,j} = 0$  et  $f_{i,j} = -a_{i,j}$ .

Ainsi,  $A = M - F$  où  $F$  est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de  $-A$  et où  $M$  est la partie triangulaire inférieure de  $A$ .

Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On note  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers  $X$ .

**Q30.** Justifier que  $M$  est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose  $B = M^{-1}F$ . On définit par récurrence une suite de matrices colonnes  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

**Q31.** Montrer que  $X = BX + M^{-1}Y$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre quelconque de la matrice  $B$ . On note  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre de  $B$  associé à cette valeur propre.

Par convention, si  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes alors  $\sum_{j=n+1}^n u_j = \sum_{j=1}^0 u_j = 0$ .

**Q32.** Montrer que  $FV = \lambda MV$ . En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \lambda a_{i,i} v_i = - \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).$$

**Q33.** Montrer qu'il existe  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $|v_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_j|$  et  $v_{i_0} \neq 0$ . En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leq \left( \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \right).$$

**Q34.** En déduire que  $|\lambda| < 1$ , puis que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ .

**Q35.** Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

et conclure.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1

## Endomorphisme cyclique

### Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que pour tout entier  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme  $f$  est cyclique s'il existe un vecteur  $v \in E$  tel que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  soit une base de l'espace vectoriel  $E$ .

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

### Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y).$$

- Q1.** En considérant  $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que  $f$  est un endomorphisme cyclique de  $\mathbb{R}^2$ .
- Q2.** Déterminer les valeurs propres de  $f$  et donner une base de chaque sous-espace propre de  $f$ .
- Q3.** Existe-t-il un vecteur  $w \in \mathbb{R}^2$  non nul tel que la famille  $(w, f(w))$  ne soit pas une base de  $\mathbb{R}^2$  ?

### Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- Q4.** Montrer que l'on a la relation  $g^2 = g + 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .
- Q5.** Montrer que la matrice  $M$  est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Q6.** L'endomorphisme  $g$  est-il cyclique ?

### Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et on considère l'application  $\Delta$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a  $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$ .

**Q7.** Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q8.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Calculer  $\Delta(X^k)$  sous une forme développée.

**Q9.** En déduire que si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  est un polynôme non constant, alors  $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ .

**Q10.** Montrer que l'endomorphisme  $\Delta$  est cyclique.

### Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable  $h$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de  $h$  pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme  $h$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de l'espace vectoriel  $E$  composée de vecteurs propres de  $h$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  la valeur propre associée au vecteur propre  $v_k$ .

Soit  $v \in E$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

**Q11.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

**Q12.** Montrer que le déterminant de la famille  $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$  dans la base  $\mathcal{B}$  est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

**Q13.** Conclure que  $h$  est cyclique si et seulement si il admet  $n$  valeurs propres distinctes.

## EXERCICE 2

### La fonction dilogarithme

#### Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

#### Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction  $f : ]0, +\infty[ \times ]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (t, x) \in ]0, +\infty[ \times ]-\infty, 1], \quad f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}.$$

**Q14.** Justifier que la fonction  $f$  est bien définie sur  $]0, +\infty[ \times ]-\infty, 1]$ .

**Q15.** Montrer que la fonction  $t \mapsto f(t, 1)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**Q16.** Soit  $x \in ]-\infty, 1]$ . En comparant les fonctions  $t \mapsto f(t, x)$  et  $t \mapsto f(t, 1)$ , montrer que  $t \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction  $L : ]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]-\infty, 1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t, x) dt.$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

**Q17.** Montrer que la fonction  $L$  est continue sur  $] -\infty, 1]$ .

#### Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction  $L$  est développable en série entière. On considère un nombre réel  $x \in [-1, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $s_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad s_n(t) = t e^{-(n+1)t} x^n.$$

**Q18.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$  converge et que  $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt = \frac{x^n}{(n+1)^2}$ .

**Q19.** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} s_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  et que :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).$$

**Q20.** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  converge et déduire des questions précédentes que  $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ .

**Q21.** Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2)$ .

**Q22.** Déduire des questions précédentes les valeurs de  $L(1)$  et  $L(-1)$ .

### Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction  $h : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x).$$

**Q23.** Justifier que la fonction  $L$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et montrer que l'on a :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Q24.** Montrer que la fonction  $h$  est constante sur  $]0, 1[$ .

**Q25.** Montrer que  $h(x) = L(1)$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ . En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$ .



# EXERCICE 3

## Un jeu de société

### Présentation générale

On considère deux entiers  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $A \in \mathbb{N}^*$ . On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée  $A$  pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble  $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$  : le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée  $A$ .

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et on considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$ . On considère également la suite de variables aléatoires réelles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $S_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

On considère la variable aléatoire  $T$  définie de la façon suivante :

1. si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_n < A$ , alors on pose  $T = 0$ ;
2. sinon, on pose  $T = \min \{ n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geq A \}$ .

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $T$  dans deux cas particuliers.

### Partie I - Préliminaires

#### I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

- Q26.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Que représentent les variables aléatoires  $X_n$  et  $S_n$  dans le contexte de la situation présentée ?
- Q27.** Que représente la variable aléatoire  $T$  ?

#### I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- Q28.** Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

**Q29.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$  est égal à 1.

**Q30.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . En développant la fonction  $f$  en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

## Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $M = 2$ .

### II.1 - Loi des variables aléatoires $S_n$ et $T$

**Q31.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

**Q32.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $T$  ?

**Q33.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq A$ . Exprimer l'évènement  $(T = k)$  en fonction des évènements  $(S_{k-1} = A - 1)$  et  $(X_k = 1)$ . En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

**Q34.** Calculer  $P(T = 0)$ .

### II.2 - Espérance de la variable aléatoire $T$

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice  $G_T$  de la variable aléatoire  $T$  est égale à la somme de la série entière  $\sum_{k \geq A} P(T = k) x^k$  sur son intervalle de convergence.

**Q35.** Déterminer la rayon de convergence  $R_T$  de la série entière  $\sum_{k \geq A} P(T = k) x^k$  et montrer que :

$$\forall x \in ]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left( \frac{x}{2-x} \right)^A.$$

**Q36.** En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

## Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $A \leq M$ .

### III.1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^k \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

**Q37.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En considérant le système complet d'évènements  $((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M - 1))$ , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k P(S_n \leq k - \ell).$$

**Q38.** Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

### III.2 - Espérance de la variable aléatoire $T$

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} P(Z > n)$  converge, alors  $Z$  admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n).$$

**Q39.** Que peut-on dire des évènements  $(T > n)$  et  $(S_n < A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ? En déduire que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance et calculer sa valeur.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.**

# PROBLÈME 1

## Suites et calcul matriciel

On considère les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geq 0, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

### Partie I - Éléments propres d'une matrice

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique.

- Q1.** Montrer que le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$  a pour expression :  $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$ .  
En déduire les valeurs propres de  $A$ .
- Q2.** La matrice  $A$  est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.
- Q3.** La matrice  $A$  est-elle inversible ?
- Q4.** La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

### Partie II - Trigonalisation de $A$

On considère les éléments suivants de  $\mathbb{R}^3$  :  $b_1 = (0, 1, 1)$ ,  $b_2 = (1, 1, 0)$  et  $b_3 = (0, 0, 1)$ .

- Q5.** Montrer que  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Q6.** Montrer que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Q7.** On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathcal{B}$ .

Déterminer  $P$  et vérifier que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Q8.** Déterminer une relation entre  $A$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $P^{-1}$ .

### Partie III - Calcul des puissances de $T$ et expression de $u_n, v_n, w_n$

**Q9.** On note  $T = N + D$ , où  $D$  est une matrice diagonale et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $D$  et vérifier que  $N$  et  $D$  commutent.

**Q10.** Que vaut  $N^n$  pour un entier  $n \geq 2$  ?

**Q11.** Dédire de ce qui précède une expression de  $T^n$ . On donnera chacun de ses coefficients.

**Q12.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , établir une relation entre  $X_{n+1}$ ,  $A$  et  $X_n$ .

**Q13.** En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $X_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $X_0$ .

**Q14.** Déterminer, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  en fonction de  $T^n$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ . Démontrer cette relation par récurrence.

**Q15.** Déterminer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $u_n$ ,  $v_n$  et de  $w_n$  en fonction de  $n$ .

## PROBLÈME 2

### Une fonction définie à partir d'une intégrale

#### Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'applications : automatique, traitement du signal, etc.

On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

#### Partie I - Définition de la fonction

**Q16.** Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'intégrale  $\int_0^1 t^\alpha dt$  est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de  $\alpha$ .

**Q17.** Un nombre réel  $x$  étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de  $t$ ), lorsque  $t$  tend vers  $0^+$ , de la fonction définie sur  $]0, 1]$  par  $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ .

**Q18.** En déduire que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$ .

On définit alors sur  $]0; +\infty[$  la fonction  $f$  par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt .$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction  $f$ .

#### Partie II - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

**Q19.** Montrer que  $f(1) = \ln(2)$ , puis que  $f(2) = 1 - \ln(2)$ . On pourra remarquer que, pour  $t \in [0, 1]$  :

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} .$$

**Q20.** Rappeler la formule de factorisation de  $a^n - b^n$ , pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
En déduire que, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 - (-t)^n = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k .$$

**Q21.** En déduire que, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} .$$

On pourra remarquer que, pour  $n \geq 2$  et  $t \in [0, 1]$  :  $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$ .

- Q22.** Écrire une fonction **python** d'en-tête `def fEntier(n)` : qui calcule  $f(n)$  à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de  $f(n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
On supposera la fonction `log` (pour `ln`) importée de la bibliothèque **numpy**.

### Partie III - Variations de $f$

- Q23.** Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction  $g$  définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Q24.** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $-1 < \alpha \leq \beta$ . Comparer, pour  $t \in ]0, 1]$ ,  $t^\alpha$  et  $t^\beta$ .  
En déduire que  $f$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$ .
- Q25.** Montrer que, pour tout  $x > 0$  et  $t \in ]0, 1]$  :

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}.$$

En déduire que, pour  $x > 0$  :

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

- Q26.** En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  ainsi que la limite de  $f$  en 0.
- Q27.** Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne  $\ln(2) \simeq 0,7$ ).

### Partie IV - Équivalent de $f$ en $+\infty$

- Q28.** Montrer que, pour  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

- Q29.** En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour  $x > 1$  :

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1).$$

- Q30.** En déduire un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .



## PROBLÈME 3

### Étude d'un couple de variables aléatoires

#### Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  et Face avec une probabilité  $1 - p$ . On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au  $n$ -ème lancer, on place  $n$  boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à  $n$  dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard.

On admet l'existence d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- $X$  la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- $N$  la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors  $X$  vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit).

Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de  $X$  et  $N$ .

#### Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries entières d'une variable réelle.

- Q31.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} x^n$ .
- Q32.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente.
- Q33.** Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto \ln(1 - x)$ . On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

#### Partie II - Loi et espérance de $X$

- Q34.** Rappeler la loi de  $X$ . On précisera l'ensemble des valeurs prises par  $X$  (noté  $X(\Omega)$ ) et, pour chaque entier  $n$  dans cet ensemble, la valeur de  $P(X = n)$ .
- Q35.** Justifier l'existence de l'espérance de  $X$ , notée  $E(X)$ , et calculer celle-ci.

#### Partie III - Loi de $N$

- Q36.** Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $N$ ? On le notera  $N(\Omega)$ .
- Q37.** Donner, pour  $n \in X(\Omega)$  et  $k \in N(\Omega)$ , la valeur de la probabilité conditionnelle  $P_{[X=n]}(N = k)$ . On distinguera les cas  $1 \leq k \leq n$  et  $k > n$ .
- Q38.** Montrer que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

- Q39.** Calculer la valeur de  $P(N = 1)$ .

## Partie IV - Étude de l'indépendance de $X$ et $N$

**Q40.** Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires  $Y_1$  et  $Y_2$  définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis)  $E_1$  et  $E_2$ .

On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où  $X$  et  $N$  sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

**Q41.** Montrer que  $P(N = 2) > 0$ .

**Q42.** Que vaut  $P([X = 1] \cap [N = 2])$  ?

Les variables aléatoires  $X$  et  $N$  sont-elles indépendantes ?

## Partie V - Espérance de $N$

**Q43.** Montrer que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(N = k) \leq (1 - p)^{k-1}$ .

On pourra remarquer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $n \geq k$  :

$$\frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} \leq p(1 - p)^{n-1}.$$

**Q44.** En déduire que  $N$  admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n} p(1 - p)^{n-1}.$$

**Q45.** On admet que le calcul de cette espérance peut être effectué en intervertissant l'ordre de sommation ; et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p(1 - p)^{n-1}.$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{p} \right).$$

**Q46.** Montrer que  $E(N) \leq E(X)$ .

Ce résultat était-il prévisible ?

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont autorisées.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

# Problème 1

## Partie I - Nature d'intégrales généralisées

Soit  $a > 0$ , on considère les fonctions  $f_a$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^a}.$$

On note  $I_a$  et  $J_a$  les intégrales généralisées :  $I_a = \int_0^1 f_a(t) dt$  et  $J_a = \int_1^{+\infty} f_a(t) dt$ .

**Q1.** Montrer que  $I_a$  converge pour  $a < 2$ . Qu'en est-il pour  $a \geq 2$  ?

**Q2.** Soit  $a > 1$ , montrer que  $J_a$  est absolument convergente.

**Q3.** a) Soit  $X > 1$ , montrer que :

$$\int_1^X f_a(t) dt = \frac{-1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi} \int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt.$$

b) En déduire la nature de  $J_a$  lorsque  $a \in ]0, 1]$ .

**Q4.** Pour quelles valeurs de  $a$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$  est-elle convergente ?

## Partie II - Étude d'une série numérique

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n} dx.$$

**Q5.** a) Justifier l'existence du terme  $u_0$ .

b) On pose  $v_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n} dx$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante, puis qu'elle converge vers 0.

c) En déduire que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente. On appelle  $\ell$  la somme de cette série.

**Q6.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on note  $S_N$  la somme partielle au rang  $N$  de la série, soit  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ .  
Montrer que :

$$|S_N - \ell| \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{N+1} \right).$$

**Q7.** À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt.$$

- Q8.** Exprimer la limite  $\ell$  sous la forme d'une intégrale généralisée que l'on ne cherchera pas à calculer. Ce calcul fera l'objet des parties suivantes.

### Partie III - Résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  des équations différentielles (E) et (H) :

$$(E) : y'' + \pi^2 y = \frac{\pi}{x};$$

$$(H) : y'' + \pi^2 y = 0.$$

- Q9.** a) Résoudre l'équation (H) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 b) Démontrer le résultat de cours suivant : si  $y_p$  est une solution connue de l'équation (E), alors toute solution  $y$  de (E) s'écrit sous la forme :

$$y = y_p + h$$

où  $h$  est une solution de l'équation H.

On note  $A_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$  et  $B_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t} dt$ .

On admet dans la suite du problème que ces deux intégrales sont convergentes.

- Q10.** a) On considère la fonction  $y_0$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y_0(x) = \cos(\pi x) \left( A_1 - \int_1^x \frac{\sin(\pi t)}{t} dt \right) - \sin(\pi x) \left( B_1 - \int_1^x \frac{\cos(\pi t)}{t} dt \right),$$

avec  $A_1$  et  $B_1$  définies plus haut.

Montrer que  $y_0$  est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Pour traiter cette question, il est recommandé de considérer  $A_1$  et  $B_1$  comme deux constantes numériques.

- b) Montrer qu'on a la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y_0(x) = \cos(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt - \sin(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t} dt.$$

- c) Soit  $x > 0$ .

i) Montrer que  $\int_x^1 \frac{\cos(\pi t)}{t} dt = -\cos(\pi x) \ln(x) + \pi \int_x^1 \sin(\pi t) \ln(t) dt$ .

ii) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi x) \cos(\pi x) \ln(x) = 0$ .

iii) Justifier que l'intégrale impropre  $\int_0^1 \sin(\pi t) \ln(t) dt$  converge.

iv) Dédire des résultats précédents que la fonction  $y_0$  est prolongeable par continuité en 0.

On note désormais :  $y_0(0) = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$ .

## Partie IV - Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$

Dans cette partie, on considère la fonction de deux variables  $\varphi$ , définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{-\pi x t}}{1 + t^2}.$$

**Q11.** Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t, x) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi x t}}{1 + t^2} dt$$

converge pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

On note désormais  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi x t}}{1 + t^2} dt.$$

**Q12.** On admet les résultats suivants :

-  $H$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$- \forall x \in \mathbb{R}^+, H'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) dt \quad \text{et} \quad H''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) dt$$

où les intégrales impropres considérées sont convergentes.

Exprimer  $H'(x)$  et  $H''(x)$  sous forme d'intégrales généralisées. Le calcul de ces intégrales n'est pas demandé.

**Q13.** Montrer que  $H$  est une solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle (E) étudiée à la partie III.

**Q14.** Montrer qu'il existe  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \cos(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt - \sin(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t} dt + A \cos(\pi x) + B \sin(\pi x).$$

On pourra utiliser les résultats démontrés à la partie III.

**Q15. a)** En utilisant l'expression initiale de  $H$ , montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq H(x) \leq \frac{1}{\pi x}$ .  
En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ .

**b)** En utilisant des limites de suites en  $+\infty$ , montrer que :

$$\left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} (A \cos(\pi x) + B \sin(\pi x)) = 0 \right] \Rightarrow [A = B = 0].$$

**c)** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, H(x) = y_0(x)$ .

**d)** À l'aide des résultats de la question **Q10c**, montrer que :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

## Problème 2

Les résultats de la partie II peuvent être utilisés dans la partie III.

La partie IV est une application des parties I et III. Elle peut être traitée en admettant les résultats des parties I et III.

De façon usuelle, on note  $0_E$  le vecteur nul de l'espace vectoriel  $E$ .

### Partie I - Préliminaires : étude de deux applications linéaires

Soient les deux matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note respectivement  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ . L'application identité de  $\mathbb{R}^3$  est notée  $id$  et sa matrice associée est notée  $I$ .

- Q16.** a) Déterminer  $\ker(f - id)$  et  $\ker(f + id)$ .  
b) Calculer  $A^2$ .  
c) En déduire que  $f$  est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
- Q17.** a) Montrer que l'application  $g$  est bijective.  
b) Déterminer  $B^{-1}$ .

### Partie II - Questions de cours

Dans cette partie,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- Q18.** À quelles conditions peut-on énoncer que  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ ?  
Dans ce cas, on note  $E = E_1 \oplus E_2$ .
- Q19.** Dans le cas particulier où  $E$  est de dimension finie, donner, sans justification, une propriété du cours permettant de démontrer que :  $E = E_1 \oplus E_2$ .
- Q20.** On suppose que  $E$  est de dimension finie, que  $E = E_1 \oplus E_2$  avec  $\dim(E_1) \neq 0$  et  $\dim(E_2) \neq 0$ . Soit  $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $E_1$  et  $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_q) = (\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq q}$  une base de  $E_2$ .  
Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_q)$ , obtenue par concaténation des bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , est une base de  $E$ .

## Partie III - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie et  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , supplémentaires dans  $E$ .

On suppose que  $\dim(E) = 2n$  et  $\dim(F) = \dim(G) = n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $F$  vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) :  $f \neq id_F$  et  $f \neq -id_F$ , où  $id_F$  désigne l'endomorphisme identité de  $F$ ;

(P2) :  $f$  est diagonalisable;

(P3) : l'ensemble des valeurs propres de  $f$ , noté  $\text{Sp}(f)$ , vérifie  $\text{Sp}(f) \subset \{-1; 1\}$ .

### Q21. Propriétés de l'endomorphisme $f$ de $F$

- a) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $\ker(f - id_F) \neq \{0_E\}$ .  
On admet que l'on a aussi  $\ker(f + id_F) \neq \{0_E\}$ .
- b) Pourquoi peut-on dire, sans calculs, que  $f$  est un endomorphisme bijectif de  $F$ ?
- c) Montrer que  $f$  est une symétrie vectorielle de l'espace  $F$ . Que peut-on en déduire pour l'application  $f^{-1}$ ?

Soit  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  une application linéaire bijective.

On rappelle que  $E = F \oplus G$ . On considère  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  défini par ses restrictions aux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  :

$$\varphi|_F = g + f \quad \text{et} \quad \varphi|_G = g^{-1}.$$

On a donc :

$$\forall x \in F, \varphi(x) = g(x) + f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \varphi(x) = g^{-1}(x).$$

### Q22. Étude de l'endomorphisme $\varphi$ de $E$

Soit  $x \in E$ . On pose  $x = x_1 + x_2$ , avec  $(x_1, x_2) \in F \times G$ .

