e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 1

Filière MP

durée 3 heures

Nota *: Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Dans cette épreuve ***comme dans toutes celles qui suivront****, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) a) Calculer le volume et la somme des aires des faces d'un tétraèdre régulier dont les côtés ont a pour longueur.

b) Résoudre les mêmes questions pour un octaèdre régulier (dont les sommets sont les centres des faces d'un cube).

---

2) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle U d'ordre n dont les éléments $u_{i,j}$ sont nuls sauf pour les n éléments $u_{n-k,k+1} = 1$ pour $0 \leqslant k < n$ (on pourra distinguer selon que $n = 2m$ ou $n = 2m+1$). Est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice canonique est U ?

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} U & I \\ I & U \end{pmatrix}$ d'ordre $2n$. Est-elle diagonalisable ?

3) Donner une représentation paramétrique et tracer l'ensemble des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à l'ellipse d'équation cartésienne

$$9(x-7)^2+49y^2=441.$$

---

4) a) Déterminer toutes les droites d'un espace affine réel de dimension 3 incluses dans la surface d'équation $xy+yz+zx=0$ (utiliser la caractérisation barycentrique d'une droite).

b) Même problème pour les surfaces d'équations $xy+yz+zx=-1$ et $xy+yz+zx=1$.

---

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer les polynômes A et B de $\mathbb{C}[X]$ tels que A^n+B^n soit une constante complexe non nulle.

b) En déduire les polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^n+Q^n=PQ$ (on pourra poser $P=DA$ et $Q=DB$, où D est le plus grand commun diviseur de P et Q).

---

6) a) Simplifier (lorsqu'elle a un sens) l'expression $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$.

b) Calculer $P_n=\prod_{k=0}^{n} c_k$ où $c_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ (relation de Viète). En déduire la valeur de l'expression

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}.$$

c) Simplifier (lorsqu'elle a un sens) l'expression $\dfrac{1}{\tan\alpha}-\dfrac{2}{\tan 2\alpha}$.

d) En déduire $S_n=\sum_{k=0}^{n} t_k$ en fonction de n et de $t_n=\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ (relation de Descartes) en calculant successivement $\tan\dfrac{\pi}{8}$, S_0 et S_1 puis en mettant, grâce à un choix convenable de α, la différence $t_n=S_n-S_{n-1}$ sous la forme $f(n)-f(n-1)$.

e) Que peut–on en déduire quant aux limites éventuelles de S_n et P_n ?

e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 2

Filière MP

durée 3 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

Soit $f(x) = x^x$, x réel > 0. On peut noter $f^{(n)}(x)$, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$, pour la dérivée $n^{ème}$ de f.

1 Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative

2 On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2.

3 Établir que $y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle $y' = y\,\ell nx + y$.

En déduire la relation $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(c_n + \frac{c_{n-1}}{1} - \frac{c_{n-2}}{2} + \frac{c_{n-3}}{3} - \frac{c_{n-4}}{4} + \ldots\right)$. .

4 Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$?

5 Prouver que $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2

Soient $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$, $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^n dt$, $L_n(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$ où n est entier ≥ 1 et s réel > 0.

1 Calculer $L_n(s)$. Comparer alors a_n et I_n.

2 Déterminer $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3 En déduire le rayon de convergence R de $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
Cette série entière converge-t-elle en R ? Et en $-R$?

4 Établir la relation $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tx\,dt}{e^t - tx}$.

5 Dresser un tableau de variations de $f(x)$ en précisant si les limites aux bornes sont finies ou non.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1 Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de f.

2 Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

3 Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

4 Prouver que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0 . [On peut comparer f à une intégrale.]

5 Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0;\pi]$.

1 Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

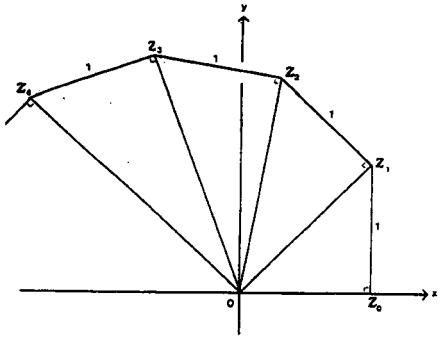
2 On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$. Calculer a_0 et b_n.

3 On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Établir que $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,dt$. En déduire l'existence de $L = \lim_{+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n \sim D.n^{-3/2}$.

5 Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5



Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle Oz_nz_{n+1} , ***rectangle*** en z_n , est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.

1 Calculer $|z_n|$.

2 Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.

3 (3a) Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \text{Arctan}\left(n^{-1/2}\right)$.

(3b) Établir l'***existence*** d'une constante réelle C , telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O(n^{-1/2})$.

(3c) Démontrer que cette constante C est ***strictement positive*** .

4 On parcourt la ligne polygonale L dans le sens direct à partir de z_0 . Montrer que l'on rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ en une infinité de points, que l'on appellera successivement M_0 $(= z_0)$, M_1 , M_2 , ... , M_k , ... L'unique arête de la ligne polygonale L qui contient le point M_k , $k \geq 1$, est désignée par $]z_{v(k)-1}, z_{v(k)}]$. Montrer que $v(k) \sim k^2\pi^2$, quand k tend vers l'infini.

5 Plus précisément, établir que $v(k) = k^2\pi^2 + kC\pi + \beta(k)$, où $\beta(k)$ désigne une suite ***bornée***.

e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 3

Filière MP

durée 4 heures

Les parties I et II sont indépendantes entre elles et du reste du problème (à l'exception de la question III 4) .

Partie I : Étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

b) À l'aide d'une suite géométrique montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx .$$

2) a) Par intégration par parties , montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right) .$$

b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

3) Déterminer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Étude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n-\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=L+2\,.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

2) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=U_n-2\sqrt{n}-L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1}-v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminer un équivalent de $v_n-\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n=A\sqrt{n}+B+\frac{C}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

3) a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}=S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n}=a+\frac{b}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Partie III : Étude de $q_n(x)=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$, $x\in]0,+\infty[$, $n\in\mathbb{N}$.

On rappelle que la fonction gamma est définie par, $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\,.$$

1) Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[\,,\forall p\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p^x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-pt}dt\,.$$

2) Vérifier que q_n est défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis montrer que :

$$q_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}dt\,.$$

3) En déduire que la série de terme général $q_n(x)$ converge, et mettre sa somme sous forme intégrale.

4) Retrouver le résultat de la question I 3).

Partie IV : Étude de $x_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, décroissante sur $]0, +\infty[$, de limite nulle en $+\infty$.

1) a) Donner un exemple d'une telle fonction f.

   b) Montrer que x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \Big(f(p) - f(p+1) \Big)$$

   et en déduire que la série $\sum x_n$ est convergente.

3) On suppose de plus que $f(p)$ est équivalent à $f(p+1)$ lorsque p tend vers l'infini. Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie V : Étude de $q_0(x)$.

1) Montrer que q_0 est continue sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que q_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Énoncer avec précision le théorème utilisé.

3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} q_0(x)$.

4) Déduire du IV 2) que q_0 admet un prolongement continu à $[0, +\infty[$ encore noté q_0.

5) a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad q_0(x) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}.$$

   b) En déduire que q_0 est dérivable en 0 et déterminer $q_0'(0)$ en fonction de $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

6) Déterminer $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n-\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=L+2\,.$$

b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

2) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=U_n-2\sqrt{n}-L$.

a) Étudier la série de terme général $v_{n+1}-v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Déterminer un équivalent de $v_n-\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n=A\sqrt{n}+B+\frac{C}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

3) a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}=S$.

b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n}=a+\frac{b}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Partie III : Étude de $q_n(x)=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$, $x\in]0,+\infty[$, $n\in\mathbb{N}$.

On rappelle que la fonction gamma est définie par, $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\,.$$

1) Montrer que $\forall x\in]0,+\infty[\,,\forall p\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p^x}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-pt}dt\,.$$

2) Vérifier que q_n est défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis montrer que :

$$q_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}dt\,.$$

3) En déduire que la série de terme général $q_n(x)$ converge, et mettre sa somme sous forme intégrale.

4) Retrouver le résultat de la question I 3).

e4a concours

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

Les deuxième, troisième et quatrième parties **sont liées** et peuvent être traitées **indépendamment** de la première partie.

Notations :

Dans tout le problème n et k sont deux entiers naturels donnés de somme N.

La fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par $h(x) = x^{n+k+1}$.

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 ; la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de 0 signifie qu'il existe deux réels strictement positifs M et α tels que :

$\forall x \in I \cap]-\alpha, +\alpha[\ , \quad | f(x) | \leq M \mid g(x) |.$

$\mathbb{R}_n[X]$ (resp $\mathbb{R}_k[X]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n (resp k).

$\mathcal{F}_{n,k}$ est l'ensemble des fractions rationnelles défini par:

$$\mathcal{F}_{n,k} = \{u = \frac{p}{q}\ ,\ p \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ q \in \mathbb{R}_k[X]\ ,\ q(0) \neq 0\}$$

Les coefficients de p (resp q) seront notés $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ (resp $\{b_0, b_1, b_2, ...b_k\}$ où $b_0 \neq 0$)

Première Partie :

Dans cette partie $b_0 = 1$. Soit f une fonction à valeurs réelles, égale à la somme de la série entière $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, de rayon de convergence ρ strictement positif.

Il s'agit de rechercher un élément u de $\mathcal{F}_{n,k}$ tel que la fonction $(f-u)$ soit dominée par la fonction h au voisinage de 0. La fonction u étant égale au quotient des deux polynômes p et q, la question consiste à déterminer, à partir des c_i,
les coefficients $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ de p et les coefficients $\{b_1, b_2, ...b_k\}$ de q de sorte que :

$$\forall j \in \{0, 1, ..., N\} \quad , \quad f^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$$

1) Montrer que cette condition équivaut au fait que le "numérateur" $f(x)q(x) - p(x)$ de $f(x) - u(x)$ n'admet aucun terme de degré inférieur ou égal à N dans son développement en série entière.

2)

2-1) Avec la convention que $c_i = 0$ pour $i < 0$, $a_i = 0$ pour $i > n$ et $b_i = 0$ pour $i > k$, vérifier que le système (1) suivant permet d'obtenir les coefficients $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ et $\{b_1, b_2, ...b_k\}$ de la fraction rationnelle u.

$$\forall i \in \{0, 1...., N\}, \quad \sum_{j=0}^{j=i} b_j c_{i-j} = a_i \quad (1)$$

2-2) Mettre ce système sous la forme qui suit:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{j=Min(i,k)} c_{i-j} b_j = a_i, & i = 0, ..., n \quad (2) \\ \sum_{j=0}^{j=k} c_{n+i-j} b_j = 0, & i = 1, 2, ..., k \quad (3) \end{cases}$$

3)

3-1) En tenant compte du fait que $b_0 = 1$, montrer que (3) détermine les coefficients $\{b_1, b_2, ...b_k\}$ de manière unique si et seulement si la matrice carrée :

$$M_{n,k}(f) = [c_{n+i-j}]_{1 \le i \le k \ , 1 \le j \le k}$$

est inversible.

3-2) Vérifier que dans ces conditions les relations (2) donnent les coefficients $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

La fonction u ainsi obtenue se notera $F_k^n(f)$.

3-3) Montrer que la fonction ($f - F_k^n(f)$) est dominée par h au voisinage de 0.

4) Dans cette question $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 2$, $k = 2$.

4-1) Déterminer les coefficients $\{c_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, le réel ρ et la matrice $M_{2,2}(f)$.

4-2) Déterminer alors la fonction $F_2^2(f)$.

4-3) Calculer exactement, $\sum_{j=0}^{j=4} c_j$ et $F_2^2(f)(1)$.

5) Dans cette question $f(x) = e^{-x}$, $n = 3$, $k = 2$.

Exprimer la matrice $M_{3,2}(f)$, déterminer ρ et la fonction $F_2^3(f)$.

Deuxième partie:

La fonction f_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par $f_1(x) = e^x$.

Lorsque cela aura un sens, $A(x)$ et $B(x)$ seront définis par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} t^k\ (t+x)^n e^{-t} dt \qquad et \qquad B(x) = \int_0^{+\infty} (t-x)^k\ t^n e^{-t} dt$$

1) Question préliminaire:

Calculer $\beta(n,k) = \int_0^1 u^n (1-u)^k du$ et, pour tout entier naturel j , étudier l'existence et indiquer la valeur éventuelle de $\int_0^{+\infty} t^j\ e^{-t} dt$.

2) Déterminer le développement de f_1 en série entière et étudier sa convergence. Soit S_k la somme partielle de rang k de ce développement. Exprimer $S_k(x)$.

Dans la suite de cette partie $I =]-1,1[$

3) Montrer que $A(x)$ et $B(x)$ existent lorsque x est donné dans $]-1,1[$.

4) Montrer que A (resp B) définit une fonction polynômiale sur I de degré n (resp k) et que $B(0) \neq 0$.

5) g est la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f_1(x)B(x) - A(x)$

5-1) Vérifier que $\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = -\int_0^{-x} t^k\ (t+x)^n\ e^{-t} dt$

5-2) En déduire que $\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = (-1)^k x^{(n+k+1)} \int_0^1 u^k (1-u)^n e^{ux} du$

5-3) Montrer que la fonction g est dominée par la fonction h au voisinage de 0.

Troisième partie :

Dans cette partie, $n = 0$ et le réel x est fixé dans $[0, \infty[$.

1) Vérifier que $A(-x)$ et $B(-x)$ existent. Calculer $A(-x)$.

2) Montrer que

$$\frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{1}{S_k(x)}$$

3) Etablir que

$$e^{-x} - \frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{-\int_0^x t^k\, e^{-t} dt}{\int_0^{+\infty} (t+x)^k\, e^{-t} dt}$$

4) En utilisant

$$2^{-k} \int_0^x (2t)^k\, e^{-t} dt \leq 2^{-k} \int_0^x (t+x)^k\, e^{-t} dt$$

montrer que

$$\left| \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{S_k(x)} \right| \leq 2^{-k}$$

Quatrième partie :

Dans cette partie le réel x est fixé dans $[0, \infty\,[$.

En outre, les entiers naturels n et k vérifient $k = 3n$.

1) Montrer que

$$e^{-x} - \frac{A(-x)}{B(-x)} = \frac{-\int_0^x t^k\, (t-x)^n\, e^{-t} dt}{\int_0^{+\infty} (t+x)^k\, t^n\, e^{-t} dt}$$

2) Etablir que $t(t+x)^3 = 27t^3(x-t) + t(x+7t)(x-2t)^2$

et en déduire que:

$$\left| \frac{1}{f_1(x)} - \frac{A(-x)}{B(-x)} \right| \leq 3^{-k}$$

e4a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS- ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1

1° Soient a et b deux réels, $a < b$, et soit f une application de $[a,b]$ dans R de classe C^2. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx .$$

2° Soit g l'application de $[1,+\infty[$ dans R définie par $x \mapsto g(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Montrer que g'' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3° Pour n entier naturel non nul on pose :

$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

a) Montrer que w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 2\cos 1 - 2\cos\sqrt{n+1}.$$

Prouver que la suite $(\cos n)$ n'est pas convergente.

En déduire la nature de la série de terme général v_n.

c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On note ln la fonction logarithme népérien.
Soit n un entier naturel non nul.

1° Soient I et J deux intervalles de R, non vides, non réduits à un point.
On considère une suite (f_n) d'applications de I dans J, une application f de I dans J et une application g de J dans R.
On suppose que g est uniformément continue sur J et que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $g \circ f$.

2° Soit φ une application continue de $[0,1]$ dans R.

a) Déterminer le réel L tel que : $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) Soit A un réel strictement positif.

i) Justifier l'existence d'un entier naturel non nul N tel que, pour tout n, $n \geq N$, pour tout k élément de $\{0,1,2,\ldots,n\}$ et tout x de $[-A, A]$ on ait :

$$\left| \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

ii) Établir que pour tout t élément de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq t - \ln(1+t) \leq t^2.$$

iii) Pour $n \geq N$, on considère les applications u_n et v_n de $[-A, A]$ dans R, définies par :

$$x \mapsto u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \qquad x \mapsto v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction nulle.

iv) En déduire que la suite (v_n) converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une application notée v.
Pour tout x de $[-A, A]$, exprimer $v(x)$ en fonction de L.

3° On pose :

$$I_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right] dx.$$

Étudier la convergence de la suite (I_n)

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

Pour $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et l'on note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Pour k entier naturel, $0 \leq k \leq n$, on rappelle que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est C_n^k, avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients entiers relatifs.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $A^m = I$.

Soit p le plus petit des entiers naturels k non nuls tels que $A^k = I$.

1° a) Montrer que m est un multiple de p.

b) Prouver que le déterminant de A est égal à 1 ou à -1.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et que les valeurs propres de A sont des racines p-ièmes de l'unité.

2° Soit $P_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A.

a) Justifier l'assertion : « les coefficients de P_A sont des entiers relatifs ».

b) Exprimer les coefficients a_k en fonction des valeurs propres de A.

En déduire que pour tout k élément de $\{0,1,\ldots,n\}$ on a :

$$|a_k| \leq C_n^k.$$

3° On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Montrer que A est semblable à l'une des six matrices suivantes :

$$I,\ -I,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}$ est le conjugué de j.

b) En déduire que p ne peut prendre que cinq valeurs que l'on précisera.

c) Pour chacune de ces valeurs de p autres que $p = 1$, indiquer une matrice A à coefficients entiers relatifs et telle que :

$$A^p = I \text{ et } A^k \neq I \text{ pour tout } k \text{ élément de } \{1,\ldots,p-1\}.$$

4° Dans le cas général, montrer que p ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et indiquer une méthode permettant de déterminer des valeurs possibles pour p.

Exercice 4

1° Dans l'ensemble $\mathbf{C}[X]$ des polynômes en l'indéterminée X à coefficients complexes, on considère un élément P de degré au moins égal à 1.
On note P' le polynôme dérivé de P et R le reste de la division euclidienne de P par P'.
Démontrer que les racines multiples de P sont les racines communes à P' et R.

2° On prend $P = X^3 + pX + q$ où p et q sont des complexes donnés.

a) Déterminer l'ensemble (γ) des racines communes à P' et R.

b) En déduire que P admet exactement deux racines distinctes si et seulement si :

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad pq \neq 0.$$

Préciser alors ces racines.
Que peut-on dire de ces racines si p et q sont réels ?

3° Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $M(x, y)$ le point du plan de coordonnées (x, y).
Pour tout réel λ, on désigne par d_λ la droite d'équation :

$$2x + \lambda y + \lambda^3 - 2 = 0.$$

On note (δ) la famille des droites d_λ lorsque λ décrit $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la droite d_λ passe par le point $M(a, b)$ si et seulement si λ est racine du polynôme $X^3 + bX + 2a - 2$.
Préciser le nombre de droites de la famille (δ) passant par $A(1,0)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (ε) des points du plan par lesquels passent exactement deux droites distinctes de la famille (δ).

c) Déterminer la partie (φ) de (ε) des points du plan par lesquels passent exactement deux droites orthogonales de la famille (δ).

d) Représenter (ε) et (φ).

e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 1

Filière PC

durée 3 heures

Nota *: Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Dans cette épreuve ***comme dans toutes celles qui suivront****, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) a) Calculer le volume et la somme des aires des faces d'un tétraèdre régulier dont les côtés ont a pour longueur.

b) Résoudre les mêmes questions pour un octaèdre régulier (dont les sommets sont les centres des faces d'un cube).

---

2) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle U d'ordre n dont les éléments $u_{i,j}$ sont nuls sauf pour les n éléments $u_{n-k,k+1} = 1$ pour $0 \leqslant k < n$ (on pourra distinguer selon que $n = 2m$ ou $n = 2m+1$). Est-elle diagonalisable ? Que peut-on dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice canonique est U ?

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} U & I \\ I & U \end{pmatrix}$ d'ordre $2n$. Est-elle diagonalisable ?

3) Construire un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 à l'aide de deux tangentes au cercle centré au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ passant par le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé d'un plan euclidien.

---

4) Donner une représentation paramétrique et tracer l'ensemble des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à l'ellipse d'équation cartésienne

$$9\,(x-7)^2 + 49\,y^2 = 441.$$

---

5) Déterminer les couples de polynômes (P, Q) de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'égalité

$$\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = 1.$$

---

6) Calculer la dimension et donner une base de l'ensemble des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\int_{-1}^{1} P = 0$.

---

7) a) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que l'on peut trouver au moins un automorphisme ω tel qu'il existe un projecteur p vérifiant $u = p \circ \omega$ (on pourra pour cela commencer par déterminer l'image de p).

b) Si $n = 3$ et si E est muni d'une structure euclidienne, peut-on choisir pour ω une isométrie et pour p un projecteur orthogonal ?

c) Montrer grâce à un opérateur linéaire classique sur les polynômes que le résultat du a) ne s'étend pas au cas de l'espace $E = \mathbb{R}[X]$.

e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 2

Filière PC

durée 3 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1 Soit $f(x) = \exp(-\sqrt{x})$, x réel >0 . La dérivée $n^{ème}$ de f est notée $f^{(n)}(x)$, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$.

1 Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative .

2 On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2 .

3 Établir que $y = f(x)$ obéit à l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Préciser des fractions rationnelles $\varphi(n)$ et $\psi(n)$, telles que $c_{n+2} = \varphi(n)c_{n+1} + \psi(n)c_n$.

4 Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$?

5 Prouver que $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2 On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, où $j = \exp(2i\frac{\pi}{3})$ est racine cubique de l'unité. On introduit $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$, et les sommes partielles $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_p = \sum_{\ell=1}^{p} v_\ell$.

1 Montrer que $|v_n| \sim C.n^{-3/2}$ où C est une constante à déterminer.

2 Montrer que l'une des deux suites (U_n) et (V_p) est ***"extraite"*** de l'autre. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

3 On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer l'intégrale impropre $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

4 Établir que le reste $R_n = \sum_{q=n+1}^{+\infty} u_q$ vaut $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(je^{-t})^{n+1} dt}{\sqrt{t}(1-je^{-t})}$. [On peut exprimer u_q au moyen de a_q .]

5 En déduire que $|R_n| \sim D.|u_n|$ où D est une constante à déterminer.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1 Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de f.

2 Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

3 Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

4 Prouver que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0 . [On peut comparer f à une intégrale.]

5 Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0;\pi]$.

1 Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

2 On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$. Calculer a_0 et b_n.

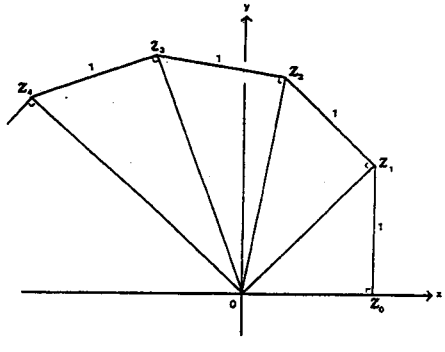
3 On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Établir que $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,dt$. En déduire l'existence de $L = \lim_{+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n \sim D.n^{-3/2}$.

5 Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle Oz_nz_{n+1} , ***rectangle*** en z_n , est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.



1 Calculer $|z_n|$.

2 Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.

3 Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \text{Arctan}\left(n^{-1/2}\right)$.

4 Établir l'***existence*** d'une constante réelle C , telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O\left(n^{-1/2}\right)$.

5 Montrer que cette constante C est ***strictement positive***.

e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 3

Filière PC

durée 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants .

Problème A

Si $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.

Un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est noté $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^p$, rapporté à sa base canonique , et sa matrice dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont notés par la même lettre .

Si N est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, la suite $(A_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ admet une limite B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite réelle $(N(A_n - B))_n$ a pour limite 0 .

On note :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = B \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} N(A_n - B) = 0 \ .$$

Les coefficients de la matrice limite B sont les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I.

On admettra que l'application , notée $\| \ \|$, de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \ , \ \|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, adoptée dans la suite du problème et telle que , $\forall r \in \mathbb{N}^*$ (avec un abus d'écriture évident) :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \ , \ \forall B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \ , \ \ \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \ .$$

1) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, et $\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant p} |\lambda_i|$.

Montrer que :

$$\forall i \in [1,p]_{\mathbb{N}},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\lambda_i|^k \leqslant \left\|A^k\right\| .$$

En déduire que si A est diagonalisable alors :

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = O \iff \rho(A) < 1$$

(O désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

2) $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, A inversible .

On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.

L'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.

On définit une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left(x^{(n)}\right)_n$, où $n \in \mathbb{N}$ par :

$$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad , x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b .$$

a) Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N , $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(x^{(n)}\right)_n$ converge vers x .

Partie II.

On donne la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} \forall i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p\ ,\ \ a_{i,i} = 2\ ; \\ \forall i,\ 2 \leqslant i \leqslant p\ ,\ \ a_{i,i-1} = -1\ ; \\ \forall i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p-1\ ,\ \ a_{i,i+1} = -1\ ; \end{cases}$$

tous les autres coefficients étant nuls.