- a) Donner l'expression de  $\varphi(x)$  en fonction de  $x_1, x_2, f$  et de  $g$ .
- b) Montrer que  $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ .  
Pourquoi peut-on affirmer que 0 n'est pas une valeur propre de  $\varphi$ ?
- c) On suppose que  $x$  est non nul.
  - i) Montrer que  $x$  est un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si 
$$\begin{cases} g(x_1) = \lambda x_2 \\ f(x_1) + g^{-1}(x_2) = \lambda x_1 \end{cases}.$$
  - ii) Justifier qu'on a alors  $x_1 \neq 0_E$  et  $x_2 \neq 0_E$ .
  - iii) Montrer que  $f(x_1) = (\lambda - \frac{1}{\lambda})x_1$ .
- d) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\varphi$ , alors :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{5}}{2}$$

avec  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$ . Combien y a-t-il de valeurs propres possibles pour  $\varphi$ ?



### Q23. Diagonalisation de $\varphi$

D'après la question **Q21**, on a :  $F = \ker(f - id_F) \oplus \ker(f + id_F)$ .

Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $\ker(f - id_F)$  et  $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $\ker(f + id_F)$ . Alors  $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $F$ , formée de vecteurs propres de  $f$ .

a) Montrer que  $\mathcal{B}_2 = (g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_n)) = (g(\varepsilon_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $G$ .

On sait désormais que  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_n))$  est une base de  $E$ .

Soit  $x \in E$ , on note  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On a donc :

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{avec} \quad x_1 = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \quad \text{et} \quad x_2 = \sum_{i=1}^n b_i g(\varepsilon_i).$$

b) Montrer que  $x$  est un vecteur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, & b_i = \frac{1}{\lambda} a_i \\ \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, & a_i = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) a_i \\ \forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket, & a_i = -\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) a_i \end{cases}.$$

c) On suppose que  $\lambda - \frac{1}{\lambda} = 1$ .

i) Montrer que le sous-espace propre de  $\varphi$ , associé à la valeur propre  $\lambda$  et noté  $E_\lambda$ , vérifie :

$$E_\lambda = \text{Vect}\left(\varepsilon_i + \frac{1}{\lambda} g(\varepsilon_i)\right)_{1 \leq i \leq p}.$$

ii) Montrer que  $\dim(E_\lambda) = p$ .

d) On admet que si  $\lambda - \frac{1}{\lambda} = -1$ , alors le sous-espace propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , vérifie  $E_\lambda = \text{Vect}\left(\varepsilon_i + \frac{1}{\lambda} g(\varepsilon_i)\right)_{p+1 \leq i \leq n}$  et qu'on a  $\dim(E_\lambda) = n - p$ .

Montrer que  $\varphi$ , endomorphisme de  $E$ , est diagonalisable.

## Partie IV - Application : étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on pose  $E = \mathbb{R}^6$  et  $\varphi$  désigne l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à la matrice  $M$  :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant  $(e_i)_{1 \leq i \leq 6}$  les vecteurs de la base canonique de  $E$ , on pose  $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$  et  $G = \text{Vect}(e_4, e_5, e_6)$ .

**Q24.** Pourquoi peut-on affirmer que  $E = F \oplus G$  ?

**Q25.** Montrer qu'il existe  $f \in \mathcal{L}(F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , tels que  $\varphi|_F = g + f$ .  
Soient  $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$ , montrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = A \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(g) = B$$

où  $A$  et  $B$  sont les matrices définies à la partie I.

**Q26.** À l'aide des résultats de la question **Q16**, déterminer une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

**Q27.** a) Montrer que l'application  $g$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $G$ .  
b) Exprimer  $g^{-1}(e_4)$ ,  $g^{-1}(e_5)$  et  $g^{-1}(e_6)$  en fonction des vecteurs  $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ .

**Q28.** a) En utilisant les résultats des parties I et III, donner les valeurs propres de  $\varphi$  et les dimensions de chaque sous-espace propre de  $\varphi$ .  
b) Déterminer une matrice diagonale semblable à  $M$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

$X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  d'espérance finie.

**Q1.** Exprimer, pour  $k$  non nul,  $P(X = k)$  en fonction de  $P(X > k - 1)$  et de  $P(X > k)$ .

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Démontrer le résultat de cours : 
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue, de façon équiprobable,  $p$  tirages successifs avec remise et on note  $X$  le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel  $k$ ,  $P(X \leq k)$ , puis donner la loi de  $X$ .

**Q3.** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ , puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  de  $E(X)$ .

## EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note  $I = ]0, +\infty[$ ,  $S_I(E)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  sur  $I$  et  $S_I(H)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(H)$  sur  $I$ .

**Q4.** Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel  $S_I(H)$ .

**Q5.** Démontrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$  sur  $I$  développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ .

**Q6.** On note pour  $x \in I$ ,  $g(x) = \frac{-1}{x^2}$  et  $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}$ .

On admet dans cette question que  $g \in S_I(E)$  et  $h \in S_I(H)$ .

Donner, sans calculs, l'ensemble  $S_I(E)$ .

**Q7.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $S_{\mathbb{R}}(H)$  (solutions de  $(H)$  sur  $\mathbb{R}$ ) ?

## PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

### Q8. Question préliminaire

Si on admet que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , que vaut la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  ?

### Partie I

Q9. On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ .

Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ , puis déterminer une relation entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , que  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

Q10. Déterminer sur l'intervalle  $] -1, 1[$  le développement en série entière des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ .

Q11. En déduire que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$ .

Q12. Justifier que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$ .

Q13. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## Partie II

**Q14.** Donner sur l'intervalle  $] -1, 1[$  le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ , puis calculer l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ .

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

**Q15.** On pose pour  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$ .

Démontrer que la fonction  $f$  est bien définie et est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**Q16.** Établir que cette fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]0, 1]$  et exprimer  $f'(x)$  comme une intégrale.

**Q17.** Réduire au même dénominateur l'expression  $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$  et en déduire que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ .

**Q18.** Calculer  $f(1)$ , puis en déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

|                                           |
|-------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont interdites.</b> |
|-------------------------------------------|

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE 1

**Q1.** Justifier que la matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Q2.** Application : On considère trois suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  et  $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $Y_n$  en fonction de  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  et  $n$ .

À quelle condition sur  $(u_0, v_0, w_0)$  les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

## EXERCICE 2

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Une permutation de  $S_n$  sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice  $i$  est l'image de  $i$  par cette permutation. Par exemple, la liste  $[3, 1, 0, 2]$  représente la permutation  $\sigma \in S_4$  définie par  $\sigma(0) = 3, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 0$  et  $\sigma(3) = 2$ .

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

**Q3.** Si `s` est une liste Python représentant une permutation de  $S_4$ , quelle instruction Python permet de trouver l'image de 1 par cette permutation ?

Quelle liste Python représente la transposition  $(2 \ 3) \in S_4$  ?

**Q4.** Écrire une fonction Python `comp(s1, s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation  $\sigma_1 \circ \sigma_2$ .

**Q5.** Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation  $\sigma$  et renvoyant la liste représentant  $\sigma^{-1}$ .

**Q6.** On souhaite tester si un sous-ensemble  $G$  de  $S_n$  est ou non un sous-groupe de  $S_n$ . Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de  $S_n$  et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de  $S_n$ , `False` sinon.



- Q7.** Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste  $s$  représentant une permutation  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  et renvoyant le sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$  engendré par  $\sigma$  sous la forme d'une liste de listes.

## PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul  $n$ , une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0.$$

- Q8.** Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est définie positive.

### Caractérisation spectrale

- Q9.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

- Q10. Application :** Démontrer que le polynôme  $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$  admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

### Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

*Une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.*

- Q11.** Démontrer qu'une matrice définie positive  $M$  de taille quelconque vérifie toujours  $\text{Tr}(M) > 0$  et  $\det(M) > 0$ .
- Q12.** Démontrer qu'une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.
- Q13.** Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?
- Q14. Application :** Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$  admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

## Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque  $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit le  $k$ -ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice  $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ . On précise qu'une matrice carrée de taille  $n$  possède  $n$  mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  de la **question Q10.** sont les déterminants des matrices  $B_1 = (1)$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

*Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.*

Par exemple, pour la matrice  $B$  de la **question Q10.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice  $B$  vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

**Q15.** On fixe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ainsi qu'un vecteur colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}). \text{ Déterminer un vecteur colonne } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \text{ tel que :}$$

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

**Q16.** Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille  $n$  de la matrice.

**Q17.** Soit  $n \geq 2$  et soit une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\det(M) > 0$ . On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice  $M_{n-1}$  est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne  $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  tel que  $M_{n-1}V + U = 0$ .

En notant  $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ , démontrer alors que  $Q^T M Q$  s'écrit par blocs  $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$  avec  $\beta > 0$ .

**Q18.** Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

**Q19.** Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  la matrice  $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$  est-elle définie positive ?

**Q20.** La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle définie positive ? Justifier.

**Q21.** Démontrer que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  :

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

**Q22.** Pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$  la matrice  $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est-elle définie positive ?

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 1**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

$X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  d'espérance finie.

**Q1.** Exprimer, pour  $k$  non nul,  $P(X = k)$  en fonction de  $P(X > k - 1)$  et de  $P(X > k)$ .

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Démontrer le résultat de cours : 
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue, de façon équiprobable,  $p$  tirages successifs avec remise et on note  $X$  le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel  $k$ ,  $P(X \leq k)$ , puis donner la loi de  $X$ .

**Q3.** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ , puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  de  $E(X)$ .

## EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H): x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note  $I = ]0, +\infty[$ ,  $S_I(E)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  sur  $I$  et  $S_I(H)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(H)$  sur  $I$ .

**Q4.** Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel  $S_I(H)$ .

**Q5.** Démontrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$  sur  $I$  développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ .

**Q6.** On note pour  $x \in I$ ,  $g(x) = \frac{-1}{x^2}$  et  $h(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}$ .

On admet dans cette question que  $g \in S_I(E)$  et  $h \in S_I(H)$ .

Donner, sans calculs, l'ensemble  $S_I(E)$ .

**Q7.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $S_{\mathbb{R}}(H)$  (solutions de  $(H)$  sur  $\mathbb{R}$ ) ?

## PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

### Q8. Question préliminaire

Si on admet que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , que vaut la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  ?

### Partie I

Q9. On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ .

Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ , puis déterminer une relation entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , que  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

Q10. Déterminer sur l'intervalle  $] -1, 1[$  le développement en série entière des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ .

Q11. En déduire que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$ .

Q12. Justifier que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$ .

Q13. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## Partie II

**Q14.** Donner sur l'intervalle  $] -1, 1[$  le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ , puis calculer l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ .

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

**Q15.** On pose pour  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$ .

Démontrer que la fonction  $f$  est bien définie et est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**Q16.** Établir que cette fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]0, 1]$  et exprimer  $f'(x)$  comme une intégrale.

**Q17.** Réduire au même dénominateur l'expression  $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$  et en déduire que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ .

**Q18.** Calculer  $f(1)$ , puis en déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 2**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**



## EXERCICE 1

**Q1.** Justifier que la matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Q2.** Application : On considère trois suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  et  $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $Y_n$  en fonction de  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  et  $n$ .

À quelle condition sur  $(u_0, v_0, w_0)$  les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

## EXERCICE 2

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$  de la variable réelle et on note  $f$  sa somme.

**Q3.** Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .

**Q4.** Démontrer que  $f$  est continue sur  $D$ .

**Q5.** Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Q6.** Démontrer que, pour tout  $x \in D$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$ .

**Q7.** En déduire un équivalent de  $f$  au voisinage de 0.

## PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul  $n$ , une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0.$$

**Q8.** Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est définie positive.

### Caractérisation spectrale

**Q9.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

**Q10. Application :** Démontrer que le polynôme  $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$  admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

### Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

*Une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.*

**Q11.** Démontrer qu'une matrice définie positive  $M$  de taille quelconque vérifie toujours  $\text{Tr}(M) > 0$  et  $\det(M) > 0$ .

**Q12.** Démontrer qu'une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

**Q13.** Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

**Q14. Application :** Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$  admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

## Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque  $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit le  $k$ -ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice  $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ . On précise qu'une matrice carrée de taille  $n$  possède  $n$  mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  de la **question Q10.** sont les déterminants des matrices  $B_1 = (1)$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

*Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.*

Par exemple, pour la matrice  $B$  de la **question Q10.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice  $B$  vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

**Q15.** On fixe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ainsi qu'un vecteur colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}). \text{ Déterminer un vecteur colonne } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \text{ tel que :}$$

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

**Q16.** Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille  $n$  de la matrice.

**Q17.** Soit  $n \geq 2$  et soit une matrice symétrique  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\det(M) > 0$ . On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice  $M_{n-1}$  est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne  $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$  tel que  $M_{n-1}V + U = 0$ .

En notant  $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ , démontrer alors que  $Q^T M Q$  s'écrit par blocs  $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$  avec  $\beta > 0$ .

**Q18.** Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

**Q19.** Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  la matrice  $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$  est-elle définie positive ?

**Q20.** La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle définie positive ? Justifier.

**Q21.** Démontrer que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  :

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

**Q22.** Pour quelles valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$  la matrice  $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est-elle définie positive ?

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux problèmes et d'un exercice indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

# PROBLÈME 1

## File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant  $k \in \mathbb{N}^*$  il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant  $k$  et 0 sinon.

On suppose que  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice  $n = 0$ , le premier nouvellement arrivé a pour indice  $n = 1$ , etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est la fonction notée  $G_X$  définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)t^j.$$

### Partie I - Temps d'arrivée du $n$ -ième client

**Q1.** On note  $T_1$  la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.

Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p$ .

**Q2.** On note  $A$  l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».

Exprimer  $A$  en fonction des événements  $\{T_1 = k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . En déduire  $\mathbf{P}(A)$ . Interpréter.

**Q3.** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la fonction génératrice de  $T_1$ , puis calculer sa somme.

**Q4.** En déduire l'espérance et la variance de  $T_1$ .

**Q5.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $T_n$  la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice  $n - 1$  et le client d'indice  $n$ . On admet que les variables aléatoires  $T_n$  sont indépendantes et de même loi.

On note  $D_n = T_1 + \dots + T_n$  la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice  $n$ .

Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice  $G_{D_n}$  de  $D_n$ .

**Q6.** Rappeler le développement en série entière de  $(1 + x)^\alpha$  au voisinage de  $x = 0$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

En déduire le développement en série entière de  $G_{D_n}$  en 0 et montrer que pour tout  $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  :

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Partie II - Étude du comportement de la file

### II.1 - Une suite récurrente

Soient  $a > 0$  et  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$ .

On s'intéresse au comportement de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$z_1 \in ]0, 1[ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_{n+1} = f(z_n).$$

**Q7.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_n \in ]0, 1[$  et  $z_{n+1} - z_n$  est du même signe que  $z_2 - z_1$ .

**Q8.** En déduire que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite  $\ell \in [0, 1]$  vérifiant  $f(\ell) = \ell$ .

**Q9.** Soit la fonction  $\psi : \begin{cases} ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$ .

Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a :  $0 \leq \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leq x$  et  $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ .

**Q10.** On suppose dans cette question que  $a \leq 1$ .

Étudier le signe de  $\psi$  et montrer qu'elle ne s'annule qu'en  $x = 1$ . En déduire que  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

**Q11.** On suppose dans cette question que  $a > 1$ .

Étudier le signe de  $\psi$  et montrer que l'équation  $f(x) = x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et 1 avec  $\alpha \in ]0, 1[$  qu'on ne cherchera pas à expliciter.

En distinguant les cas  $z_1 \in ]0, \alpha]$  et  $z_1 \in ]\alpha, 1[$ , montrer que  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ .

### II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le service a une durée  $k$  avec la probabilité  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note  $S$  la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et  $S$  nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables  $S$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.

Par récurrence, pour tout  $k \geq 2$ , on définit les clients du  $k$ -ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du  $(k-1)$ -ième groupe étaient servis.

Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $V_k$  la variable aléatoire égale au nombre de clients du  $k$ -ième groupe.

Par construction, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , si le  $n$ -ième groupe est vide, alors l'événement  $\{V_k = 0\}$  est réalisé pour tout  $k \geq n$ .

- Q12.** Quelle est la situation concrète décrite par l'événement  $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$  ?
- Q13.** Quelle est la loi du nombre  $N_n$  de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?
- Q14.** Pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\mathbf{P}(V_1 = k | S = n)$ .  
En déduire que  $V_1$  suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
- Q15.** On note  $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$ . Montrer que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que  $\mathbf{P}(Z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$ .
- Q16.** Justifier que pour tout  $(j, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$ . On distinguera le cas  $j = 0$ .
- Q17.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$ .
- Q18.** Déterminer, suivant les valeurs de  $\lambda p$ , la limite de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Interpréter.

## EXERCICE

### Équivalent de Stirling

- Q19.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  converge si, et seulement si,  $x > 0$ .

Pour tout  $x > 0$ , on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- Q20.** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

- Q21.** On admet que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge et qu'elle vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

$$\text{Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

- Q22.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on note  $\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \, dt$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \, dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.$$

*On remarquera que pour  $n = 1$ , par convention, la somme des  $\rho_k$  est nulle.*



**Q23.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt.$$

**Q24.** En déduire que  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$  converge.

**Q25.** Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + c + o(1).$$

En déduire que lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

**Q26.** Pour tout  $x > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on admet que  $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$  est intégrable sur  $]0, n]$  et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Montrer que pour tout  $x > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du.$$

**Q27.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

**Q28.** On définit la fonction  $\mathbf{1}_{]0, n[}$  sur  $\mathbb{R}_+$  en posant  $\mathbf{1}_{]0, n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in ]0, n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que  $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0, n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ , utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout  $x > 0$  :

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout  $x > 0$  :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

**Q29.** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

En déduire que  $e^c = \sqrt{2\pi}$  où  $c$  est défini à la question **Q25**.

On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.

## PROBLÈME 2

### Blocs de Jordan

Soit  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $p$  à coefficients réels. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Les matrices  $J_\lambda$ , dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est dite nilpotente s'il existe  $k \in \mathbb{N}$ , tel que  $M^k = 0$ . Dans ce cas, le plus petit entier naturel  $k$ , tel que  $M^k = 0$  est appelé indice de nilpotence de  $M$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

On dit qu'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathbb{R}^p$  est stable par un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  si pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) \in V$ .

On note  $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et pour tout  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et tout  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$ , on définit :

$$\mathcal{N}(A) = \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left( \sum_{i=1}^p |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

On admet que  $\mathcal{N}$  et  $\|\cdot\|$  définissent des normes respectivement sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $E$ .

### Partie I - Irréductibilité de $J_\lambda$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On note  $u_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $J_\lambda$ .

**Q30.** Calculer  $u_0^2(e_j)$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et en déduire  $J_0^2$ .

Calculer de même  $J_0^{p-1}$  et  $J_0^p$ . En déduire que  $J_0$  est nilpotente d'indice  $p$ .

**Q31.** Montrer que  $\text{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$  et déterminer le sous-espace propre associé.

**Q32.** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ . Montrer que  $V$  est stable par  $u_\lambda$  si, et seulement si,  $V$  est stable par  $u_0$ .

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$  stable par  $u_\lambda$ , de dimension  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On note  $v$  l'endomorphisme induit par  $u_\lambda$  sur  $V$  et  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$  une base de  $V$ , que l'on complète en une base  $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$  de  $\mathbb{R}^p$ .

**Q33.** Quelle est la forme de la matrice de  $u_\lambda$  dans la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  ?

**Q34.** En déduire que le polynôme caractéristique de  $v$  divise le polynôme caractéristique de  $u_\lambda$  et que  $e_p \in V$ .

**Q35.** Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition  $\mathbb{R}^p = V \oplus W$  où  $V$  et  $W$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^p$  stables par  $u_\lambda$  non réduits à  $\{0\}$ .

## Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X.$$

Une solution de  $(S)$  est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe  $C^1$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'(t) = J_\lambda X(t)$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice carrée de taille  $p$  notée  $\exp(tJ_\lambda)$  par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

**Q36.** Montrer que si  $X_0$  est un vecteur propre pour  $J_\lambda$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$  est une solution particulière de  $(S)$ .

**Q37.** On définit la fonction  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$ .

Montrer que  $\varphi$  est dérivable et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$ .

**Q38.** Justifier que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$ .

Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tJ_\lambda)$  est inversible, d'inverse  $\exp(-tJ_\lambda)$ .

**Q39.** Montrer que  $X : t \mapsto X(t)$  est solution de  $(S)$  si, et seulement si,  $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda) X(t)$  est constante.

En déduire que les solutions de  $(S)$  sont exactement les fonctions  $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda) X_0$  où  $X_0 \in E$ .

- Q40.** Montrer que si  $\lambda > 0$ ,  $(S)$  admet une solution non bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Q41.** Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et tout  $X \in E$ , on a  $\|AX\| \leq \mathcal{N}(A)\|X\|$ .  
En déduire que si  $\lambda < 0$ , toutes les solutions de  $(S)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Q42.** Que dire concernant l'existence de solutions de  $(S)$  non bornées sur  $\mathbb{R}_+$  si  $\lambda = 0$  ?

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

### MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1

## Racine cubique d'une matrice

### Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admet une racine cubique s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^3$ . Dans ce cas, on dit que  $B$  est une racine cubique de  $A$ .

### Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice  $A$ .