1) I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, trouver une relation entre D_p , D_{p-1} , D_{p-2} et λ .

On prendra $D_0 = 1$ et $D_1 = 2 - \lambda$.

2) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A.

Montrer que $|\lambda - 2| \leqslant 2$ à l'aide de $\|A - 2I_p\|$.

3) On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Calculer D_p en fonction de p et de θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

En déduire les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

Partie III.

Dans la décomposition $A = M - N$ donnée au **I 2)**, A est la matrice du **II** et l'on pose $M = 2I_p$, d'où $N = 2I_p - A$ où I_p désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $J = M^{-1}N$, $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On reprend la méthode itérative de **I 2)**.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter la matrice $x^{(n+1)}$ en fonction de la matrice $x^{(n)}$ et de la matrice b. Préciser tous ses éléments.

2) Trouver les valeurs propres de J et calculer $\rho(J)$, ρ ayant été défini au **I 1)**. La suite $\left(x^{(n)}\right)_n$ est-elle convergente ?

3) Montrer que :

$$1 - \rho(J) \leqslant \frac{\pi^2}{2p^2}.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer sur l'utilisation de la méthode dans ce cas ?

Problème B

Partie I.

1) Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On note f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}.$$

Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que $\forall t \geqslant 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant 1 - \cos(yt) \leqslant |y|\,t$ et en déduire que :

$$\forall t > 0, \quad |f(t)| \leqslant \frac{\left|e^{(x-1)t} - 1\right|}{t} + |y|.$$

3) Soit $x > 0$; $\forall y \in \mathbb{R}$ on note :

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}\cos(yt)}{t}\,dt$$

et F_x l'application :

$$F_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & F(x,y) \end{array}.$$

a) Montrer que F_x est continue sur $\mathbb{R}$ (On pourra distinguer $t > 1$ et $t < 1$). On énoncera avec grande précision le théorème utilisé.

b) Montrer que F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_x'(y)$.

c) Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) dt = \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

En déduire $F_x(0)$ puis $F(x,y)$.

Partie II.

1) a) Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Montrer l'existence de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\cos(yt)}{t} dt ,$$

puis celle de

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt .$$

On pose encore :

$$F(0,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos(yt)}{t} dt .$$

b) Soit $y > 0$ et $z > 0$. Montrer que l'application h de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t > 0 , \quad h(t) = e^{-tz} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Dans la suite $y > 0$.

c) Montrer l'existence de :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt .$$

On note H l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall z \in]0,+\infty[, \; H(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt \qquad \text{et} \qquad H(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{y}} - \cos(t)}{t} dt.$$

2) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer $\lim_{z\to+\infty} H(z)$.

4) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire la valeur de $H(z)$ pour $z > 0$.

5) Pour $t \geqslant 0$ on pose :

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{y}} - \cos u}{u} du .$$

a) Montrer que $\forall z > 0$ l'application $t \longmapsto e^{-tz}\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$H(z) = H(0) - z \int_0^{+\infty} e^{-tz}\varphi(t)\, dt .$$

b) En déduire que H est continue en 0 (on pourra remarquer que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$) .

6) Calculer $F(0,y)$ pour $y \in \mathbb{R}^*$.

PO22

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 MP

durée 3 heures

Exercice 1

f est l'unique fonction impaire de période 2π, valant 1 sur l'intervalle $]0, \pi[$ et 0 en π.

1°. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

2°. Exprimer $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{4N}\dfrac{\sin\left[(2p+1)\,k\,\frac{\pi}{4}\right]}{2p+1}\sin\left[3k\,\frac{\pi}{4}\right]\right)$ où $k\in\mathbb{Z}$ à l'aide de f.

3°. Montrer la convergence de la suite $S_N=\displaystyle\sum_{p=-N}^{N}\frac{1}{8p+5}$ indexée par N. On note S sa limite.

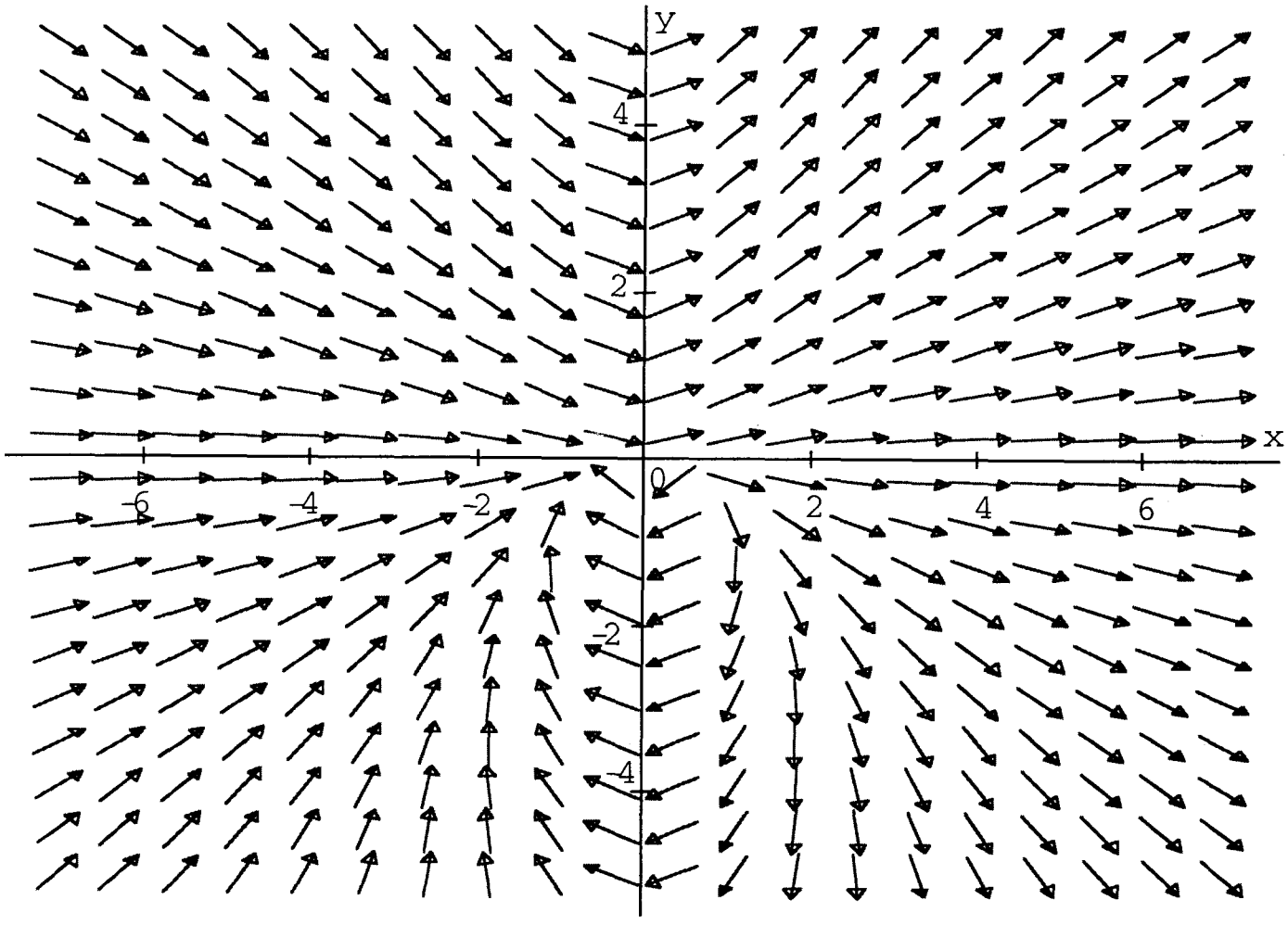
4°. Pour le calcul de S, on définit $\sigma_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\sin\left[(2p+1)\,k\,\frac{\pi}{4}\right]\sin\left[3k\,\frac{\pi}{4}\right]$ où $p\in\mathbb{Z}$.

(a) Calculer pour chaque p la valeur de σ_p, sachant que $\sigma_0=0$, $\sigma_1=4$ et $\sigma_2=-4$.

(b) Montrer la convergence de la suite $\displaystyle\sum_{p=0}^{4N}\frac{\sigma_p}{2p+1}$ indexée par N. On note L sa limite.

(c) Calculer la somme de Riemann définie par les extrémités de gauche de huit sous-intervalles consécutifs de longueur $\dfrac{\pi}{4}$ approchant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

(d) En déduire la valeur de L, puis celle de S.


y
x
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On recherche les trajectoires des arcs paramétrés $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t)\, y(t) \end{cases}$$

On rappelle qu'une trajectoire est un ensemble de points. Sur la figure de la page ci–contre, le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (x^2 + y, xy)$ est représenté en sens et direction.

On admettra l'existence et l'unicité d'une solution du système différentiel donné vérifiant des conditions initiales $x(0) = u$, $y(0) = v$.

1°. Expliciter cette solution pour $u = 0$ et $v = 0$.

2°. Recherche des trajectoires rectilignes.

(a) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$.

(b) Que peut–on dire de ce déterminant si la trajectoire présente une inflexion ?

(c) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = x^2$.

(d) Préciser la ou les trajectoires incluses dans une droite.

3°. Recherche des trajectoires tracées sur un cercle centré sur l'axe Oy et passant par l'origine.

(a) Déterminer une courbe contenant les points où la trajectoire présente une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

(b) En déduire l'unique cercle centré sur l'axe Oy, passant par l'origine, le point $(0, a)$ et contenant une trajectoire du système différentiel considéré.

(c) Réciproquement, préciser pour cette valeur de a la nature de la solution maximale passant par $(0, a)$ à l'instant $t = 0$, en utilisant par exemple la combinaison $\dfrac{x'y - y'x}{y^2}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$, où $n \geqslant 1$, et u un endomorphisme de cet espace. Pour k entier naturel non nul, u^k est la composée $(u \circ u \circ \ldots \circ u)$ où u apparaît k fois; u^0 est l'application identique.

Pour un vecteur x de E, on appelle orbite de x selon u le sous–espace de E engendré par les images successives de x : $\text{Orb}_u(x) = \text{Vect}\{x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$. L'endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur particulier x_0 réalisant l'égalité $E = \text{Orb}_u(x_0)$.

1°. *Étude d'un exemple*

Ici l'espace E est de dimension 4. Après quelques recherches, on a pu déterminer deux vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- le vecteur a vérifie : $\big(a, u(a)\big)$ est libre et $2\,u^2(a) - u(a) - a = 0$,
- le vecteur b vérifie : $\big(b, u(b), u^2(b)\big)$ est libre et $u^3(b) - u^2(b) + u(b) - b = 0$.

(a) Démontrer que la dimension de $\text{Orb}_u(a)$ est égale à 2.

(b) Démontrer que la restriction de u à l'orbite de a est diagonalisable et préciser la matrice de cette restriction dans une base de diagonalisation (e_1, e_2). Énoncer sans démonstration des résultats identiques concernant la restriction de u à l'orbite de b.

(c) Montrer que u est diagonalisable.

Par la suite, on notera (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de diagonalisation, e_1 étant commun aux deux orbites et e_2 étant associé à une valeur propre réelle.

(d) Déterminer un vecteur c dont l'orbite est de dimension 3, la rectriction de u à cette orbite étant annulée par le polynôme $P(t) = (2t + 1)(t^2 + 1)$. Exprimer ce vecteur dans la base de diagonalisation.

(e) En déduire que l'orbite de $a + b$ n'est pas nécessairement de dimension 4.

(f) Préciser un vecteur d telle que l'orbite de $b + d$ soit de dimension 4.

2°. *Une condition nécessaire*

On revient au cas de dimension n, et l'on suppose que l'endomorphisme u est cyclique, x_0 étant l'un des vecteurs d'orbite maximale définis dans le préambule, B étant alors la base $\big(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{(n-1)}(x_0)\big)$.

(a) Préciser la matrice A de l'application u dans la base B.

(b) Préciser la première colonne des matrices A^k, k étant un entier compris entre 0 et $n - 1$.

(c) En déduire une condition nécessaire portant sur son polynôme minimal pour qu'un endomorphisme soit cyclique.

TB22

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

durée 3 heures

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E; pour tout endomorphisme f, f^* désigne l'adjoint de f et, pour tout sous–espace vectoriel F de E, on note p_F la projection orthogonale de E sur F : $p_F \in \mathcal{L}(E)$.

1°. Soit $f = p_F \circ g$ où F est un sous–espace vectoriel de E et $g \in \mathcal{O}(E)$.

(a) Préciser $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$ à l'aide de F et g.

(b) Montrer l'existence d'un unique sous–espace vectoriel F' de E tel que :

$$p_F \circ g = g \circ p_{F'}.$$

(c) Donner une expression simplifiée de $f \circ f^* \circ f$.

2°. Soit F un sous–espace vectoriel fixé de E, distinct de E et de $\{0\}$.

(a) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$; établir une condition nécessaire et suffisante pour que p_F et g commutent.

(b) Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des $p_F \circ g$ tels que $p_F \circ g = g \circ p_F$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$; montrer que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe isomorphe à un groupe connu; $\mathcal{G}$ est–il un sous-groupe du groupe linéaire de E ?

(c) Montrer que l'ensemble des $p_F \circ g$ obtenu lorsque g décrit $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par l'opération de composition.

3°. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* \circ f = f$.

(a) Établir que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

(b) Montrer que : $\forall x \in (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}, \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

(c) En déduire l'existence d'un sous–espace vectoriel F de E et d'une application $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que : $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1°. **(a)** Pour quels réels x la fonction $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ?

(b) Pour $t > 0$ fixé, développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto \dfrac{t^x}{(1+t)^2}$.

2°. **(a)** Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{n!}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant n!$.

3°. **(a)** Établir une relation simple entre $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

4°. On pose dans cette question $x = \dfrac{1}{2p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on veut calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u-\omega}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto \ln|u-\omega| + \mathrm{i}\,\arg(u-\omega)$, où $\arg(u-\omega)$ désigne l'argument de $u-\omega$ strictement compris entre $-\pi$ et π.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$.

(b) En précisant les éléments de l'ensemble Ω, établir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\omega}{u-\omega}.$$

(c) Montrer qu'en calculant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$ la partie logarithmique s'annule.

(d) En posant $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/p}$, simplifier $(1-\alpha)\displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1} k\,\alpha^k$ et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

5°. Montrer que la fonction $x \mapsto \pi\,x - f(x)\sin\pi x$ est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base de E que l'on ne suppose pas orthonormale; l'ensemble $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{a} + \mathbb{Z}\vec{b} + \mathbb{Z}\vec{c}$ des combinaisons linéaires de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ à coefficients entiers forme alors un sous-groupe de $(E, +)$ appelé *réseau* engendré par $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

1°. Soit D une *droite réticulaire* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une droite vectorielle de E contenant au moins un vecteur non nul de $\mathcal{R}$; établir l'existence dans $D \cap \mathcal{R}$ de $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ non nul tel que $x^2 + y^2 + z^2$ soit minimum et en déduire que $D \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u}$.

2°. Notant $\Delta = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ le produit mixte de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, on pose :

$$\vec{A} = \frac{1}{\Delta}(\vec{b} \wedge \vec{c}), \quad \vec{B} = \frac{1}{\Delta}(\vec{c} \wedge \vec{a}), \quad \vec{C} = \frac{1}{\Delta}(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

(a) Exprimer simplement le produit scalaire $(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \mid \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C})$.

(b) Montrer que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ forme une base de E.

3°. Soit P un *plan réticulaire* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un plan vectoriel de E contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{R}$; montrer l'existence d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants de $P \cap \mathcal{R}$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2$ soit minimum lorsque $\vec{u} \wedge \vec{v} = X\vec{A} + Y\vec{B} + Z\vec{C}$, et en déduire que $P \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$.

4°. Dans ce qui suit, P désigne un plan réticulaire de $\mathcal{R}$, comme défini ci-dessus.

(a) Établir l'existence d'un triplet (α, β, γ) de nombres entiers relatifs premiers entre eux et tels que, pour $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, on ait :

$$[\vec{w} \in P \cap \mathcal{R}] \Longleftrightarrow [(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0].$$

(b) Étant donné un tel triplet (α, β, γ), on définit pour $k \in \mathbb{Z}$ les plans affines $\mathcal{P}_k$ d'équations $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; montrer que les $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$ définissent une partition de l'ensemble $\mathcal{R}$.

(c) Exprimer la distance entre $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ à l'aide de $\vec{N} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$.

JH22

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

durée 4 heures

Problème

Notations

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E; l'ensemble des valeurs propres de f sera noté $Sp(f)$ (spectre de f). Le sous–espace propre de f associé à la valeur propre λ est le sous–espace vectoriel $Ker\,(f-\lambda Id)$ de E, Id désignant l'application identique de E.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les éléments propres de X sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice X.

- On note $\Pi_f(X) = \det(X\mathrm{Id} - f)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $\mathbb{R}^n$ rendu euclidien par le produit scalaire $\bullet$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad X \bullet Y = {}^tXY = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k y_k$$

où ${}^tX$ désigne la matrice transpoosée de X et où, grâce à une identification de $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble des matrices réelles de taille $(n,1)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; on note f^* l'adjoint de f, endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(X) \bullet Y = X \bullet f^*(Y).$$

- On rappelle que $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} |f(X) \bullet Y|$, $\|f^*\| = \|f\|$ et $\|f\|^2 = \|f \circ f^*\|$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A; dans ces conditions on note $\Pi_A(X) = \Pi_f(X)$ et $\|A\| = \|f\|$, d'où $\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

• On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles A, c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$.

• Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \geqslant 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$; alors $\|A\| = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} (\lambda)$. On écrit $A > 0$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul (d'où $A \geqslant 0$).

• On appelle matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour toute application convexe f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et tous $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$ et $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k = 1$, on a : $f\left(\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k\, a_k\right) \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k\, f(a_k)$.

Partie I

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-2 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = i-1 & \text{si} \quad 2 \leqslant i \leqslant n \\ a_{i,i+1} = i & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

les autres coefficients étant nuls; enfin u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1°. Montrer que la matrice A admet n valeurs propres distinctes.

2°. On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à coefficients réels par $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$ et, pour $n \geqslant 3$:

$$P_n(X) = \frac{X}{n-1} P_{n-1}(X) - \left(\frac{n-2}{n-1}\right) P_{n-2}(X).$$

Montrer que le polynôme caractéristique $\Pi_u(X)$ vérifie l'égalité suivante :

$$\Pi_u(X) = (n-1)!\,[X\,P_n(X) - (n-1)\,P_{n-1}(X)].$$

3°. En déduire $\det A$ en fonction de l'entier n.

4°. On note Co (A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

(a) Montrer que Co (A) est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la dimension de Co (A).

Partie II

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D la matrice diagonale définie par $D = \text{diag}\,(1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

ainsi que la matrice $B = D - A$ où A est la matrice de la première partie. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X \mapsto q(X) = {}^tXBX$.

1°. Montrer que, pour tous $n \geqslant 2$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tXBX = n\,x_n^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} i\,(x_i - x_{i+1})^2$.

2°. En déduire le rang et la signature de la forme q.

3°. *Application.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum u_k^2$ converge. On note :

$$U_n = \frac{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k}{n}.$$

(a) Montrer que $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} U_j^2 \leqslant 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j U_j$.

(c) En déduire que la série $\sum U_n^2$ est convergente.

Partie III

Soient $n \geqslant 2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, une matrice $S > 0$ et le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\varphi(X, Y) = {}^tXSY$.

1°. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ orthonormale pour le produit scalaire φ telle que la matrice de passage $[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure, et vérifie $S = {}^t\,[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]^{-1}\,[\mathcal{B}' : \mathcal{B}]^{-1}$.

2°. Montrer que $\det S$ est inférieur ou égal au produit $\prod_i s_{i,i}$ des éléments diagonaux de S.

Partie IV

Soient $n \geqslant 2$, et $U = (u_{i,j}) > 0$ une matrice dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n valeurs propres, distinctes ou non; on suppose qu'il existe une série entière $\sum b_k\, x^k$ de somme $g(x)$ et de rayon de convergence $R > 0$ vérifiant $b_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $Sp\,(U) \subset\ ]0, R[$. Enfin l'application $(\ln \circ\, g)$ est supposée convexe sur $]0, R[$.

1°. **(a)** Montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} b_k\, U^k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $g(U) > 0$.

(b) Expliciter un majorant de $\det\, g(U)$.

2°. **(a)** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $V = (v_{i,j})$ telle que :

$$\forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad u_{i,i} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} v_{i,k}^2\, \alpha_k.$$

(b) Montrer que $0 < u_{i,i} < R$ pour tout i entre 1 et n.

(c) Montrer, en utilisant l'inégalité de convexité rappelée dans le préambule, que :

$$\det\, g(U) \geqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} g(u_{i,i}).$$

(d) Retrouver de même le résultat de la question **III 2°**.

Partie V

Soient $n \geqslant 2$ et U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $u_{i,i} = a$ pour tout i et $u_{i,j} = b$ pour $j \neq i$, avec $0 < b < a$. Soit enfin $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + \mathrm{e}^x$.

1°. En écrivant $U = (a - b)\, I_n + J$, déterminer le spectre de U.

2°. Montrer que la matrice U et la fonction g vérifient les hypothèses de la partie **IV**.

3°. Montrer qu'il existe un polynôme R de degré 2 annulateur de la matrice U.

4°. Exprimer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et l'exponentielle $\exp(U)$ en fonction de U et de I_n.

5°. Encadrer $\det\,\big(I_n + \exp(U)\big)$ en fonction de a, b et n.

6°. Dans cette question, on suppose $n = 3$. Déterminer la nature de la quadrique d'équation ${}^tXUX = 1$ où X décrit $\mathbb{R}^3$.

e4a concours

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

Notations:

n et q sont des entiers naturels donnés.

$\mathcal{M}(n,q)$ désigne l'ensemble des matrices réelles ou complexes à n lignes et q colonnes.

I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et s un élément de I. Le réel 0 est supposé appartenir à l'intervalle I.

Une fonction matricielle de type (n,q) définie sur I est une application M de I vers $\mathcal{M}(n,q)$, $M=[m_{ij}]$ $(1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q)$ où, pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , m_{ij} est une application de I vers $\mathbb{R}$ qui au réel t associe le réel $m_{ij}(t)$.

Soient $M=[m_{ij}]$ $(1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q)$ et $L=[l_{ij}]$ $(1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q)$ deux fonctions matricielles de type (n,q) définies sur I. La notation $M=L$ signifie que pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q, $m_{ij}=l_{ij}$ (égalité entre deux applications de I vers $\mathbb{R}$).

La fonction matricielle M de type (n,q) définie sur I est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) si chaque fonction réelle m_{ij} $(1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q)$ est continue en s (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ en s) et la fonction matricielle dérivée est définie en s par :

$$\frac{dM}{dt}(s)=\left[\frac{dm_{ij}(s)}{dt}\right] \quad , \quad 1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q$$

et de même pour les dérivées d'ordre supérieur si elles existent .

La fonction matricielle M de type (n,q) définie sur I est continue sur I (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$ sur I) si elle est continue (respectivement dérivable ou de classe $\mathcal{C}^k$) en tout point de I.

L'intégrale définie de la fonction matricielle M continue sur I , entre les bornes α et β de I est la matrice réelle à n lignes et q colonnes définie par :

$$\int_\alpha^\beta M(u)du=\left[\int_\alpha^\beta m_{ij}(u)du\right] \quad , \quad 1\leq i\leq n \quad , \quad 1\leq j\leq q$$

Première partie :

Le produit de deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}(n,n)$ est noté $M_1 \cdot M_2$.

Question 1 : α et β désignent deux éléments de I tels que $\alpha < \beta$ et C est une matrice de $\mathcal{M}(n,n)$. La fonction matricielle M de type (n,n) étant supposée continue sur I, montrer que :

$$\int_\alpha^\beta (C \cdot M)(u)du = C \cdot \int_\alpha^\beta M(u)du$$

Question 2 :

Soient $F = [f_{ij}]$ $(1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n)$ et $G = [g_{ij}]$ $(1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n)$ deux fonctions matricielles dérivables de type (n,n) définies sur I. Montrer que le produit matriciel $F \cdot G$ définit une nouvelle fonction matricielle dérivable de type (n,n) sur I et que

$$\frac{d(F \cdot G)}{dt} = \frac{dF}{dt} \cdot G + F \cdot \frac{dG}{dt}$$

Question 3 : s désigne un élément de I.