- Q1.** Justifier qu'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que  $A = PDP^{-1}$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Q2.** Montrer qu'une matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est une racine cubique de  $A$  si et seulement si  $\Delta = P^{-1}BP$  est une racine cubique de  $D$ .
- Q3.** Soit  $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une racine cubique de  $D$ . Montrer que les matrices  $D$  et  $\Delta$  commutent, puis en déduire que la matrice  $\Delta$  est diagonale.
- Q4.** Déterminer l'ensemble des racines cubiques de  $D$ , puis l'ensemble des racines cubiques de  $A$ . On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de  $P$  et de  $\Delta$ .

### Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté  $E$  muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ . On fixe également un réel  $\theta \in \mathbb{R}$  et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Q5.** Quelle est la nature de l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M$ ?
- Q6.** En déduire une racine cubique de la matrice  $M$ .
- Q7.** Soit  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice orthogonale de déterminant  $-1$ . Montrer que  $N$  admet une racine cubique.

### Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  les valeurs propres **deux à deux distinctes** de la matrice  $A$ .

#### III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

**Q8.** Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

**Q9.** Dédurre de la question précédente que la matrice  $A$  admet une racine cubique. On pourra remarquer que  $A$  est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme  $H_p(\lambda)$  avec  $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ .

#### III.2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice  $A$  est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k).$$

**Q10.** Montrer que les nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  sont non nuls.

**Q11.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  que l'on écrit sous la forme  $\lambda = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'équation  $z^3 = \lambda$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  admet exactement trois solutions.

**Q12.** En déduire que le polynôme  $Q$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ .

**Q13.** Dédurre des questions précédentes que si  $B$  est une racine cubique de  $A$ , alors la matrice  $B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

## EXERCICE 2

### La fonction $\ln(\Gamma)$

#### Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- (i) la fonction  $f$  est de classe  $C^1$ ,
- (ii) pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ ,
- (iii) la fonction  $f'$  est croissante,
- (iv) la fonction  $f$  s'annule en 1, c'est-à-dire  $f(1) = 0$ .

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

#### Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $u_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

**Q14.** Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

Dans tout le reste de cet exercice, on note  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

**Q15.** Justifier que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de fonctions de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , puis montrer qu'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que la série  $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$  converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times ]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

**Q16.** En déduire que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge normalement sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $]0, +\infty[$ .

**Q17.** Montrer que la fonction  $\varphi$  vérifie les conditions de (C).



## Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que  $\varphi$  est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les conditions de (C) et on pose  $h = \varphi - g$ .

Les questions **Q18** et **Q19** sont indépendantes.

**Q18.** Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $h(x+1) = h(x)$  et  $h'(x+1) = h'(x)$ .

**Q19.** Soient  $x \in ]0, 1]$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.$$

**Q20.** Déduire des deux questions précédentes que la fonction  $h'$  est constante sur  $]0, +\infty[$ .

**Q21.** Conclure que  $\varphi = g$ .

## Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction  $\psi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

**Q22.** Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

**Q23.** Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que  $\psi(1) = 0$ .

**Q24.** Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

## EXERCICE 3

### Temps d'attente avant une collision

#### Présentation générale

On considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose d'une urne contenant  $n$  boules numérotées par les entiers de 1 à  $n$ . On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et on considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On considère la variable aléatoire  $T_n$  définie de la façon suivante :

$$T_n = \min \{ j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket \mid \exists i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, X_i = X_j \}.$$

Par exemple, si on suppose que  $n = 4$  et que l'évènement :

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 2) \cap (X_4 = 3) \cap (X_5 = 4)$$

est réalisé, alors on a  $T_n = 4$ , car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparaît un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

#### Partie I - Une expression de l'espérance de $T_n$

**Q25.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire  $T_n$ .

Dans la suite de cette partie, on considère un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et la variable aléatoire  $Z = (X_1, \dots, X_k)$ .

**Q26.** Justifier que  $Z$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket^k$ .

**Q27.** Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \{(a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \text{les éléments } a_1, \dots, a_k \text{ sont deux à deux distincts}\}.$$

Exprimer le cardinal de  $A$  en fonction de  $n$  et de  $k$ , puis en déduire que :

$$P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}.$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour  $k = 0$ .

**Q28.** Justifier que la variable aléatoire  $T_n$  est d'espérance finie et que l'on a :

$$E(T_n) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}.$$

## Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de  $T_n$  sous la forme d'une intégrale.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

**Q29.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'intégrale  $I_k$  est convergente.

**Q30.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $I_k = k!$ .

**Q31.** En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$  converge, puis que :

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

## Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question **Q31** lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .  
Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt.$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

### III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Q32.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv.$$

**Q33.** Montrer que la suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité  $1 + x \leq e^x$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Q34.** En déduire que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et préciser sa limite.

### III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall u \in ]0, +\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u \geq \sqrt{n}. \end{cases}$$

**Q35.** Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du.$$

**Q36.** Montrer que pour tout  $u \in ]0, \sqrt{n}[$ , on a l'égalité :

$$\ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.$$

**Q37.** En déduire que pour tout  $u \in ]0, \sqrt{n}[$ , on a les inégalités :

$$\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}}, \quad \ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}.$$

**Q38.** Justifier que la fonction  $u \mapsto e^{-u^2/2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , puis établir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(u) du \right) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

### III.3 - Conclusion

**Q39.** En admettant que  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , déterminer un équivalent de  $E(T_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.**

## EXERCICE

### Autour de la série harmonique

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ .

Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente. On donne ensuite une application probabiliste des résultats obtenus.

On pose :

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

**Q1.** Énoncer la définition de convergence pour une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  de nombres réels ou complexes.

**Q2.** Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $\alpha$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  est-elle convergente ?

**Q3.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

**Q4.** En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, e^{H_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis, en remarquant l'égalité  $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ , que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $e^{H_n} \geq n + 1$ .

**Q5.** Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty.$$

En déduire la divergence de la série harmonique.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient initialement une boule noire. On effectue  $n$  tirages dans l'urne de la manière suivante :

- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère les  $n$  tirages indépendants.

Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 0$  si la boule tirée lors du  $k$ -ième tirage est blanche ;
- $X_k = 1$  si la boule tirée lors du  $k$ -ième tirage est noire.

On définit enfin la variable  $Z_n$  par :

$$Z_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

**Q6.** Que représente la variable  $Z_n$  ?

**Q7.** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Reconnaître la loi de  $X_k$  et préciser son espérance.

**Q8.** Vérifier que l'espérance de  $Z_n$  est  $H_n$ .

**Q9.** En utilisant **Q4**, déterminer une valeur de  $n$  pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.

On pourra utiliser le fait suivant :  $e^4 \in ]54, 55[$ .

# PROBLÈME 1

## Étude de matrices tridiagonales particulières

### Présentation générale

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales.

Plus précisément, pour un entier naturel  $n \geq 2$ , on considère  $n - 1$  couples de nombres complexes  $(a_k, b_k)$ , pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , tels que  $a_k b_k = -1$  et on s'intéressera alors à la matrice suivante de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également  $M_1 = (1)$  (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

### Notations

- On note  $\chi_A(X)$  le polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $A$  et  $E_\lambda(A)$  le sous-espace propre de  $A$  associé à un scalaire  $\lambda$  ;
- on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (respectivement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (respectivement dans  $\mathbb{R}$ ) ;
- on note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  (respectivement  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (respectivement dans  $\mathbb{R}$ ) ;
- on note  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$  ;
- on note  $\bar{z}$  le conjugué d'un nombre complexe  $z$ .

### Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que  $n$  est égal à 3 et on pose  $a_1 = a_2 = -1$  et  $b_1 = b_2 = 1$ .

On s'intéresse donc à la matrice  $M_3$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Q10.** Justifier que  $M_3$  vérifie bien les données de l'énoncé.

**Q11.** Déterminer le rang de  $M_3 - I_3$  et en déduire que  $M_3$  admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

**Q12.** Déterminer  $\chi_{M_3}(X)$ . Ce polynôme est-il scindé dans  $\mathbb{R}$  ?

**Q13.** Déduire de la question précédente la valeur du déterminant de  $M_3$ .

**Q14.** Justifier que  $M_3$  admet 3 valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que  $M_3$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

On note dans la suite  $\lambda$  l'unique valeur propre réelle de  $M_3$  et  $\mu$  l'unique valeur propre complexe de  $M_3$  dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de  $M_3$  sont  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\bar{\mu}$ .

**Q15.** Déterminer une base du sous-espace propre  $E_\lambda(M_3)$ .

**Q16.** Déterminer les nombres complexes  $p$  tels que :

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre  $E_\mu(M_3)$ .

**Q17.** Soit  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , une matrice à coefficients réels,  $z \in \mathbb{C}$  et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Montrer que si  $X$  est un vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $z$ , alors le vecteur :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $\bar{z}$ .

En déduire une base de  $E_{\bar{\mu}}(M_3)$ .

## Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel  $n$  vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice  $M_2$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $a_1$  et  $b_1$  sont deux nombres complexes tels que  $a_1 b_1 = -1$ .

**Q18.** Déterminer  $\chi_{M_2}(X)$ .

**Q19.** Si on considère  $a_1$  et  $b_1$  réels, la matrice  $M_2$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ? Trigonalisable dans  $\mathbb{R}$  ?

**Q20.** La matrice  $M_2$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  ?  
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

**Q21.** Donner la valeur du déterminant de  $M_2$ .

### Objectif de la suite du problème

Dans la **partie III**, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.

Dans la **partie IV**, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.



## Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  de la manière suivante :  $F_0 = 1, F_1 = 1$  et :

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

**Q22.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F_n$  est un entier naturel.

**Q23.** Résoudre l'équation caractéristique associée à  $(F_n)_{n \geq 0}$ . En déduire l'expression de  $F_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel  $n$ , et renvoyant la valeur de  $F_n$  :

```
def Fibo(n):
 ''' n : entier naturel.
 Renvoie la valeur de Fn'''
 if n <= 1:
 return 1
 return Fibo(n-1)+Fibo(n-2)
```

**Q24.** Les trois questions suivantes sont liées à la fonction `Fibo`.

- a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction `Fibo(4)`.
- b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.
- c) Écrire une fonction `FiboV2`, prenant en argument un entier naturel  $n$  et renvoyant la valeur du terme  $F_n$ . Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que `Fibo`.

## Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices  $M_n$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ . On note alors  $d_n$  le déterminant de  $M_n$ .

On rappelle que la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  est définie de la manière suivante :  $F_0 = 1, F_1 = 1$  et :

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

**Q25.** Donner les valeurs de  $d_1$  et de  $d_2$  puis calculer  $d_3$ .

**Q26.** Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$ .  
On pourra développer  $d_{n+2}$  par rapport à la dernière ligne de  $M_{n+2}$ .

**Q27.** En déduire que pour entier naturel  $n \geq 1$ ,  $d_n = F_n$ .

## PROBLÈME 2

### Calcul d'une borne inférieure

#### Présentation générale

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Plus précisément, nous allons montrer que cette borne inférieure existe et est atteinte en un unique couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Deux méthodes seront utilisées :

- l'une, utilisant un produit scalaire sur un espace vectoriel bien choisi ;
- l'autre, en minimisant une fonction convenable de deux variables.

Dans la suite,  $E = \mathbb{R}[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et  $\mathbb{R}_1[X]$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 1.

### Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout entier naturel  $n$  :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

**Q28.** Calculer  $I_0$ .

**Q29.** Montrer que :

$$\forall n \geq 0, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

**Q30.** En déduire les valeurs de  $I_1, I_2, I_3$  et vérifier que :

$$I_4 = -\frac{7}{12} + \ln(2).$$

**Q31.** Montrer que  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

**Q32.** Montrer que  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge et que sa limite est 0.

**Q33.** Montrer que :

$$\forall n \geq 1, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

**Q34.** En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge et donner sa somme.

**Q35.** En utilisant **Q29** et **Q31**, montrer que :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Partie II - Étude d'un produit scalaire

On rappelle que  $E = \mathbb{R}[X]$  et on pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx.$$

**Q36.** Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ . On note  $\| \cdot \|$  la norme associée.

**Q37.** Les vecteurs 1 et  $X$  sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

**Q38.** On note  $L(X^2)$  le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ . Justifier l'existence de deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$L(X^2) = \alpha X + \beta.$$

**Q39.** Que peut-on dire du polynôme  $X^2 - L(X^2)$  par rapport à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_1[X]$  ? En déduire que  $(\alpha, \beta)$  est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta &= I_2 \\ I_2\alpha + I_1\beta &= I_3 \end{cases}.$$

**Q40.** Justifier l'existence du réel  $m$  et l'égalité suivante :

$$m = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2.$$

On ne demande pas de simplifier cette expression.

## Partie III - Utilisation d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on admet l'existence de  $m$  et le fait que cette borne inférieure soit atteinte en un unique couple de réels. Le but est de déterminer ce couple sans utilisation d'un produit scalaire.

On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((a, b)) = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx.$$

**Q41.** Justifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((a, b)) = a^2 I_2 + b^2 I_0 + 2ab I_1 - 2a I_3 - 2b I_2 + I_4.$$

Il n'est pas demandé de remplacer  $I_0, I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  par leur valeur.

**Q42.** Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Q43.** Montrer que  $f$  admet un unique point critique sur  $\mathbb{R}^2$ .

On pourra utiliser le fait que  $\ln(2)$  appartient à  $[0.68, 0.7]$ .

**Q44.** Répondre au problème posé en déterminant le couple cherché.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont autorisées.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

## EXERCICE 1

Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.

Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :

- drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;
- drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;
- drapeau rouge : la baignade est interdite.

La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs.

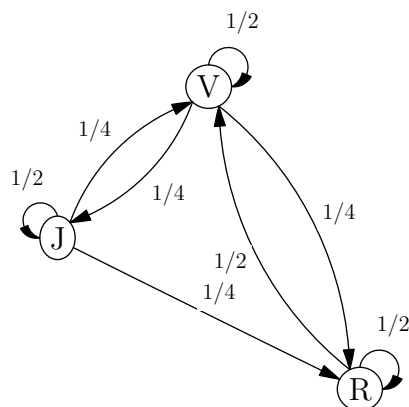
Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :

- si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , jaune avec une probabilité  $\frac{1}{4}$  et rouge sinon ;
- si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ , jaune avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et rouge sinon ;
- si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et rouge sinon. Un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

On note :

- $V_n$  l'évènement " le drapeau est vert le  $n^e$  jour " et  $v_n = P(V_n)$  ;
- $J_n$  l'évènement " le drapeau est orange le  $n^e$  jour " et  $j_n = P(J_n)$  ;
- $R_n$  l'évènement " le drapeau est rouge le  $n^e$  jour " et  $r_n = P(R_n)$ .

La situation est résumée sur la **figure suivante** :



On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

- Q1.**
- a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À l'aide d'un système complet d'événements à préciser, exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ ,  $j_n$  et de  $r_n$ .
  - b) Obtenir de même des expressions de  $j_{n+1}$  et de  $r_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ ,  $j_n$  et de  $r_n$ .
  - c) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}$ . Préciser  $X_0$ . Justifier que  $X_{n+1} = AX_n$  avec :

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Q2.**
- a) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
  - b) Déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .
  - c) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Q3.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$ .

- a) On pose  $e'_1 = (4, 2, 3)$ ,  $e'_2 = (1, -1, 0)$  et  $e'_3 = (a, 0, b)$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour :
  - que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ ,
  - et que, dans cette base  $\mathcal{B}'$ , la matrice de  $f$  soit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- b) Préciser la matrice de passage  $Q$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ . Calculer  $Q^{-1}$ .
- c) Déterminer  $T^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice.  
*On pourra utiliser le binôme de Newton sur une expression du type  $D + N$  où  $D$  et  $N$  sont deux matrices bien choisies.*
- d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en déduire une expression de  $X_n$  en fonction de  $n$ ,  $T$ ,  $Q$  et de  $X_0$ .

**Q4.** À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour  $v_n$ ,  $j_n$  et  $r_n$ .

**Q5.** Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire et  $2\pi$ -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = x(\pi - x).$$

- Q6.** a) Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-3\pi, 3\pi]$ .  
b) Déterminer le réel  $\alpha$ , tel que :

$$\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt = \alpha \pi^5.$$

- c) Montrer que :

$$\int_0^\pi t(\pi - t) \sin nt dt = \frac{2}{n^3}(1 - (-1)^n).$$

- Q7.** Dédurre de la question précédente le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ .

- Q8.** Étudier la convergence de cette série de Fourier.

*Dans les deux questions suivantes, on utilise la série de Fourier précédente pour calculer les sommes de trois séries numériques. Il n'est pas demandé d'établir la convergence de ces séries.*

- Q9.** On pose  $R = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ .

En utilisant la valeur de la série de Fourier de  $f$  en  $x = \frac{\pi}{2}$ , montrer que  $R = \frac{\pi^3}{32}$ .

- Q10.** a) Énoncer le théorème de Parseval.

- b) Montrer que  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{960}$ .

- c) En déduire la valeur de  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ .

*Indication : dans le calcul de  $T$ , on pourra considérer les termes d'indice pair et les termes d'indice impair.*

## PROBLÈME

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus  $n$ .

### Partie A - Questions préliminaires

- Q11.** a) Donner le tableau de variation de  $\arccos$  sur  $[-1, 1]$  avec les valeurs remarquables.  
Tracer, dans un même repère orthonormal, le graphe de  $\cos$  sur  $[0; \pi]$  et celui de  $\arccos$  sur  $[-1; 1]$ .  
*On n'oubliera pas de représenter les tangentes horizontales et verticales éventuelles.*
- b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Rappeler, sans la justifier, l'expression de  $\cos 2x$  en fonction de  $\cos x$ .

Pour les deux questions suivantes, il est attendu une démonstration faisant appel aux formules de trigonométrie vues en cours, en particulier celles donnant le cosinus d'une somme ou le cosinus d'une différence.

- c) Montrer que pour tous  $a, b$  réels :  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ .
- d) Établir que pour tout  $x$  réel :  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ .

### Partie B - Un produit scalaire

- Q12.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ .
- a) Montrer que :

$$\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}.$$

En déduire que  $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$  converge.

- b) Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

Par linéarité, la convergence de cette intégrale est une conséquence de la question précédente.

- Q13.** Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

Dans toute la suite du problème,  $\mathbb{R}[X]$  est muni de ce produit scalaire que l'on notera  $\langle P|Q \rangle$ . La norme associée sera notée  $\|\cdot\|$ .



### Partie C - Une famille de fonctions

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $f_n$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

**Q14.** Soit  $x \in [-1, 1]$ . À l'aide des résultats de **Q11**, exprimer  $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  sous forme d'un polynôme.

**Q15.** À l'aide de **Q11**, montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$ .

**Q16.** Soit la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  et donner son coefficient dominant.

**Q17.** Prouver que pour tout entier  $n$ , la famille  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q18.** Montrer que pour  $x \in [-1, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $T_n(x) = f_n(x)$ .

### Partie D - Une base orthogonale

**Q19.** Pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx$ .

a) Démontrer que si  $p \neq q$ , alors  $I_{p,q} = 0$ .

b) Calculer  $I_{p,p}$ .

**Q20.** À l'aide d'un changement de variable et de **Q19**, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  définie dans la partie **C** est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Cette base est-elle orthonormale ?

**Q21.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, le polynôme  $T_n$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**Q22.** En utilisant un résultat du cours, donner une expression de  $X^n$  en fonction des polynômes de la base orthogonale  $(T_0, \dots, T_n)$ .

À l'aide du calcul de  $\langle T_n - 2^{n-1}X^n | T_n \rangle$ , montrer enfin que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\langle X^n | T_n \rangle = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$ .

### Partie E - Minimiser une intégrale à paramètres

On souhaite déterminer :

$$I = \inf_{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - (a_0 + a_1 t))^2}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

**Q23.** On désigne par  $p$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}_2[X]$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ . En faisant intervenir une norme, exprimer  $I$  en fonction de  $p$ .

**Q24.** Déterminer une base *orthonormale* de  $\mathbb{R}_1[X]$ .

**Q25.** En déduire que :

$$p(X^2) = \frac{1}{2}.$$

**Q26.** Déterminer la valeur de  $I$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

**Q1.** Soit une application  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ .

Justifier que  $f'([-1, 1[)$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .

**Q2.** On considère l'application  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in ]-1, 0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \in ]0, 1[ \end{cases}$$

On note pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**a)** Démontrer que  $f$  est dérivable en 0 puis sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Préciser le vecteur  $f'(t)$  pour tout  $t \in ]-1, 0]$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ .

**b)** Démontrer que  $\forall t \in ]0, 1[$ ,  $\|f'(t)\|_2 \geq 1$  et en déduire que  $f'([-1, 1[)$  n'est pas connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .

On pourra tracer la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$  et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

## EXERCICE II

On pose pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2$ .

On se propose de déterminer le réel  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$  par deux méthodes différentes.

### Q3. Première méthode

Déterminer le seul point critique de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que  $f$  admet en ce point un minimum local.

En admettant que ce minimum est global, donner la valeur de  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ .

### Q4. Deuxième méthode

Sur l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on note le produit scalaire canonique par  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et sa norme associée par  $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

On note  $a = (2, 1, 1)$ ,  $u = (1, 1, 2)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  et  $F = \text{vect}\{u, v\}$ .