Soit $H = [h_{ij}]$ $(1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n)$ une fonction matricielle dérivable de type (n,n) définie sur I et telle que la matrice $H(s)$ soit inversible , d'inverse $H^{-1}(s)$. Montrer que la fonction matricielle H^{-1} est définie et dérivable sur un voisinage Vde s et vérifie :

$$\forall u \in V, \quad \frac{d(H^{-1})}{dt}(u) = -H^{-1}(u) \cdot \frac{dH}{dt}(u) \cdot H^{-1}(u)$$

Seconde Partie :

I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Soit A une matrice réelle à n lignes et n colonnes admettant les valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, chacune apparaissant avec son ordre de multiplicité. Les matrices $A_0, A_1, ..., A_n$ sont définies par :

$$A_0 = I_n \qquad et \qquad A_k = A_{k-1} \cdot (A - \lambda_k . I_n) \quad , \quad 1 \leq k \leq n$$

$r_1, r_2, ...r_n$ désignent les applications de I dans $\mathbb{R}$ (ou C) définies par :

$$\frac{dr_1}{dt}(t) = \lambda_1 . r_1(t) \qquad et \qquad r_1(0) = 1$$

$$\frac{dr_k}{dt}(t) = \lambda_k . r_k(t) + r_{k-1}(t) \qquad et \qquad r_k(0) = 0 \qquad , \quad 2 \leq k \leq n$$

Soit M la fonction matricielle de type (n,n) définie sur I par :

$$\forall t \in I, \qquad M(t) = \sum_{j=1}^{j=n} r_j(t) . A_{j-1}$$

Question 1 : Déterminer la matrice M lorsque $n = 1$.

L'entier n est maintenant quelconque.

Question 2 : Expliciter la matrice A_n.

Question 3 : Déterminer la matrice $M(0)$.

Question 4 : Vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{dM}{dt}(t) - \lambda_n.M(t) = \sum_{j=0}^{j=n-2} r_{j+1}(t).\ [(\lambda_{j+1} - \lambda_n).A_j + A_{j+1}]$$

Question 5 : En déduire que

$$\forall t \in I, \qquad \frac{dM}{dt}(t) = A \cdot M(t)$$

Question 6 : Déterminer une fonction matricielle Φ_A , dérivable de type (n, n) définie sur I et vérifiant :

$$\forall t \in I, \qquad \frac{d\Phi_A}{dt}(t) = A \cdot \Phi_A(t) \quad et \quad \Phi_A(0) = I_n$$

Prouver l'unicité de Φ_A et exprimer Φ_A en fonction de la matrice M.

Question 7 : Application numérique:

Déterminer $\Phi_A(t)$ lorsque $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Question 8 : α et β non nul sont deux réels et $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Donner une interprétation géométrique de l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée par la matrice $\Phi_A(t)$ dans une base orthonormée $\left\{ \vec{i}\ , \vec{j} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Troisième partie :

Dans cette partie les preuves seront fondées sur la définition de la matrice Φ_A donnée en deuxième partie. L'entier n est quelconque, A et B sont deux matrices réelles à n lignes et n colonnes . u et v sont deux éléments de l'intervalle I.

Question 1 : Prouver que $\Phi_A(u + v) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v)$.

Question 2 : Montrer que $\Phi_A(u)$ est inversible et donner son inverse.

Question 3 : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Comparer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Calculer et comparer $\Phi_{A+B}(u\ )$ et $\Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$

Question 4 :

Dans le cas où les matrices A et B sont permutables (c'est à dire $A \cdot B = B \cdot A$) , prouver que $\Phi_{A+B}(u\ ) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$.

Quatrième partie :

α est un élément de I. A est une matrice donnée dans $\mathcal{M}(n,n)$.

Question 1 :

Dans cette question, pour tout i de 1 à n et tout j de 1 à n , q_{ij} est une application de classe C^1 de I^2 vers $\mathbb{R}$ (qui associe au couple (t,s) de I^2 le réel $q_{ij}(t,s)$). Soit Q la fonction matricielle réelle à deux variables de type (n,n) définie sur I^2 par

$Q = [q_{ij}]$ $(1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n)$. Montrer l'égalité matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\alpha^t Q(t,s)ds\right] = Q(t,t) + \int_\alpha^t \frac{\partial Q}{\partial t}(t,s)ds$$

Il sera opportun d'introduire L, fonction matricielle réelle à deux variables de type (n,n) définie sur I^2 par

$$\forall (u,v) \in I^2, \quad L(u,v) = \int_\alpha^u Q(v,s)ds$$

Question 2 :

Soit une fonction matricielle continue B, de type $(n,1)$ définie sur I et une matrice D unicolonne à n lignes.

La fonction matricielle R à deux variables, de type (n,n) définie sur I^2 est donnée par

$$\forall (t,s) \in I^2, \quad R(t,s) = \Phi_A(t) \cdot (\Phi_A)^{-1}(s)$$

Montrer que la fonction matricielle Y de type $(n,1)$ définie sur I, solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A \cdot Y(t) + B(t) \\ \\ Y(0) = D \end{cases}$$

est unique et qu'elle est donnée par :

$$\forall t \in I, \qquad Y(t) = R(t,0) \cdot D + \int_0^t R(t,s) \cdot B(s)ds$$

Question 3 : Application lorsque $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer la fonction matricielle Φ_A et donner la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt}(t) = A \cdot Y(t) + B(t) \\ \\ Y(0) = D \end{cases}$$

---

e4a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1

P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ sont n éléments 2 à 2 distincts de ***P*** dont les affixes respectives sont notées $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

E est l'ensemble des points $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$.

On note $\Gamma(E)$ l'ensemble des points M de ***P*** n'appartenant pas à ***E*** et vérifiant la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(MA_k)^2}\overrightarrow{MA_k} = \vec{0}.$$

1° Soit M un point de ***P***, n'appartenant pas à ***E***, d'affixe z. Montrer qu'il appartient à $\Gamma(E)$ si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = 0$.

2° On considère le polynôme $Q(X)$ défini par : $Q(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. On note $Q'(X)$ son polynôme dérivé.

a) On pose : $R(X) = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $R(X)$ dans l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes.

b) En déduire que $\Gamma(E)$ est l'ensemble des points M de ***P*** dont l'affixe z vérifie : $Q'(z)=0$.

c) En déduire que, si p est le nombre d'éléments de $\Gamma(E)$, on a : $1 \le p \le n-1$.

d) Dans le cas particulier où $n=2$, préciser $\Gamma(E)$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $n \ge 3$.

3° Soit r une rotation du plan ***P***. Etablir que : $r(\Gamma(E)) = \Gamma(r(E))$.

On rappelle que E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier si, et seulement si, E est invariant par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

4° Montrer que, si E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier, alors $\Gamma(E)$ est réduit à un seul point que l'on précisera (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).

5° Réciproquement, montrer que si $\Gamma(E)$ est réduit à un seul point dont l'affixe est notée ω, alors E est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier (on pourra commencer par déterminer $Q'(X)$).

6° Dans cette question , on suppose $n=3$, $a_1=\alpha+i\beta$, $a_2=\alpha-i\beta$, $a_3=-2\alpha$ où α et β sont des réels strictement positifs.

a) Déterminer les affixes des éléments de $\Gamma(E)$.Vérifier les résultats établis aux questions 4° et 5°.

b) On note (x,y) le couple des coordonnées d'un point M de P.

On suppose que : $\alpha\sqrt{3}>\beta$. Soit (ε)l'ellipse de P d'équation : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{3y^2}{\beta^2}=1$.

i) Indiquer les coordonnées des foyers de (ε).

ii) Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de (ε). Déterminer l'équation de la tangente en M_0 à l'ellipse (ε).

iii) Démontrer que l'ellipse (ε) est tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en des points qui sont les milieux de ces côtés.

Exercice 2

Soit n un entier naturel, $n\geq 2$ .On note **C** l'ensemble des nombres complexes et E le **C**-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

O est la matrice nulle de E. Pour A élément de E, on désigne par $tr(A)$, la trace de A.

Pour (i,j) élément de $\{1,2,.....,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.

On rappelle que : $\forall (i,j)\in\{1,2,.....,n\}^2$, $\forall (r,s)\in\{1,2,.....,n\}^2$, $E_{ij}E_{rs}=\delta_{jr}E_{is}$

où $\delta_{jr}=1$ si $j=r$ et $\delta_{jr}=0$ sinon.

1° Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ définie sur E vérifiant :

$$\forall(A,B)\in \mathrm{E}^2 , \|AB\|=\|BA\|$$

2° Soient $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n$ des éléments quelconques de **C**.

On considère les matrices X et Y suivantes :

$$X=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}+\sum_{i=2}^{n}E_{ii} \quad , \quad Y=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r E_{r1} \ .$$

Calculer XY et YX.

3° Une application q de E vers $[0,+\infty[$ vérifiant :

$$(\mathrm{SN}_1):\ \forall A\in \mathrm{E},\ \forall \lambda\in \mathbf{C},\ q(\lambda A)=|\lambda|\,q(A)$$

et

$$(\mathrm{SN}_2):\ \forall (A,B)\in \mathrm{E}^2,\ q(A+B)\le q(A)+q(B)$$

est appelée semi-norme sur E.

Soit q une semi-norme sur E.

a) Montrer que $q(\mathrm{O})=0$ et que pour tout A de E, $q(-A)=q(A)$.

b) Etablir que pour A et B quelconques dans E on a :

$$|q(A)-q(B)|\le q(A+B)$$

et que si $q(B)=0$, alors $q(A+B)=q(A)$.

4° On dit qu'une semi-norme q définie sur E vérifie la propriété (P) si :

$$\forall (A,B)\in \mathrm{E}^2,\ q(AB)=q(BA)$$

On considère l'application f de E vers $[0,+\infty[$ définie par : $f(A)=|tr(A)|$.

Montrer que f est une semi-norme sur E vérifiant (P).

5° Soit q une semi-norme sur E vérifiant (P).

a) Soit i, j deux entiers naturels distincts et compris entre 1 et n.

Prouver que : $q(E_{ij})=0$.

b) Pour un élément A quelconque de E, on note a_{ij} le coefficient de A situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. Montrer que : $q(A)=q\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}\right)$

c) Démontrer qu'il existe α réel positif tel que : $q=\alpha\, f$.

Exercice 3

n désigne un entier naturel non nul.

1° Soit $(\varepsilon_n)_{n\ge 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0, et soit $(v_n)_{n\ge 1}$ une suite de réels. Pour $n\ge 1$, on pose : $V_n=\sum_{k=1}^{n} v_k$. On suppose que la suite $(V_n)_{n\ge 1}$ est bornée et on note M un majorant de la suite $\left(|V_n|\right)_{n\ge 1}$. Pour $n\ge 1$, on pose : $T_n=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k$.

a) Montrer que pour $n\ge 1$ et pour p entier naturel, $p\ge 2$, on a :

$$T_{n+p}-T_n=\varepsilon_{n+p}V_{n+p}-\varepsilon_{n+1}V_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}V_k(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}).$$

b) Etablir que pour $n\ge 2$ et pour p entier naturel on a : $|T_{n+p}-T_n|\le 2M\,\varepsilon_{n+1}$.

c) En déduire que la suite $(T_n)_{n\ge 1}$ converge.

2° Soit $(c_n)_{n\ge 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0.

Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx$.

a) Soit λ un élément de $]0,\pi[$ et $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$.

i) Etablir que pour tout x de $]0,2\pi[$: $|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$.

ii) Déduire de 1° que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,2\pi[$ et qu'elle converge uniformément sur I_λ.

b) On suppose, dans cette question, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$.

i) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \right] = 0$.

ii) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} (nc_{2n}) = 0$. Montrer alors que : $\lim_{n\to+\infty} (nc_n) = 0$.

3° Pour x réel et $n \geq 1$, on pose : $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

a) Etablir pour tout x réel, l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$

et pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$.

b) Soit x un élément de $]0,\pi[$ fixé et N l'entier naturel vérifiant :

$$N x \leq \pi < (N+1)\, x .$$

Montrer que : $0 \leq \sigma_N(x) \leq \pi$.

Utiliser le résultat démontré en 1° b) pour justifier que, si $n > N$, on a :

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq 2 .$$

c) Etablir que pour tout x de $[0,2\pi]$ et pour $n \geq 1$: $|\sigma_n(x)| \leq \pi + 2$.

d) On suppose de plus dans cette question que la suite $(nc_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers 0. Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$.

4° On note ln la fonction logarithme népérien.

On considère le cas particulier où $c_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $c_n = \frac{1}{n \ln(n)}$.

a) Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur **R**. On note S sa limite .

b) Déterminer les coefficients de Fourier de S.

22BE

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 PC

durée 3 heures

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_0(x)=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,+\infty[,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}-f_n^2(x)\right).$$

1°. **(a)** Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$:

$$\mathrm{e}^{-x}-f_{n+1}(x)=\left(\mathrm{e}^{-x}-f_n(x)\right)\phi(x),\ \text{où } \phi(x)=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}f_n(x).$$

(b) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N},\ x\in[0,+\infty[:\quad 0\leqslant f_n(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. En déduire que la suite (f_n) est croissante et convergente. Préciser sa limite.

2°. Soit $a\in]0,+\infty[$.

(a) Montrer qu'il existe $k_a\in]0,1[$ tel que :

$$\forall x\in[0,a],\ \mathrm{e}^{-x}-f_{n+1}(x)\leqslant k_a\left(\mathrm{e}^{-x}-f_n(x)\right).$$

(b) En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$.

3°. On pose $u_n=1-f_n(0)$.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n=2^{1-2^n}$.

(b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(P_1) : $f(0) = 0$

(P_2) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ [rappel : $f^{(0)}(x) = f(x)$]

On note ϕ l'application définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \forall x \in [0,+\infty[, \qquad \phi(f)(x) = f'(x) - f'(0).$$

1°. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2°. **(a)** Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

(b) Prouver que ϕ est injective.

3°. On définit sur $[0,+\infty[$ l'application g par :

$$g\ :\ x \mapsto (x+1)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2}x.$$

(a) Calculer $g'(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n telles que :

$$g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right).$$

En déduire que $g' \in \mathcal{E}$.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ vérifiant

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x) - f'(0) = g'(x).$$

En déduire que ϕ n'est pas surjective.

4°. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 3

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 1.$$

1°. **(a)** Étudier la continuité de f.

(b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.

(c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.

2°. On définit la fonction g sur R par :

$$g : x \mapsto f(x,0) - 1 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

(a) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g.

(b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ (justifier soigneusement la réponse).

3°. Déterminer les points critiques de la fonction f.

4°. **(a)** Vérifier que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x,y) \geqslant g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

(b) La fonction f admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$?

5°. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions :

$$\big(f(x,1) - f(0,1)\big) \text{ et } \big(f(x,-1) - f(0,-1)\big)$$

sont du signe de x.

Que peut-on en conclure?

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 PC

durée 3 heures

Exercice 1

Pour tous réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n.\ln(x)$, où le symbole ln désigne le logarithme népérien.

1°. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.

2°. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].

3°. Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.

4°. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$, avec t réel strictement supérieur à -1. Démontrer que Φ admet, en $t = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{k} b_j t^j + o(t^k)$.

5°. Étudier la nature de la suite $|b_j|$.

6°. Montrer que, sur l'intervalle $]-1, e-1[$, la fonction Φ admet une fonction réciproque Ψ dont on donnera le tableau de variations.

7°. Montrer que Ψ admet, en $u = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $t = \Psi(u) = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j + o(u^k)$.

8°. Donner pour a_n un développement limité d'ordre 2 vis-à-vis de l'infiniment petit $\frac{1}{n}$, soit $a_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où l'on précisera les constantes A, B et C.

9°. Prouver que les coefficients c_j sont tous strictement positifs [on pourra utiliser une équation différentielle du premier ordre reliant $\Psi(u)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Psi(u)$ afin d'exprimer c_k en fonction des c_j d'indices $j < k$].

Exercice 2

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. La dérivée d'ordre n de f en x est ici notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1°. **(a)** Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n\big(\sin(x)\big)}{\big(\cos(x)\big)^{n+1}}$.

(b) Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.

(c) Préciser P_0, P_1 et P_2.

(d) Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

(e) Examiner la parité du polynôme P_n.

2°. **(a)** Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

(b) Que vaut $P_n(1)$?

3°. On pose $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}\big(x\,(1-u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

4°. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

5°. **(a)** Pour tous $0 \leqslant x < y < \dfrac{\pi}{2}$, prouver que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

(b) Prouver également que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

6°. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

7°. **(a)** Démontrer que la suite (a_{2k}) tend vers 0.

(b) Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer l'existence d'une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que :

$$0 \leqslant a_{2k} \leqslant M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{-2k}.$$

(c) Montrer que la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée.

(d) On donne la formule suivante : $a_{2k} = \dfrac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$. Démontrer les relations $\dfrac{1}{3^k} \leqslant a_{2k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ [on pourra éventuellement s'aider d'une calculatrice].

Exercice 3

On note $R[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $R_k[X]$ le sous-ensemble de $R[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ sera noté $\binom{n}{k}$, ou bien C_n^k, au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

1°. **(a)** Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $R_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1,$$

ceci par développement de $\big((1-X)+X\big)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

(b) Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

2°. Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A, B) de polynômes de $R[X]$ tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

3°. **(a)** Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(b) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

4°. **(a)** Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

(b) En déduire les coefficients du polynôme f_n.

(c) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

5°. **(a)** Établir, pour tout x réel, la relation $n\, f_n(x) - (1-x)\, f_n'(x) = n \binom{2n-1}{n} x^{n-1}$.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

6°. Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t$. Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

7°. **(a)** Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1 - n\binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n}$.

(b) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

8°. Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

9°. Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 PC

durée 4 heures

Problème

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction J_0 de Bessel (utilisée notamment en physique).

Partie I

Étude de la fonction $J = J_0$ de Bessel. Développement en série entière

1°. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $J(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) Montrer que la fonction $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

(e) Préciser les valeurs de $J(0)$, $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2°. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (2n+1)\,I_n = 2(n+1)\,I_{n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$.

3°. **(a)** Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos\big(x.\sin(\theta)\big)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

(b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\, x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie II

Étude d'une équation différentielle

4°. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x\big(J(x) + J''(x)\big) + J'(x) = 0.$$

5°. Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.

6°. Soit $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

Pour tout $x > 0$ on pose : $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$.

Montrer que $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $W'(x) = -\dfrac{1}{x}\,W(x)$.

En déduire la forme de W.

7°. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n}\right) = 1$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2\,J'(x)$.

(c) Pour tout $x > 0$, on pose : $K(x) = \ln(x)\,J(x) + \varphi(x)$.

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au **6°.**

Que peut-on en déduire ?

Partie III

Usage de la transformation de Laplace

8°. **(a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

(b) Montrer que pour tout $y > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} J(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-1/4y}$$

(on pourra commencer par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant par exemple le **1°. (c)**, puis le développement en série entière de J vu en **3°. (b)** en précisant le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

9°. **(a)** Justifier pour $y > 0$ l'existence de $L(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,dx$.

(b) Montrer que la fonction L ainsi définie est une application continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{y\to+\infty} L(y) = 0$.

10°. **(a)** Déterminer et justifier le développement en série entière sur $]-1,1[$ de la fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

(b) Utiliser le développement en série entière de J vu au **3°.** **(b)** afin de montrer que, pour tout $y \in]1,+\infty[$, $\quad L(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

11°. Soit $y > 0$ fixé.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n(y) = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$|L_n(y) - L(y)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}.$$

(b) En remarquant que $\dfrac{\pi}{2} L_n(y) = \Re\mathrm{e}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{x(-y+i\sin(\theta))}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re\mathrm{e}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y-\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

(c) Montrer que :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}.$$

(d) Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout $y > 0$, on a :

$$L(y) = \frac{2y}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y^2+\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par "$u = \tan(\theta)$").

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. Si m est un entier naturel, $\mathbb{R}_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les monômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant m}$.

Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ normalisé de degré 2, $A(X) = X^2 + pX + q$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A(x) > 0$ pour tout réel x. L'entier naturel n étant fixé, on lui associe l'équation différentielle :

$$(E_n) \qquad A(x)\,y'' - n\,A'(x)\,y' + n(n+1)\,y = 0.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on pose $\quad u(P) = AP'' - n\,A'P'$.

1°. (a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dont on donnera la représentation matricielle dans la base des monômes $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$. Préciser les éléments diagonaux que l'on notera $\quad (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ $\quad$ **avec** $\quad \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n = \lambda_{n+1}$.

(b) Démontrer que u est diagonalisable et donner la dimension de chacun des sous–espaces propres de u.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $\quad 0 \leqslant k \leqslant n+1$, **il existe un polynôme P_k, normalisé et de degré k, tel que** $\quad u(P_k) = \lambda_k P_k$. **Discuter l'unicité de ces polynômes P_k.**

(d) En déduire que toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_n) sont des fonctions polynômes.

2°. Soit I un intervalle ouvert non vide tel que $P_n(x)$ soit différent de zéro pour tout x de I. On cherche à exprimer une fonction v, solution de l'équation (E_n), sous la forme $v = z\,P_n$

où z est une application définie sur I. Démontrer l'existence d'une telle fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ et que z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

3°. Démontrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A^n}{P_n^2}$ est la dérivée d'une fraction rationnelle que l'on précisera.

Exercice 2

Soit C l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, 2π-périodiques, paires, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

À tout élément f de C, on associe l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - y = f(x).$$

1°. (a) Étudier existence et unicité d'une solution y_0 sur $\mathbb{R}$ de (E) telle que $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$.

(b) Exprimer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (E) à l'aide de t, y_0, $t \mapsto \operatorname{ch} t$ et $t \mapsto \operatorname{sh} t$.

2°. (a) Vérifier que $t \mapsto y_0(-t)$ définit une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) et en déduire que y_0 est paire.

(b) Quelles sont les solutions y sur $\mathbb{R}$ de (E) telles que $y(\pi) = y(-\pi)$?

(c) Montrer que l'équation E admet une unique solution F telle que $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

(d) En étudiant l'application $t \mapsto F(t - 2\pi)$ démontrer que F est l'unique solution 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ de (E) et que cette solution est paire.

3°. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $y_0(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sh}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire une expression de F. (On pourra utiliser les égalités $\operatorname{sh}(x-t) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch}(x-t) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t$.)

(b) Démontrer que, en posant $F = T(f)$ l'on définit ainsi un endomorphisme continu T de l'espace vectoriel C muni de la norme N_∞ de la convergence uniforme.

4°. (a) Démontrer que f et F admettent des développements en série de Fourier de la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \qquad \text{et} \qquad F(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos nx$$

ces séries trigonométriques convergeant normalement sur $\mathbb{R}$.

(b) Exprimer les coefficients b_n en fonction des coefficients a_n.

5°. Dans cette question, on choisit $f(x) = |\sin x|$.

(a) Déterminer la restriction de F à l'intervalle $[0, \pi]$ à l'aide des fonctions sin, ch et sh.

(b) Calculer les coefficients a_n, puis les coefficients b_n.

(c) Donner la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^4 - 1}$.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien E, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le nombre réel a strictement positif est donné.

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = 0$. On lui associe l'application M de $\mathbb{R}^2$ dans E définie par :

$$\overrightarrow{OM(\theta, t)} = \left[a(1 - \cos\theta)\sin(\theta - t) + h(t)\right]\vec{i} - \left[a(1 - \cos\theta)\cos(\theta - t)\right]\vec{j}.$$

Pour t réel, Ω_t désigne le point de E défini par la relation $\overrightarrow{O\Omega_t} = h(t)\vec{i}$ **et γ_t désigne l'arc paramétré défini par l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par** $\theta \mapsto M(\theta, t)$.

Enfin Γ est l'arc paramétré défini par l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $t \mapsto P(t) = M(t, t)$.

1°. (a) Donner une équation polaire de γ_0 dans le repère $(O, -\vec{j})$. Dessiner le support de γ_0.

(b) Plus généralement donner pour t réel une équation polaire de γ_t dans le repère $(\Omega_t, -\vec{j})$. Déterminer une isométrie transformant le support de γ_0 en celui de γ_t.

2°. (a) Déterminer l'application h de telle sorte que, pour tout réel α, on ait la relation :

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}(\alpha, \alpha).$$

Interpréter géométriquement cette égalité.

(b) Montrer que, dans ces conditions, si le point $Q(\alpha)$ de paramétre $\theta = \alpha$ de γ_0 est un point régulier, il en est de même pour le point $P(\alpha)$ de paramétre $t = \alpha$ de Γ. Comment déduire la tangente à Γ en P de la tangente en Q à γ_0 ?

Dans la suite, Γ désigne l'arc paramétré de E défini pour tout réel θ par :

$$\overrightarrow{OP(\theta)} = a\,(\theta - \sin\theta)\,\overrightarrow{\imath} - a\,(1 - \cos\theta)\,\overrightarrow{\jmath}.$$

3°. (a) Soient respectivement σ et s des abscisses curvilignes sur γ_0 et Γ. Comparer $\dfrac{ds}{d\theta}$ et $\dfrac{d\sigma}{d\theta}$.

(b) Comparer et calculer la longueur des sous–arcs respectifs de γ_0 et de Γ définis par l'intervalle $[0, 2\pi]$.

(c) Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, déterminer le repère de Frenet $\left(P(\theta); \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ au point $P(\theta)$ de Γ. Calculer le rayon de courbure R en ce point.

(d) Soit $C(\theta)$ le point défini par la relation $\overrightarrow{P(\theta)C(\theta)} = R\,\overrightarrow{N}$. Calculer les coordonnées de $C(\theta)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

(e) Soit Γ_1 le lieu des points $C(\theta)$. Par quelle transformation affine le support de Γ_1 se déduit–il de celui de Γ ?