On note  $b \in F$  le projeté orthogonal du vecteur  $a$  sur le sous-espace vectoriel  $F$ .

Justifier que  $\langle a - b | u \rangle = \langle a - b | v \rangle = 0$  et en déduire le vecteur  $b$ .

Déterminer la valeur de  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ .

# PROBLÈME

## Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

### Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie,  $f$  est une fonction continue, positive et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ ,  $J_n = \int_0^n f(t)dt$  et pour tout entier  $k$  non nul,

$$I_k = \int_{k-1}^k f(t)dt.$$

**Q5.** Préciser la monotonie des suites  $(S_n)$  et  $(J_n)$ , puis démontrer que pour tout entier  $k$  non nul,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1).$$

**Q6.** Démontrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$ .

**Q7.** Démontrer enfin les deux résultats :

(1)  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , si et seulement si, la série  $\sum f(n)$  converge.

(2) La série  $\sum_{n \geq 1} \left[ \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) \right]$  converge.

**Q8.** Un exemple.

On pose pour  $\alpha > 0$  et  $x \in [2, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

**a)** Étudier la monotonie de la fonction  $f$ , calculer  $\int_2^x f(t)dt$  et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

**b)** Dans le cas où  $\alpha = 2$ , déterminer en fonction de  $\ln 2$ , un encadrement de  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .

**Q9.** Une application.

On pose pour  $n$  entier naturel non nul,  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ .

a) En utilisant le résultat (2) de la question **Q7.**, établir que la suite  $(T_n)$  converge. On notera  $\gamma$  sa limite (constante d'Euler).

b) Justifier que, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  et en déduire un équivalent au voisinage de  $+\infty$  de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Q10.** Une application sur une série de fonctions.

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  où pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$ .

a) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur  $]0, +\infty[$ .

b) On pose pour  $x$  fixé non nul,  $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$ .

Établir que, pour  $n$  entier non nul,  $\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$ .

c) En déduire que, pour tout  $x$  non nul,  $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$ .

d) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ .

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

## Partie II - Contre-exemples

**Q11.** On pose pour  $x \in [1, +\infty[$ ,  $f(x) = |\sin(2\pi x)|$ .

a) Calculer pour  $n$  entier naturel non nul,  $\int_n^{n+1} f(t) dt$ .

On pourra remarquer que  $\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt$ .

On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière du réel  $x$ .

b) Établir que pour  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1)$ .

La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $[1, +\infty[$  ? Que dire de la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  ?

**Q12.** On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction  $f$  continue, positive et intégrable sur  $[1, +\infty[$  telle que  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  diverge.

Pour tout entier  $n$  non nul, trouver un réel  $a_n$  de sorte que le triangle de base  $[n - a_n, n + a_n]$  et de hauteur 1 ait une aire égale à  $\frac{1}{n^2}$ .

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction  $f$  définie et continue sur  $[1, +\infty[$  de la manière suivante : chaque entier naturel  $n$  non nul a pour image 1 et autour de chaque  $n$  (sur chaque intervalle  $[n - a_n, n + a_n]$ ) tracer l'allure du triangle de base  $[n - a_n, n + a_n]$  et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles  $[n - a_n, n + a_n]$ .

Démontrer que cette fonction  $f$  fournit un contre-exemple.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

|                                          |
|------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont interdites</b> |
|------------------------------------------|

**Le sujet est composé d'un exercice d'informatique du tronc commun, d'un exercice et d'un problème de mathématiques.**

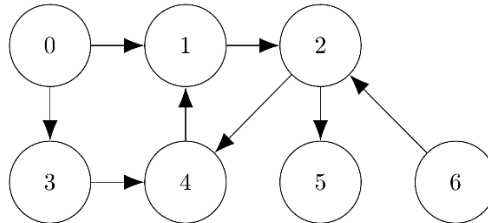


# EXERCICE 1

Hormis **Q3** et **Q4**, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.

Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

```
d = { 0 : [1,3] , 1 : [2] , 2 : [4,5] , 3 : [4] , 4 : [1] , 5 : [], 6 : [2] }
```

**Q1.** Écrire en langage Python une fonction `degreMax( d : dict ) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si  $G$  est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de  $G$  le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de  $G$ .

**Q2.** Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.  
Écrire en langage Python une fonction `grapheInv( d : dict ) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par  $d$ .

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste  $L$  telle que  $L[s]$  est égale à la couleur attribuée au sommet  $s$ .

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

**Q3.** Écrire en langage Python une fonction `colorationValide( d : dict, L : list ) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration  $L$  du graphe représenté par  $d$  est valide et `False` dans le cas contraire.

**Q4.** Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre  $N$  de sommets et du nombre  $M$  d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : `FILMS` et `LOCATIONS`. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

**Q5.** Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

**Q6.** Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

## EXERCICE 2

On définit une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  en posant  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes,  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels.

**Q7.** Donner le degré et le terme dominant de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

**Q8.** Justifier que pour tout réel  $\theta$  :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

**Q9.** Justifier la convergence de cette intégrale.

**Q10.** Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_k[X]$  (ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $k$ ).

**Q11.** Calculer pour  $n$  et  $m$  entiers naturels,  $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$ .

**Q12.** Donner une base orthonormale de  $\mathbb{R}_k[X]$  pour ce produit scalaire.

# PROBLÈME - Matrices de rang 1

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre  $n$ ,  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre  $n$  et  $M_{1,n}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre  $n$ .

## Partie I - Exemples

On suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \cdots & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \cdots & \cdots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

**Q13.** On pose  $Y = \text{rg}(M)$ .

Montrer que la variable aléatoire  $Y$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - (1 - p)^n$ .

**Q14.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $\text{Tr}(M)$ .

**Q15.** Vérifier que  $M^2 = \text{Tr}(M)M$  et en déduire la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q16.** Dans cette question, on suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On définit la matrice aléatoire  $M$  comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q17.** On note  $J$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

**Q18.** Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

## Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  de rang égal à 1.

**Q19.** On note  $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  la première colonne non nulle de  $A$ . Démontrer qu'il existe une matrice ligne  $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $A = C \times L$ .

**Q20.** Calculer le réel  $L \times C$  et en déduire que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .

**Q21.** Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$  ainsi que son polynôme minimal.

**Q22.** Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

**Q23.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Justifier que  $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$ , puis qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q24.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a$  est un réel non nul.

**Q25.** Conclure que dans  $M_n(\mathbb{R})$  deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

**FIN**

---

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

---

### **MATHÉMATIQUES 1**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

**Q1.** Soit une application  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ .

Justifier que  $f'([-1, 1[)$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .

**Q2.** On considère l'application  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in ]-1, 0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \in ]0, 1[ \end{cases}$$

On note pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**a)** Démontrer que  $f$  est dérivable en 0 puis sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Préciser le vecteur  $f'(t)$  pour tout  $t \in ]-1, 0]$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ .

**b)** Démontrer que  $\forall t \in ]0, 1[$ ,  $\|f'(t)\|_2 \geq 1$  et en déduire que  $f'([-1, 1[)$  n'est pas connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .

On pourra tracer la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$  et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

## EXERCICE II

On pose pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2$ .

On se propose de déterminer le réel  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$  par deux méthodes différentes.

### Q3. Première méthode

Déterminer le seul point critique de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que  $f$  admet en ce point un minimum local.

En admettant que ce minimum est global, donner la valeur de  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ .

### Q4. Deuxième méthode

Sur l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on note le produit scalaire canonique par  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et sa norme associée par  $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

On note  $a = (2, 1, 1)$ ,  $u = (1, 1, 2)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  et  $F = \text{vect}\{u, v\}$ .

On note  $b \in F$  le projeté orthogonal du vecteur  $a$  sur le sous-espace vectoriel  $F$ .

Justifier que  $\langle a - b | u \rangle = \langle a - b | v \rangle = 0$  et en déduire le vecteur  $b$ .

Déterminer la valeur de  $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ .

# PROBLÈME

## Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

### Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie,  $f$  est une fonction continue, positive et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ ,  $J_n = \int_0^n f(t)dt$  et pour tout entier  $k$  non nul,

$$I_k = \int_{k-1}^k f(t)dt.$$

**Q5.** Préciser la monotonie des suites  $(S_n)$  et  $(J_n)$ , puis démontrer que pour tout entier  $k$  non nul,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1).$$

**Q6.** Démontrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$ .

**Q7.** Démontrer enfin les deux résultats :

(1)  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , si et seulement si, la série  $\sum f(n)$  converge.

(2) La série  $\sum_{n \geq 1} \left[ \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) \right]$  converge.

**Q8.** Un exemple.

On pose pour  $\alpha > 0$  et  $x \in [2, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

**a)** Étudier la monotonie de la fonction  $f$ , calculer  $\int_2^x f(t)dt$  et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

**b)** Dans le cas où  $\alpha = 2$ , déterminer en fonction de  $\ln 2$ , un encadrement de  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .

**Q9.** Une application.

On pose pour  $n$  entier naturel non nul,  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ .

a) En utilisant le résultat (2) de la question **Q7.**, établir que la suite  $(T_n)$  converge. On notera  $\gamma$  sa limite (constante d'Euler).

b) Justifier que, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  et en déduire un équivalent au voisinage de  $+\infty$  de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Q10.** Une application sur une série de fonctions.

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  où pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$ .

a) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur  $]0, +\infty[$ .

b) On pose pour  $x$  fixé non nul,  $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$ .

Établir que, pour  $n$  entier non nul,  $\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$ .

c) En déduire que, pour tout  $x$  non nul,  $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$ .

d) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ .

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

## Partie II - Contre-exemples

**Q11.** On pose pour  $x \in [1, +\infty[$ ,  $f(x) = |\sin(2\pi x)|$ .

a) Calculer pour  $n$  entier naturel non nul,  $\int_n^{n+1} f(t) dt$ .

On pourra remarquer que  $\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt$ .

On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière du réel  $x$ .

b) Établir que pour  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1)$ .



La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $[1, +\infty[$  ? Que dire de la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  ?

**Q12.** On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction  $f$  continue, positive et intégrable sur  $[1, +\infty[$  telle que  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  diverge.

Pour tout entier  $n$  non nul, trouver un réel  $a_n$  de sorte que le triangle de base  $[n - a_n, n + a_n]$  et de hauteur 1 ait une aire égale à  $\frac{1}{n^2}$ .

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction  $f$  définie et continue sur  $[1, +\infty[$  de la manière suivante : chaque entier naturel  $n$  non nul a pour image 1 et autour de chaque  $n$  (sur chaque intervalle  $[n - a_n, n + a_n]$ ) tracer l'allure du triangle de base  $[n - a_n, n + a_n]$  et de hauteur 1. Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles  $[n - a_n, n + a_n]$ .

Démontrer que cette fonction  $f$  fournit un contre-exemple.

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**

## EXERCICE 1

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On se donne des réels strictement positifs notés  $x_1, \dots, x_n$  et on pose :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

On désigne par  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre  $n$ .

**Q1.** Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right).$$

**Q2.** En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

**Q3.** Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Q4.** Dans cette question  $B$  désigne une matrice de  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(B),$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si,  $B \in \text{Vect}(I_n)$ .

Désormais  $A = (a_{i,j})$  désigne une matrice de  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Q5.** Démontrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :  $a_{i,i} > 0$ .

**Q6.** On pose  $D = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$  et  $B = DAD$ . Démontrer que  $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et en déduire que :

$$\det(A) \leq a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n},$$

avec égalité si, et seulement si,  $A$  est diagonale.

## EXERCICE 2

On définit une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  en posant  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes,  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels.

**Q7.** Donner le degré et le terme dominant de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

**Q8.** Justifier que pour tout réel  $\theta$  :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

**Q9.** Justifier la convergence de cette intégrale.

**Q10.** Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_k[X]$  (ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $k$ ).

**Q11.** Calculer pour  $n$  et  $m$  entiers naturels,  $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$ .

**Q12.** Donner une base orthonormale de  $\mathbb{R}_k[X]$  pour ce produit scalaire.

## PROBLÈME - Matrices de rang 1

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre  $n$ ,  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre  $n$  et  $M_{1,n}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre  $n$ .

### Partie I - Exemples

On suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \cdots & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \cdots & \cdots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

**Q13.** On pose  $Y = \text{rg}(M)$ .

Montrer que la variable aléatoire  $Y$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - (1 - p)^n$ .

**Q14.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $\text{Tr}(M)$ .

**Q15.** Vérifier que  $M^2 = \text{Tr}(M)M$  et en déduire la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q16.** Dans cette question, on suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On définit la matrice aléatoire  $M$  comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q17.** On note  $J$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

**Q18.** Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

## Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  de rang égal à 1.

**Q19.** On note  $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  la première colonne non nulle de  $A$ . Démontrer qu'il existe une matrice ligne  $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $A = C \times L$ .

**Q20.** Calculer le réel  $L \times C$  et en déduire que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .

**Q21.** Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$  ainsi que son polynôme minimal.

**Q22.** Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

**Q23.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Justifier que  $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$ , puis qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q24.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a$  est un réel non nul.

**Q25.** Conclure que dans  $M_n(\mathbb{R})$  deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.**

# EXERCICE

## Probabilités

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

On note  $G_X: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$  la fonction génératrice de  $X$ .

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson.

**Q1.** Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

**Q2.** En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de  $P(|X - \lambda| \geq \lambda)$ .

**Q3.** Justifier que l'événement  $\{X \geq 2\lambda\}$  est inclus dans l'événement  $\{|X - \lambda| \geq \lambda\}$ .

**Q4.** En déduire la majoration suivante :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (1)$$

**Q5.** Donner l'ensemble de définition de  $G_X$ .

**Q6.** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ .

**Q7.** On suppose que  $t \geq 1$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

**Q8.** En déduire que :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda. \quad (2)$$

**Q9.** On admet que  $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$ . Quelle majoration (1) ou (2) de  $P(X \geq 2\lambda)$  est la plus précise ?



# PROBLÈME 1

## Séries de Fourier

Dans ce problème, on introduit les notions de coefficients de Fourier réels et de série de Fourier d'une fonction réelle continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique. On étudie l'exemple d'une fonction pour laquelle on calcule les coefficients de Fourier réels (**partie I**) et on montre que la fonction coïncide en tout point avec la somme de sa série de Fourier (**partie II**).

### Partie I - Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux sur  $[-\pi; \pi]$  et  $2\pi$ -périodique. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Les réels  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont appelés coefficients de Fourier réels de la fonction  $f$ .

**Q10.** Montrer que si  $f$  est paire, alors  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f(t) dt$  et que si  $f$  est impaire, alors  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$ .

**Q11.** Soit une fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in ]0; \pi]$  :

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Montrer qu'il existe une manière unique de définir  $g$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g$  soit continue par morceaux, impaire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer en particulier  $g(0)$  et tracer l'allure de la courbe représentative de  $g$  sur  $[-4\pi; 4\pi]$  dans un repère orthogonal.

**Q12.** Montrer que  $a_0(g) = b_0(g) = 0$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n(g) = 0$  et  $b_n(g) = \frac{1}{n}$ .

## Partie II - Convergence d'une série de Fourier

On appelle série de Fourier d'une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux,  $2\pi$ -périodique, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(f)$  définie à l'aide des coefficients de Fourier réels de  $f$  par :

- $U_0(f)$  est la fonction constante  $x \mapsto \frac{1}{2}a_0(f)$  ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n(f): x \mapsto a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$ .

On admet que la série de Fourier de la fonction  $g$  définie à la question **Q11** converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et on note  $S_g$  sa somme.

D'après la question **Q12** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S_g(x) = g(x)$ .

**Q13.** Déterminer l'ensemble des  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$  tels que  $|1 - te^{ix}| = 0$ .

**Q14.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 < a < b < \pi$  et  $x \in [a; b]$ . Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $t \in [0; 1]$  :

$$|1 - te^{ix}| \geq m.$$

**Q15.** En déduire que pour tout  $x \in ]0; \pi[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - te^{ix}|} dt = 0.$$

**Q16.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $x \in ]0; \pi[$  et  $t \in [0; 1]$ , on a :

$$\sum_{n=1}^N t^{n-1} e^{inx} = e^{ix} \frac{1 - t^N e^{iNx}}{1 - te^{ix}}.$$

**Q17.** En déduire que pour tout  $x \in ]0; \pi[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$  converge et que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Pour tout  $\lambda \in ]-1; 1[$ , on pose  $I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2\lambda t + 1}$ .

**Q18.** Justifier l'existence de  $I(\lambda)$  et montrer que :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left( \arctan\left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \right).$$

**Q19.** En déduire que, pour tout  $x \in ]0; \pi[$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t \cos(x) + t^2} = \frac{1}{\sin(x)} \frac{\pi - x}{2}.$$

**Q20.** Conclure.

## PROBLÈME 2

### Inégalité et matrices de Hadamard

L'objectif de ce problème est d'établir l'inégalité de Hadamard reliant le déterminant d'une matrice et le produit des normes euclidiennes de ses vecteurs colonnes. Nous étudierons ensuite quelques propriétés de la famille des matrices de Hadamard qui réalisent l'égalité dans cette inégalité.

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients réels.

Pour tout  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ , on note  $\langle X, Y \rangle = X^T Y$  le produit scalaire canonique de  $X$  et  $Y$ .

Étant donné  $n$  nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , la matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont formés par les réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , est désignée par  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives à coefficients réels et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives à coefficients réels.

### Partie I - Inégalité arithmético-géométrique

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ . On pose  $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $G = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}}$ . Dans cette partie, nous allons montrer que  $G \leq A$ , avec égalité si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ .

On remarque que dans le cas où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont tous nuls, l'égalité est immédiate. On suppose donc dans la **partie I** que les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont non tous nuls.

**Q21.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(x) \geq 1 + x$ , avec égalité si et seulement si  $x = 0$ .

**Q22.** Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\frac{\lambda_i}{A} \leq \exp\left(\frac{\lambda_i}{A} - 1\right).$$

**Q23.** En déduire que  $G \leq A$ .

**Q24.** Montrer que  $G = A$  si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ .

## Partie II - Inégalité de Hadamard

L'objectif de cette partie est de démontrer que pour toute matrice  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$|\det(M)| \leq \left( \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Hadamard.

Dans les questions **Q25** à **Q30**, on considère  $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Q25.** Justifier que  $S$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et rappeler la relation qui lie  $\det(S)$  et les valeurs propres de  $S$ , puis  $\text{Tr}(S)$  et les valeurs propres de  $S$ .

**Q26.** En déduire que :

$$(\det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(S).$$

**Q27.** Montrer que  $(\det(S))^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \text{Tr}(S)$  si et seulement s'il existe  $\lambda > 0$ , tel que  $S = \lambda I_n$ .

**Q28.** Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $s_{j,j} > 0$ .

On considère la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\sqrt{s_{1,1}}, \dots, \sqrt{s_{n,n}})$ .

**Q29.** Montrer que la matrice  $D^{-1} S D^{-1}$  a pour coefficient général  $\left( \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i} s_{j,j}}} \right)$  avec  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ .

En déduire que  $D^{-1} S D^{-1}$  est symétrique définie positive et que ses éléments diagonaux valent 1.

**Q30.** En utilisant la question **Q29**, montrer que :

$$\det(S) \leq \prod_{j=1}^n s_{j,j},$$

avec égalité si et seulement si  $S$  est diagonale.

**Q31.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible. Montrer que  $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Q32.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice qu'on ne suppose pas inversible. On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $M$ . Dédurre des questions précédentes que l'inégalité (3) est valide pour  $M$ , avec égalité si et seulement si les vecteurs colonnes  $C_1, \dots, C_n$  sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Q33.** Soit  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $|m_{i,j}| \leq 1$ . Montrer alors que :

$$|\det(M)| \leq n^{\frac{n}{2}},$$

avec égalité si et seulement pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $|m_{i,j}| = 1$  et  $M^T M = nI_n$ .

### Partie III - Matrices de Hadamard

Dans cette partie, nous étudions l'ensemble  $\mathcal{H}_n$  des matrices de Hadamard de taille  $n$  défini par :

$$\mathcal{H}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T M = nI_n \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, |m_{i,j}| = 1 \right\}.$$

Par exemple, la matrice  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathcal{H}_2$ .

Notons  $H = \{n \in \mathbb{N}^* / \mathcal{H}_n \neq \emptyset\}$ . L'ensemble  $H$  n'est pas connu actuellement. L'un des objectifs de cette partie est de donner une condition nécessaire sur  $n$  pour que  $n \in H$ .

On admet que si un ensemble  $\mathcal{H}_n$  est non vide, alors il contient au moins une matrice de Hadamard dont la première colonne et la première ligne sont constituées uniquement de 1.

Soit  $n \in H$  et soit  $M \in \mathcal{H}_n$ .

**Q34.** Montrer que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ . A-t-on  $M^{-1} \in \mathcal{H}_n$  ?

**Q35.** Montrer que la matrice définie par blocs  $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix}$  appartient à  $\mathcal{H}_{2n}$ . En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $2^p \in H$ .