4°. (a) Expliciter des transformations géométriques simples laissant globalement invariant le support de Γ.

(b) Montrer que le point $P(0)$ est un point singulier de Γ. Préciser l'existence d'une tangente et la nature de la singularité.

(c) Dessiner sur une même figure le support de γ_0, le support du sous–arc de Γ défini par l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, ainsi que le support de γ_θ, le point $P(\theta)$ et la tangente au point de contact pour les valeurs $\theta = \pi$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, F un sous-espace de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E, de cardinal m, tel que F soit stable par tout élément g de G.

Le produit $u \circ v$ de deux endomorphismes de E sera noté plus simplement uv.

À tout endomorphisme u de E, on associe u^+ défini par :

$$u^+ = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g^{-1} u g.$$

1°. Montrer que u^+ est un endomorphisme de E commutant avec tout élément h de G.

2°. Calculer $(u^+)^+$.

3°. Calculer la trace de u^+ en fonction de celle de u.

4°. Soit p un projecteur de E d'image F. Montrer que F est inclus dans l'image de p^+.

5°. Montrer que, pour tous g et h de G, on a $g^{-1} p g h^{-1} p h = h^{-1} p h$.

6°. Montrer que p^+ est un projecteur.

7°. Comparer les images de p et de p^+.

8°. Montrer que le noyau de p^+ est un supplémentaire de F stable par tout élément g de G.

9°. Montrer que tout sous–espace vectoriel de E stable par tout g de G admet un supplémentaire stable par tout g de G.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privée du couple $(0,0)$ par la relation :

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\cdot$$

Soient u, v et ρ des nombres réels liés par les relations $\quad 0 < \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \leqslant 1.$

1°. Démontrer les inégalités $\quad |u+v| \leqslant \rho\sqrt{2}$ **et** $\quad |u-v| \leqslant \rho\sqrt{2}.$

2°. Soit $\quad D(u,v) = 2(u+1)^2 + 2(v+1)^2$**. Démontrer l'inégalité** $\quad 3\,D(u,v) > 1.$

3°. Soit, sous les mêmes conditions, $\quad N(u,v) = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 4uv(u-v)$**. Démontrer l'inégalité** $\quad |N(u,v)| \leqslant 2\rho^3\sqrt{2} + \rho^4.$

4°. Soit, sous les mêmes conditions, $\quad g(u,v) = f(1+u, 1+v) - (u-v) - \dfrac{v^2 - u^2}{2}\cdot$ **Montrer que** $\dfrac{|g(u,v)|}{\rho^3}$ **est borné par une constante indépendante de ρ lorsque ρ tend vers zéro (on déterminera une telle constante sous la forme d'un entier).**

5°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en un point (x,y).

6°. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point (x,y).

7°. Interpréter à la lumière de ces résultats la majoration obtenue dans la question 4°.

8°. Calculer la tangente de l'angle θ du plan d'équation $z = 0$ et du plan tangent au point (x,y,z) de la surface définie par l'équation $\quad z = f(x,y)$ **dans un repère orthonormé.**

9°. Décrire le mouvement de ce plan tangent lorsque le point $(x,y,0)$ décrit une demi–droite du plan $z = 0$ d'origine $(0,0)$.

Exercice 3

L'exercice étudie quelques propriétés des triangles pseudo–rectangles, c'est–à–dire des triangles ABC d'un plan euclidien dont les mesures des angles, par définition strictement comprises entre 0 et π, notées $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, vérifient la relation :

$$\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Les longueurs des côtés sont notées $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Les questions ci–dessous sont largement indépendantes entre elles.

1°. Décomposer un triangle équilatéral en trois triangles pseudo–rectangles.

2°. Déterminer le milieu du segment BB' où B' est l'intersection de la droite BC et de la perpendiculaire issue de A à la droite AC.

3°. Que peut–on dire des angles de la droite BC avec les deux bissectrices de l'angle en A du triangle ABC ?

4°. Calculer $\hat{B}$, $\hat{C}$, a, b, c et l'aire S du triangle en fonction de $\hat{A}$ et du rayon R de son cercle circonscrit.

5°. Les points B et C étant fixés dans le plan, indiquer une construction géométrique du troisième sommet A à partir de la mesure de l'angle en C. Quel est le lieu de ce sommet ?

6°. Que peut–on dire de la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC ?

7°. Que peut–on dire de l'orthocentre du triangle ABC ?

8°. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\hat{A}$, R et la distance h de A à la droite BC pour qu'un triangle soit pseudo–rectangle.

MATHÉMATIQUES

Problème

On désigne par E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ où a et b sont donnés avec $a<b$, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup|f| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous–espace de E_0 des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Pour tout $f\in E_0$ on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_a^b L(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Pour tout entier non nul n on pose $L^n = L\circ L^{n-1}$ **où** $L_0 = \mathrm{id}$ **(application identique).**

On désigne par (P_n) la suite de polynômes définis par $P_0=1$ et $P_n = L^n(P_0)$ où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynômiale associée à $[a,b]$.

Partie I

1°. (a) Montrer que L est bien défini et constitue un endomorphisme de E_0.

(b) Déterminer son noyau Ker L.

(c) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction à E_1 de cet endomorphisme L définit–elle un automorphisme de E_1 (justifier avec précision la réponse) ?

2°. Soit $f \in E_0$.

(a) Démontrer l'égalité $L(f)(t) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$ **pour tout t dans $[a,b]$.**

(b) Démontrer l'existence de deux réels x_i et x_s dans $[a,b]$ tels que, pour tout t dans $[a,b]$:

$$L(f)(x_i) \leqslant L(f)(t) \leqslant L(f)(x_s).$$

(c) Calculer la borne supérieure α de $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,\mathrm{d}t$ **lorsque x décrit $[a,b]$. En déduire que** $\|L(f)\| \leqslant \dfrac{b-a}{2}\|f\|$. **L'endomorphisme L est–il continu (justifier la réponse) ?**

(d) Calculer $\|L(P_0)\|$ **ainsi que** $|||L||| = \sup\|L(f)\|$ **lorsque f décrit la boule unité fermée de E_0 définie par** $\|f\| \leqslant 1$.

Partie II

On désigne par F_1 le sous–ensemble de E_0 défini par les fonctions f telles que $f(a+b-t) = \varepsilon f(t)$ **pour tout t dans $[a,b]$ avec $\varepsilon = -1$, et F_2 le sous–ensemble analogue avec $\varepsilon = +1$.**

On désigne par f_1 l'application $t \mapsto \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^2$ **et par f_2 l'application** $t \mapsto (t-a)(t-b)$ **où t décrit $[a,b]$.**

1°. (a) Les ensembles F_1 et F_2 sont–ils vides ? réduits à $\{0\}$?

(b) Montrer que ce sont des sous–espaces vectoriels. Les comparer avec leurs images par L.

2°. Soit f un élément de E_0 et g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(t) = \dfrac{1}{2}\Big[f(t) + f(a+b-t)\Big]$.

(a) Vérifier que g appartient à F_2.

(b) Démontrer la relation $E = F_1 \oplus F_2$.

(c) Démontrer la relation $L^n(f)(a) = L^n(f)(b)$ **pour tout entier $n \geqslant 2$.**

3°. Soit f un élément de F_2.

(a) Démontrer les relations :

$$L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0$$

$$\text{et} \qquad \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

lorsque n décrit N^*.

(b) On suppose désormais que $f(t) > 0$ **pour tout** t **dans** $[a, b]$**. Étudier les variations de** $L(f)$, $L^2(f)$, $L^3(f)$ **et** $L^4(f)$ **puis, plus généralement,** $L^n(f)$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(c) Calculer le cardinal de $\Omega_n = \{t \in [a, b] \mid L^n(f)(t) = 0\}$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(d) Déterminer le signe de $L^{2n}(f)(a)$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

Partie III

1°. (a) Exprimer P_1, P_2 **et** P_3 **en fonction de la variable** $t - a$**.**

(b) Établir l'égalité $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a)\dfrac{(X - a)^{n-1}}{(n-1)!}$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(c) En déduire la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$**.**

2°. Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$**. On définit sur** $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ **l'application :**

$$\varphi \ : \ (P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que φ **est un produit scalaire.**

(b) Montrer que, si m **et** n **sont deux entiers vérifiant les relations** $m \geqslant n > 0$**, l'on dispose des égalités :**

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi(P_n, P_0) = 0.$$

(c) Montrer que $P_n(a) = 0$ **si, et seulement si,** n **est impair et différent de 1.**

3°. On désigne respectivement par FP_1 **et** FP_2 **les sous–espaces vectoriels de** $\mathcal{P}$ **engendrés par les polynômes** P_n **d'indices pairs et impairs.**

(a) Démontrer la relation $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$**.**

(b) Démontrer que cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire φ**.**

4°. On désigne par γ_n **le nombre** $\dfrac{n!}{(b-a)^n} P_n(a)$ **(ainsi** $\gamma_0 = 1$**).**

(a) Démontrer la relation $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \gamma_k$ **pour tout entier** n **supérieur ou égal à 2 et en déduire que** γ_n **est indépendant de** a **et de** b**.**

(b) Calculer γ_n **pour** $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$**.**

(c) Déterminer une base φ**–orthogonale du sous–espace** G **de** FP_2 **engendré par la famille** (P_0, P_2, P_4, P_6)**.**

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
a et b désignent deux réels tels que $a < b$. On pose $\Omega = [a, b]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

On désigne par $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

On désigne par $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω , à valeurs réelles .

On admet que tout élément K de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ est borné sur Ω.

Pour toute fonction f, élément de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, on note $\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{1/2}$.

<u>Première partie</u>

I-1 Soit $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ on note $|||K||| = \left(\iint_\Omega (K(x,y))^2 dxdy \right)^{1/2}$.

Montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à K associe $|||K|||$ est une norme.

I-2 On pose $\begin{cases} A(x) = \left(\int_a^b (K(x,y))^2 dy \right)^{1/2} \\ B(y) = \left(\int_a^b (K(x,y))^2 dx \right)^{1/2} \end{cases}$. Comparer $\int_a^b (A(x))^2 dx$, $\int_a^b (B(y))^2 dy$ et $|||K|||$.

I-3 Soient $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $g(y) = \int_a^b K(x,y)\, f(x)\, dx$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et que $\|g\| \leq |||K||| \, \|f\|$.

Dans toute la suite du problème on choisit $a = 0$, $b = 1$ et on suppose que $K \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie :

$\forall\ y > x \qquad K(x, y) = 0$.

Soit f un élément donné de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soit (x, y) un élément fixé de Ω .

Deuxième partie

II-1 On pose $K_1(x,y)=K(x,y)$ et par récurrence pour n entier naturel strictement positif

$$K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K(x,z)\,K_n(z,y)\,dz\,.$$

Montrer que l'on a : $K_n \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ et $K_n(x,y)=0$ pour $y > x$.

II-2 Soit n un entier naturel strictement positif, montrer que :

$$\forall r \in \{1,\cdots,n\}\ ,\quad K_{n+1}(x,y)=\int_0^1 K_r(x,z)\,K_{n+1-r}(z,y)\,dz\,.$$

II-3 On pose $\Phi_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt$ et par récurrence

$$\Phi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\Phi_n(t)\,dt\,.$$

On pose: $\begin{cases} \Psi_0(x) = f(x) \\ \Psi_{n+1}(x) = \int_0^x K(x,t)\Psi_n(t)\,dt \end{cases}$, pour n entier naturel

Montrer que $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \Psi_j(x)$.

II-4 Montrer que $\Psi_j(x) = \int_0^x K_j(x,t)\,f(t)\,dt$, pour tout entier naturel strictement positif j .

II-5 Montrer que $(K_2(x,y))^2 \le (A(x))^2 (B(y))^2$.

II-6 On pose $\begin{cases} F_1(x,y) = \int_y^x (A(z))^2\,dz & \text{si } y \le x \\ F_1(x,y) = 0 & \text{si } y > x \end{cases}$ et par récurrence pour $n \ge 2$

$F_n(x,y) = \int_y^x (A(z))^2 F_{n-1}(z,y)dz$.

Montrer que pour tout $n \ge 1$, F_n est une fonction continue sur Ω et que $F_n(x,y) = 0$ si $y > x$.

II-7 Montrer que $F_n(x,y) = \frac{1}{n!}(F_1(x,y))^n$.

II-8 Montrer que $(K_{n+2}(x,y))^2 \le (A(x))^2 (B(y))^2 F_n(x,y)$.

Troisième partie

III-1 Soit n un entier naturel strictement positif.
x étant fixé dans [0 , 1] , on désigne par V_n la fonction définie par $V_n(t) = K_n(x,t)$
De même , y étant fixé dans [0 , 1] ,on désigne par U_n la fonction définie par $U_n(t) = K_n(t,y)$.
Montrer que les séries de fonctions de terme général U_n et V_n sont uniformément convergentes sur [0 , 1].

III-2 On pose $H(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,y)$. Montrer que $H(x,y)$ vérifie :

$$K(x,y) + H(x,y) = \int_y^x K(x,z)H(z,y)\,dz\ .$$

III-3 On pose $\Phi_{(f)}(x) = f(x) - \int_0^x H(x,t)f(t)\,dt$. Justifier l'existence de $\Phi_{(f)}$.

Montrer que $\Phi_{(f)}$ est un élément de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

III-4 Montrer que la suite de fonctions Φ_n converge vers $\Phi_{(f)}$.

III-5 Soient Λ et g deux éléments de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, vérifiant

$$\Lambda(u) = g(u) - \int_0^u H(u,t)\ g(t)\ dt \quad \text{pour tout} \qquad u \in [\,0\,,\,1\,] \ .$$

Montrer que cette relation équivaut à $\Lambda(u) - \int_0^u K(u,t)\Lambda(t)dt = g(u)$.

III-6 Soit $\Phi \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $u \in [\,0\,,\,1\,]$: $\Phi(u) = \int_0^u K(u,t)\,\Phi(t)dt$.

Montrer que $\forall u \in [\,0\,,1\,], \Phi(u) = \ 0$

Les parties IV et V sont indépendantes.

Quatrième partie *Premier exemple d'application.*

Dans toute cette partie on pose $K(x,y)=\begin{cases}(x-y)\,e^{x-y} & \text{si} \quad y \le x \\ 0 & \text{si} \quad y>x\end{cases}$ et $\Omega=[0,1]^2$

IV-1 Calculer $K_n(x,y)$.

IV-2 En déduire $H(x,y)$.

IV-3 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ une fonction connue. Trouver $\Phi_{(f)} \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\Phi_{(f)}(x) - \int_0^x K(x,y)\ \Phi_{(f)}(y)\ dy = f(x)$$

IV-4 On pose $f(x)=e^x$. Calculer $\Phi_{(f)}$.

Cinquième partie *Second exemple d'application.*

Soit q un entier naturel strictement positif, on se donne q fonctions $a_i \in \mathcal{C}([\,0,1], \mathbb{R})$, $i \in \{1,\ldots,q\}$ et $F \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, ainsi que q réels c_i , $i \in \{0,\ldots,q-1\}$.

On cherche à résoudre le problème suivant :

(P) Trouver une fonction u vérifiant $\forall x \in [0,1]$: $\begin{cases} u^{(q)}(x)+a_1(x)u^{(q-1)}(x)+\cdots+a_q(x)u(x)=F(x) \\ u(0)=c_0\,,u'(0)=c_1\,,\cdots,u^{(q-1)}(0)=c_{q-1}\end{cases}$.

On pose $\begin{cases} K(x,y)=\sum_{k=1}^{q} a_k(x)\dfrac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si} \quad y \le x \\ K(x,y)=0 & \text{si} \quad y>x\end{cases}$ et $\Phi(x)=u^{(q)}(x)$.

Calculer $\Phi(x)+\int_0^x K(x,y)\Phi(y)dy$. En déduire une méthode de résolution du problème (P).

Exercice 1

P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, k est un réel strictement positif. On note (x, y) le couple des coordonnées d'un point M de ***P***.
Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne : $xy = k$.

1° On considère trois points *A, B, C* de (γ), deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées *a, b, c* respectivement.

a) Déterminer les coordonnées (α, β) du centre de gravité *G* du triangle *ABC*.

b) Déterminer les coordonnées (λ, μ) de l'orthocentre *H* du triangle *ABC*. Vérifier que *H* appartient à (γ).

2° On suppose, dans cette question, que *ABC* est un triangle équilatéral.

a) Que peut-on dire de *G* et *H* ?

b) Montrer que *a, b, c* sont les racines du polynôme $P(X)$ avec :

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\,\frac{k^2}{\lambda^2} X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

c) On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation : $y = x$. On suppose que *H* n'est pas l'un des sommets de (γ). Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle *ABC* avec (γ) contient un point *D* distinct de *A, B, C*. Préciser les coordonnées de *D*.

3° Soit *r* un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par :

$$Q(X) = X^3 - 3r X^2 - 3\,\frac{k^2}{r^2} X + \frac{k^2}{r}.$$

a) Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1, r_2, r_3.

b) Soient R_1, R_2, R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1, r_2, r_3. Démontrer que le triangle $R_1 R_2 R_3$ est équilatéral.

4° Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ).

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ par : $(x,t)\to f(x,t)=e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

1° Pour x réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t\to f(x,t)$ définie sur $[0,+\infty[$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2° Soit F l'application définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$x\to F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\ .$$

a) Prouver que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et, pour x strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que F' est aussi définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F'(x)=\int_0^{+\infty} -t\,e^{-t^2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)dt\,.$$

En déduire que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3° Montrer que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x)-2\sqrt{x}\,y'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,y(x)=0\ .$$

4° Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5° On admet le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Déterminer un réel K tel que pour tout réel u :

$$|\cos u-1|\le K u^2$$

b) Justifier l'existence du réel J défini par : $J=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^6\,du$.

Pour x réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)-1\right|dt$ en fonction de J et de x.

c) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

R est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. K = R ou K = C. On note E le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. O est la matrice nulle de E, I est la matrice identité de E. Pour M élément de E, ${}^tM$ et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M. On note F le K-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans K. Pour Y élément de F, ${}^tY$ désigne la matrice transposée de Y.

Soient A et B deux éléments de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in \mathrm{E} \quad , \quad f(M) = AM - MB .$$

Première partie. Dans cette partie K = C.

1° On suppose que A et B ont une valeur propre commune notée λ.

a) Justifier l'existence de Y et Z éléments non nuls de F vérifiant :

$$AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z .$$

b) Prouver que $Y\,{}^tZ$ est un élément non nul de E. Calculer $f(Y\,{}^tZ)$.

2° On suppose qu'il existe M_0 élément non nul de E tel que : $f(M_0) = O$.

a) Pour k entier naturel, prouver que : $A^k M_0 = M_0 B^k$ .En déduire que pour tout polynôme P à coefficients complexes on a :

$$P(A)\, M_0 = M_0\, P(B) .$$

b) Soit P_A le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire de $P_A(A)$?
En déduire que $P_A(B)$ n'est pas inversible dans E, et ensuite que A et B ont une valeur propre commune.

3° Démontrer que f est une bijection de E sur E si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre en commun.

4° En déduire que μ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que : $\mu = \alpha - \beta$.

Deuxième partie. Dans cette partie K = R.

1° Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M \,|\, N \rangle = tr\left({}^tM\, N\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

2° On note f^* l'endomorphisme adjoint de f. Montrer que :

$$\forall M \in \mathrm{E} \quad , \quad f^*(M) = {}^tAM - M\,{}^tB .$$

3° a) Soit D appartenant à E vérifiant : $\forall M \in \text{E}$, $DM = MD$. Prouver qu'il existe a dans R tel que : $D = aI$.

b) En déduire que f est l'application nulle si et seulement s'il existe a dans R tel que :

$$A = B = aI .$$

c) Démontrer que l'endomorphisme f est autoadjoint si et seulement si les matrices A et B sont symétriques.

4° a) On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que n est un entier pair.

b) On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}} f$ est un endomorphisme orthogonal de E.

5° On considère le cas particulier : $n = 2$ .On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de f dans la base b de E, où $b = \left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \right)$.

Vérifier les résultats démontrés aux questions 3° b), 3° c) et 4° b).

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour une fonction f à valeurs réelles et continue sur $I = [0,1]$, on recherche les fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I vérifiant le système :

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' - y = f & \text{sur } I, \\ y(0) = y'(0), \\ y(1) = -y'(1). \end{cases}$$

On pose pour toute fonction g à valeurs réelles et continue sur I : $\|g\| = \sup\{|g(x)| \mid x \in I\}$.

On rappelle que le théorème de Cauchy assure l'existence de solutions de classe $\mathcal{C}^2$ pour l'équation différentielle $y'' - y = f$ sur I.

1°. On note sp une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - y = f$ sur I. Déterminer en fonction de sp la solution générale de cette équation.

2°. Exprimer la solution du système (P) (dont on démontrera l'unicité) à l'aide de sp et de sp'.

3°. Résoudre (P) dans chacun des cas suivants $f(x) = x$, puis $f(x) = x^2$.

4°. Démontrer que si f est arbitraire la solution de (P) est la fonction $T(f)$ définie sur I par l'égalité :

$$T(f)(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{2}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

5°. Démontrer l'inégalité $\|T(f)\| \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \|f\|$ **pour toutes les fonctions** f **à valeurs réelles et continues sur** $I = [0, 1]$.

6°. Soit pour cette question $f(x) = \ln(1+x)$, **et** Q **le polynôme de degré deux réalisant un développement limité de** f **au voisinage de 0.**

(a) Démontrer l'inégalité $\|f - Q\| \leqslant \dfrac{1}{5}$.

(b) En déduire une fonction g **de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** I **vérifiant** $\|g - T(f)\| \leqslant \dfrac{2}{25}$.

Exercice 2

On considère une suite bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$ **de nombres complexes.**

1°. Démontrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{a_n}{n(n+1)}$.

2°. Démontrer la relation suivante, où les entiers p **et** q **vérifient** $0 < p < q$ **:**

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}.$$

En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **où** n **décrit** $\mathbb{N}^*$.

3°. Dans cette question uniquement, on pose $a_n = x^n$ **pour** $n \geqslant 1$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R **de la série entière de terme général** $\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

(b) Comparer la somme de cette série à l'application $x \mapsto \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}$.

(c) Calculer par passage à la limite la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

4°. Démontrer que la suite $(k\,R_k)_{k\geqslant 1}$ **où** $R_k = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ **est bornée.**

5°. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n est absolument convergente.

(a) Démontrer l'absolue convergence de la série de terme général R_k.

(b) Démontrer par inversion de sommations l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[k\sum_{n=k}^{N}\frac{a_n}{n\,(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_n$ **pour tout entier N supérieur ou égal à 1.**

(c) Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left[k\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n}{n\,(n+1)}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{N\,(N+1)\,a_n}{n\,(n+1)}$ **pour tout entier N supérieur ou égal à 1.**

(d) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\,R_k$ **en fonction de la somme** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Exercice 3

La deuxième partie de cet exercice peut être résolue en admettant les résultats de la première partie, notamment ceux de la question 1°. (d).

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. On utilise la représentation complexe usuelle des points de ce plan.

Pour chaque réel t, on note $D(t)$ l'ensemble des points d'affixes $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}+\lambda\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(t-\pi/2)}$ **où λ décrit $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$. On remarquera l'égalité $D(t+2\pi)=D(t)$.**

1°. (a) Déterminer la nature des ensembles $D(t)$ et représenter graphiquement ces $D(t)$ pour $t\in\left\{-\dfrac{5\pi}{6},\ -\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

(b) Soit r un réel supérieur ou égal à 1 et θ un réel. Déterminer les couples (λ,t) vérifiant les relations $1-\lambda\,\mathrm{i}=r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\theta-t)}$ **et** $\lambda\geqslant 0$ **(on pourra chercher à déterminer λ et $\theta-t$).**

(c) Soit M un point d'affixe $r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ avec $r\geqslant 1$. Déduire de la question précédente que M appartient à un unique ensemble $D(t)$. Préciser la valeur de t en fonction de r et de θ.

(d) Faire une figure dans le cas $r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}=2\,\mathrm{i}$.

(e) Montrer que le vecteur d'affixe $(1+\mathrm{i}\,\sqrt{r^2-1})\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ **est orthogonal à l'ensemble $D(t)$ trouvé à la question précédente.**

2°. Cette question est destinée à faire trouver les trajectoires orthogonales des ensembles $D(t)$.

Une fonction θ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I contenu dans $[1,+\infty[$ définit un arc paramétré $r\mapsto M(r)$ où $M(r)$ a pour affixe $r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta(r)}$. On recherche la fonction θ de telle sorte que :

[i] **Pour tout $r \in I$ l'ensemble $D(t)$ auquel appartient $M(r)$ est orthogonal à la tangente en $M(r)$ à l'arc défini ci–dessus;**

[ii] $\theta(\sqrt{2}) = -\dfrac{\pi}{4}\cdot$

(a) Calculer la dérivée de $r \mapsto r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}r}$ en fonction de θ'.