On suppose désormais que  $n > 2$  et que la première colonne et la première ligne de  $M$  ne sont constituées que de 1.

On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de la matrice  $M$ . On a en particulier  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Q36.** En considérant  $\langle C_1, C_2 \rangle$ , montrer que  $n$  est pair.

**Q37.** On note :

$$\begin{aligned} x &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = 1\} ; \\ y &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,2} = 1 \text{ et } m_{i,3} = -1\} ; \\ z &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = 1\} ; \\ t &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,2} = -1 \text{ et } m_{i,3} = -1\}. \end{aligned}$$

Exprimer  $\langle C_1, C_2 \rangle, \langle C_1, C_3 \rangle$  et  $\langle C_2, C_3 \rangle$  en fonction de  $x, y, z$  et de  $t$ .  
En déduire un système linéaire de 4 équations d'inconnues  $x, y, z, t$ .

**Q38.** En déduire que  $n$  est un multiple de 4.

Nous venons de démontrer que :

- si  $n$  est une puissance de 2, alors  $n$  appartient à  $H$  ;
- si  $n > 2$  et  $n$  n'est pas un multiple de 4, alors  $n$  n'appartient pas à  $H$ .

Hadamard a conjecturé que  $n \in H$  si et seulement si  $n$  est un multiple de 4.

La question est encore ouverte aujourd'hui.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1

## Étude d'un endomorphisme matriciel

### Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $\varphi_A : M \mapsto AM$ . En particulier, on remarque qu'en notant  $O_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $I_n$  la matrice d'identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $\varphi_{O_n}$  est l'application nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\varphi_{I_n}$  est l'application identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application  $\varphi_A$ .

### Partie I - Généralités

- Q1.** Montrer pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  que l'application  $\varphi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- Q2.** Montrer pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  que  $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ .
- Q3.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Dédurre de la question précédente que  $\varphi_A$  est un isomorphisme si et seulement si la matrice  $A$  est inversible. **Indication :** si  $\varphi_A$  est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par  $\varphi_A$  de la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $n = 2$ . On considère un nombre  $a \in \mathbb{C}$  et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

- Q4.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre  $a \in \mathbb{C}$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable.
- Q5.** Déterminer la matrice de  $\varphi_A$  dans la base  $C = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .
- Q6.** En déduire les valeurs propres de  $\varphi_A$ , puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de  $\varphi_A$  en fonction de  $a \in \mathbb{C}$ .
- Q7.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a \in \mathbb{C}$  pour que  $\varphi_A$  soit diagonalisable.

### Partie III - Réduction de $\varphi_A$ si $A$ est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice  $A$  et ceux de l'endomorphisme  $\varphi_A$ .

- Q8.** Montrer pour tout  $k \in \mathbb{N}$  que  $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$ .
- Q9.** En déduire pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  que  $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$ .
- Q10.** Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme  $\varphi_A$  est diagonalisable.



- Q11.** On note  $\chi_A$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Montrer que  $\chi_A(\varphi_A)$  est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de  $A$  et l'ensemble des valeurs propres de  $\varphi_A$ , puis que la matrice  $A$  et l'endomorphisme  $\varphi_A$  ont les mêmes valeurs propres.
- Q12.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ . Montrer qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dans le sous-espace propre  $E_\lambda(\varphi_A)$  de  $\varphi_A$  pour la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si chaque colonne de la matrice  $M$  est dans le sous-espace propre  $E_\lambda(A)$  de la matrice  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de la matrice  $A$ , l'application  $\Psi$  qui à toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  associe le  $n$ -uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left( \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de  $E_\lambda(\varphi_A)$  sur  $E_\lambda(A)^n$ .

- Q13.** Dans le cas où la matrice  $A$  est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de  $\varphi_A$  en fonction du déterminant et de la trace de  $A$ .

## EXERCICE 2

### Les polynômes de Hermite

#### Présentation générale

On définit la suite des polynômes de Hermite dans  $\mathbb{R}[X]$  par  $H_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

#### Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

##### I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto t^n e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , puis en déduire que cette fonction est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

**Q15.** En déduire pour tout polynôme  $R \in \mathbb{R}[X]$  que la fonction  $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application  $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

**Q16.** Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

##### I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

**Q17.** Justifier que  $u$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de sa dérivée.

**Q18.** Justifier que  $v$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de sa dérivée.

**Q19.** Montrer que la fonction  $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , puis que sa valeur est  $\frac{\pi}{4}$ .

**Q20.** En déduire que la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  est  $\sqrt{\pi}$ .

## Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{-x^2}$ .

**Q21.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $H_n$  est de degré  $n$  et que son coefficient dominant est  $2^n$ .

**Q22.** Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  qu'on a  $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$ .

On rappelle que le produit scalaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}[X]$  est défini dans la sous-partie I.1.

**Q23.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq q$ . Montrer pour tout entier  $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$  que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt.$$

**Q24.** Soit  $d \in \mathbb{N}$ . Montrer que la famille  $(H_0, \dots, H_d)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_d[X]$ .

**Q25.** Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , calculer la norme du polynôme  $H_p$ .

## Partie III - Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on considère un nombre  $x \in \mathbb{R}$ .

### III.1 - Expression de la série génératrice

L'objectif de cette première sous-partie est de démontrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$  de la variable complexe  $z$  admet un rayon de convergence infini et on calcule sa somme.

**Q26.** Donner les développements en série entière des fonctions  $z \mapsto \exp(2xz)$  et  $z \mapsto \exp(-z^2)$  sur  $\mathbb{C}$  en précisant leur rayon de convergence respectif.

**Q27.** Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que la série entière  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  ait un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(-(x-z)^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

En considérant la fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  introduite dans la **partie II**, on déduit du résultat de la question ci-dessus que l'on a l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

**Q28.** En utilisant la relation ci-dessus et la question **Q22**, en déduire que la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$  admet un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

### III.2 - Expression intégrale des polynômes de Hermite

Dans cette seconde sous-partie, on exploite les résultats de la sous-partie précédente afin d'établir une expression intégrale pour les polynômes de Hermite.

On considère un entier  $p \in \mathbb{N}$  et la fonction  $G_x : z \mapsto \exp(2xz - z^2)$ . On définit également pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $g_n : \theta \mapsto \frac{H_n(x)}{n!} e^{i(n-p)\theta}$ .

**Q29.** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

**Q30.** Montrer que :

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta.$$

## EXERCICE 3

### Succession de tirages dans une urne

#### Présentation générale

On fixe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du  $k$ -ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute  $u_k$  boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du  $k$ -ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $B_n$  l'évènement « la boule tirée lors du  $n$ -ième tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n.$$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour que la probabilité de l'évènement  $E$  soit nulle.

On considère également la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k.$$

On rappelle que si  $A$  et  $C$  sont deux évènements avec  $P(C) > 0$ , on note  $P(A | C)$  ou  $P_C(A)$  la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $C$ .

#### Partie I - Probabilité de l'évènement $E$

Dans cette partie, on considère la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q31.** Montrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que  $P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

**Q32.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si l'évènement  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de  $S_k$  juste avant d'effectuer le  $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité  $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right)$ .

**Q33.** Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}.$$

## Partie II - Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

- Q34.** Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- Q35.** Montrer que les séries  $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right)$  et  $\sum \frac{1}{S_k}$  sont de même nature.
- Q36.** Montrer que  $P(E) = 0$  si et seulement si la série  $\sum \frac{1}{S_k}$  est divergente.
- Q37.** Dans cette question, on suppose que  $u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $P(E)$ .
- Q38.** Proposer une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $P(E) \neq 0$  en justifiant votre réponse.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice tous deux indépendants.**

**Le problème est constitué de trois parties indépendantes.**

Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

# PROBLÈME

Dans ce problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $2n$ .

Si  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  sont  $2n + 1$  réels et  $Q$  est le polynôme défini par :  $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ , on définit le polynôme  $s(Q)$  par :  $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$ .

Autrement dit,  $s(Q)$  est le polynôme obtenu à partir de  $Q$  en "inversant l'ordre des coefficients". Par exemple, si  $n$  est égal à 2 et si  $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$ , on obtient  $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$ .

## Partie I - Étude d'une application linéaire

**Q1.** Calculer  $s(1)$ ,  $s(X^n)$  et  $s(X^{2n})$ .

**Q2.** Montrer que l'application  $s : Q \mapsto s(Q)$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Q3.** Diagonalisation dans le cas où  $n = 1$ .

- a) Vérifier que  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de l'endomorphisme  $s$  dans la base canonique  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  et justifier, sans calcul, que  $M$  est diagonalisable.
- b) Montrer que  $-1$  et  $1$  sont les seules valeurs propres de la matrice  $M$  et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.
- c) Déterminer alors une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $s$ . Préciser la matrice de  $s$  dans cette base.

**Q4.** Étude du cas général.

On ne suppose plus que  $n$  est égal à 1. On définit la famille  $(A_0, \dots, A_{2n})$  de polynômes de  $E$  par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

- a) Justifier que  $s$  est une symétrie. Que peut-on en déduire pour le spectre de  $s$  ?
- b) Vérifier que  $(A_0, \dots, A_{2n})$  est une famille de vecteurs propres de  $s$ .
- c) Montrer que la famille  $(A_0, \dots, A_{2n})$  est libre dans  $E$ .
- d) En déduire que l'endomorphisme  $s$  est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.



## Partie II - Recherche des racines d'un vecteur propre de $s$

### Q5. Préliminaires.

On définit la suite  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de polynômes par :  $R_1 = X$ ,  $R_2 = X^2 - 2$  et, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}.$$

- a) Déterminer les polynômes  $R_3$  et  $R_4$ .
- b) Montrer par récurrence que, pour tout entier  $k$  strictement positif,  $R_k$  est un polynôme de degré  $k$  vérifiant, pour tout nombre complexe  $x$  non nul, l'égalité :

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

- c) Pour tout réel  $a$ , déterminer, s'ils existent, les complexes  $x$  non nuls qui vérifient la relation suivante :  $x + \frac{1}{x} = a$ . On distinguera trois cas.

### Q6. Étude des racines d'un vecteur propre de $s$ .

Dans cette question,  $Q$  désigne un polynôme de degré  $2n$  défini par :  $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ , tel que  $a_{2n}$  soit non nul et tel que, pour tout entier  $k$  de l'intervalle  $[[0; n]]$ , l'on ait :  $a_k = a_{2n-k}$ .

- a) Vérifier que  $Q$  est vecteur propre de  $s$  et préciser la valeur propre associée.
- b) Justifier que 0 n'est pas racine de  $Q$ .

- c) On définit le polynôme  $\tilde{Q}$  par :  $\tilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k$ .

Soit  $x$  un complexe non nul, on pose :  $y = x + \frac{1}{x}$ .

Exprimer  $x^n \tilde{Q}(y)$  en fonction de  $Q(x)$ .

En déduire que  $Q(x)$  est nul si et seulement si  $\tilde{Q}(y)$  est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de  $Q$ ?

- d) On suppose dans cette question que  $n$  est égal à 3 et que  $Q$  est défini par :  
 $Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$ .

i. Vérifier que  $\tilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$ .

ii. En déduire les racines de  $\tilde{Q}$  puis celles de  $Q$ .

## Partie III - Étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie,  $p$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par  $\Omega$  l'ensemble des éléments de  $E$  dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  et par  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ .

On munit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  de la probabilité uniforme ; autrement dit, pour tout polynôme  $Q$  de  $\Omega$  :

$$\mathbb{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On admet que cela revient à choisir de manière équiprobable et indépendante chacun des  $2n + 1$  coefficients du polynôme  $Q$  dans  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ .

On rappelle que, si  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  sont  $2n + 1$  réels et  $Q$  est le polynôme défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k,$$

on définit le polynôme  $s(Q)$  par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Si  $Q$  est un élément de  $\Omega$  et  $i$  un entier naturel non nul, on dit que  $Q$  et  $s(Q)$  présentent  $i$  coïncidences lorsqu'il existe exactement  $i$  entiers  $k$  dans  $\llbracket 0 ; 2n \rrbracket$  vérifiant  $a_k = a_{2n-k}$ .

Par exemple, pour  $n = 2$  et  $Q = X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 5X + 1$ , on a :

$$\begin{array}{rclclcl} Q & = & X^4 & +7X^3 & +2X^2 & +5X & +1 \\ s(Q) & = & X^4 & +5X^3 & +2X^2 & +7X & +1 \end{array}$$

- $a_0 = a_{2 \times 2 - 0} = 1$  ;
- $a_1 = 5 \neq a_{2 \times 2 - 1} = 7$  ;
- $a_2 = a_2 = 2$  ;
- $a_3 = 7 \neq a_1 = 5$  ;
- $a_4 = a_{2 \times 2 - 4} = 1$ .

Il y a donc exactement trois indices  $k$  (0, 2 et 4) pour lesquels  $a_k = a_{2n-k}$ .

On définit alors l'application  $Z$  qui à tout polynôme  $Q$  de  $\Omega$  associe le nombre de coïncidences entre  $Q$  et  $s(Q)$ , et on admet que  $Z$  est bien une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . Dans l'exemple précédent, on a  $Z(Q) = 3$ .

### Q7. Description d'un cas simple.

Dans cette question seulement, on suppose que  $n$  est égal à 1 et que  $p$  est égal à 2.

- a) Justifier que  $\Omega$  est de cardinal 8. Écrire les huit éléments de  $\Omega$ , puis déterminer la loi de  $Z$ .
- b) Calculer l'espérance de  $Z$  et montrer que sa variance est égale à 1.

### Q8. Simulation informatique.

On rappelle que la commande `np.arange(1, n+1)` du module `numpy` renvoie un vecteur contenant les entiers de 1 à  $n$  et que la commande `plt.bar(X, Y)` suivie de `plt.show()` affiche un diagramme en bâtons dont les barres sont situées aux abscisses listées dans le vecteur  $X$  et dont les hauteurs sont données par le vecteur  $Y$ .

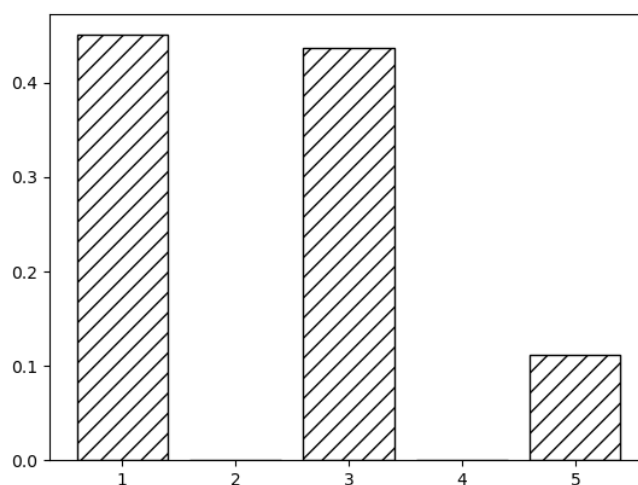
On dispose par ailleurs :

- d'une fonction `aleaQ` qui renvoie un polynôme choisi au hasard et de manière équiprobable dans  $\Omega$  et dont les différents appels sont indépendants entre eux ;
- d'une fonction `Z` qui prend en argument un polynôme  $Q$  et qui renvoie  $Z(Q)$ .

On considère le programme suivant :

```
1 n, p = 2, 3
2 Support = np.arange(1, 2*n+2)
3
4 N = 10000
5 Obs = np.array([Z(aleaQ()) for _ in range(N)])
6
7 def tabeff(Obs):
8 eff = np.zeros(len(Support))
9 for i in Support:
10 eff[i-1] = sum(Obs == i)
11 return eff
12
13 plt.bar(Support, tabeff(Obs)/len(Obs))
14 plt.show()
```

- a) Que fait la partie du programme située à la ligne 5 ?
- b) Que fait la fonction `tabeff` ? On justifiera précisément et on commentera en particulier la ligne 10.
- c) Le programme affiche le diagramme suivant :



Que représente-t-il ?

On justifiera précisément en s'appuyant notamment sur la ligne 13.

**Q9.** Étude générale de la variable aléatoire  $Z$ .

On revient au cas général :  $n$  est strictement positif et  $p$  est supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier  $k$  dans  $\llbracket 0 ; 2n \rrbracket$ , on définit les variables aléatoires  $N_k$  et  $Z_k$  de la manière suivante : pour tout polynôme  $Q$  de  $\Omega$ ,

- $N_k(Q)$  est le coefficient d'indice  $k$  du polynôme  $Q$  (noté  $a_k$  précédemment) ;
- $Z_k$  vaut 1 si le polynôme présente une coïncidence à l'indice  $k$  et vaut zéro sinon, autrement dit :  $Z_k(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } N_k(Q) = N_{2n-k}(Q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

a) Quelle est la loi de  $Z_n$  ?

b) Soit  $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$ . Justifier que  $N_k$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ .

Donner son espérance et sa variance.

c) Soit  $k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$ . Montrer que  $\mathbb{P}(N_k = N_{2n-k}) = \frac{1}{p}$ .

Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales.

d) En déduire, pour tout  $k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$ , la loi de  $Z_k$ , puis reconnaître, en justifiant, celle de  $Y = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ .

e) Écrire  $Z$  en fonction de  $Y$  et de  $Z_n$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Z$ .

## EXERCICE

Dans tout l'exercice, on désigne par :

- $x$  une variable réelle ;
- $y$  une fonction de la variable  $x$  définie sur une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $y'$  et  $y''$ , si elles existent, les dérivées première et seconde de  $y$ .

Le but de cet exercice est d'étudier différentes propriétés d'une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

Plus précisément, on s'intéresse à la recherche d'une solution de  $(E)$  développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

**Q10.** Dans cette question, on étudie l'existence d'une solution  $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de (E) développable en série entière et on note  $R$  son rayon de convergence.

a) On suppose tout d'abord qu'une telle solution existe.

i. Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$ .

ii. Justifier que pour tout entier naturel  $p$ ,  $a_{2p+1} = 0$ .

iii. Déterminer, pour tout entier naturel  $p$ , l'expression de  $a_{2p}$  en fonction de  $p$  et de  $a_0$ .

b) Conclure quant à l'existence d'une solution de (E) développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) qui sont développables en série entière ?

Soient  $g$  la fonction des deux variables  $x$  et  $\theta$  définie sur  $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$(x, \theta) \mapsto g(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

et  $h$  la fonction des deux variables  $x$  et  $t$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0; 1[$  par :

$$(x, t) \mapsto h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

**Q11.** Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est convergente quel que soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose pour  $x$  réel :

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, \theta) d\theta \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^1 h(x, t) dt.$$

De plus,  $F$  désigne désormais l'unique solution de (E) développable en série entière et vérifiant  $F(0) = 1$ .

**Q12.** À l'aide d'un changement de variable, montrer que  $G(x) = H(x)$  pour tout réel  $x$ .

**Q13.** Dérivées successives de  $G$ .

a) Soient  $\omega$  un réel et  $\varphi : x \mapsto \cos(\omega x)$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $x$ ,  $\varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos\left(\omega x + n\frac{\pi}{2}\right)$ .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $(x, \theta) \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta)$  existe et est continue sur  $\mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , et donner son expression en fonction de  $x$ ,  $\theta$  et de  $n$ .

- c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer l'existence d'une fonction  $M : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et d'intégrale convergente sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta)\right| \leq M(\theta)$ .

On admet dès lors que la fonction  $G$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $x$  :

$$G^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) d\theta.$$

**Q14.** Montrer que  $G$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

Indication : on pourra utiliser une formule de Taylor.

**Q15.** On note respectivement  $G'$  et  $G''$  les dérivées première et seconde de  $G$ .

a) Calculer  $G(0)$ .

b) En utilisant l'expression de  $G^{(n)}$  fournie dans la question **Q13**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = -x(G''(x) + G(x)).$$

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

c) Pour tout réel  $x$ , exprimer  $F(x)$  en fonction de  $G(x)$ , respectivement de  $H(x)$ .

**Q16.** Étude de  $F$  en  $+\infty$ .

On fixe un réel  $\varepsilon > 0$ .

a) Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que, quel que soit le réel  $x$  :

$$\left| \int_{\alpha}^1 h(x, t) dt \right| < \varepsilon/2.$$

b)  $\alpha$  étant ainsi choisi, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} h(x, t) dt = 0.$$

c) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

On admet que pour tout réel  $x$  :

$$H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

**Q17.** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

# EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

Dans tout l'exercice,  $p$  désigne un réel de  $]0; 1[$  et on pose  $q = 1 - p$ .

## Partie I - Résultats préliminaires

**Q1.** Rappeler le développement en série entière de  $\frac{1}{1-x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , en précisant son intervalle de validité.

Soit  $x \in [0, 1[$ , calculer les sommes  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$  et  $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$ .

On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = q^k p = (1-p)^k p$$

**Q2.** À l'aide de la question **Q1**, montrer que  $X$  possède une espérance et une variance et les calculer.

**Q3.** On se propose d'établir les résultats de la question **Q2** par une autre méthode.

a) On pose  $Y = X + 1$ . Montrer que  $Y$  suit une loi géométrique.

Rappeler les expressions de  $E(Y)$  et de  $V(Y)$ .

b) Retrouver que  $X$  admet une espérance et une variance.