(b) Démontrer que sur l'intervalle I une solution θ vérifie la relation $r\,\theta'(r) = \sqrt{r^2-1}$.

(c) Calculer θ (on pourra effectuer le changement de variables $u = \sqrt{r^2-1}$).

(d) Placer sur un graphique les points $M(r)$ correspondant aux valeurs de r strictement comprises entre 1 et 8, et tout particulièrement ceux pour lesquels $\theta \in \left\{-1,\ -\dfrac{\pi}{4},\ 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$ ainsi que les tangentes en ces points.

MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soient deux nombres complexes a et b tels que $a \neq b$ et $a \neq 0$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère la matrice $A(a,b)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & a & \cdots & a & a \\ b & b & 0 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & 0 & a \\ b & b & b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix}$$

dont le terme général $\alpha_{i,j}$ est égal à 0 si $i = j$, à a si $i < j$ et à b si $i > j$.

1°. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de la matrice $A(a,b)$. Déterminer la dimension du sous–espace propre associé à λ.

2°. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A(a,b)$. Que peut–on en déduire ?

3°. On n'utilisera pas dans cette question les résultats des questions précédentes.

Soit F l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(x,y) \mapsto F(x,y) = \det\left[A(a,b) - x\, I_n + y\, U\right]$$

où U est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le terme général est $u_{i,j} = 1$.

(a) Montrer que pour tout complexe x l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $y \mapsto F(x,y)$ est une fonction polynôme en y de degré inférieur ou égal à 1.

(b) Calculer $F(x,-a)$ et $F(x,-b)$ et en déduire $F(x,0)$ ainsi que le polynôme caractéristique de la matrice $A(a,b)$.

(c) Retrouver le résultat de la question 2°.

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{4\cos x - 5}.$$

Partie A. Changement de variable.

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

1°. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction rationnelle F telle que $f(x) = F(z)$ pour tout réel x (on confondra dans la suite la fonction F et l'unique fraction rationnelle qui lui est associée).

(b) Décomposer F en éléments simples dans le corps $C(X)$ des fractions rationnelles.

(c) Décomposer F en une somme de deux fonctions développables en série entière, l'une de la variable z, l'autre de la variable $u = \dfrac{1}{z}$.

2°. (a) Déterminer des coefficients a_n vérifiant l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$ pour tout réel x.

(b) Expliciter un développement en série de Fourier de f.

Partie B. Relation de récurrence.

Pour tout entier naturel n on note :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

1°. Calculer a_0 et a_1.

2°. Calculer $a_{n+2} + a_n$ et en déduire une relation de récurrence entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

3°. Calculer a_n en fonction de n et comparer au résultat de la partie précédente.

Exercice 3

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$z(x,y) = F\left[\frac{\cos 2x}{\text{ch } 2y}\right]$$

où ch **représente la fonction cosinus hyperbolique** $t \mapsto \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

1°. (a) Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial z}{\partial y}$ **en fonction de x, y et F'.**

(b) Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **et** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **en fonction de x, y, F' et F''.**

2°. Expliciter sous une forme simple les fonctions A et B telles que :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A(x,y)\,F''\left[\frac{\cos 2x}{\text{ch } 2y}\right] + B(x,y)\,F'\left[\frac{\cos 2x}{\text{ch } 2y}\right].$$

3°. On pose $u = \frac{\cos 2x}{\text{ch } 2y}$.

(a) Vérifier que la relation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ **se réduit à une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction F de la seule variable u.**

(b) Intégrer cette équation différentielle et donner les solutions de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ **en précisant le domaine de définition de ces solutions.**

MATHÉMATIQUES

Problème

Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes.

***La fonction f étudiée tout au long du problème est introduite dans la partie* II.**

On rappelle que $\operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right)$ ***et que*** $\operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$ ***pour tout réel*** t**.**

Partie I

1°. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}$ **est intégrable sur** $]0, +\infty[$.

On note $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2°. Donner la valeur de J_k $\left(\text{**on pourra utiliser l'égalité**} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3°. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\operatorname{ch} t}$ **est intégrable sur** $]0, +\infty[$.

On note $\quad K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\ t}\cdot$

4°. (a) Montrer que $\quad K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}\,(1+\mathrm{e}^{-2t})}\,\mathrm{d}t.$

(b) En déduire que $\quad K = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}\cdot$

5°. Montrer que $\quad \dfrac{1}{2} < K < 1.$

Partie II

Soit n **un entier** $\geqslant 1$**. Pour tout réel** x **dans** $]0,\pi[$**, on pose :**

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

6°. (a) Pour tout x **dans** $]0,\pi[$**, montrer que** $\quad A_n(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{n\,x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$

(b) Si $n \geqslant 2$**, montrer que** $\quad f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) + \varepsilon_n(x)$**, où** $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\geqslant 2}$ **est une suite tendant vers** 0**.**

7°. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$**.**

On note $f\,(x)$ **la somme de la série de terme général** $u_n(x)$**.**

8°. (a) Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ **telle que** $\quad f_{2n}\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) - f_n\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) \geqslant C\sqrt{n}.$ **Expliciter une telle constante.**

(b) La suite de fonctions $\quad (f_n)_{n\geqslant 1}$ $\quad$ **converge-t-elle uniformément sur** $]0,\pi[$ **?**

On désigne par i **le nombre complexe de module** 1 **et d'argument** $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ **Si** $\quad z = a + \mathrm{i}\,b$ $\quad$ **est un nombre complexe avec** a **et** b **réels, on désigne par** $\quad \mathrm{Im}\,(z)$ $\quad$ **sa partie imaginaire, c'est-à-dire** b**.**

9°. (a) Soit $x \in]0,\pi[$**. Déterminer le tableau de variations de la fonction** $\quad t \mapsto |\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t} - 1|$ **définie pour** $t \in [0,+\infty[$**.**

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}\,(1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t})}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$.

(c) Établir alors que $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathbf{Im}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t} - \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t}\right)^{n+1}}{\sqrt{t}\,(1-e^{\,\mathrm{i}x-t})}\,\mathrm{d}t.$

(d) En déduire que $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(\mathrm{ch}\,t - \cos x)}\cdot$

(e) Montrer que $f(x) > 0.$

(f) En comparant les valeurs de ch t **et** e^t **sur** $]0,+\infty[$**, montrer que** $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 1.$

Partie III

Dans cette partie, $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cdot$

10°. (a) Établir que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $f(2x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}\cdot$

11°. Montrer que f **est de classe** $\mathcal{C}^0$ **sur** $]0,\pi[$.

12°. Montrer que f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0,\pi[$.

E25D

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 MP

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

Calcul de sommes de séries.

Soit p un nombre entier naturel non nul. On considère la série :

$$S_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}.$$

Le but de l'exercice est de calculer la somme de la série S_p en utilisant la somme de la série entière

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{pn+1}}{pn+1}, \text{ pour } x \text{ réel.}$$

1°. *Etude de la série entière T_p.*

(a) Donner la limite pour n tendant vers $+\infty$ de $\frac{1}{pn+1}x^{pn+1}$ selon les valeurs du réel x.

(b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière T_p.

(c) Pour quelles valeurs de x la série de terme général $(-1)^n x^{pn}$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de x, exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{pn}$ à l'aide des fonctions usuelles.

(d) En déduire, à l'aide d'une intégrale, une expression sur $]-R, R[$ de $T_p(x)$.

Tournez la page S.V.P.

2°. *Une série alternée.*
Dans cette partie, x est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{pn+1}(1-x^{pn+1}).$$

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel y appartenant à $[0,1]$, on a l'inégalité :

$$-p+(pn+p+1)y^{pn+1}-(pn+1)y^{pn+p+1} \leq 0\ .$$

(*indication :* On pourra étudier la fonction qui envoie y sur $-p+(pn+p+1)y^{pn+1}-(pn+1)y^{pn+p+1}$ sur $[0,1]$.)

(b) Montrer que la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et tend vers 0.

(c) Enoncer avec précision le théorème de convergence des séries alternées.
En déduire la convergence de la série $\sum u_n(x)$ et un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ à l'aide de ses sommes partielles.

(d) En déduire les inégalités :

$$\frac{p-(p+1)x+x^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \leq 1-x.$$

3°. Montrer que $S_p = \int_0^1 \frac{1}{t^p+1}\,dt$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien de dimension n≥2.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $(x|y)$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est noté $F^\perp$.
On rappelle que l'application nulle est le seul endomorphisme auto-adjoint ϕ réalisant :

$$\forall x \in E, (\phi(x)|x) = 0.$$

Soit σ un endomorphisme de E. On note σ^* son endomorphisme adjoint.

1°. Soit σ une symétrie vectorielle. On note Inv_σ l'ensemble des invariants et Dir_σ la direction. On a donc $Inv_\sigma = \ker(\sigma - Id_E)$ et $Dir_\sigma = \ker(\sigma + Id_E)$.

(a) Ecrire les matrices des applications linéaires $\sigma - Id_E$ et $\sigma + Id_E$ dans une base de diagonalisation de σ. En déduire $Im\,(\sigma - Id_E)$ et $Im\,(\sigma + Id_E)$ à l'aide de Inv_σ et Dir_σ.

(b) Démontrer que $\ker\,(\sigma^* - Id_E) = Im\,(\sigma - Id_E)^\perp$ et $\ker\,(\sigma^* + Id_E) = Im\,(\sigma + Id_E)^\perp$. Justifier que σ^* est une symétrie dont on précisera l'ensemble des invariants et la direction.

2°. Soit f un endomorphisme auto-adjoint, défini positif, cette dernière hypothèse signifiant que pour tout vecteur non nul x de E, $(f(x)|x) > 0$.
On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $(f(x)|x) = 1$. On suppose que $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.
On veut démontrer que $f(Inv_\sigma) = (Dir_\sigma)^\perp$.

(a) Soit x un vecteur non nul de E. Déterminer un réel k tel que le vecteur kx appartienne à $\mathcal{Q}$.

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in E, (\sigma^* \circ f \circ \sigma(x)|x) = (f(x)|x)\,.$$

(c) En déduire que $\sigma^* \circ f = f \circ \sigma$.

(d) Soit y un vecteur de $f(Inv_\sigma)$. Démontrer que y est invariant par σ^*.

(e) Démontrer que $f(Inv_\sigma) = (Dir_\sigma)^\perp$.

3°. On admet le résultat général suivant :
Soit f un endomorphisme auto-adjoint, dont aucune valeur propre n'est nulle, et dont l'une au moins est strictement positive. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des vecteurs x de E tels que $(f(x)|x) = 1$.
Soit I un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe une symétrie σ dont l'ensemble des invariants est I, et qui vérifie $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ si et seulement si I et $f(I)^\perp$ sont en somme directe. Dans ce cas, la direction de la symétrie σ est $f(I)^\perp$.

(a) On illustre le résultat dans le cas où $n = 2$, et $\mathcal{Q}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé du plan. Soit I une droite passant par l'origine recoupant l'ellipse en deux points A et B. Déterminer la direction de la symétrie par rapport à la droite I laissant globalement invariant l'ellipse $\mathcal{Q}$, et en donner une interprétation géométrique.

(b) Pour p un réel, $(\mathcal{Q}_p)$ est la quadrique de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + 4yz = p$ dans la base canonique. Déterminer la matrice (dans la base canonique) de la symétrie σ, distincte de l'identité, laissant globalement invariante chaque quadrique $(\mathcal{Q}_p)$, et laissant fixe chacun des vecteurs $(1, 1, (p-1)/4)$, p variant dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on considère a un nombre réel non nul.
On note *sign* la fonction qui associe 1 à un réel strictement positif, -1 à un réel strictement négatif, et 0 au réel 0.

1°. *Egalité de deux fonctions*
Pour t un nombre réel fixé, on définit les deux fonctions F_t et G_t sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F_t(B) = \int_{-B}^{B} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{a + i\omega} \quad \text{et} \quad G_t(B) = 2e^{-at}\left(\int_0^t e^{au} \frac{sin(Bu)}{u} du + \frac{1}{2} F_0(B)\right)$$

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que F_t est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée à l'aide de $\frac{e^{iBt}}{a+iB}$ et de $\frac{e^{-iBt}}{a-iB}$.

(b) Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \frac{sin(u)}{u}$, est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que la fonction G_t est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(d) Démontrer l'égalité sur $\mathbb{R}$ des deux fonctions F_t et G_t.

2°. *Calcul de limites.*
Soit t un nombre réel fixé.
On utilise les deux résultats suivants, qu'il est inutile de redémontrer :
(i) Pour toute fonction λ continue sur un segment [b,c] de $\mathbb{R}$, $\int_b^c \lambda(u)\sin(Bu)du$ tend vers 0 lorsque $B \to +\infty$.
(ii) La limite pour x tendant vers $+\infty$ de $\int_0^x \frac{\sin(u)}{u}du$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

(a) Déterminer $\lim_{B\to+\infty} \int_0^t e^{au}\frac{sin(Bu)}{u}du$ en montrant au préalable son égalité avec la limite de $\int_0^t \frac{\sin(Bu)}{u}du$ pour $B \to +\infty$.

(b) Montrer que la limite pour $B \to +\infty$ de $F_0(B)$ est $\pi sign(a)$.

(c) Montrer que la limite pour $B \to +\infty$ de $F_t(B)$ est $\pi e^{-at}[sign(a) + sign(t)]$.

3°. *Une formule d'inversion.*
On définit la fonction x par $x(t) = e^{-a|t|}$, et la fonction H_x par $H_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$, pour ω réel.

(a) Etudier, selon les valeurs du réel a, l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto x(t)e^{-i\omega t}$. En déduire l'ensemble de définition de la fonction H_x suivant les valeurs de a.

(b) Expliciter, en cas d'existence, la valeur de $H_x(\omega)$.

(c) Montrer que pour tout réel t, la fonction $\omega \mapsto \frac{2ae^{i\omega t}}{a^2+\omega^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Démontrer à l'aide du résultat du **2°(c)** la formule d'inversion : $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.
En préciser les conditions de validité.

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'après documents fournis.

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ est *affine* s'il existe des réels A, B tels que $\forall x \in [c,d],\ f(x) = Ax + B$.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions *continues* sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

Soit n un entier naturel non nul et soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ $(n+1)$ réels tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

Ils définissent une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, $(0 \leq i < n)$.

On considère E le sous-ensemble de $\mathcal{C}([a,b])$ formé par les fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dont les restrictions à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sont affines.

1°. *Des exemples de fonctions de E.*

(a) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. On note φ_i la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\forall x \in [a,b], \varphi_i(x) = |x - a_i|$. Montrer que φ_i est un élément de E.

(b) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe un unique élément δ_i de E, vérifiant :

$$\delta_i(a_i) = 1 \text{ et pour tout} j \neq i,\ \delta_i(a_j) = 0.$$

2°. On pose $\mathcal{B} = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ et $\mathcal{C} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, les fonctions φ_i et δ_i étant celles définies au **1°**.

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$.

(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Tournez la page S.V.P.

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E (*indication :* Soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$. On pourra étudier la fonction $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i$ au voisinage de a_j, pour $j \in \{0, ..., n\}$).

3°. *Un cas particulier.*

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $u < v < w$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue nulle en dehors de $]u, w[$, affine sur $[u, v]$ et sur $[v, w]$ et telle que $g(v) = 1$; déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha|x - u| + \beta|x - v| + \gamma|x - w|.$$

4°. *Retour au cas général.*

Soit $f \in E$. *On se propose d'exprimer formellement f sur la base $\mathcal{C}$*

(a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

(b) Par quel calcul matriciel pourrait-on obtenir, une expression de f comme combinaison linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$?

5°. Dans cette question on suppose la subdivision régulière, c'est à dire que pour tout i $(0 \leq i < n)$, on a : $a_{i+1} - a_i = (b - a)/n$.

(a) Expliciter alors la matrice P de la question 3° (a) et calculer son déterminant.

(b) Pour tout i $(0 < i < n)$, exprimer δ_i en fonction de φ_{i-1}, φ_i et φ_{i+1}.

(c) On note $C_0, C_1, ..., C_n$ les $(n+1)$ colonnes de la matrice P^{-1}. Expliciter $C_1, ..., C_{n-1}$.

(d) Finir le calcul de P^{-1}.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3iy'(x) + (e^{ix} - 2)y(x) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

où y représente une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1°. (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on notera $S_{2\pi}$.

(b) Etablir qu'une solution φ de l'équation $(\mathcal{E})$ est 2π-périodique si et seulement si :

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).$$

2°. (a) Soit f une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$. Démontrer que la série de Fourier de f converge vers f en précisant le mode de convergence (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

(b) Soit φ une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$ définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

(i) Déterminer une relation de récurrence liant c_{k-1} et c_k.

(ii) En déduire que : $\forall k \leq 1,\ c_k = 0$.

(iii) Exprimer c_k en fonction de k et de c_2, pour tout $k \geq 2$.

3°. Démontrer que l'espace vectoriel $S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension. Toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont-elles 2π-périodiques?

4°. On considère la solution φ obtenue ci-dessus en posant $c_2 = 1$ et on note φ_1 sa partie réelle et φ_2 sa partie imaginaire ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$).

(a) Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire.

(b) Montrer que $\varphi_1(0) > 0$.

(c) Etablir que φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$ en déterminant (α, β, γ) tels que :

$$0 < \beta < \gamma < 2\pi \text{ et } \varphi_1(\alpha) < 0, \varphi_1(\beta) > 0, \varphi_1(\gamma) < 0.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xye^{-x-y}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure usuelle de plan euclidien orienté. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f, c'est à dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = \lambda$.

1°. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = xe^{-x}.$$

(a) Etudier les variations de la fonction φ et discuter selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$.

(b) Montrer que φ restreinte à $]-\infty, 0[$ définit un C^∞-difféomorphisme de $]-\infty, 0[$ sur lui-même.

2°. Déterminer les extremums de la fonction f (le cas échéant, on précisera la nature de l'extremum obtenu : maximum ou minimum, global ou local).

3°. **(a)** Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une ligne de niveau Γ_λ et une seule.

Tournez la page S.V.P.

(b) Déterminer dans le cas général un vecteur tangent à Γ_λ en (x_0, y_0) et préciser les exceptions.

(c) Etablir que toutes les courbes Γ_λ admettent un même axe de symétrie Δ que l'on précisera.

Pour tout $\lambda \neq 0$, on note Γ_λ^+ l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x > 0$ et Γ_λ^- l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x < 0$.

On recommande de traiter la question ***6°*** *au fur et à mesure de l'avancement des questions* ***4°*** *et* ***5°***.

4°. Soit $\lambda > 0$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Γ_λ^+ soit non vide.

(b) Montrer que, dans ce cas, Γ_λ^+ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

(c) Etablir que la courbe Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $y = g_\lambda(x)$ où g_λ est une fonction C^∞ sur $]-\infty, 0[$ dont on précisera les variations et les limites.

5°. Dans ce qui suit, on remplace la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on note alors (X, Y) les nouvelles coordonnées du point (x, y).

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, caractériser Γ_λ par une équation de la forme $F(X, Y) = \lambda$.

(b) On suppose $\lambda < 0$. Montrer que la branche Γ_λ^- de la courbe Γ_λ se caractérise par une équation de la forme $Y = G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction C^∞ dont on précisera les variations et les branches infinies (on utilisera la fonction φ définie en **1°**). Comment obtient-on l'autre branche Γ_λ^+?

(c) On suppose $\lambda > 0$. Caractériser la branche Γ_λ^+ par une équation de la forme $Y = \pm G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction dont on étudiera les variations à l'aide la fonction φ définie en **1°**.

6°. Indiquer sur un graphique l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction f.

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

durée : 4 heures

Problème

Préliminaires (définitions et rappels).

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul, on note $u^p = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{p\ fois}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera $P(u)$ l'application linéaire définie par : $\forall q \in \mathbb{N}\ ;\ P(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k u^k$ si $P(X) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} a_k X^k$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *commutant* de u l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u, on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}.$$

  On rappelle que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Partie 0. Un exemple.

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs $1, 2, ..., n$. Ainsi, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & . & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M.

1. Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

Dans tout la suite du problème, u désigne un endomorphisme de E.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé : $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id))$.
Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite *adaptée* à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $(e_1^i, ..., e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = (e_1^1, ..., e_{n_1}^1, e_1^2, ..., e_{n_2}^2, ..., e_1^p, ..., e_{n_p}^p)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u. Que peut-on dire de u_i?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u))$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$:

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & . & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & V_p \end{pmatrix}$$

avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geqslant 2$. On note r le rang de u. On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \subset \ker u$. En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

2. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E muni de la base $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_r)$, montrer que la famille $(u(e'_1), u(e'_2), \cdots, u(e'_r))$ est une base de $\mathrm{Im}u$.

3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\ker u = \mathrm{Im}u \oplus H$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$Mat\,(u, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \overleftrightarrow{r} & \overleftrightarrow{s} & \overleftrightarrow{r} \end{matrix}$$

I_r désigne la matrice identité d'ordre r.

4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; la matrice de v dans la base $\mathcal{B}'$ est définie par blocs en posant :

$$Mat\,(v, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \overleftrightarrow{r} & \overleftrightarrow{s} & \overleftrightarrow{r} \end{matrix}$$

Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases}$$

$0_{p,q}$ désignant la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

5. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n et de r. Montrer que : $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

$$(1) \qquad (u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0.$$

Id désigne l'application identique de E. On rappelle que :
$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id)$.

On pose $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$, on suppose de plus $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

1. Montrer en rappelant le théorème utilisé que :

$$E = E_1 \oplus E_2 .$$

On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Tournez la page S.V.P.

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$$

En déduire deux polynômes U et V tels que :

$$1 = U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 \quad , \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

3. Montrer que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.

4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.

5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2, en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\dim \mathcal{C}(u)$.

   (a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.

   (b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$Mat(w, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \\ \overbrace{}^{n_1} \quad \overbrace{}^{n_2} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array}$$

   où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2.

   (c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\ker(u - 2Id))$.

   (d) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \\ \overbrace{}^{n_1} \quad \overbrace{}^{n_2} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array}$$

   et

$$V_2 N = N V_2.$$

   (e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.

   (f) On suppose u non diagonalisable, déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$ en fonction de n_1, n_2 et $\dim(\ker(u - 2Id))$.

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

Dans tout le problème, a et b désignent deux réels positifs tels que : $0 < a < b$.

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, x > 0\ ,\ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Question 1.

1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) \geqslant 0$.

1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

Question 2.

2.1. Prouver que S est dérivable sur $[a,b]$.

2.2. En déduire que S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall\, x > 0\ ,\ \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Tournez la page S.V.P.

Question 3.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

Question 4.

4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

4.2. En déduire que :

$$\forall\, x > 0\ ,\ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Question 5.

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, x > 0\ ,\ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp(-\gamma x + S(x)).$$

5.1. Montrer que $\forall x > 0,\ \varphi(x+1) = x\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calculer $\frac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\frac{d\varphi}{dx}(1)$?

Question 6.

Pour $n \geqslant 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall\, x > 0\ ,\ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ \ldots\ (x+n)}.$$

Montrer que $\forall\, x > 0$, $\ln(\varphi_n(x))$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7.

On note $\pi_p = \prod_{n=1}^{p} \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}}$ (p entier naturel > 0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p \geqslant 1}$ vers une limite $L(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall\, x > 0\ ,\ \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma)$.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, dt$.

Question 1.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

1.2. Calculer $\Gamma(1)$.

1.3. Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Question 2.

Pour n entier naturel $\geqslant 1$, on définit la fonction g_n de de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$t \to \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t < n, \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

2.1. Prouver que : $\forall\ t \geqslant 0\ ,\ \exp(-t) \geqslant 1 - t$.

En déduire que : $\forall\ t \geqslant 0\ , \forall\ n \geqslant 1\ ,\ 0 \leqslant g_n(t) \leqslant \exp(-t)$.

2.2. Montrer alors que :

$$\forall\ x > 0\ ,\ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = \Gamma(x).$$

Question 3.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt.$$

3.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

3.2. Prouver que :

$$\forall\ x > 0\ , \forall\ n \geqslant 1\ ,\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = n^x I_n(x).$$

3.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall\ x > 0\ ,\ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie 3.

Dans toute cette partie, $x \in\ ]0,1[$.

Question 1.

Vérifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t\, dt$.

Question 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit les fonctions :

v_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall\ t > 0\ ,\ v_n(t) = \frac{x^n}{n!} \exp(-t)(\ln t)^n$

et T_n de $]1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall\ u > 1\ ,\ T_n(u) = \int_{1/u}^u v_n(t)\, dt$.

2.1. Pour $u > 1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\frac{1}{u}, u\right]$.

2.2. Justifier que : $\forall\ u > 1\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^{u} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \right) dt.$

Question 3.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \exp(-t) |\ln t|^n dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \int_1^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt.$$

3.1. Montrer que :

$$\forall\ p \geqslant 0\ ,\ \sum_{n=0}^{p} (a_n + b_n) \leqslant \int_0^{+\infty} \exp(-t + x|\ln t|)\, dt.$$

3.2. En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1, +\infty[$.

Question 4.