## Partie II - Étude de la probabilité d'extinction d'une espèce

Une variété annuelle de plante produit un certain nombre  $k$  de graines avant de mourir avec  $k \in \mathbb{N}$ .

- Si  $k = 0$ , la plante n'a aucun descendant. L'espèce est donc éteinte l'année suivante.
- Si  $k \geq 1$ , l'année suivante chaque graine germe à coup sûr et donne une nouvelle plante. Chacune de ces nouvelles plantes produit de la même façon un certain nombre de graines avant de mourir.
- On suppose que les différentes plantes d'une même génération produisent chacune un nombre de graines suivant la même loi que la variable  $X$  de la **partie I**, ceci indépendamment les unes des autres. Ainsi, par exemple, s'il y a  $k$  plantes à une génération donnée, le nombre de graines produit par une plante donnée est indépendant du comportement des autres plantes.

*On cherche à étudier la probabilité d'extinction de l'espèce en fonction de  $p$ .*

*On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z_n$  la variable aléatoire égale au nombre de plantes vivantes à la génération  $n$ .*

*On suppose qu'à la génération  $n = 0$ , il n'y a qu'une seule plante ; ainsi  $Z_0 = 1$ .*

*On remarque que  $Z_1$  suit la même loi que  $X$ .*

*On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la probabilité  $u_n$  qu'à la génération  $n$  il n'y ait plus de plantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbf{P}([Z_n = 0])$$

*On note  $E$  l'événement : " l'espèce finit par s'éteindre ".*



- Q4.** a) Préciser les valeurs de  $u_0 = \mathbf{P}([Z_0 = 0])$  et de  $u_1 = \mathbf{P}([Z_1 = 0])$ .  
 b) Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.  
 c) Justifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ .  
 En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, puis qu'elle converge.

Dans la suite de l'exercice, on note  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et on admet que  $\mathbf{P}(E) = \ell$ .

- Q5.** a) (i) Sans calculs, justifier que  $\mathbf{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 0]) = u_1$ .  
 (ii) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $Z_1 = k$  et on note  $X_1, \dots, X_k$  les nombres de descendants respectifs de chacune des plantes de la génération 1. Montrer que :

$$\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k$$

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$$

- b) À l'aide de la formule des probabilités totales et d'un système complet d'événements lié à  $Z_1$ , en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k \mathbf{P}([Z_1 = k])$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{p}{1 - qu_n}$$

On cherche maintenant à déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Q6.** a) Déduire de la question précédente que la limite  $\ell$  vérifie la relation :

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$$

En déduire les valeurs que peut prendre la limite  $\ell$ .

- b) On suppose que  $p \geq \frac{1}{2}$ . Montrer que :  $\mathbf{P}(E) = 1$ .  
 Que peut-on, dans ce cas, en déduire des chances de survie de l'espèce à long terme ?  
 c) On suppose que  $p < \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ .  
 En déduire que  $\mathbf{P}(E) < 1$ .  
 d) Que peut-on en déduire du nombre moyen de descendants par plante lorsque l'espèce a une chance de survie à long terme ?

## EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \geq 2$  et on note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

Si  $M$  est une matrice de  $E$ , on note  $M^T$  la matrice transposée de  $M$ .

On rappelle la définition des ensembles  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E; M^T = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E; M^T = -M\}$$

On note  $B$  et  $C$  les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $B$  et  $C$  vérifient la relation :  $C = B^T$ .

### Partie I - Étude de la matrice $B$

- Q7.**
- a) Déterminer  $\ker(B)$ .
  - b) Montrer que  $B$  est diagonalisable.
  - c) Déterminer une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible vérifiant  $B = PDP^{-1}$ .
- Q8.**
- a) Montrer que  $B$  et  $C$  sont des matrices semblables.
  - b) Déterminer l'expression en fonction de  $P$  et de  $P^T$ , d'une matrice inversible  $R$  telle que :

$$C = R^{-1}BR$$

- Q9.** L'objectif de cette question est de déterminer toutes les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  solutions de l'équation  $M^2 = B$ .  
On pose  $N = P^{-1}MP$ , où  $P$  est la matrice déterminée dans la question **Q7**.

- a) Montrer que  $M^2 = B \iff N^2 = D$ .
- b) Soit  $N$  vérifiant  $N^2 = D$ . Montrer que  $ND = DN$ .  
Déterminer les matrices  $N$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant l'équation  $ND = DN$ .  
En déduire les solutions de l'équation  $N^2 = D$ .
- c) Résoudre l'équation  $M^2 = B$ , les expressions des solutions seront données en fonction des solutions de  $N^2 = D$  et de  $P$ . Combien obtient-on de solutions ?

## Partie II - Étude d'endomorphismes de $E$

**Q10.** Montrer que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Q11.** On veut démontrer que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- a) Soit  $M \in E$ . On veut déterminer  $U \in S_n(\mathbb{R})$  et  $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = U + V$ .  
Établir un système d'équations vérifiées par  $U$ ,  $V$ ,  $U^T$  et  $V^T$ . En déduire les expressions de  $U$  et de  $V$  en fonction de  $M$  et de  $M^T$ .  
Vérifier que les matrices  $U$  et  $V$  ainsi obtenues appartiennent respectivement à  $S_n(\mathbb{R})$  et à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- b) Montrer que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- c) En déduire une relation entre les dimensions de  $S_n(\mathbb{R})$  et de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

**Q12.** On considère l'endomorphisme  $\varphi$  défini par :

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto M^T\end{aligned}$$

- a) Que vaut  $\varphi \circ \varphi$ ? Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de  $\varphi$ ?
- b) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il bijectif?
- c) Déterminer les sous-espaces propres de  $\varphi$ .
- d) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable?

**Q13.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et l'application  $f_a$  telle que :

$$\begin{aligned}f_a : E &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto M + aM^T\end{aligned}$$

- a) Montrer que  $f_a$  est un endomorphisme de  $E$ .
- b) On rappelle que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à cette somme directe, déterminer la forme de la matrice de  $f_a$  dans  $\mathcal{B}$ .
- c) Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$ , l'endomorphisme  $f_a$  est-il bijectif?
- d) L'endomorphisme  $f_a$  est-il diagonalisable?

**Q14.** Étude d'un cas particulier

On considère dans cette question que  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $a = 1$ . On note  $f : M \mapsto M + M^T$ .

Soit  $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer la dimension de  $\ker(f)$  et le rang de  $f$ .
- b) Montrer que  $S$  appartient à  $\text{Im}(f)$ .
- c) Résoudre l'équation  $f(M) = S$  d'inconnue  $M \in E$ .

## EXERCICE 3

### Partie I - Résultats préliminaires

**Q15.** Questions de cours

- a) Donner le développement en série entière de  $\cos x$  et préciser le rayon de convergence de cette série. Aucune justification n'est attendue dans la réponse.
- b) Soit  $(a_n)$  une suite réelle à termes positifs. La série  $\sum (-1)^n a_n$  est appelée série alternée. Énoncer le théorème de convergence des séries alternées.

**Q16.** Dans cette question, on va établir une propriété utile dans l'étude des séries alternées.

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante qui converge vers 0. On considère la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ .

On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de cette série. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

- a) Montrer que  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites adjacentes. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \leq S_{2n}$$

- b) Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on note :

$$R_N = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, |R_N| \leq a_{N+1}$$

On pourra utiliser le résultat de la question **Q16a** et considérer les cas  $N = 2p$ , puis  $N = 2p + 1$  c'est-à-dire  $N$  pair, puis  $N$  impair.

On admet que si les hypothèses du théorème de convergence des séries alternées sont vérifiées à partir d'un rang  $N_0$  avec  $N_0 \in \mathbb{N}$ , alors la suite des restes  $(R_n)$  vérifie la propriété établie à la question **Q16b** à partir du rang  $N_0$ , c'est-à-dire :

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geq N_0 \implies |R_N| \leq a_{N+1}$$

## Partie II - Étude d'une suite d'intégrales, calcul d'une intégrale généralisée

On définit la suite d'intégrales  $(I_n)$  telle que, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2} dt$$

et on admet que  $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

On définit également pour tout  $x$  réel l'intégrale généralisée :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(xt) dt$$

**Q17.** a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Calculer :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2n+2} e^{-t^2/2}$$

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $I_n$  converge.

**Q18.** a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (2n-1)I_{n-1}$ .

b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Q19.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale généralisée  $F(x)$  est convergente.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

**Q20.** Montrer qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq N_0, u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

On considère désormais la série alternée  $\sum_{n \geq N_0} (-1)^n u_n$ .

**Q21.** À l'aide des résultats des questions **Q16** et **Q20**, montrer que pour tout entier  $N \geq N_0$ , on a :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!}$$

**Q22.** À l'aide de la question **Q21**, établir que pour tout entier  $N \geq N_0$ , on a :

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n \right| \leq \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!} \int_0^{+\infty} t^{2N+2} e^{-t^2/2} dt$$

**Q23.** À l'aide des questions **Q18** et **Q22**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n$$

**Q24.** Montrer que  $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2}$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**

## EXERCICE I

On considère deux tables : ELEVES et PAIEMENTS. La première contient des informations sur des élèves dans une grande école d'ingénieur et la deuxième permet d'identifier quels sont les paiements effectués par les élèves pour la scolarité dans cette école.

La table ELEVES contient les attributs suivants :

- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom (chaîne de caractères) ;
- prenom (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères) ;
- promo : année d'admission dans l'école (int).

La table PAIEMENTS contient les attributs suivants :

- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- id\_eleve : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table ELEVES (entier) ;
- montant : montant payé en euros (entier) ;
- date\_paiement : date du paiement (chaîne de caractères).

- Q1.** Écrire une requête SQL affichant les emails différents (sans doublons) de tous les élèves qui ne sont pas de la promotion 2025.
- Q2.** Écrire une requête SQL affichant le nom, le prénom et le montant total payé pour chaque élève. Cette requête devra être triée par nom, puis prénom.
- Q3.** On souhaite trouver les doublons dans la table ELEVES. Écrire une requête SQL affichant les id et emails des élèves qui ont au moins deux lignes identiques dans la table ELEVES (à l'exception de l'attribut id).
- Q4.** Écrire une requête SQL affichant l'id des élèves n'ayant effectué aucun paiement.

## EXERCICE II

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On note  $G_X$  la fonction génératrice de  $X$  définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n .$$

- Q5.** Montrer que  $G_X$  est bien définie sur  $[-1,1]$ .
- Q6.** Si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , rappeler et démontrer l'expression de  $G_X$ .
- Q7.** En utilisant un produit de Cauchy de deux séries entières, démontrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors on a :

$$\forall t \in ]-1,1[ , \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) .$$

- Q8.** On suppose désormais que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminer la loi de  $Z = X + Y$ .



# PROBLÈME

Les **parties I** et **II** de ce problème sont indépendantes mais les résultats seront utilisés pour la résolution de la **partie III**.

## Partie I - Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, on pose  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt$  pour tout  $x > 0$ .

**Q9.** Démontrer que  $g$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

**Q10.** Pour tout  $x > 0$ , démontrer que  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du$ .

En déduire que  $g$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ .

**Q11.** Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$ .

**Q12.** Démontrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Q13.** Calculer  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right)$  pour  $(x, t) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

En déduire que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - y = 0$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Q14.** Pour tout  $x > 0$ , déterminer une expression de  $g(x)$ .

## Partie II - Formule sommatoire de Poisson

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1 + t^2},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

**Q15.** Démontrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.

**Q16.** Démontrer que  $F$  est continue sur  $[0, 1]$  et en déduire que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour toute fonction  $u$  continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique, on pose, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

**Q17.** Démontrer que  $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Q18.** Pour tout  $k, n \in \mathbb{Z}$ , calculer la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt$ .

### Partie III - Applications

On rappelle les notations :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$  et  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ .

**Q19.** Calculer  $c_0(F)$ .

En utilisant les résultats des **parties I et II**, calculer  $c_k(F)$  pour tout entier  $k > 0$ .

*On admettra que  $c_{-k}(F) = c_k(F)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Q20.** On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}$ .

Démontrer que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.

On admet le résultat suivant :

« Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , 1 périodiques et vérifient  $c_k(u) = c_k(v)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $u = v$  ».

**Q21.** Démontrer que  $F = G$ .

**Q22.** En déduire la valeur de  $F(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

|                                           |
|-------------------------------------------|
| <b>Les calculatrices sont interdites.</b> |
|-------------------------------------------|

**Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

## EXERCICE 1

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a \neq 0$ ,

on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$  et on note  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Q1.** Quel est le rang de la matrice  $J$  ? Diagonaliser la matrice  $J$  sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.
- Q2.** En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.
- Q3.** Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice  $A$  est :  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .
- Q4.** Déterminer les puissances successives de  $A$  par deux méthodes différentes :
- a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par le polynôme  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $A$  et  $I$ .  
Pour simplifier les calculs, on posera  $\lambda = 3a + b$  et on pourra laisser  $\lambda$  dans la réponse.
- b) Calculer  $J^k$  pour tout entier  $k \geq 1$ , puis utiliser  $A = aJ + bI$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $J$  et  $I$  (sans le signe somme).

## EXERCICE 2

Dans cet exercice  $n$  est un entier naturel non nul.

On note  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  un polynôme de degré  $n - 1$  à coefficients réels.

On note, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$  les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

(\*) le produit  $P(\omega_1)P(\omega_2)\dots P(\omega_{n-1})$  est un nombre réel.

**Q5.** Exemple.

Si on note  $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ , déterminer ce que vaut  $1 + j + j^2$ .

Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (\*).

**Q6.** On note la matrice  $J$  de  $M_n(\mathbb{R})$  :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).

Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice  $J$  est  $\chi_J = X^n - 1$ .

**Q7.** On note  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$

(les coefficients du polynôme  $P$  se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).

Comparer la matrice  $A$  et la matrice  $P(J)$  (on ne demande pas le détail des calculs).

**Q8.** Diagonaliser la matrice  $J$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice  $A$  dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Q9.** En déduire le résultat (\*).

## PROBLÈME

**Q10.** Question de cours.

Si  $E$  est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et de sa norme euclidienne associée notée  $\| \cdot \|$ , si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , on définit le projeté orthogonal sur  $F$  d'un vecteur  $x$  de  $E$  noté  $p_F(x)$  ainsi :

$p_F(x)$  est l'unique vecteur de  $F$  vérifiant  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

a) Si  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $F$ , démontrer que  $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ .

b) Démontrer que pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  et que  $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ .

**Q11.** Justifier que pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

On note désormais  $F = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $I = [0, +\infty[$  et  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que la fonction  $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$  soit intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Justifier que pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , la fonction  $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$  est intégrable sur l'intervalle  $I$ .

**Q12.** Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

**Q13.** On identifie  $\mathbb{R}[X]$  et les fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Ainsi  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , défini sur  $\mathbb{R}[X]$ , par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q14.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose pour tout réel  $x$ ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

**a)** Calculer pour tout entier naturel  $p \leq n$ ,  $h_n^{(p)}(x)$ .

Si  $p < n$ , que vaut  $h_n^{(p)}(0)$  ?

**b)** Démontrer que  $L_n \in \mathbb{R}[X]$ , préciser son degré et son coefficient dominant.

**Q15.** Soit  $g$  élément de  $\mathbb{R}[X]$ , exprimer  $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$  en fonction de  $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$ , puis exprimer

$\langle g | L_n \rangle$  en fonction de  $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$ .

**Q16.** Si  $L_i$  et  $L_j$ , avec  $i < j$ , sont deux éléments de  $F$ , déterminer  $\langle L_i | L_j \rangle$ .

**Q17.** Calculer par des intégrations par parties,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\langle L_n | L_n \rangle$ .

**Q18.** Que peut-on en conclure concernant la base  $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$  de vecteurs de  $F$  ?

Exprimer, pour tout  $g$  élément de  $E$ ,  $P_F(g)$  dans cette base.

**Q19.** Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$  converge et majorer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$ .

**Q20.** Pour  $\alpha > \frac{-1}{2}$ , on pose  $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$ .

Vérifier que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g_\alpha \in E$ .

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ .

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 1****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.**

## EXERCICE I

On considère deux tables : ELEVES et PAIEMENTS. La première contient des informations sur des élèves dans une grande école d'ingénieur et la deuxième permet d'identifier quels sont les paiements effectués par les élèves pour la scolarité dans cette école.

La table ELEVES contient les attributs suivants :

- id : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- nom (chaîne de caractères) ;
- prenom (chaîne de caractères) ;
- email (chaîne de caractères) ;
- promo : année d'admission dans l'école (int).

La table PAIEMENTS contient les attributs suivants :

- id : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- id\_eleve : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table ELEVES (entier) ;
- montant : montant payé en euros (entier) ;
- date\_paiement : date du paiement (chaîne de caractères).

- Q1.** Écrire une requête SQL affichant les emails différents (sans doublons) de tous les élèves qui ne sont pas de la promotion 2025.
- Q2.** Écrire une requête SQL affichant le nom, le prénom et le montant total payé pour chaque élève. Cette requête devra être triée par nom, puis prénom.
- Q3.** On souhaite trouver les doublons dans la table ELEVES. Écrire une requête SQL affichant les id et emails des élèves qui ont au moins deux lignes identiques dans la table ELEVES (à l'exception de l'attribut id).
- Q4.** Écrire une requête SQL affichant l'id des élèves n'ayant effectué aucun paiement.

## EXERCICE II

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On note  $G_X$  la fonction génératrice de  $X$  définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n .$$

- Q5.** Montrer que  $G_X$  est bien définie sur  $[-1,1]$ .
- Q6.** Si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , rappeler et démontrer l'expression de  $G_X$ .
- Q7.** En utilisant un produit de Cauchy de deux séries entières, démontrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors on a :

$$\forall t \in ]-1,1[ , \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) .$$

- Q8.** On suppose désormais que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminer la loi de  $Z = X + Y$ .



# PROBLÈME

Les **parties I** et **II** de ce problème sont indépendantes mais les résultats seront utilisés pour la résolution de la **partie III**.

## Partie I - Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, on pose  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt$  pour tout  $x > 0$ .

**Q9.** Démontrer que  $g$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .

**Q10.** Pour tout  $x > 0$ , démontrer que  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} du$ .

En déduire que  $g$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ .

**Q11.** Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$ .

**Q12.** Démontrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Q13.** Calculer  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right)$  pour  $(x, t) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

En déduire que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - y = 0$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Q14.** Pour tout  $x > 0$ , déterminer une expression de  $g(x)$ .

## Partie II - Formule sommatoire de Poisson

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

**Q15.** Démontrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.

**Q16.** Démontrer que  $F$  est continue sur  $[0, 1]$  et en déduire que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour toute fonction  $u$  continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique, on pose, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

**Q17.** Démontrer que  $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Q18.** Pour tout  $k, n \in \mathbb{Z}$ , calculer la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt$ .

### Partie III - Applications

On rappelle les notations :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$  et  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ .

**Q19.** Calculer  $c_0(F)$ .

En utilisant les résultats des **parties I et II**, calculer  $c_k(F)$  pour tout entier  $k > 0$ .

*On admettra que  $c_{-k}(F) = c_k(F)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Q20.** On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}$ .

Démontrer que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.

On admet le résultat suivant :

« Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , 1 périodiques et vérifient  $c_k(u) = c_k(v)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $u = v$  ».

**Q21.** Démontrer que  $F = G$ .

**Q22.** En déduire la valeur de  $F(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**FIN**

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI**

---

**MATHÉMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

## EXERCICE 1

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a \neq 0$ ,

on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$  et on note  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Q1.** Quel est le rang de la matrice  $J$  ? Diagonaliser la matrice  $J$  sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.
- Q2.** En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.
- Q3.** Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice  $A$  est :  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .
- Q4.** Déterminer les puissances successives de  $A$  par deux méthodes différentes :
- a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par le polynôme  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $A$  et  $I$ .  
Pour simplifier les calculs, on posera  $\lambda = 3a + b$  et on pourra laisser  $\lambda$  dans la réponse.
- b) Calculer  $J^k$  pour tout entier  $k \geq 1$ , puis utiliser  $A = aJ + bI$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $J$  et  $I$  (sans le signe somme).

## EXERCICE 2

Dans cet exercice  $n$  est un entier naturel non nul.

On note  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  un polynôme de degré  $n - 1$  à coefficients réels.

On note, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$  les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

(\*) le produit  $P(\omega_1)P(\omega_2)\dots P(\omega_{n-1})$  est un nombre réel.

**Q5.** Exemple.

Si on note  $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ , déterminer ce que vaut  $1 + j + j^2$ .

Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (\*).

**Q6.** On note la matrice  $J$  de  $M_n(\mathbb{R})$  :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).

Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice  $J$  est  $\chi_J = X^n - 1$ .

**Q7.** On note  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$

(les coefficients du polynôme  $P$  se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).

Comparer la matrice  $A$  et la matrice  $P(J)$  (on ne demande pas le détail des calculs).

**Q8.** Diagonaliser la matrice  $J$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice  $A$  dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Q9.** En déduire le résultat (\*).