4.1. Vérifier que $\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t) (\ln t)^n \right) dt.$

4.2. Prouver alors que :

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt \right).$$

Question 5.

5.1. A l'aide des parties 1 et 2, vérifier que :

$$\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

puis que $\frac{\frac{d\Gamma}{dx}(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).$

5.2. En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in]0,1[\ ,\ \Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right).$$

5.3. Démontrer alors le résultat : $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t\, dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.

F23O

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Aucune calculatrice n'est autorisée.

Exercice 1

E est un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ quelconque.
Soit (Γ) l'arc paramétré défini par :

$$x(t)=\frac{t}{1+t^4}\ ,\ y(t)=\frac{t^3}{1+t^4}\ ,\ z(t)=\frac{t^2}{1+t^4}\ ,\ t\in\mathrm{R}\,.$$

Pour tout réel λ on considère le plan (P_λ) d'équation : $z=\lambda$.

1° Discuter suivant λ le nombre de points d'intersection de (Γ) et de (P_λ).

On note J l'ensemble des réels λ pour lesquels (Γ) et (P_λ) se coupent en quatre points.

2° Soit λ un élément de J.

a) Démontrer que les quatre points d'intersection de (Γ) et de (P_λ) sont les sommets d'un parallélogramme noté *ABCD*.

b) Vérifier que les directions des côtés de ce parallélogramme *ABCD* sont indépendantes de λ.

c) Prouver que *ABCD* est un rectangle si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même norme.

3° On suppose que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé.
Calculer en fonction de λ l'aire du rectangle *ABCD*.

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit α un réel strictement positif.

Pour *n* entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $[0,+\infty[$ vers ***R*** définie par :

$$u_n(x)=\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\,.$$

Tournez la page S.V.P.

1° Etude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

b) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.
Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

d) On suppose dans cette question que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour x élément de $[0,+\infty[$, on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

i) Etablir l'inégalité : $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+k\,x^2)}$.

ii) En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,a]$ où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $[0,+\infty[$ vers $\boldsymbol{R}$ définie par : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2° Etude de la continuité de S.

a) Montrer que, pour tout α, S est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0,+\infty[$.

c) On suppose que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

i) Soit f l'application définie sur $[1,+\infty[$ par : $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^{\alpha}(1+t\,x^2)}$. Prouver que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

ii) Montrer que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x)$.

iii) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+t\,x^2)}dt$.

iv) En déduire que S n'est pas continue en 0.

Exercice 3

$\boldsymbol{R}$ est le corps des nombres réels, C celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le C-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C . I est la matrice identité de E. Pour A élément de E, a_{ij} est le coefficient de A situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note F le C-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans C.

Pour $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de F, on pose $\|X\| = \sup_{1\le k\le n} |x_k|$; on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur F. On note $KerA$ l'ensemble des éléments X de F vérifiant $AX = 0$.

Une matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients réels est dite stochastique si:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2,....,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \\ \forall (i,j) \in \{1,2,....,n\}^2, 0 \le a_{ij} \end{cases}$$

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de E.
Dans tout l'exercice A est un élément de S, $A \neq I$.

Première partie

1° Soit B un élément de S. Prouver que AB appartient à S.

2° Montrer que pour tout k entier naturel, A^k appartient à S.

3° Soit X un élément de F. Démontrer que $\|AX\| \le \|X\|$. En déduire pour tout k entier naturel, $\|A^k X\| \le \|X\|$.

4° Montrer que 1 est valeur propre de A.

5° Soit λ une valeur propre complexe de A, montrer que : $|\lambda| \le 1$.

6° Soit λ une valeur propre complexe de A, telle que $|\lambda| = 1$.

a) Soit X un élément de $Ker(A-\lambda I)^2$. On pose : $Y = (A-\lambda I)X$.

i) Etablir que, pour tout k entier naturel, $k \ge 2$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

ii) En déduire que $Y = 0$ (on pourra utiliser l'inégalité établie à la question 3° de la première partie).

iii) Prouver que $Ker(A-\lambda I)^2 = Ker(A-\lambda I)$.

b) En déduire que, pour tout k entier naturel, $k \ge 2$, on a :

$$Ker(A-\lambda I)^k = Ker(A-\lambda I).$$

Deuxième partie

On suppose que A admet $r+1$ valeurs propres complexes deux à deux distinctes, on les note $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_r$, avec $\lambda_0 = 1$.

Dans toute cette partie p désigne un entier naturel non nul.

Tournez la page S.V.P.

Pour X élément de F, on pose : $X_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} A^k X$. On veut étudier la convergence, quand p tend vers $+\infty$, de la suite (X_p) dans F.

1° Soit λ une valeur propre complexe de A, $\lambda \neq 1$.

a) Prouver que : $\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right) = 0$.

b) On suppose que X est un élément de $Ker(A-\lambda I)$. Montrer que la suite (X_p) converge vers 0.

2° On suppose, dans cette question, que A est diagonalisable.

Soit X un élément quelconque de F. Démontrer que la suite (X_p) converge vers un élément de $Ker(A-I)$.

3° On s'intéresse dans cette question à une valeur propre complexe λ de A vérifiant : $|\lambda| < 1$.

Soit X un élément de $Ker(A-\lambda I)^q$, où q est un entier naturel, $q \geq 2$.

a) Soit k un entier naturel, $k \geq q$. Montrer que :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j \quad \text{et que} \quad A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} C_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X .$$

$$\text{On rappelle que } C_k^j = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} .$$

b) Prouver que, pour tout j élément de $\{0,1,....,q-1\}$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} C_k^j \lambda^{k-j} = 0 .$$

c) Démontrer que la suite (X_p) converge vers 0.

4° On suppose que le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(T)$, est égal à :

$P_A(T) = (-1)^n \prod_{j=0}^{s}(T-\lambda_j)^{k_j} \prod_{j=s+1}^{r}(T-\lambda_j)^{q_j}$ où $s, k_0, ..., k_s, q_{s+1}, ..., q_r$ sont des entiers naturels non nuls avec $s < r$ et où $|\lambda_j| = 1$ si et seulement si $j \leq s$.

a) Prouver que F est égal à la somme directe de sous espaces vectoriels suivante :

$F = Ker(A-\lambda_0 I) \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_s I) \oplus Ker(A-\lambda_{s+1} I)^{q_{s+1}} \oplus .. \oplus Ker(A-\lambda_r I)^{q_r}$.

b) Soit X un élément quelconque de F. Etudier la convergence de la suite (X_p).

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis.

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 PC

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On note sh la fonction d'une variable réelle définie par $\mathrm{sh}(t) = (e^t - e^{-t})/2$.

On note α le réel $\ln(1+\sqrt{2})$.

On considère la suite $I = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^\alpha (\mathrm{sh}t)^n dt.$$

1°. *Limite de la suite I.*

(a) Résoudre l'équation $\mathrm{sh}t = 1$.

(b) Soit t dans $[0, \alpha[$. Etudier la limite de la suite $((\mathrm{sh}(t))^n)_{n\geqslant 0}$.

(c) A l'aide du théorème de convergence dominée (dont on rappellera l'énoncé), déterminer la limite de la suite I.

Tournez la page S.V.P.

2°. *Equivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

(a) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

(b) Démontrer que la suite I est décroissante et déduire de la relation précédente un encadrement de I_n.

(c) Déduire des résultats précédents un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3°. *Etude des séries $\sum I_n$ et $\sum(-1)^n I_n$.*

(a) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

(b) Montrer que la série $\sum(-1)^n I_n$ est convergente et que sa somme vaut :

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\mathrm{sh}(t)} dt.$$

Exercice 2

Soit H une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$.
Pour tout réel non nul λ, on pose :

$$J(\lambda) = \int_0^1 H(t)\cos(\lambda t)dt.$$

1°. Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

2°. Soit f la fonction (2π-périodique) de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin t|$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

(b) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ (on citera précisément le théorème utilisé).

3°. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties qu'il existe une constante k dépendant de H telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, |J(\lambda)| \leqslant k|\lambda^{-1}|.$$

4°. A l'aide des résultats précédents, établir que:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^1 H(t)|\sin(\lambda t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 H(t)dt.$$

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une application linéaire f définie sur E telle qu'il existe $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de vecteurs de E vérifiant :

pour tout i dans $\{1, 2, ..., n-1\}$, $f(u_i) = u_{i+1}$ et $f(u_n) = u_1$.

On suppose de plus que $u_i \neq u_1$, pour i $(2 \leqslant i \leqslant n)$.

1°. *Etude de la famille* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$.

(a) Montrer que les n éléments de la famille $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ sont deux à deux distincts.

(b) On se propose de démontrer par l'absurde que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Soit α un réel tel que $u_2 = \alpha u_1$. Montrer que $\alpha^n = 1$ et en déduire une contradiction.

(c) Déduire des résultats précédents que $f^n = Id$.

2°. On suppose dans cette question que $n = 4$. Dans la base (u_1, u_2) de E, on note $U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ la matrice de f.

(a) Calculer U^4 et en déduire que $b = 0$ et $a^2 = 1$.

(b) Démontrer que $a = -1$.

(c) Déterminer l'image du vecteur $\Omega = \sum_{i=1}^{4} u_i$ par f et en déduire que $\Omega = 0$.

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 PC

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 = a$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2/\sqrt{n}$.

1°. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite $\mathbf{u}$ est constante. Déterminer cette valeur.

2°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ converge vers une limite finie l. Montrer que $l = 0$.

3°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ vérifie la propriété : $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{n}$. Montrer que $\mathbf{u}$ est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

4°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ vérifie la propriété
(#): $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k < \sqrt{k}$.

(a) Montrer que $u_n < \sqrt{n}, \forall n \geqslant k$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant k}$ est décroissante.

Tournez la page S.V.P.

(c) Que peut-on en déduire pour la suite **u** ?

5°. Exprimer u_n en fonction de a et de n, pour tout entier naturel n.

6°. Dans cette question, on considère de plus la série de terme général $w_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n+1)$.

(a) Montrer que cette série est convergente.

(b) Montrer que la suite **u** est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

(c) En déduire que la suite **u** est convergente si et seulement si $a < \exp W/2$, où W désigne la somme de la série de terme général w_n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y).$$

1°. Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

2°. Déterminez les points $z = (x,y)$ dans le carré $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$.

3°. Montrer que $f(x,y) = 4 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{(x+y)}{2}$.

4°. Représenter graphiquement les ensembles

- $S_0 = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] | f(z) = 0\}$,
- $S_{>0} = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] | f(z) > 0\}$
- $S_{<0} = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] | f(z) < 0\}$.

5°. Déterminer les extrema locaux de f sur le carré $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

6°. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$? La fonction f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les décrire.

Exercice 3

On considère dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ définie paramétriquement dans le repère orthonormé (O, x, y) par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^2+t+1} \end{cases}$$

1°. Etudier les variations de $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$.

2°. En déduire que la courbe Γ est contenue dans un carré que l'on déterminera.

3°. Dans cette question, on étudie la courbe Γ au voisinage du point $O = (0, 0)$.

(a). Montrer qu'on peut prolonger par continuité la courbe Γ en ajoutant le point O.

(b). Soit $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$. Calculer les limites du vecteur $t\,\overrightarrow{OM(t)}$ lorsque t tend vers $-\infty$ et lorsque t tend vers $+\infty$.

(c). Montrer que la droite passant par O de vecteur directeur $t\,\overrightarrow{OM(t)}$ admet une position limite lorsque t tend vers $-\infty$ et lorsque t tend vers $-\infty$; en déduire que la courbe Γ admet une tangente verticale en ce point.

Désormais, on note Γ' la courbe Γ à laquelle on a ajouté le point $O = (0, 0)$.

4°. Etablir une équation cartésienne de Γ'.

5°. En déduire que Γ' est une ellipse.

6°. Montrer que Γ' admet une tangente verticale en un unique point A autre que le point O. Montrer que le milieu du segment $[O, A]$ est le centre G de Γ'.

7°. *Une question indépendante des précédentes.*

(a) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur une base orthonormée directe. Expliciter ses valeurs propres et une telle base de diagonalisation.

(b) En déduire les axes de Γ'.

(c) Déterminer les sommets de Γ'.

8°. Représenter Γ'.

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 PC

durée 4 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Problème

Le problème comporte trois parties indépendantes, mais on pourra utiliser dans la troisième partie des résultats obtenus dans la première, et admettre l'existence et l'unicité de la fonction φ étudiée dans la partie **2**.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à n à coefficients réels.

Le but du problème est l'étude d'une application linéaire et d'une équation différentielle associée à cette application linéaire.

Tournez la page S.V.P.

1 Première partie : étude de l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_n : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) \end{array}$$

1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{L}_n$

a) Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Ecrire la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base des monômes $(X^k, 0 \leqslant k \leqslant n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) $\mathcal{L}_n$ est-il diagonalisable ?

d) Comparer le degré de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ au degré du polynôme $\mathcal{L}_n(P)$ et en déduire que si un polynôme non nul appartient à Ker $\mathcal{L}_n$ alors il est de degré 3.

e) Montrer que si $n \geq 3$, Ker $\mathcal{L}_n$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 - 6X^2 + 18X - 24$.

f) Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n \leqslant 2$.

1.2 Un exemple : $n = 5$

a) Ecrire la matrice de $\mathcal{L}_5$ dans la base des monômes $(X^k, 0 \leqslant k \leqslant 5)$ de $\mathbb{R}_5[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathcal{L}_5$. Sans calculs supplémentaires, déterminer trois sous-espaces propres de $\mathcal{L}_5$.

c) Montrer que les polynômes 1, X, X^2, $X^4 - 4X^3$, X^5 appartiennent à Im $\mathcal{L}_5$ et qu'ils en forment une base.

d) Déterminer, successivement, sans résoudre l'équation différentielle correspondante, l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$\begin{array}{rll} (i) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = X^5 \\ (ii) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = X^4 \end{array}$$

e) En déduire selon les valeurs de l'entier p $(0 \leqslant p \leqslant 5)$ l'existence de polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^p.$$

2 Deuxième partie : étude locale d'une solution particulière de l'équation différentielle

$$\textbf{(E)} \quad xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$$

2.1 Montrer par récurrence que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Montrer sans calcul l'existence et l'unicité d'une solution φ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi(1) = 2$ et $\varphi'(1) = -2$ (on ne demande pas d'expliciter φ, ni de résoudre (E)).

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \varphi^{(n)}(1)$. En dérivant n fois la relation :
$$x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0,$$
montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$.

2.4 Justifier que φ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 1 est de la forme :
$$\varphi(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$
Déterminer les valeurs de a, b, c, d.

2.5 Soit Γ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées (1, 2) et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

3 Troisième partie : Recherche de solutions de (E) développables en série entière

3.1 Rappeler quelles sont les solutions polynomiales de (E).

3.2 On suppose qu'il existe des solutions non polynomiales développables en série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit
$$f : x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
une telle solution définie sur $]-R, +R[$.

a) Montrer que f est solution de (E) sur $]-R, +R[$ si et seulement si :
$(n+1)(n-4)a_{n+1} + (n-3)a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+5} = (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!}\, 5!\, a_5$.

Donner, dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ et $a_5 = 1$, une solution de (E) développable en série entière. Soit ψ cette solution. Préciser son rayon de convergence.

Tournez la page S.V.P.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

3.3 Montrer que F: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \alpha(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + \beta\psi(x).$$

3.4 Montrer que G: $\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad G(x) = \gamma(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + \delta\psi(x).$$

3.5 La fonction φ définie au 2.2 est-elle prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ?

3.6 Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Sont-elles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?

3.7 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 120(-4 + 3x - x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + (x+4)e^{-x}).$$

IMPRIMERIE NATIONALE. - D'après documents fournis.

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisée

Problème

Dans tout le problème, on considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n .$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$U_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right).$$

1. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que :

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

Tournez la page S.V.P.

2. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

   (i) Etablir les égalités :

$$v_n = \frac{1}{2x_n} \ln\left(\frac{1+x_n}{1-x_n}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_n^{2i}}{2i+1}.$$

   (ii) En déduire que :

$$v_n \leqslant \frac{x_n^2}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

   (iii) Justifier que :

   (a) La suite $(\ln(U_n))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   (b) La suite $(\ln(U_n) - \dfrac{1}{12n})_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une valeur strictement positive.

Dans la suite, on admettra que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la valeur $\sqrt{2\pi}$. On retrouve ainsi la formule de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Partie II

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f.
2. En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de terme général $n^{n-1}e^{-n}/n!$ converge.
3. En déduire la convergence normale de la série définissant f sur $[-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}]$.
4. Quel est le domaine de continuité de f?

Partie III

1. Montrer que tout entier naturel n non nul vérifie l'inégalité :

$$(1+\frac{1}{n})^n < e.$$

(*indication :* On pourra montrer que $\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x$.)

2. Quelle est la classe de f sur l'intervalle $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$? Exprimer f' sous forme de série entière sur cet intervalle.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ (*indication :* On pourra regrouper les termes deux par deux dans l'expression de f').

Partie IV

Pour tout entier naturel strictement positif N, on définit A_N et B_N en posant :

$$A_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{n^{n-1}}{n!}(\frac{-1}{e})^n \text{ et } B_N = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{n^{n-1}}{n!}(\frac{-1}{e})^n.$$

1. Montrer que les deux suites $(A_N)_{N\geqslant 1}$ et $(B_N)_{N\geqslant 1}$ sont adjacentes.

2. Etablir un encadrement de $f(\frac{-1}{e})$ à l'aide de A_N et de B_N, pour tout entier naturel strictement positif N.

3. Déterminer un entier naturel N tel que $A_N - B_N < 10^{-2}$.

4. En déduire une valeur approchée de $f(\frac{-1}{e})$ à 10^{-2} près.

Partie V

Soit m un entier naturel non nul. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (1-e^x)^m.$$

1. Après avoir justifié que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout entier i compris entre 0 et m, il existe un polynôme P_i tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(i)}(x) = P_i(e^x)(1-e^x)^{m-i}.$$

Tournez la page S.V.P.

2. En développant $\varphi(x)$, montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geqslant 2,\ \sum_{n=1}^{m}(-1)^n C_m^n n^{m-1} = 0.$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(y) = ye^{-y}$.

3. Etudier et représenter la fonction g.

4. Montrer l'existence d'un unique réel $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $\alpha e^{-\alpha} = -\frac{1}{e}$. Montrer de plus :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ g(y) \in [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}].$$

5. Montrer que :

$$\forall y \in [\alpha, 1],\ f(ye^{-y}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m).$$

6. Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On considère la suite double $(z_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définie par :

$$\begin{array}{rcll} z_{n,m} & = & (-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ & = & 0 & \text{sinon .} \end{array}$$

Montrer que cette double suite est sommable.

7. En déduire que : $\forall y \in [\alpha, -\alpha],\ f(ye^{-y}) = y$.

On admettra dans ce qui suit que cette propriété est valable sur l'intervalle $[\alpha, 1]$.

8. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}]$.

9. Que peut-on dire de la dérivabilité de f en les points d'abcisses $\frac{-1}{e}$ et $\frac{1}{e}$? Justifier précisément votre réponse.

IMPRIMERIE NATIONALE. - D'après documents fournis.

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (i) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}u$, montrer que $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$ ou $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base?

   (ii) Dans le cas où $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$, montrer que $Tr(u) = 0$.

   (iii) Montrer alors l'équivalences des trois assertions :

   (a) u est diagonalisable.

   (b) $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u$.

   (c) $Tr(u) \neq 0$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ F_A(X) = Tr(AX),$$

où $Tr(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.

(i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(ii) On considère l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ & & A & \mapsto & F_A \end{array}$$

Montrer que F est linéaire.

(iii) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, excepté le (i,j)-ième qui est égal à 1). Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

(iv) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\begin{array}{rccc} \psi_f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & & X & \mapsto & f(X)J \end{array}$$

On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = Tr(AX).$$

(ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f? Quel est le rang de ψ_f?

(iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

(iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.

(v) On suppose que ψ_f est diagonalisable. Déterminer le polynôme minimal de ψ_f.

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(\cos x) \end{array}.$$

(i). Calculer la limite quand x tend vers 0 de :

$$\frac{1}{x^2} f(x).$$

(ii). En déduire qu'il existe des réels strictement positifs α, C et C' telle que :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad -Cx^2 \leqslant \ln(\cos x) \leqslant -C'x^2.$$

(iii). Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que la série de terme général $(u_n)^2$ converge.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \cos u_n > 0.$$

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ln(\cos u_n)$ converge.

2. Soit β un réel dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on pose $P_n = \prod_{i=0}^{n} \cos(\beta/2^i)$. On note $\mathbf{P}_\beta$ la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$.

(i) Montrer que la suite $\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive. En déduire qu'elle admet une limite $l_\beta \geq 0$.

(ii) Montrer en utilisant les résultats de la question 1. que $l_\beta \neq 0$.

3. Dans cette question on considère le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$ comme un plan affine. Chaque point est caractérisé par son affixe. Soit O le point d'affixe 0. Soit Ω le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout entier naturel n, on pose $\theta_n = \frac{2\pi}{2^{n+2}}$ et on considère le polygone régulier Π_n inscrit dans Ω défini par ses 2^{n+2} sommets :

$$1, e^{i\theta_n}, ..., e^{ik\theta_n}, ..., e^{i(2^{n+2}-1)\theta_n}$$

(i) Représenter sur une même figure Π_0 et Π_1.

(ii) Soit A le point d'affixe 1. Soit θ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; soient B le point d'affixe $e^{i\theta}$ et C le point d'affixe $e^{2i\theta}$. On note M le milieu de AC.

a. Montrer que l'aire du triangle OAC vérifie la relation :

$$\text{aire}(OAC) = OM.MA = \sin\theta\cos\theta.$$

b. En déduire que les aires respectives des triangles $0AC$ et OAB vérifient la relation :

$$\text{aire}(OAC) = 2\cos\theta\,\text{aire}(OAB).$$

Tournez la page S.V.P.

(iii) Soit n un entier naturel. On note B_n le point d'affixe $e^{i\theta_n}$. Exprimer l'aire du polygone Π_n en fonction de l'aire du triangle OAB_n.

(iv) En utilisant les résultats des questions (ii)et (iii), montrer que :

$$\text{aire}(\Pi_n) = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})\text{aire}(\Pi_{n+1}).$$

(v) En admettant que lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire de Π_n tend vers l'aire de Ω, montrer que :

$$l_{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi},$$

$l_{\frac{\pi}{4}}$ désignant la limite de la suite $\mathbf{P}_{\frac{\pi}{4}}$ définie dans la question 2.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a un réel strictement positif. Soit I le point de coordonnées $(a, 0)$. On considère $\mathcal{C}$ le cercle de centre I passant par 0.

1. Soit M un point du plan distinct de O. On note (α, β) les coordonnées de M.

   a) Ecrire en fonction de α et β, l'équation de la droite (D_M) passant par M et othogonale au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

   b) Calculer en fonction de a, α et β le carré de la distance du point I à la droite (D_M).

   c) Trouver une relation entre α et β nécessaire et suffisante pour que (D_M) soit tangente au cercle $\mathcal{C}$.

On note (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur les tangentes au cercle $\mathcal{C}$.

2. En déduire une équation cartésienne de (Γ). Montrer que (Γ) admet une équation polaire de la forme $r = a(1 + \cos(\theta))$.

3. Construire (Γ) dans le repère Oxy en prenant $a = 2cm$.

4. On note $(\Gamma_{2\pi/3})$ la courbe déduite de (Γ) par la rotation affine de centre O et d'angle $2\pi/3$.

   a) Tracer $(\Gamma_{2\pi/3})$ sur le même graphique que (Γ).

   b) Calculer, en fonction de a, l'aire de la portion de plan intérieure aux courbes (Γ) et $(\Gamma_{2\pi/3})$.

IMPRIMERIE NATIONALE. - D'après documents fournis.

e4a concours

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A

durée 3 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Partie 1.

Question 1.

On appelle θ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, paire et périodique de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \theta(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ \theta(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

1.1. Tracer les graphes des fonctions θ et θ_1, dérivée de la fonction θ.

1.2. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction θ_1.
Etudier sa convergence.

Question 2.

En déduire la série de Fourier associée à la fonction θ et celle de Φ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ \Phi(x) = \int_0^x \theta(u)\,du.$$

Etudier la convergence de ces séries.

Tournez la page S.V.P.

La suite du problème consiste à rechercher les fonctions U de classe C^0 sur $\Omega = [0,\pi] \times \mathbf{R}_+$ et C^2 sur $[0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \quad \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) & (1) \\ \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad U(0,t) = U(\pi,t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0,\pi], \quad \lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0 & (3) \\ \forall x \in [0,\pi], \quad U(x,0) = \Phi(x) & (4) \end{cases}$$

Une fonction U vérifiant les quatre relations (1), (2), (3) et (4) est dite solution du problème (P).

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 2.

On se propose de chercher des solutions de l'équation différentielle (1) sous la forme de fonctions V définies sur Ω par :

$$\forall (x,t) \in \Omega, \; V(x,t) = g(x).h(t)$$

où g est une fonction réelle de classe C^2 sur $[0,\pi]$ et h une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$.

Question 1.

1.1. Montrer que si les fonctions g et h sont solutions des équations différentielles :

$$\begin{cases} g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$$

où μ est un réel quelconque, alors la fonction $V : (x,t) \to V(x,t) = g(x).h(t)$ vérifie (1).

1.2. Trouver toutes les solutions des équations différentielles précédentes.

1.3. On prend $\mu = -k^2$, $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer une suite de fonctions $(V_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$:

$$\begin{aligned} V_k : \quad \Omega &\to \mathbf{R} \\ (x,t) &\mapsto V_k(x,t) = g_k(x).h_k(t) \end{aligned}$$

vérifiant (1), (2) et (3).

Question 2.

Soit : H : $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$

$$(x,t) \mapsto H(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

et pour $k \in \mathbf{N}^*$, R_k : $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$

$$(x,t) \mapsto R_k(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ pour que la fonction H soit solution du problème (P).

2.1. A l'aide de la relation (4), déterminer les coefficients $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$.

2.2. Montrer qu'alors, la fonction H est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t avec :

$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x,t)$$

et $$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \ \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x,t).$$

Question 3.

Trouver une solution au problème (P).

Partie 3.

Question 1.

On note $E = \left\{ \begin{array}{c} \omega, C^0 \text{ sur } \Omega \text{ et } C^2 \text{ sur } [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \text{ telle que } \omega \text{ vérifie (1), (2), (3) et} \\ \forall x \in [0,\pi], \ \omega(x,0) = 0 \end{array} \right\}$.

1.1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1.2. Prouver que si u et v sont solutions du problème (P), alors $u - v \in E$.

Question 2.

Soit $\omega \in E$.

2.1. Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'intégrale : $\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega(x,t) . \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t) \right] dx$.

Tournez la page S.V.P.

2.2. En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\,dx = 0$.

2.3. On note ψ : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$T \to \psi(T) = \int_0^T \left(\int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right) dt + \int_0^T \left(\int_0^\pi \left(\omega(x,t)\,\frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t)\right) dx\right) dt.$$

Montrer que ψ est nulle sur $\mathbf{R}_+$. (On pourra, pour $T \in \mathbf{R}_+$, calculer $\psi'(T)$).

En déduire que $\forall\ T \in \mathbf{R}_+$, $\int_0^\pi \omega^2(x,T)\,dx = 0$.

2.4. Démontrer que E ne contient que la fonction nulle.

2.5. Combien le problème (P) possède-t-il de solutions ?

IMPRIMERIE NATIONALE. - D'après documents fournis.

G23L

e4a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B

durée 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice 1

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de **R**. On lui associe la suite (p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.
Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n), telle que (p_n) converge vers $p = 0$.

2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0 \text{ , pour } n > n_0 .$$

On pose, pour n supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a) Pour n supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.

b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.

c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

Tournez la page S.V.P.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n, on a : $u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum {u_n}^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum {u_n}^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\, dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n} .$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et de $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum {u_n}^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$.

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

[On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$].

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$.
On introduit les notations suivantes :
$M_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $M_{n,1}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, une colonne et à coefficients réels.
$GL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{R})$,
$O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$,
$S_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, $S_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle, $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive,
$TS_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbf{R})$, $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $TS_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
On rappelle que $TS_n(\mathbf{R})$ est stable pour la multiplication des matrices et que si une matrice de $TS_n(\mathbf{R})$ est inversible, son inverse appartient à $TS_n(\mathbf{R})$.
Pour toute matrice M on note ${}^tM$ la transposée de M et $\det(M)$ le déterminant de M lorsque M est une matrice carrée.
E et F étant deux **R**-espaces vectoriels de dimensions finies de bases **u** et **v** respectivement et g une application linéaire de E vers F, $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g)$ désigne la matrice de g dans les bases **u** et **v**.

1° $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel noté $\langle \ | \ \rangle$, donc si $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbf{R}^n$ on a : $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

$\mathbf{b} = (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Soit A un élément de $GL_n(\mathbf{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que : $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}}(f) = A$.

a) Pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots\ldots, n\}$, on pose : $e'_i = f(e_i)$.

Prouver que $\mathbf{b}' = (e'_1, e'_2, \ldots\ldots, e'_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

Tournez la page S.V.P.

b) Soit $\mathbf{b}'' = (e''_1, e''_2, ..., e''_n)$ la base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ déduite de $\mathbf{b}'$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On rappelle que pour tout j élément de $\{1,2,.....,n\}$, le sous espace vectoriel engendré par $(e'_1, e'_2, ..., e'_j)$ est égal au sous espace vectoriel engendré par $(e''_1, e''_2, ..., e''_j)$.

Etablir que pour tout j élément de $\{1,2,.....,n\}$ on a : $\langle e''_j | e'_j \rangle > 0$.

c) Soit Id l'application identique de $\mathbf{R}^n$. Exprimer A en fonction de $M_{\mathbf{b}'',\mathbf{b}}(Id)$ et de $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}''}(f)$.

d) Démontrer qu'il existe U appartenant à $O_n(\mathbf{R})$ et T appartenant à $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ tels que : $A = UT$.

e) Soit N une matrice appartenant à la fois à $O_n(\mathbf{R})$ et à $TS_n(\mathbf{R})$. Prouver que N est diagonale et que les coefficients diagonaux de N valent 1 ou -1.

En déduire l'unicité du couple (U,T) de $O_n(\mathbf{R}) \times TS_n^{++}(\mathbf{R})$ vérifiant $A = UT$.

2° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$.

a) La matrice S est-elle diagonalisable ? Justifier. En déduire qu'il existe M élément de $M_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM M$.

b) On suppose que S appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM M$.

c) Soit M un élément de $GL_n(\mathbf{R})$ et X un élément de $M_{n,1}(\mathbf{R})$. Prouver que : ${}^tX\,{}^tM M X \geq 0$. En déduire que ${}^tM M$ appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

3° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

a) Déduire des questions 1° d) et 2° b) l'existence d'une matrice T de $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $S = {}^tT T$.

b) Justifier l'unicité de cette matrice T.

c) On note s_{ij} le coefficient de S situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de S.

i) Déduire de la question 3° a) que : $0 < \det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.

ii) Déterminer toutes les matrices S de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ vérifiant $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.

4° On considère M et N des éléments de $GL_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que l'égalité ${}^tM M = {}^tN N$ est vérifiée si et seulement s'il existe V élément de $O_n(\mathbf{R})$ tel que $M = VN$.

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Représenter la courbe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier la convergence de la série de Fourier de f vers f. De quel type de convergence s'agit-il?
5. En déduire les égalités :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \frac{-\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Tournez la page S.V.P.

Partie II

Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0,1], f_n(t) = t^n \ln(t).$$

1. Soit n un entier naturel. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1]$ et calculer la valeur de l'intégrale :
$$u_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Soient g et h les applications de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in]0,1[, g(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} \text{ et } h(t) = \frac{\ln(t)}{t+1}.$$

2. (i) Vérifier la convergence simple de la série des applications f_n et de la série des applications $(-1)^n f_n$ sur $]0,1[$ et exprimer leurs sommes en fonction de g et h.

   (ii) En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier que g et h sont intégrables sur $]0,1[$ et déterminer les valeurs des intégrales :
$$I = \int_0^1 g(t)\,dt \text{ et } J = \int_0^1 h(t)\,dt.$$
On utilisera I5.

Partie III

Pour tout entier naturel n, on note h_n l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in]0,1], h_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{t+1}.$$

1. Pour tout entier naturel n, montrer que h_n est intégrable sur $]0,1]$.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^1 h_n(t)\,dt.$$

2. A l'aide du théorème de convergence dominée (dont on rappellera l'énoncé), montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. (i) Montrer que la série de terme général J_n converge et exprimer sa somme S à l'aide d'une intégrale.

   (ii) En déduire une expression de S en fonction des intégrales I et J définies dans la partie II, puis vérifier que :
   $$S = \frac{-\pi^2}{8}.$$

4. En énonçant précisément le théorème utilisé, justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^n J_n$.

Partie IV

On se propose dans cette partie de déterminer un équivalent de l'intégrale J_n lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = (-1)^n J_n$.

1. Pour tout entier naturel n, comparer $J_n + J_{n+1}$ et u_n défini dans la partie II. En déduire que $R_n = R_{n+1} + (-1)^n u_n$.

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :
   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :
   $$R_{2n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}.$$

4. Pour tout entier $k \geqslant 1$, justifier l'encadrement :
   $$\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{4t^3} dt \leqslant \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{4t^3} dt.$$

5. En déduire un encadrement de R_{2n+1}, pour tout $n \geqslant 1$.

6. En déduire la convergence et les limites respectives des suites $((2n+1)^2 R_{2n+1})$ et $((2n)^2 R_{2n})$.

Tournez la page S.V.P.

7. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(n^2 J_n)$ et conclure.

Partie V

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\ \|$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \max\{|a_i|\ ;\ i \in \{0,...,n\}\},\ \text{ si }\ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'une norme.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)\ln(t)}{(1+t)}dt \end{array}.$$

1. Justifier que $T(P)$ est défini, pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que T est une forme linéaire.
3. Montrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ |T(P)| \leqslant K\|P\|.$$

4. En déduire que T est lipchitzienne de $(\mathbb{R}[X], \|\ \|)$ vers $(\mathbb{R}, |\ |)$.
5. Justifier que l'ensemble $\{|T(P)|\ ;\ P \in \mathbb{R}[X]\,/\,\|P\| = 1\}$ est borné et calculer :

$$\|T\| = \sup_{\{P\in\mathbb{R}[X]\,/\,\|P\|=1\}} |T(P)|.$$

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, < P,Q >= \int_{-1}^{0} P(t)Q(t)dt.$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Soit Δ l'application de E dans E qui envoie un polynôme P sur :

$$\Delta(P) = (X^2 + X)P" + (2X + 1)P',$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que $P"$ ou $P"(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de P.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
2. Soit $P \in E$. Montrer que le degré de $\Delta(P)$ est inférieur ou égal au degré de P.

Tournez la page S.V.P.

Pour tout entier naturel non nul n, on note E_n le sous-espace vectoriel de E formé par les polynômes de degré $\leqslant n$. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur E_n, c'est à dire :

$$\forall P \in E_n, \Delta_n(P) = \Delta(P).$$

3. Ecrire la matrice de Δ_n sur la base $\{1, X, ..., X^n\}$.
4. En déduire les valeurs propres de Δ_n.
5. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable?
6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant égal à 1 tel que $\Delta(P_n) = n(n+1)P_n$.
7. Exprimer P_n en fonction du polynôme

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} X^k.$$

8. Montrer que, pour tous P et Q dans E, on a :

$$< \Delta(P), Q >=< P, \Delta(Q) > .$$

9. En déduire $< P_n, P_m >$ pour deux entiers naturels non nuls $n \neq m$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation (*) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Déterminer les solutions constantes.
2. Soit f une solution **non constante.**

(i) Montrer que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = 0$.

(ii) Montrer que f est une fonction paire.

3. Soit f une solution **non constante.** On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = f(x + y) + f(x - y).$$

(i) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Calculer les dérivées partielles secondes de F.

(iii) Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme :

$$f'' - \alpha f = 0.$$

Donner les solutions de cette équation selon les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (*).

Exercice 3

Soit P un plan affine Euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point de P distinct de O. On note M' l'unique point sur la droite OM tel que $\overline{OM}.\overline{OM'} = 1$. On remarquera que M' est distinct de O.

1. Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\|\overrightarrow{OM}\|$.

2. Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de M' en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de M.

On note σ l'application définie ci-dessus de $P \setminus \{O\}$ dans lui-même définie par $\sigma(M) = M'$.

3. Montrer que $\sigma^2 = Id$. En déduire que σ est une bijection de $P \setminus \{O\}$ sur lui-même.

4. Soit D une droite du plan P passant par le point O. Montrer que :

$$\sigma(D \setminus \{O\}) = D \setminus \{O\}.$$

Tournez la page S.V.P.

5. On considère R la région du plan définie par :

$$R = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / -x < y < x \}.$$

Montrer que $\sigma(R) = R$.

6. On considère S et T les régions du plan définies par :

$$\begin{aligned} S &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / -x < y < x \text{ et } x \geqslant 1 \}, \\ T &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / -x < y < x \text{ et } (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant \tfrac{1}{4} \}. \end{aligned}$$

Représenter sur un graphique les régions S et T. Montrer que $\sigma(S) \subset T$.

On considère la courbe $\mathcal{H}$ de P définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$.

7. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$? représenter $\mathcal{H}$.

8. Montrer que $\sigma(\mathcal{H}) \subset T$.

9. Montrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être paramétrée par

$$\begin{cases} x = 1/\cos u \\ y = \tan u \end{cases} ; \; u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

10. En déduire que la courbe $\sigma(\mathcal{H})$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \cos u/(1 + \sin^2 u) \\ y = \sin u \cos u/(1 + \sin^2 u) \end{cases} ; \; u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

11. En introduisant la variable θ telle que $\tan\theta = \sin u$, démontrer que la courbe $\sigma(\mathcal{H})$ admet pour équation polaire $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

10. Représenter $\sigma(\mathcal{H})$.

IMPRIMERIE NATIONALE. - D'après documents fournis.

I54P

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Problème

Dans tout le problème, on désigne par E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si u est une telle suite, on note, pour tout entier naturel n, u_n son terme d'indice n. On note I l'application identité de E. On définit un endomorphisme T de E en posant:

$$\begin{array}{rccc} T & : & E & \to & E \\ & & u & \mapsto & T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

C'est à dire que, pour tout entier naturel n, le n-ième terme de la suite $T(u)$ vérifie : $T(u)_n = u_{n+1}$.

On considère également l'endomorphisme L de E défini par: $L = I + T$. Enfin, on rappelle que pour tout endomorphisme F de E, on définit par récurrence l'endomorphisme itéré F^k par: $F^0 = I$ et pour tout entier naturel k non nul, $F^k = F \circ F^{k-1}$.

Préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   1a. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

   1b. Après avoir justifié avec soin les hypothèses de son application, utiliser la formule du binôme pour calculer $L^n = (I+T)^n$.

   1c. En déduire pour $u \in E$, l'égalité :

$$L^n(u)_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k,$$

   où $L^n(u)_0$ désigne le terme d'indice 0 de la suite $L^n(u)$.

2. On considère la fonction f, 2π-périodique, impaire, définie par : $f(0) = f(\pi) = 0$ et $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$.

   2a. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   2b. La série de Fourier de f converge-t'elle simplement vers f sur $\mathbb{R}$? Converge-t'elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

   2c. Déduire de ce développement la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Partie I

Soit p un entier naturel $\geqslant 2$. On note Ω_p l'ensemble des suites complexes p-périodiques, c'est à dire l'ensemble des $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

1. 1a. Montrer que Ω_p est un sous-espace vectoriel de E.

   1b. Soit φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \Omega_p & \to & \mathbb{C}^p \\ & & u & \mapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Démontrer que φ est un isomorphisme. En déduire la dimension de Ω_p.

   1c. Pour $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, on définit la suite c^j en posant :

$$c_n^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est congru à } j \text{ modulo p,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que la famille de suites $B_c = \{c_0, c_1, ..., c_{p-1}\}$ est une base de Ω_p.

2. 2a. Justifier que Ω_p est stable par les endomorphismes T et L.

Dans la suite du problème, on fixe $p \geq 2$ et on s'intéresse aux endomorphismes T et L induits sur Ω_p que l'on notera respectivement t et l.

2b. Déterminer $\ker t$. Qu'en conclure?

2c. i) Soit $u \in \ker l$. Montrer que $\varphi(u)$ vérifie le système $\mathcal{S}$:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 & & & & & = 0 \\ u_1 + u_2 & & & & & = 0 \\ \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ u_{p-2} + u_{p-1} & = 0 \\ u_0 + u_{p-1} & = 0 \end{cases}$$

ii) Résoudre le système $\mathcal{S}$ en discutant selon la parité de p.

iii) Déterminer $\ker l$.

3. 3a. Montrer que $(t)^p = I$. En déduire que t est diagonalisable.

3b. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme t sont des racines p-ièmes de 1.

On note $\omega_0 = 1, ..., \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}, ..., \omega_{p-1} = e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}$ les racines p-ièmes de 1.

3c. Déterminer une base de vecteurs propres $B_\epsilon = \{\epsilon^0, \epsilon^1, ..., \epsilon^{p-1}\}$ de l'endomorphisme t telle que : $\epsilon_0^j = 1$ et ϵ^j est un vecteur propre associé à la valeur propre ω_j. Quel est l'ensemble des valeurs propres de t ?

3d. Soit P la matrice de passage de la base B_c à la base B_ϵ. Expliciter P.

3e. On note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P et I_p la matrice identité d'ordre p. Montrer que ${}^tP\overline{P} = pI_p$. En déduire la matrice P^{-1}, inverse de P.

4. Soit u une suite de Ω_p. En utilisant la base B_c définie en 1c, on remarque que u se décompose de la façon suivante :

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} u_k c^k.$$

On note $x_0, ..., x_{p-1}$ les coordonnées de u dans la base B_ϵ, ce qui permet d'écrire :

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} x_k \epsilon^k.$$

4a. Exprimer $l(u)$ puis $l^n(u)$, pour tout entier naturel n, en fonction des $x_k, \omega_k, \epsilon_k^j$.

4b. Montrer que pour $k \in \{1, ..., p-1\}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1+\omega_k}{2})^n = 0.$$

4c. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} l^n(u)_0 = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1}}{p}.$$

5. En utilisant la question 1 des préliminaires , en déduire que, pour tout j dans $\{0, ..., p-1\}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-j}{p}} C_n^{pk+j} = \frac{1}{p}.$$

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit u une suite dans E admettant une limite ℓ.

1a. En utilisant les questions 1a. et 1c. des préliminaires, vérifier que:

$$\frac{1}{2^n} L^n(u)_0 - \ell = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u_k - \ell).$$

1b. Soit N un entier naturel. Pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on pose :

$$S_N(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N} C_n^k (u_k - \ell) \text{ et } T_N(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} C_n^k (u_k - \ell).$$

(i). Montrer que :

$$|T_N(n)| \leqslant \sup\{|u_k - \ell|; k \in \{N+1, ..., n\}\}.$$

(ii). On pose $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|S_N(n)| \leqslant \frac{1}{2^n} P_N(n) \sup\{|u_k - \ell|; k \in \{0, ..., N\}\}.$$

(iii). Justifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} P_N(n) = 0.$$

1c. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 = \ell.$$

2. Soit $u \in E$. On définit une suite s par : $s_0 = 0$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, pour un entier naturel $n \geqslant 1$. On définit également une suite S par $S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k$, pour tout entier naturel n.

2a. Montrer les égalités ci dessous, pour tout entier naturel n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1}.$$

2b. En déduire, pour tout entier naturel n, que :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0;$$

On utilisera la question 1c. des préliminaires.

2c. On suppose que u_n est le terme général d'une série convergente. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0$ est une série convergente et établir l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0.$$

Partie III : Application.

On considère les suites u et J définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ et } J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

1. Pour tout entier naturel n, montrer que $J_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}.$$

En déduire que :

$$J_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. En utilisant II2c, conclure que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{4}.$$

4. a. Déterminer le plus petit entier N_1, tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{N_1} \frac{2^{n-1}(n!)^2}{(2n+1)!} - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant 0.025.$$

b. Déterminer le plus petit entier N_2 tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{N_2} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant 0.025.$$

c. Comparer N_1 et N_2, puis conclure.

C54B

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1 \qquad (E)$$

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

1. Montrer que g est impaire.
2. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire en fonction de g toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle (E).

(a) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) Déterminer a_1. Expliciter les coefficients a_{2i+1} pour $i \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de a_0, et exprimer les coefficients a_{2i}, pour tout $i \in \mathbb{N}$, en fonction de a_0.

(d) Réciproquement, on considère une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

(e) Expliciter le développement en série entière de g.

5. On considère les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_1(x) = e^{-x^2} \;\text{ et }\; g_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

(a) Expliciter le développement en série entière des fonctions g_1 et g_2.

(b) En déduire le le développement en série entière de la fonction $g_1 g_2$ à l'aide d'un résultat dont on rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On le munit du produit scalaire euclidien canonique $< , >$ et de la norme euclidienne associée $\| \ \|$, c'est à dire : pour tout $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$< v, w >= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \;\text{ et }\; \|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On remarquera que $< v, w >= (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(3,3)$ à coefficients réels, et I la matrice identité de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite **définie positive**.
Pour $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ||Ax|| = 1\}.$$

1. Soit P dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que P est une matrice orthogonale. Déterminer $\mathcal{E}(P)$.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tous non nuls. Soit D la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

3 Soit A dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose A **inversible**.

   (i) Justifier que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.

   (ii) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D, avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$$ {}^tAA = {}^tPD^2P.$$

   (iii) On pose $S = {}^tPDP$. Démontrer que S est une matrice symétrique définie positive.

   (iv) Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = QS$.

   (v) En déduire que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

   (vi) Démontrer que $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.

4 Soient S et S' dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que S et S' sont des matrices **symétriques définies positives** et que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

   (i) Soit v un vecteur non nul. En considérant le vecteur $v/\|S(v)\|$, démontrer que $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$.

   (ii) En déduire que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \ < S(v), S(w) > = < S'(v), S'(w) > .$$

   On pourra commencer par exprimer le produit scalaire de deux vecteurs x et y en fonction des normes des vecteurs $x + y$ et $x - y$.

   (iii) En déduire que $S^2 = S'^2$.

   (iv) Soit α une valeur propre de S. A l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé, montrer que $\ker(S - \alpha I) \oplus \ker(S + \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$. En déduire que $\ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$.

(v) Démontrer que $S = S'$.

5 Soient A et A' dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, supposées **inversibles**. Montrer que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale V telle que $A = VA'$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de centre O paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) &= 5\cos t \\ y(t) &= 3\sin t \end{cases}, t \in [-\pi, \pi].$$

1. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. On note $M(t)$ le point de $\mathcal{E}$ de paramètre t.

   (i) Montrer que l'équation de la tangente T_t à $\mathcal{E}$ au point $M(t)$ est :

   $$3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15.$$

   (ii) Montrer qu'il existe un unique point P sur la tangente T_t tel que les droites T_t et OP sont orthogonales.

   (iii) Quel est le point P lorsque le point $M(t)$ est un sommet de l'ellipse $\mathcal{E}$?

   (iv) Démontrer que les coordonnées du point P sont :

   $$\begin{cases} X(t) &= \dfrac{45\cos t}{9 + 16(\sin t)^2} \\ Y(t) &= \dfrac{75\sin t}{9 + 16(\sin t)^2} \end{cases}.$$

On remarque dans la question 1(iv) que les coordonnées du point P dépendent de t. On note ce point P_t.

2. On se propose dans cette question d'étudier le lieu des points P_t, lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On admet que les dérivées respectives des fonctions X et Y sont :

   $$\begin{cases} X'(t) &= \dfrac{-45\sin t\,(25 + 16(\cos t)^2)}{(\,9 + 16(\sin t)^2\,)^2} \\ Y'(t) &= \dfrac{75\cos t\,(9 - 16(\sin t)^2)}{(\,9 + 16(\sin t)^2\,)^2} \end{cases}.$$

(i) Etablir le tableau de variations de la fonction $t \mapsto X(t)$, lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) Démontrer qu'il existe un unique α dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $Y'(\alpha) = 0$ et comparer α à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$. Calculer $X(\alpha)$ et $Y(\alpha)$.

(iii) Etablir le tableau de variations de la fonction $t \mapsto Y(t)$, lorsque t parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On note $\mathcal{F}$ le lieu des points P_t définis dans la question **1**, pour $t \in [-\pi, \pi]$.

3. Représenter les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sur un même graphique.

4. Soit τ la translation de vecteur $10\vec{i}$. On considère l'ellipse $\mathcal{E}' = \tau(\mathcal{E})$. On fait rouler sans glisser l'ellipse $\mathcal{E}'$ sur l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le sens trigonométrique. Quel est le lieu du centre de $\mathcal{E}'$?

20SA

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Dans tout le problème, **R** désigne le corps des réels, E l'espace vectoriel des fonctions continues, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans **R**, F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans **R**.

Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur E.

Si g est une application k fois dérivable sur $[0,1]$, $g^{(k)}$ désigne la dérivée k – ième de g.

Préliminaires.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et u une fonction de classe C^n sur $[0,1]$.

On suppose que : $\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ u^{(k)}(0) = 0$.

Prouver que : $\forall x \in [0,1],\ u(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n)}(t)\ dt$.

Partie I : Pour $g \in F$ donnée, recherche de $f \in F$ vérifiant la relation :

$$(S) \quad : \quad \forall x \in [0,1], \quad f(x) - \int_0^x f(t)\ dt = g(x).$$

Question 1.