## PROBLÈME

**Q10.** Question de cours.

Si  $E$  est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et de sa norme euclidienne associée notée  $\| \cdot \|$ , si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , on définit le projeté orthogonal sur  $F$  d'un vecteur  $x$  de  $E$  noté  $p_F(x)$  ainsi :

$p_F(x)$  est l'unique vecteur de  $F$  vérifiant  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

a) Si  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $F$ , démontrer que  $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ .

b) Démontrer que pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  et que  $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ .

**Q11.** Justifier que pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

On note désormais  $F = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $I = [0, +\infty[$  et  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que la fonction  $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$  soit intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Justifier que pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , la fonction  $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$  est intégrable sur l'intervalle  $I$ .

**Q12.** Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

**Q13.** On identifie  $\mathbb{R}[X]$  et les fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Ainsi  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , défini sur  $\mathbb{R}[X]$ , par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q14.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose pour tout réel  $x$ ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

**a)** Calculer pour tout entier naturel  $p \leq n$ ,  $h_n^{(p)}(x)$ .

Si  $p < n$ , que vaut  $h_n^{(p)}(0)$  ?

**b)** Démontrer que  $L_n \in \mathbb{R}[X]$ , préciser son degré et son coefficient dominant.

**Q15.** Soit  $g$  élément de  $\mathbb{R}[X]$ , exprimer  $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$  en fonction de  $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$ , puis exprimer

$\langle g | L_n \rangle$  en fonction de  $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$ .

**Q16.** Si  $L_i$  et  $L_j$ , avec  $i < j$ , sont deux éléments de  $F$ , déterminer  $\langle L_i | L_j \rangle$ .

**Q17.** Calculer par des intégrations par parties,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\langle L_n | L_n \rangle$ .

**Q18.** Que peut-on en conclure concernant la base  $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$  de vecteurs de  $F$  ?

Exprimer, pour tout  $g$  élément de  $E$ ,  $P_F(g)$  dans cette base.

**Q19.** Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$  converge et majorer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$ .

**Q20.** Pour  $\alpha > \frac{-1}{2}$ , on pose  $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$ .

Vérifier que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g_\alpha \in E$ .

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ .

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.**

# EXERCICE 1

## Un jeu de pile ou face

### Preliminaires

**Q1.** On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $] -1, 1[$ , et que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Q2.** Établir que :  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$

### Étude d'un jeu de Pile ou Face

Soit  $p \in ]0, 1[$ . Deux joueurs effectuent des lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est  $p$ . Le jeu se déroule de la manière suivante.

- Le joueur 1 effectue une succession de lancers et s'arrête lorsqu'il obtient *Pile* pour la première fois.  
*On admettra qu'avec une probabilité de 1, le joueur obtient Pile après un nombre fini de lancers.*
- Le joueur 2 effectue ensuite le même nombre de lancers que le joueur 1 et compte le nombre de fois où il a obtenu *Pile*.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur 1.
- On note  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus par le joueur 2.

**Q3.** Préciser la loi de  $X$ .

**Q4.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , calculer la probabilité de l'événement  $\{Y = k\}$  sachant  $\{X = n\}$ , notée par la suite  $P(Y = k | X = n)$ .

**Q5.** Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $P(Y = k)$  en fonction des réels  $P(Y = k | X = n)$  et  $P(X = n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q6.** Établir que :  $P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p}.$

**Q7.** Établir que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$



## EXERCICE 2

### Une caractérisation de la fonction Gamma

L'objet de cet exercice est l'étude d'une caractérisation de la fonction Gamma connue sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

**Lemme 1.** Si  $g$  est une fonction convexe sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $a \in I$ , alors pour tous  $x, y$  éléments de  $I \setminus \{a\}$  tels que  $x \leq y$ ,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \frac{g(y) - g(a)}{y - a}.$$

Dans cet exercice, nous cherchons à montrer que la seule fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \ln \circ f \text{ est une fonction convexe} \end{cases} \quad (S)$$

est la fonction  $\Gamma$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**Existence : la fonction  $\Gamma$  vérifie (S)**

**Q8.** Montrer que la fonction  $\Gamma$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\Gamma(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Q9.** Montrer que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

Dans les questions **Q10** à **Q12**,  $a$  et  $b$  désignent des réels vérifiant  $0 < a < 1 < b$  et  $\varphi$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in ]0, 1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \in ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

**Q10.** Établir que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t).$$

**Q11.** Pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ , on définit la fonction  $\psi_k$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t).$$

Montrer que les fonctions  $\psi_k$  ( $k \in \{0, 1, 2\}$ ) sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q12.** Dédurre des deux questions précédentes que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donner l'expression des deux fonctions  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  sous une forme intégrale.

**Q13.** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  vérifiant  $\alpha < \beta$ . Pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions continues sur  $[\alpha, \beta]$ , on pose :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t) dt.$$

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$ .

**Q14.** En utilisant la question **Q13** et en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

En déduire que la fonction  $\ln \circ \Gamma$  est convexe et conclure que  $\Gamma$  vérifie bien (S).

### Unicité

On suppose que  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  qui vérifie (S). On introduit par ailleurs la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \ln(f(x)).$$

**Q15.** Montrer que si  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$f(x+n) = x(x+1) \dots (x+n-1)f(x).$$

En déduire les valeurs de  $f(n+1)$  et de  $g(n+1)$ .

**Q16.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, g(x+n+1) = g(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n)).$$

**Q17.** À l'aide du **Lemme 1**, justifier que :

$$\forall x \in ]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

**Q18.** À l'aide des questions **Q16** et **Q17**, établir que :

$$\forall x \in ]0, 1], f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad (1)$$

**Q19.** Déduire des questions **Q14** et **Q18** que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f(x) = \Gamma(x)$ .

**Q20.** En utilisant la question **Q15**, conclure que  $f = \Gamma$ .

# PROBLÈME

## Étude d'une classe d'endomorphismes

### Notations

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , par convention  $u^0 = \text{Id}_E$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on note :

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $F_1, \dots, F_k$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Lorsque la somme  $F_1 + \dots + F_k$  est directe, on la note  $\bigoplus_{i=1}^k F_i$ . Par convention, si  $k = 0$  (cas d'une somme vide), la somme vaut  $\{0\}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $M_p(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices de taille  $p \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}_p[X]$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $p$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p+2q = n$  et des sous-espaces vectoriels  $D_1, \dots, D_p, P_1, \dots, P_q$  de  $E$  stables par  $u$ , les  $D_i$  étant de dimension 1 et les  $P_j$  de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q P_j.$$

- (ii) il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + 2q = n$  et une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists (M_1, \dots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q : \text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & & & M_1 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui vérifient (i) ou (ii).

## Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble  $\mathcal{D}$ . Après avoir étudié deux exemples dans la **partie I**, on étudie dans la **partie II** les endomorphismes nilpotents de  $\mathcal{D}$ . Dans la **partie III**, on démontre un critère d'appartenance à  $\mathcal{D}$  faisant intervenir des polynômes annulateurs.

## Partie I - Deux exemples

Dans cette partie, on note  $E = \mathbb{K}_2[X]$ . On définit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  par :

$$\begin{array}{ccc} u : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2 P'' + P' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} v : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array} .$$

### Étude de $u$

**Q21.** Écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$ . Est-elle diagonalisable ?

**Q22.** Déterminer  $\text{Ker } u^2$  et justifier que  $\text{Ker } u^2$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ .

**Q23.** Donner une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure que  $u \in \mathcal{D}$ .

### Étude de $v$

**Q24.** Donner la matrice de  $v$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Q25.** Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension 1 stables par  $v$ .

**Q26.** Montrer que  $\mathbb{K}_1[X]$  est le seul sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 stable par  $v$ .

**Q27.** En déduire que  $v \notin \mathcal{D}$ .

**Q28.**  $\mathcal{D}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  ?

## Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0$ . Dans ce cas, le plus petit entier naturel  $k$  vérifiant  $u^k = 0$  est appelé indice de nilpotence de  $u$ .

Dans la suite, on note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie,  $u \in \mathcal{N}$  est un endomorphisme nilpotent d'indice  $k \in \mathbb{N}^*$  et de rang  $r \in \mathbb{N}$ .

On note  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ .

**Cas  $n = 1$** 

**Q29.** Que dire de  $u$  si  $\dim E = 1$  ?

**Cas  $n = 2$** 

On suppose dans ce cas que  $\dim E = 2$  et que  $u$  est non nul.

**Q30.** Soit  $x \in E$  tel que  $u^{k-1}(x) \neq 0$ . Justifier que  $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$  est une famille libre.

**Q31.** En déduire que  $k = 2$ , puis que  $u \in \mathcal{N}_2$ .

**Cas général**

$E$  désigne maintenant un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

**Q32.** Montrer que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$ .

Soit  $u \in \mathcal{N}_2$ .

**Q33.** Justifier que  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$  et que  $r \leq n - r$ .

**Q34.** Notons  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im } u$  que l'on complète en une base  $(e_1, \dots, e_{n-r})$  de  $\text{Ker } u$ . Soient  $f_1, \dots, f_r \in E$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u(f_i) = e_i$ .  
Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$  est une base de  $E$ .

**Q35.** Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & \\ & J & (0) \\ & (0) & \ddots \\ & & & J \end{pmatrix},$$

où  $0_{n-2r}$  désigne la matrice nulle de  $M_{n-2r}(\mathbb{K})$  et où les autres blocs diagonaux égaux à  $J$  sont en nombre  $r$ .

**Q36.** En déduire que  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$ .

**Partie III - Un critère d'appartenance à  $\mathcal{D}$** 

Dans toute cette partie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme quelconque.

On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples ou doubles, alors  $u \in \mathcal{D}$ .

**Q37.** Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ , distincts. On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_1[X]^2 &\longrightarrow \mathbb{K}_3[X] \\ (A, B) &\longmapsto (X - a)^2 A + (X - b)^2 B \end{aligned}.$$

Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple  $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$  tel que :

$$(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1.$$

**Q38.** Justifier que pour tous  $a, b \in \mathbb{K}$  distincts,  $\text{Ker}(u - a \text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker}(u - b \text{Id}_E)^2 = \{0\}$ .

Soient  $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$  deux familles de scalaires telles que les  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  sont distincts. On notera que l'une des deux familles  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_q)$  peut éventuellement être vide.

**Q39.** Justifier que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$$

est directe.

**Q40.** Montrer que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

est directe.

On pourra procéder par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}$ .

**Q41.** Soit :

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]. \quad (2)$$

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on note  $P_i, Q_j$  et  $R_j$  les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \quad P = (X - \beta_j)Q_j, \quad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$  est libre. En déduire que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ .

On suppose à partir de maintenant que le polynôme  $P$  défini en (2) est annulateur de  $u$ .

**Q42.** En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base  $\mathcal{B}$ , justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2.$$

**Q43.** Conclure que  $u \in \mathcal{D}$ .

On pourra utiliser le résultat de la question **Q36**.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1

## Réduction de matrices par blocs

### Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de certaines matrices par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

On rappelle que les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent de la même manière que sur les matrices classiques du moment que les tailles des blocs sont compatibles. Par exemple, pour tout élément  $(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^8$ , on a :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $O_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Les **parties I et II** sont indépendantes.

### Partie I - Étude d'une première forme

Dans cette partie, on étudie la matrice par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

#### I.1 - Étude d'un exemple

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose que  $n = 2$  et que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- Q1.** Justifier que la matrice  $M$  est diagonalisable.
- Q2.** Déterminer les valeurs propres de la matrice  $M$ .
- Q3.** Montrer que  $M$  est une matrice symétrique positive. Est-elle définie positive ?

#### I.2 - Réduction de la matrice $M$

Dans cette sous-partie, on revient au cas général où l'entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont quelconques. On considère la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$



**Q4.** Montrer que la matrice  $P$  est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

**Q5.** En utilisant la matrice  $P$  définie précédemment, montrer que  $M$  est semblable à la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}.$$

**Q6.** On note  $\chi_A$  le polynôme caractéristique de  $A$  et  $\chi_M$  le polynôme caractéristique de  $M$ .

Montrer pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  que  $\chi_M(\lambda) = \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ . En déduire le spectre de la matrice  $M$  en fonction du spectre de  $A$ .

**Q7.** Soit un polynôme  $Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  avec  $d \in \mathbb{N}$  et  $(q_0, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le polynôme  $Q$  est annulateur de la matrice  $A$  et on a  $Q(0) = 0$ .

(ii) Le polynôme  $Q\left(\frac{X}{2}\right)$  est annulateur de  $D$ .

**Q8.** En déduire que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

## Partie II - Étude d'une seconde forme

Dans cette partie, on étudie la matrice par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

**Q9.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}.$$

**Q10.** En déduire que pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & AQ'(A) \\ O_n & Q(A) \end{pmatrix}.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que la matrice  $M$  est diagonalisable et on note  $S \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme annulateur de  $M$  scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

**Q11.** Établir que la matrice  $S'(A)$  est diagonalisable, puis exprimer son spectre en fonction de celui de la matrice  $A$  et du polynôme  $S'$ .

**Q12.** Montrer que  $S'(A)$  est une matrice inversible. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que la matrice  $M$  soit diagonalisable.

## EXERCICE 2

### Autour de la loi géométrique

#### Présentation générale

Dans cet exercice, on fixe un réel  $p \in ]0, 1[$  et on note  $q = 1 - p$ . On considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère les variables aléatoires définies par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad V_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les lois des variables aléatoires  $S_n$  et  $V_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La **partie I** est indépendante des **parties II** et **III**. La **partie III** peut se traiter en admettant les résultats de la **partie II**.

#### Partie I - Étude de la variable aléatoire $S_n$

Dans cette partie, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous allons déterminer la loi de  $S_n$ .

**Q13.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_n$ .

**Q14.** Rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X_1$ , puis déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S_n$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On rappelle que la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire est la fonction d'une variable réelle définie par :

$$G_Y : t \mapsto \mathbb{E}(t^Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k)t^k.$$

**Q15.** Montrer que la série entière  $\sum_{k \geq 0} P(Y = k)t^k$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

**Q16.** Soit  $t \in ]-1, 1[$ . Exprimer  $G_{S_n}(t)$  en fonction de  $G_{X_1}(t), \dots, G_{X_n}(t)$ , puis en déduire que :

$$G_{S_n}(t) = \left( \frac{pt}{1-qt} \right)^n.$$

**Q17.** Déterminer le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto (pt)^n(1-qt)^{-n}$  sur  $]-1, 1[$ , puis en déduire une expression de  $P(S_n = k)$  pour tout entier  $k \in S_n(\Omega)$ .

## Partie II - Loi de la variable aléatoire $V_n$

Dans cette partie, nous allons déterminer la loi de  $V_n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  est un entier.

**Q18.** Montrer pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $P(X_1 > k) = q^k$ .

**Q19.** En déduire pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $P(V_n \leq k) = (1 - q^k)^n$ .

Les questions **Q20** et **Q21** peuvent se traiter de manière indépendante.

**Q20.** Montrer que  $V_n$  est d'espérance finie et que :

$$E(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - (1 - q^k)^n).$$

**Q21.** Déterminer la loi de la variable aléatoire  $V_n$ . On commencera par déterminer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , une relation entre les événements  $(V_n = k)$ ,  $(V_n \leq k)$  et  $(V_n \leq k - 1)$ .

## Partie III - Équivalent de l'espérance de $V_n$

Dans cette partie, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous allons déterminer un équivalent simple de l'espérance de  $V_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On considère la fonction  $\varphi_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi_n : x \mapsto 1 - (1 - q^x)^n$ .

**Q22.** Montrer que la fonction  $\varphi_n$  est décroissante et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

**Q23.** En utilisant la méthode de comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx \leq E(V_n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx.$$

**Q24.** En utilisant le changement de variable  $u = 1 - q^x$ , montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du$  converge et que :

$$\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du = -\ln(q) \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx.$$

Dans la suite, on admet que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Cette relation admise pourra être utilisée librement dans la question suivante.

**Q25.** Déduire des questions précédentes un équivalent simple de  $E(V_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## EXERCICE 3

### Résolution d'une équation différentielle non ordinaire

#### Présentation générale

Dans cet exercice, on considère un réel  $\lambda \in [-1, 1]$ . On souhaite déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda x). \quad (E_\lambda)$$

On note  $S_\lambda$  l'ensemble des fonctions dérivables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant l'équation  $(E_\lambda)$ .

Les trois parties de cet exercice peuvent se traiter de manière indépendante, à l'exception de la **Q37** qui nécessite l'utilisation des résultats des **parties II** et **III**.

#### Partie I - Généralités

- Q26.** On note  $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $S_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- Q27.** Déterminer l'ensemble  $S_1$ .
- Q28.** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction vérifiant  $(E_0)$ , alors  $f$  est une fonction affine. En déduire l'ensemble  $S_0$ .
- Q29.** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction vérifiant  $(E_{-1})$ , alors la fonction  $f$  est deux fois dérivable et on a  $f'' + f = 0$ . En déduire l'ensemble  $S_{-1}$ .

#### Partie II - Solutions développables en série entière

Dans cette partie, on suppose que  $\lambda \neq 0$ . Nous allons déterminer les solutions de  $(E_\lambda)$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

- Q30.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$ .

Dans la suite de cette partie, on note  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la somme de la série entière étudiée dans la question précédente.

- Q31.** Montrer que  $\varphi \in S_\lambda$ .

Dans la suite, on considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telle que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  admet un rayon de convergence infini. On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

- Q32.** Montrer que si  $f$  est solution de  $(E_\lambda)$ , alors on a  $(n+1)a_{n+1} = \lambda^n a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Q33.** En déduire que  $f$  est solution de  $(E_\lambda)$  si et seulement si  $f \in \text{Vect}(\varphi)$ .

### Partie III - Détermination de toutes les solutions

Dans cette partie, on suppose que  $\lambda \neq 0$  et on considère une fonction  $f \in S_\lambda$ . Nous allons montrer que la fonction  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

On **admet** et on pourra utiliser librement dans la suite la formule de Taylor suivante : si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t) dt.$$

**Q34.** Montrer par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  que  $f$  est  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t).$$

Dans la suite, on considère un réel  $a > 0$  et un réel  $x \in [-a, a]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction :

$$g_n : t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

**Q35.** Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[-a, a]$ .

**Q36.** Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

**Q37.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $S_\lambda$  ?

**FIN**



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

---

### MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.  
Chaque problème est constitué de parties globalement indépendantes.**

# PROBLÈME 1

## Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

Le but de ce problème est de calculer les intégrales du type :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)} dt$$

où  $a$  désigne un nombre réel tel que  $|a| > 1$  et  $n$  un entier naturel.

### Partie I - Lemme préliminaire

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $|a| > 1$ .

**Q1.** Justifier qu'il existe deux nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  :

$$z^2 - 2az + 1 = (z - \alpha)(z - \beta).$$

**Q2.** Vérifier que  $\alpha + \beta = 2a$  et  $\alpha\beta = 1$ .

**Q3.** On suppose dans cette question que  $|\alpha| \geq 1$  et  $|\beta| \geq 1$ . Montrer que  $|\alpha| = |\beta| = 1$ , puis que  $|a| \leq 1$ .

**Q4.** En déduire que  $|\alpha| < 1$  ou  $|\beta| < 1$ .

**Q5.** On suppose uniquement dans cette question que  $a = 2$ .  
Donner la valeur de  $\alpha$  et de  $\beta$  pour ce choix de  $a$ .

On supposera dans la suite  $|\alpha| < 1$ . On rappelle que  $a$  est un nombre réel quelconque tel que  $|a| > 1$ .

### Partie II - Calcul d'une intégrale

#### II.1 - Une première expression en série trigonométrique

Dans cette sous-partie, nous allons établir une première expression en série de  $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos(t)}$ .

**Q6.** Vérifier que pour tout réel  $t$ ,  $a - \cos(t) \neq 0$ .

**Q7.** Montrer que la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos(t)}$  est continue, paire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .

**Q8.** Rappeler l'expression des coefficients de Fourier de  $f$  sous leur forme intégrale.  
On ne cherchera pas à les calculer et on utilisera les notations usuelles  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  pour désigner les suites de ces coefficients.

**Q9.** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$



## II.2 - Une seconde expression en série trigonométrique

Dans cette sous-partie, nous allons établir une seconde expression en série de  $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos(t)}$ .

**Q10.** Montrer l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}.$$

**Q11.** En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it} - \alpha)(e^{it} - \beta)},$$

puis que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \left( \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} \right).$$

**Q12.** Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$ .

**Q13.** Montrer les égalités :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt).$$

**Q14.** En déduire l'expression :  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt)$

avec

$$\gamma_n = \begin{cases} 4\alpha^{n+1}/(1 - \alpha^2) & \text{si } n \geq 1 \\ 2\alpha/(1 - \alpha^2) & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

**Q15.** Justifier que  $\sum_{n \geq 0} \gamma_n$  converge absolument.

## II.3 - Conclusion

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a_n - \gamma_n$ . On souhaite montrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(\gamma_n)_{n \geq 0}$  coïncident.

**Q16.** Montrer que pour tout réel  $t$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nt) = 0.$$

**Q17.** Le but de cette question est de montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument.

a) Montrer que si une fonction périodique est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , alors sa fonction dérivée est également périodique de même période sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Par intégrations par parties successives, montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$n^2 \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt.$$

d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt.$$

e) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge absolument, puis que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument.

On admet le théorème suivant. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite telle que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument et telle que, pour tout réel  $t$ , on ait  $\sum_{n \geq 0} u_n \cos(nt) = 0$ . Alors, nécessairement,  $u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a montré dans les questions précédentes que les hypothèses de ce théorème étaient vérifiées. Ainsi, on a démontré que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 0$ .

**Q18.** En déduire la formule suivante pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)} dt = \frac{4\pi a^{n+1}}{1 - a^2}.$$

**Q19.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \cos(t)}.$$

On pourra s'aider de la question **Q5**.

## PROBLÈME 2

### Matrices aléatoires

#### Notations et définitions

Dans ce problème :

- on note  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  : l'espace vectoriel des matrices carrées réelles sur  $\mathbb{R}$  d'ordre 2 ;
- on note  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  : le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ;
- pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\det(A)$ ,  $\text{Tr}(A)$  et  $A^\top$  désignent respectivement le déterminant, la trace et la matrice transposée de  $A$  ;
- pour tout événement  $E$  de l'univers  $\Omega$ ,  $P(E)$  désigne la probabilité de  $E$  ;
- pour toute variable aléatoire  $X$ ,  $E(X)$  et  $V(X)$  désignent respectivement l'espérance et la variance de  $X$  ;
- si  $\Pi$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , alors le réel positif  $d(A, \Pi) = \inf_{B \in \Pi} \|A - B\|$  désigne la distance de  $A$  à  $\Pi$ .

Soient  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  quatre variables aléatoires réelles discrètes sur un univers  $\Omega$ . Toute matrice de la forme  $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$  s'appelle une matrice aléatoire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Plus précisément, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\Sigma(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$ .

Puisque  $\Sigma$  est aléatoire, la probabilité d'un événement relatif à  $\Sigma$  se définit naturellement par :

$$P(\Sigma \in K) = P(\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega) \in K\})$$

où  $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est un ensemble de matrices.

Autrement dit, on mesure la probabilité des réalisations  $\omega$  pour lesquelles la matrice  $\Sigma(\omega)$  satisfait la condition définissant l'ensemble  $K$ .

### Exemple

On s'intéresse à la probabilité que la matrice aléatoire  $\Sigma$  ne soit pas inversible. L'événement sur l'univers  $\Omega$  correspondant aux matrices non inversibles est  $\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega) \text{ n'est pas inversible}\}$ .

On suppose que :

- $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , où  $p$  est un réel de  $]0, 1[$  ;
- $X_3$  et  $X_4$  sont deux variables aléatoires certaines avec  $X_3(\Omega) = \{2\}$  et  $X_4(\Omega) = \{3\}$ .

Dans cet exemple, la matrice aléatoire  $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$  peut prendre comme valeurs les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Parmi celles-ci, la seule matrice non inversible est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , ce qui correspond à  $[X_1 = 0]$  et  $[X_2 = 0]$ .

La probabilité que la matrice  $\Sigma$  ne soit pas inversible est donc égale à  $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1 - p)^2$ .

Les parties de ce problème sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Les résultats de la **partie I** sont utiles pour la **partie III**.

## Partie I - Généralités sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On définit le produit  $\langle A, B \rangle$  par :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T).$$

**Q20.** Soient  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  où pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $a_i$  et  $b_i$  sont des réels. Vérifier que  $\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^4 a_k b_k$ .

**Q21.** Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit bien un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

La norme associée à ce produit scalaire est notée :  $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(AA^T)}$ .

**Q22.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Vérifier que la matrice  $(A + A^T)/2$  est symétrique et que la matrice  $(A - A^T)/2$  est antisymétrique. Montrer ensuite que ces deux matrices sont orthogonales pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Q23.** Montrer que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est somme, d'une manière unique, d'une matrice symétrique  $M$  et d'une matrice antisymétrique  $N$ , où  $M = (A + A^T)/2$  et préciser l'expression de  $N$  en fonction de  $A$ .

**Q24.** Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on a l'égalité  $d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A - A^T\|$ .

## Partie II - Matrice de Rademacher

Soient  $X_1$  et  $Y_1$  deux variables aléatoires réelles définies sur un univers  $\Omega$  telles que :

- $X_1$  et  $Y_1$  suivent la même loi, appelée loi de Rademacher, définie par :

$$X_1(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} ;$$

- $X_1$  et  $Y_1$  sont indépendantes.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice aléatoire  $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 1 & Y_1 \end{pmatrix}$ .

On définit les deux variables aléatoires discrètes  $T_1$  et  $Z_1$  par :

$$T_1 = \text{Tr}(\Sigma_1) = X_1 + Y_1, \quad Z_1 = \det(\Sigma_1) = X_1 Y_1.$$

**Q25.** Déterminer les valeurs de  $E(X_1)$  et de  $V(X_1)$ .

**Q26.** Déterminer la loi de probabilité de  $T_1$ . Calculer  $E(T_1)$  et  $V(T_1)$ .

**Q27.** Déterminer la loi de probabilité de  $Z_1$ . Calculer  $E(Z_1)$  et  $V(Z_1)$ .

## Partie III - Matrice géométrique

Soit  $p$  un réel dans  $]0, 1[$ . Dans cette partie,  $X_2$  et  $Y_2$  sont deux variables aléatoires telles que :

- $X_2$  et  $Y_2$  suivent une loi géométrique de paramètre  $p$ , c'est-à-dire :

$$X_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_2 = k) = p(1-p)^{k-1} ;$$

- $X_2$  et  $Y_2$  sont indépendantes.

On introduit la matrice aléatoire  $\Sigma_2$  définie par  $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & X_2 - Y_2 \\ X_2 + Y_2 & 0 \end{pmatrix}$ .

De plus, on définit la variable aléatoire  $T_2$  par :

$$T_2 = d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})).$$

**Q28.** Rappeler les valeurs de  $E(X_2)$  et de  $V(X_2)$ .

**Q29.** Étude de  $d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ .

a) À l'aide de la **partie I**, montrer que  $T_2 = Y_2 \sqrt{2}$ .

b) Calculer  $E(T_2)$  et  $V(T_2)$ .

**Q30.** Montrer que pour tout  $\delta > 0$ , on a :

$$P\left(\left|T_2 - \frac{\sqrt{2}}{p}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{2(1-p)}{\delta^2 p^2}.$$

**Q31.** On choisit dans cette question  $p = 1/2$ .

a) Déterminer un  $\delta > 0$  tel que :

$$P\left(\left|T_2 - 2\sqrt{2}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4}.$$

b) En déduire qu'avec une probabilité d'au moins  $3/4$ , on a :

$$\left|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}\right| < 4.$$

## Partie IV - Matrice de Poisson

Soient  $X_3$  et  $Y_3$  deux variables aléatoires telles que :

- $X_3$  et  $Y_3$  suivent la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire :

$$X_3(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_3 = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!};$$

- $X_3$  et  $Y_3$  sont indépendantes.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice aléatoire  $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix}$ .

Puisque le paramètre  $\lambda$  influence la loi de  $X_3$  et de  $Y_3$ , il influence également la loi de  $\Sigma_3$ . On note alors  $D_\lambda$  l'événement : " la matrice  $\Sigma_3$  est une matrice diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ".

On définit les deux variables aléatoires discrètes  $T_3$  et  $Z_3$  par :

$$T_3 = \text{Tr}(\Sigma_3) = X_3 + Y_3, \quad Z_3 = \det(\Sigma_3) = X_3 Y_3.$$

**Q32.** Rappeler les valeurs de  $E(X_3)$  et de  $V(X_3)$ .

**Q33.** Inversibilité de  $\Sigma_3$ .

- Démontrer que  $P(Z_3 = 0) = 2 \exp(-\lambda) - \exp(-2\lambda)$ .
- En déduire la probabilité que  $\Sigma_3$  soit inversible.

**Q34.** Loi de  $T_3$ .

- Montrer que  $T_3(\Omega) = \mathbb{N}$ , puis que pour tout entier naturel  $n$  :

$$P(T_3 = n) = \sum_{k=0}^n P(X_3 = k)P(Y_3 = n - k).$$

- En déduire que  $T_3$  suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

**Q35.** Valeurs propres et vecteurs propres de  $\Sigma_3$ .

- Vérifier que  $\begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\Sigma_3$  et préciser la valeur propre associée.
- Montrer que  $Y_3$  est une valeur propre de  $\Sigma_3$  et préciser un vecteur propre associé.

**Q36.** Diagonalisation de  $\Sigma_3$ .

- Montrer que  $P(X_3 = Y_3) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)^2$ .
- Vérifier que  $\Sigma_3$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $X_3 \neq Y_3$ .
- Montrer que :

$$P(D_\lambda) = 1 - e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

**Q37.** Approximation de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2}$  et de  $P(D_1)$ .

- Écrire en Python une fonction `Approx_Sum` qui prend pour argument d'entrée un entier naturel  $N$  et renvoie  $\sum_{k=0}^N \frac{e^{-2}}{(k!)^2}$ . On pourra utiliser les fonctions `math.factorial()` et `math.exp()`.

**b)** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \geq 0$  :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \exp(t) dt.$$

**c)** En déduire l'inégalité suivante pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \geq 0$  :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(x).$$

**d)** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

**e)** En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq \frac{e^{-1}}{(n+1)!}.$$

**f)** On donne  $100e^{-1} \in [36, 37]$ . Déterminer un entier  $N_0$  tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^{N_0} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \right| \leq 10^{-2}.$$

Avec Python, on obtient pour ce  $N_0$  : `print(Approx_Sum(N_0))`  $\simeq 0,31$ .

**g)** Donner une approximation à  $10^{-1}$  près de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2}$ , puis de  $P(D_1)$ .

**h)** Dans la question **Q37 a)**, la fonction `Approx_Sum` fait appel à la fonction `math.factorial()`.  
Est-il judicieux d'appeler `math.factorial()` dans une boucle `for`?  
On constate que cela ne pose pas de problème avec notre choix  $N_0$ , pourquoi?

**Q38.** Étude d'une série entière.

**a)** Calculer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k!)^2}$ .

**b)** Montrer que  $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**c)** Montrer que  $g : \lambda \mapsto 1 - e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Q39.** Démontrer qu'il existe un réel strictement positif  $\mu$  tel que les variables aléatoires indépendantes  $X_3$  et  $Y_3$  suivent la loi de Poisson de paramètre  $\mu$  et tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable avec probabilité  $1/2$ .

**Q40.** Proposer une méthode numérique pertinente pour approcher  $\mu$ . On ne la mettra pas en œuvre.

**FIN**

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

---

### MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices ne sont pas autorisées.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

# EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire.

On se propose d'étudier le rang d'apparition de la première boule blanche selon différents protocoles de tirages successifs dans l'urne. L'objectif est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule blanche.

Dans les différents protocoles étudiés dans les **parties I, II et III**, l'expérience s'arrête lorsque l'on obtient une boule blanche pour la première fois. On considère qu'il est possible de ne jamais obtenir de boule blanche et d'effectuer une infinité de tirages.

Pour chaque protocole étudié, on note  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  l'univers probabilisé et  $X$  la variable aléatoire réelle définie sur  $\Omega$  par  $X = k$  si on obtient pour la première fois une boule blanche au  $k^{\text{e}}$  tirage et  $X = 0$  si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $B_n$ ,  $N_n$  et  $E_n$  les événements suivants :

- $B_n$  : " on pioche une boule blanche au  $n^{\text{e}}$  tirage " ;
- $N_n$  : " on pioche une boule noire au  $n^{\text{e}}$  tirage " ;
- $E_n$  : " les  $n$  premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ".

Enfin, on note  $u_n = P(E_n)$ .

## Préliminaires

Dans la question **Q1**, on établit un résultat utile pour les différentes études des protocoles des **parties I, II et III**.

**Q1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère qu'on a effectué  $n$  tirages successifs dans l'urne selon un protocole non précisé.

- Justifier que  $(X = 1, X = 2, \dots, X = n, E_n)$  forme un système complet d'événements.
- En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\sum_{k=1}^n P(X = k) = 1 - P(E_n).$$

- Montrer que  $P(X = 0) = 0$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$ .

On pourra utiliser la propriété  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ .

## Partie I - Étude d'un premier protocole

Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne et on procède à un nouveau tirage ;
- on recommence jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.



- Q2.** Montrer que  $X$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- Q3.** Que vaut  $P(X = 0)$  ?
- Q4.** Donner, sans justification, l'espérance et la variance d'une loi géométrique de paramètre  $p$ . Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

## Partie II - Étude d'un deuxième protocole

Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne, puis on multiplie par deux le nombre de boules noires présentes dans l'urne après la remise de la boule noire ;
- on réitère l'étape décrite précédemment jusqu'à obtention d'une boule blanche.

- Q5.** a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la composition de l'urne juste avant d'effectuer le  $k$ -ème tirage.  
 b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En exprimant  $E_n$  en fonction de certains événements  $B_i$  ou  $N_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , montrer que :

$$u_n = P(E_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{1 + 2^i}.$$

- Q6.** a) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .  
 b) Démontrer que  $(u_n)$  est bornée, puis qu'elle converge vers un réel  $\ell$ . Préciser un encadrement de  $\ell$ .  
 c) i) Donner un équivalent de  $\ln(1 + x)$  en 0.  
 ii) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = -\ln(u_n)$ . Identifier  $v_n$  comme la somme partielle d'une série numérique à préciser. À l'aide de la question **Q6.c.i)**, montrer la convergence de la suite  $(v_n)$ .  
 iii) On rappelle que  $\ell = \lim u_n$ . Dédurre de **Q6.c.ii)** que  $\ell \neq 0$ .

- Q7.** À l'aide du préliminaire, montrer que  $P(X = 0) \neq 0$ . Interpréter ce résultat.

## Partie III - Étude d'un troisième protocole

Soit  $c \in \mathbb{N}^*$ . Dans cette partie, on considère le protocole suivant :

- initialement l'urne contient une boule blanche et une boule noire ;
- on pioche une boule dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, on arrête le tirage. Sinon, on remet la boule noire dans l'urne et on ajoute  $c$  boules noires dans l'urne ;
- on réitère l'étape décrite précédemment jusqu'à obtention d'une boule blanche.

**Q8.** Montrer que  $P(X = 3) = \frac{1}{4(2+c)}$ .

**Q9.** Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+kc}{2+kc}$ .

**Q10.** On suppose dans cette question que  $c = 1$ .

**a)** Expliciter et simplifier  $P(E_n)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**b)** À l'aide du préliminaire, en déduire la valeur de  $P(X = 0)$ .

**c)** En remarquant que l'événement  $(X = n) = E_{n-1} \cap B_n$ , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

**d)** La variable aléatoire  $X$  possède-t-elle une espérance ?

**Q11.** On suppose dans cette question que  $c = 2$ .

**a)** Montrer qu'alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$P(E_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}.$$

**b)** On admet qu'il existe une constante réelle  $K$  telle que  $n! \sim Kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ .  
En déduire un équivalent de  $P(E_n)$ , puis la limite de  $P(E_n)$ .

**c)** À l'aide du préliminaire, conclure sur la valeur de  $P(X = 0)$ .

**Q12.** Dans cette question,  $c$  est un entier naturel non nul quelconque.

**a)** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = -\ln(P(E_n))$ . Démontrer que :  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{1+kc}\right)$ .

**b)** Étudier la convergence de  $(S_n)$ . Déterminer alors la valeur de  $P(X = 0)$ .

Ce résultat est-il cohérent avec les réponses obtenues pour les questions **Q10** et **Q11** ?

## EXERCICE 2

### Partie I - Décomposition en série de Fourier, calcul de sommes de séries numériques

Soit l'application  $f$ ,  $2\pi$ -périodique, définie sur  $[-\pi, \pi]$  par :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

**Q13.** Donner l'allure de la représentation graphique de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .

La fonction  $f$  est-elle paire ? impaire ?

**Q14.** a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2}.$$

b) Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction  $f$ .

**Q15.** Étudier la convergence de la série de Fourier de  $f$ .

*Dans la question suivante, on utilise la série de Fourier précédente pour calculer les sommes de trois séries numériques. Il n'est pas demandé d'établir la convergence de ces séries.*

**Q16.** On pose  $R = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ .

- a) En utilisant la valeur de la série de Fourier de  $f$  en  $x = 0$ , calculer  $S$ .
- b) En distinguant dans l'expression de  $R$  les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, exprimer  $R$  en fonction de  $S$  et calculer la valeur de  $R$ .
- c) En distinguant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, exprimer  $T$  en fonction de  $R$  ou en fonction de  $R$  et de  $S$ , et montrer que :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

## Partie II - Application au calcul d'intégrales

**Q17.** a) Soient  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer la convergence et calculer l'intégrale  $\int_x^{+\infty} e^{-kt} dt$ .

b) Sans chercher à la calculer, justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t}) dt$ .

**Q18.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kt} = \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}} - (-1)^{n+1} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}}.$$

b) On pose  $h_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{e^{-kx}}{k}$ . En intégrant l'égalité obtenue à la question **Q18.a)** montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = \ln(1 + e^{-x}) + (-1)^{n+1} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} dt.$$

c) Prouver alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \ln(1 + e^{-x}) - h_n(x) \right| \leq \frac{e^{-nx}}{n}.$$

d) Montrer que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x}) dx - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

e) À l'aide des résultats de différentes questions, déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x}) dx.$$

**Q19.** En effectuant une intégration par parties et en utilisant **Q18.e**), montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

## EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \geq 2$  et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension égale à  $n$ .

On note  $0_E$  le vecteur nul de  $E$  et  $id$  l'application identité de  $E$ .

L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , on note  $\text{Im}(f)$  l'ensemble image de  $f$  et  $\ker(f)$  le noyau de  $f$ .

On définit les itérés d'un endomorphisme  $f$  par :

$$f^0 = id \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f.$$

### Partie I - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie,  $n = 3$ ,  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q20. a)** Déterminer une base de  $\ker(f)$ .

**b)** Les sous-espaces vectoriels  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont-ils supplémentaires dans  $E$ ?

**Q21.** Déterminer le spectre de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

**Q22.** On pose  $e'_1 = (1, 1, -2)$  et  $e'_2 = (2, 1, 0)$ . Soit  $e'_3 = (a, 0, b)$ .

**a)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur les réels  $a$  et  $b$ , pour que la famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  soit une base de  $E$ .

- b) Déterminer  $a$  et  $b$ , tels que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  soit une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  soit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c) Calculer  $T^2$  et  $T^3$ .

En déduire les différentes expressions de  $T^p$  en fonction de  $p$ , pour  $p \in \mathbb{N}$ .

**Q23.** Montrer que  $E = \ker(f^2) \oplus \operatorname{Im}(f^2)$ .

## Partie II - Suites des noyaux et des images des itérés de $f$

L'objectif de cette partie est de prouver que pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , il existe un entier  $p$  vérifiant :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) \end{cases}.$$

- Q24.** On suppose, dans cette question seulement, que  $f$  est un endomorphisme bijectif de  $E$ .  
Que valent les ensembles  $\ker(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  dans ce cas ?  
Donner une valeur de  $p \in \mathbb{N}^*$  assurant que  $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$ .

Dans toute la suite de la **partie II**,  $f$  désigne désormais un endomorphisme de  $E$  qui n'est pas bijectif.

**Q25.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Soit  $u \in \ker(f^k)$ . Montrer que  $u \in \ker(f^{k+1})$ .  
b) Soit  $v \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$ . Montrer que  $v \in \operatorname{Im}(f^k)$ .

On a donc établi que :

$$\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k).$$

- Q26.** a) Montrer l'équivalence :  $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ .  
On pourra utiliser la formule du rang et procéder par double implication.

- b) Dans cette question, on veut prouver l'équivalence :

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \iff \ker(f) = \ker(f^2).$$

- i) On suppose que  $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ .  
Soit  $u \in \ker(f^2)$ . Justifier l'existence de  $(u_0, u_1) \in \ker(f) \times \operatorname{Im}(f)$ , tel que  $u = u_0 + u_1$ .  
Montrer alors que  $u \in \ker(f)$ , puis que  $\ker(f) = \ker(f^2)$ .
- ii) On suppose maintenant que  $\ker(f) = \ker(f^2)$ .  
Déterminer alors  $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ , puis prouver la seconde implication.
- iii) Conclure sur la preuve de l'équivalence demandée.

**Q27.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $a_k = \dim(\ker(f^k))$ . Justifier que la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante, puis qu'elle converge.

La suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  étant une suite d'entiers croissante et majorée, elle est alors constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, (q \geq p \implies a_q = a_p).$$

**Q28.** Montrer alors que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, (q \geq p \implies \ker(f^q) = \ker(f^p)).$$

**Q29.** En déduire que l'on a, pour l'entier  $p$  défini plus haut, l'égalité  $E = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$ .

**FIN**