1. Montrer l'équivalence :

$$f \in F \text{ est solution de } (S) \iff \left(\forall x \in [0,1], f'(x) - f(x) = g'(x) \text{ et } f(0) = g(0)\right).$$

On note $(*)$ l'équation différentielle $y' - y = g'(x)$.

2. Résoudre l'équation différentielle $(*)$.

Question 2.

Prouver que (S) possède dans F une unique solution f définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t} g(t)\ dt.$$

Question 3 : **Application.**

Déterminer la solution f de (S) lorsque g est la fonction $x \in [0,1] \mapsto \cos(x)$.

Partie II : **Quelques propriétés de la fonction** $T : f \in E \mapsto T(f)$ **définie par** :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

On définit l'application T qui à $f \in E$ associe l'application $T(f)$, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $T^n = T \circ T^{n-1}$, sachant que $T^0 = I_E$ (application identité de E).

Lorsque U est un endomorphisme continu de E, on désigne par $|||U|||$ le réel positif :

$$|||U||| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} \|U(f)\|_\infty.$$

Question 1.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Préciser $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

3. Quel est l'ensemble des valeurs propres de T ?

Question 2.

1. Montrer que $\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.

En déduire que T est une application continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \|_\infty)$.

2. Prouver que $|||T||| \leqslant 1$.

3. On considère $f_0 : x \in [0,1] \mapsto f_0(x) = 1$. Que vaut $\|T(f_0)\|_\infty$?

4. Calculer $|||T|||$.

Question 3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que $T^n(f)$ est de classe C^n sur $[0,1]$.

2. Prouver que pour tout entier naturel $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$.

3. Que vaut $(T^n(f))^{(n)}$? $(T^n(f))^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0,...,n-1\}$?

4. Montrer alors que : $\forall x \in [0,1],\ (T^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\ dt$.

5. Préciser $\mathrm{Ker}(T^n)$ et $\mathrm{Im}(T^n)$.

6. Prouver que T^n est un endomorphisme continu de $(E, \| \quad \|_\infty)$.

7. En utilisant la fonction f_0 définie à la question 2., prouver que : $|||T^n||| = \frac{1}{n!}$.

8. En déduire que : $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = 0$. Préciser $\lim_{n\to+\infty} T^n$.

Partie III : **Pour $g \in E$ donnée, recherche de $f \in E$ vérifiant**

$$(S)\ :\ \forall x \in [0,1],\ f(x) - \int_0^x f(t)\ dt = g(x).$$

On note H l'application qui à $f \in E$ associe l'application $H(f)$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ H(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)\ dt.$$

Question 1.

1. Montrer que H est un endomorphisme de E.

2. Prouver que : $\exists K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ |H(f)(x)| \leqslant K \|f\|_\infty$.

En déduire que H est continue de $(E, \| \quad \|_\infty)$ dans $(E, \| \quad \|_\infty)$ et que $|||H||| \leqslant e$.

3. Montrer que $H(f)$ est C^1 sur $[0,1]$. Calculer, pour $x \in [0,1]$, $(H(f))'(x)$.

Question 2.

Prouver que $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} (T^n(f))(x)$ converge absolument.

Pour tout x de $[0,1]$ et tout f de E, on note $\Psi(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n(f)(x)$.

Question 3.

On se propose de montrer que $\Psi = H$.

1. On pose, pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$, x fixé dans $[0,1]$ et f fixée dans E :

$$\begin{aligned} v_n\ :\ [0,x] &\to \mathbf{R} \\ t &\mapsto v_n(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t). \end{aligned}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement sur $[0,x]$.

2. Prouver alors que $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{n=1}^{+\infty} (T^n(f))(x) = H(f)(x)$.

En déduire que $\Psi = H$.

Question 4.

1. On note $V = I_E - T$.

En calculant, pour $n \in \mathbf{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} T^k \right) o\, V$, trouver $W \in L(E)$ telle que : $W o V = I_E$.

2. Prouver alors que l'équation (S) possède une unique solution h dans E.

3. Déterminer h.

4. Que constate-t-on ?

50FJ

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Exercice 1

R est le corps des nombres réels et n un entier naturel.

E est le **R** espace vectoriel normé des applications continues de $[-\pi,\pi]$ vers **R** muni de la norme de la convergence uniforme, ainsi pour f élément de E, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$.

On considère un endomorphisme de E noté T vérifiant les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) si f est un élément de E de classe C^1, $T(f)$ est de classe C^1 et $T(f') = T(f)'$.

et

(P_2) pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(E,\|\ \|_\infty)$, la suite $(T(f_n))_n$ converge dans $(E,\|\ \|_\infty)$ et $T(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

Pour tout n, $n\geq 1$, on considère les applications c_n et s_n de $[-\pi,\pi]$ vers **R** définies par :

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

On note c_0 l'application de $[-\pi,\pi]$ vers **R** définie par : $c_0(x) = 1$.

Le but de l'exercice est d'établir qu'il existe un réel λ tel que : $\forall f \in E$, $T(f) = \lambda f$.

1° Dans cette question on établit quelques résultats indépendants les uns des autres qui pourront être utilisés dans la suite de l'exercice.

a) On suppose $n\geq 1$. Quelles sont les fonctions réelles solutions sur **R** de l'équation différentielle : $y'' + n^2 y = 0$?

b) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe g et h appartenant à E tels que :

$$f = g + h \quad , \ g \text{ est paire} \ , \ h \text{ est impaire.}$$

c) Soit $\widetilde{\varphi}$ l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, 2π - périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi\,], \widetilde{\varphi}(x) = x^2$.

Calculer les coefficients de Fourier réels de $\widetilde{\varphi}$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Premières propriétés de T.

a) Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi\,]$. On pose : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Justifier que S appartient à E, que la série de fonctions $\sum \mathrm{T}(u_n)$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi\,]$ et que : $\mathrm{T}(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}(u_n)$.

b) Soit f un élément de E, f de classe C^n, $n \geq 1$. Montrer que $\mathrm{T}(f)$ est de classe C^n et que : $\mathrm{T}(f^{(n)}) = \mathrm{T}(f)^{(n)}$.

En déduire que si, f est de plus une fonction polynômiale, alors $\mathrm{T}(f)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à celui de f.

3° Etude de $\mathrm{T}(c_n)$ et de $\mathrm{T}(s_n)$.

a) Prouver qu'il existe un réel α_0 tel que : $\mathrm{T}(c_0) = \alpha_0 c_0$ et que pour $n \geq 1$, il existe (α_n, β_n) de $\mathbf{R}^2$, tel que : $\mathrm{T}(c_n) = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$.

b) Soit φ l'élément de E défini par : $\forall\, x \in [-\pi, \pi\,], \varphi(x) = x^2$. Justifier l'existence de (λ, μ, ν) de $\mathbf{R}^3$ tel que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi\,], \mathrm{T}(\varphi)(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$.

c) En déduire que :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi\,], \lambda x^2 + \mu x + \nu = \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\right).$$

d) Montrer que :

i) $\mu = 0$.

ii) $\forall\, n \geq 1, \alpha_n = \lambda$ et $\beta_n = 0$.

iii) $\alpha_0 = \lambda$ et $\nu = 0$.

e) Etablir que pour tout n, $\mathrm{T}(c_n) = \lambda c_n$ et que pour $n \geq 1$, $\mathrm{T}(s_n) = \lambda s_n$.

4° Etude de T(f).

a) Soit f un élément de E, f de classe C^1, tel que $f(\pi) = f(-\pi)$. On note $\widetilde{f}$ l'application de **R** vers **R**, 2π - périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{f}$. En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

b) Soit f un élément de E, f impaire. Soit F une primitive de f sur $[-\pi, \pi]$. Calculer $T(F)$.

En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

c) Soit f un élément quelconque de E. Montrer que : $T(f) = \lambda f$.

Exercice 2

C est le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
E est un **C**-espace vectoriel de dimension égale à n. On désigne par e l'application identique de E. Soit f un endomorphisme de E. On définit la suite $\left(f^p\right)_p$ par : $f^0 = e$ et $f^{p+1} = fof^p$.

S'il existe un entier naturel non nul q tel que $f^q = 0$, l'endomorphisme f est dit nilpotent.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $f_{|F}$ la restriction de f à F. $f_{|F}$ est une application linéaire de F vers E. Si de plus F est stable par f, c'est à dire si $f(F)$ est inclus dans F, on pourra aussi considérer $f_{|F}$ comme un endomorphisme de F.

Première partie : Etude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

1° Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel.

a) Prouver que : $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et que $f\left(\operatorname{Ker} f^{p+1}\right) \subset \operatorname{Ker} f^p$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On pose $u = f_{|F}$.

Ecrire $\operatorname{Ker} u$ en fonction de $\operatorname{Ker} f$ et de F.

c) Considérer la restriction de f à $\operatorname{Ker} f^{p+1}$ notée u pour démontrer que :

$$\dim \operatorname{Ker} f^{p+1} \leq \dim \operatorname{Ker} f^p + \dim \operatorname{Ker} f .$$

2° Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

a) Prouver que 0 est la seule valeur propre de f.

b) Etablir que $f^n = 0$.

c) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à $n-1$.

3° Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose que le rang de f est égal à $n-1$.

a) Montrer que : $\forall\, p \in \{0,1,2,.....,n\}$, $\dim \operatorname{Ker} f^p = p$ (indication : utiliser l'inégalité établie à la question 1°c) ci-dessus).

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f, de dimension égale à p.

Soit $u = f_{|F}$. Calculer u^p.

c) Démontrer qu'il existe $n+1$ sous-espaces vectoriels de E stables par f et qu'il s'agit des $\mathrm{Ker}\, f^p$, p élément de $\{0,1,2,.....,n\}$.

d) Montrer que : $\forall\ p \in \{0,1,2,.....,n\}$, $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{n-p}$.

Deuxième partie : Etude des endomorphismes n'admettant qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

1° Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

a) On considère deux vecteurs a et b appartenant à $\mathrm{Ker}(f-\lambda e)$ et μ un nombre complexe. Vérifier que le sous-espace vectoriel de E engendré par $a+\mu b$, noté V_μ, est stable par f.

b) En déduire que si la dimension de $\mathrm{Ker}(f-\lambda e)$ est supérieure ou égale à 2 alors il existe une infinité de sous-espaces de E stables par f.

2° Soit f un endomorphisme de E admettant r valeurs propres distinctes $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_r$.

On suppose que chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 et que le polynôme caractéristique de f, noté $P_f(X)$, est égal à :

$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{k_j}$ où $r,k_1,k_2,.....,k_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Pour j élément de $\{1,2,.....,r\}$, on pose : $K_j = \mathrm{Ker}(f-\lambda_j e)^{k_j}$.

a) Prouver que E est égal à la somme directe de sous-espaces vectoriels suivante : $\mathrm{E} = K_1 \oplus K_2 \oplus .... \oplus K_r$.

b) Soit j un élément de $\{1,2,.....,r\}$. Démontrer que la dimension de K_j est égale à k_j.

c) Soit j un élément de $\{1,2,.....,r\}$. Prouver que K_j est stable par f.

En considérant $u_j = (f-\lambda_j e)_{|K_j}$, démontrer qu'il existe $1+k_j$ sous-espaces vectoriels de K_j stables par f et qu'il s'agit des $\mathrm{Ker}(f-\lambda_j e)^p$, p élément de $\{0,1,2,.....,k_j\}$.

d) Déterminer le nombre N de sous-espaces vectoriels de E stables par f.

N54F

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Préliminaires

On considère la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \ \alpha_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i \mathrm{d}u.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2}, pour tout entier naturel i.

2. En déduire que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \dfrac{(i-1)(i-3)...1}{i(i-2)...2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]-1,1[$.
On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y' - x\,y = f(x) \qquad\qquad (\mathcal{E}_f)$$

où f désigne une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ; on rappelle qu'une solution φ de cette équation est une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I,\ (1-x^2)\,\varphi'(x) - x\,\varphi(x) = f(x)$.

partie I

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de $(\mathcal{E}_f)$, définie sur I, et telle que $\varphi(0) = y_0$? On énoncera avec précision le théorème utilisé.

2. Montrer que toutes les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$(1 - x^2)\, y' - x\, y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

   (b) Etant donné un réel y_0, démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ telle que $\varphi(0) = y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I,\ \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + y_0\right).$$

   (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1 - x^2)\, y' - x\, y = 1 \qquad (\mathcal{E}_1),$$

   déterminer les solutions sur I.

partie II

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m. On rappelle que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m + 1$.
Dans la suite du problème, on assimilera un polynôme P et sa fonction polynôme $x \mapsto P(x)$.
Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \Delta(P)(x) = (1 - x^2)P'(x) - xP(x).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Démontrer que $\Delta(P)$ est un polynôme dont on exprimera le degré en fonction de celui de P.

2. Démontrer que $P \mapsto \Delta(P)$ induit une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

   On note Δ_m cette application linéaire.

3. Démontrer que Δ_m est injective.

4. Déterminer le rang de Δ_m. Que peut-on en déduire pour l'espace image de Δ_m ?

5. Exprimer la matrice A_m de Δ_m relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

   On cherche dans cette partie pour quelles applications f, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet une solution polynomiale, c'est-à-dire une solution de la forme $x \mapsto P(x)$, où P désigne un polynôme à coefficients réels.

6. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ; montrer que si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet sur I une solution polynomiale $x \mapsto P(x)$, f est nécessairement une fonction polynomiale que l'on exprimera en fonction de $\Delta(P)$.

7. Soit Q un polynôme à coefficients réels et de degré n non nul. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$. On note V le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées $q_0, q_1, ..., q_n$. On a ainsi :

$$V = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$. Soit U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$. Démontrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ si et seulement si on a l'égalité $A_{n-1}U = V$.

(b) En déduire que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

i. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ admet une solution polynomiale,

ii. $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $Q = \Delta_{n-1}(P)$,

iii. le système linéaire $A_{n-1}S = V$ admet une solution S dans $\mathbb{R}^n$.

(c) On suppose dans cette question que $n = 4$;

i. Ecrire précisément le système $A_3 S = V$.

ii. Montrer que ce système admet une solution si et seulement si les coefficients du polynôme Q vérifient l'egalité : $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$.

iii. En supposant cette condition satisfaite, résoudre ce système et en déduire l'expression de la solution polynomiale P de $(\mathcal{E}_Q)$, en fonction de q_0, q_1, q_3 et q_4 (q_2 étant exclu).

iv. Que représente la relation $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$ pour l'image de Δ_3 ?

(d) On revient au cas où n est un entier naturel non nul quelconque. On introduit sur $\mathbb{R}_n[X]$une application λ_n définie par :

$$\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lambda_n(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

i. Démontrer que λ_n est une forme linéaire non nulle.

ii. Démontrer que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\lambda_n(\Delta_n(P)) = 0$.

iii. En déduire que l'image de Δ_n et le noyau de λ_n sont égaux.

iv. Expliciter une équation de l'image de Δ_n (on utilisera la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étudiée dans les préliminaires).

(e) Déterminer en fonction de $q_0, \ldots, q_n$ une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(\mathcal{E}_Q)$ admette une solution polynomiale.

(f) Retrouver le résultat de la question 7(c)ii.

partie III

On considère maintenant que f est définie par une série entière de rayon de convergence $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\, x^k.$$

1. (a) Montrer que les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1.1[$ sont développables en série entière, avec un rayon de convergence au moins égal à 1. (On pourra utiliser le résultat de I 3(b).)

(b) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ l'une de ces solutions ;

i. Exprimer, pour $k \geqslant 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k.

ii. En déduire , pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par $\dfrac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$, $\dfrac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$ et $\dfrac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$ (on utilisera la question 1. des préliminaires).

iii. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0, des α_{2k} et des b_{2k-1}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

iv. De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par $(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$, $(2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)}$ et $b_{2k}\alpha_{2k}$.

v. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des α_{2k} et et des b_{2k}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1,1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(b) Montrer que φ est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1,1[$.

(c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

i. Soit $x \in]-1,1[$ et soit $\theta \in]0,\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

ii. Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\ F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi,\pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F'. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

iii. Conclure.

(d) On pose maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

i. Expliciter φ_0 et φ_1 .

ii. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k}\,\varphi_{k-2}(x).$$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que φ_{2p+1} est une fonction polynomiale de degré $2p$.

iv. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_{2p} de degré $2p-1$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x).$$

v. Quelles sont les valeurs de k, pour lesquelles les fonctions φ_k admettent une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

(e) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} b_k\,\varphi_k$ converge simplement vers φ sur $]-1,1[$.

D25A

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme P.

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $(AP)^{(n)}$, c'est à dire le polynôme dérivée n-ième du produit AP.

1. Soient P et A dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   (i) Exprimer le degré de $(AP)^{(n)}$ en fonction de n et des degrés de A et de P.

   (ii) En déduire que $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & (AP)^{(n)} \end{array}$$

On admet que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Etude de deux exemples:

   a) $n = 3$ et $A = X^3 - 1$

      (i) Exprimer $\Phi_{(X^3-1)}(1)$, $\Phi_{(X^3-1)}(X)$, $\Phi_{(X^3-1)}(X^2)$ et $\Phi_{(X^3-1)}(X^3)$. En déduire la matrice de $\Phi_{(X^3-1)}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

      (ii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de $\Phi_{(X^3-1)}$.

      (iii) $\Phi_{(X^3-1)}$ est-il diagonalisable? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

   b) $n = 3$ et $A = X^2 + X + 1$

      (i) Ecrire la matrice de $\Phi_{(X^2+X+1)}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

      (ii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{(X^2+X+1)}$

      (iii) $\Phi_{(X^2+X+1)}$ est-il diagonalisable? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

3. Cas général: On note d le degré de A et on pose $A(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$.

   (i) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (ii) Exprimer la matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et montrer qu'elle est triangulaire supérieure.

   (iii) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit diagonalisable.

Exercice 2

1. Montrer que :
   $\forall\ u \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant \mathrm{Arctan}(u) \leqslant u\ .$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que la fonction:

$$\begin{array}{rccl} f_x : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f_x(t) = \dfrac{t}{(t^2+x^2)}\mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{t}) \end{array}$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On considère :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)}\text{Arctan}(\frac{1}{t})dt \end{array}$$

a) (i) Déduire de la question 1. l'encadrement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}.$$

(ii) Montrer que g admet une limite quand x tend vers $+\infty$. Quelle est cette limite?

b) (i) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{8}\ln(\frac{x^2+1}{x^2}) \leq \displaystyle\int_0^{+1} \frac{t}{(t^2+x^2)}\text{Arctan}(\frac{1}{t})dt$

(ii) En déduire le comportement de g quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. a) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a < b$, montrer que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: &]a,b[\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \varphi((x,t)) = \dfrac{t}{(t^2+x^2)}\text{Arctan}(\dfrac{1}{t}) \end{array}$$

est de classe C^1 sur $]a,b[\times\mathbb{R}_+^*$, et que:

$$\forall\, (x,t) \in]a,b[\times\mathbb{R}_+^*, \quad |\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x,t))| \leq \frac{2bt}{(t^2+a^2)^2}\text{Arctan}(\frac{1}{t}).$$

b) Montrer, en énonçant avec précision le théorème utilisé, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -2xh(x)$$

en posant $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)^2}\text{Arctan}(\frac{1}{t})dt.$

c) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. Déterminer A et B tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} = \frac{A}{(t^2+x^2)} + \frac{B}{(t^2+1)}.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

6. En déduire $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

7. En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 3

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Γ) est l' arc paramétré défini par l'application :

$$f : \mathbb{R} \to E$$
$$t \longmapsto M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

où $(x(t), y(t))$ sont les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Quelles sont les valeurs de t pour lesquels le point $M(t)$ est singulier ?

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la tangente au point $M(t)$.

3. Décrire la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente aux points suivants :

   a) au point O correspondant à la valeur $t = 0$ du paramètre

   b) au point A correspondant à la valeur $t = 1$ du paramètre.

4. Représenter la courbe (Γ).

5. On considère deux points de (Γ), M de paramètre t et M_1 de paramètre t_1.

   a) Montrer que, pour que les tangentes à (Γ) en M et en M_1 soient perpendiculaires, il faut et il suffit que :

$$1 + t.t_1 = 0$$

b) Soit P le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsqu'elles sont perpendiculaires. Démontrer que les coordonnées $(x_P(t), y_P(t))$ du point P, en fonction de $t \in \mathbb{R}^*$ sont :

$$\begin{cases} x_P(t) &= \dfrac{t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 1}{6t^2} \\ y_P(t) &= \dfrac{-t^2 + 3t + 1}{6t} \end{cases}$$

6. a) Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à (Γ) est une parabole (Γ_1) dont une équation est:

$$6y^2 - 3y - x + \frac{1}{6} = 0$$

b) Déterminer le sommet, le foyer, la directrice et l'axe de cette parabole.

E25D

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

Partie I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur I :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est $\{x \to A\cos x + B\sin x \setminus (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I. Que peut-on dire des suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(\frac{2n+1}{2}\pi))_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:
$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$.

Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x.$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.

3. Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.

   (i) Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.

   (ii) Déterminer le noyau de ψ. Quel est le rang de ψ ?

   (iii) Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.

4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y = \cos x \qquad (\mathcal{E}_1)$$

   Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad (\mathcal{E})$$

Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}.$$

1. Soit x un réel positif.

   1a. Démontrer l'inégalité :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

   1b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x,t)dt$ est convergente.

   On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)dt.$$

2. En utilisant l'inégalité démontrée en $1a$, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3. On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit ϵ un réel strictement positif.

   3a. Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

   3b. En utilisant l'inégalité

   $$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \ \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leq e^{-t\epsilon}$$

   que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

   (i) Pour $x \geq \epsilon$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)dt$ est convergente.

   (ii) G est dérivable sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a :

   $$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \ \ G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}dt.$$

3c. Conclure.

4. En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

5. Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6a. Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6b. En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a. f est positive,

b. f est décroissante,

c. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$,

d. L'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1. Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2. Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend 0 par valeurs supérieures. En déduire, que la fonction $|\sin(t)|f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, x]$, pour tout réel $x > 0$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| f(t) dt.$$

3a. Justifier l'encadrement : $2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq 2f(n\pi)$.

3b. En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que : $w_n = 2f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3c. Montrer que :

$$w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)dt.$$

4. On considère les deux suites $\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)dt\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4a. Montrer que la suite $\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4b. Montrer que la suite $\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)dt\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4c. En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite l commune.

Pour tous réels positifs x et y, tels que $x \leq y$, on pose $I_f(x,y) = \int_x^y \sin(t)f(t)dt$.

5. Déduire de 4. que l'application $I_f(x,y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\int_x^{+\infty} \sin(t)f(t)dt$ cette limite.

6. Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Partie V

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$h_x(t) = \frac{1}{x+t}$, vérifie les hypothèses de la partie IV.

On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt.$$

2. En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt.$$

3. En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

5. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = G(x).$$

la fonction G étant définie dans la partie III.

T30W

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite de réels $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ telle que : $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n+1}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} P(x_i)\,Q(x_i) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On définit la suite $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1,\ldots,n\}, & P_k = \displaystyle\prod_{j=k+1}^{n+1} (x_j - X) \\ & P_{n+1} = 1 . \end{cases}$$

(a) Montrer que la famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que la base orthonormée $\mathcal{B}'$, déduite par le procédé de Schmidt de la base $\mathcal{B}$, est la base $(L_1, L_2, \ldots, L_{n+1})$ où L_i est le i^{ime} polynôme de Lagrange défini par

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

3. (a) Déterminer les coordonnées du polynôme X^k pour $k \in (0, \ldots, n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) On se propose de calculer $\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n)$.

i. En utilisant des opérations élémentaires, montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

ii. Calculer $\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \ldots, X^n)$.

(c) Montrer que $|\det_{\mathcal{C}}(1, X, \ldots, X^n)|$ est indépendant de la base orthonormée $\mathcal{C}$ choisie.

(d) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice des coordonnées des vecteurs $(1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $\mathcal{D}$ soit triangulaire.

(e) En déduire que :

$$\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (x_j - x_i) \right)^2 \leqslant \prod_{p=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p} \right).$$

Exercice 2

Le plan affine est rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

(a) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques (foyer et directrice).

2. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point K projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \overrightarrow{\imath})$. On appelle N le symétrique de O par rapport à K et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (MN). On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points H.

   (a) Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point H dans le repère $\mathcal{R}$.

   (b) Lorsque H est distinct de O, on pose φ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OH}}\right)$ modulo 2π. Calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de θ.

   (c) Montrer que l'équation polaire de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1 - \sin\varphi}$.

3. Etudier la courbe $\mathcal{E}$ d'équation polaire $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1 - \sin\varphi}$ dans le repère $\mathcal{R}$ .On étudiera en particulier , le signe de $r(\varphi)$, les branches infinies , les points stationnaires s'ils existent .

4. Tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ sur le même graphique que $\mathcal{P}$.

Exercice 3

Soit M une matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A, B, C sont trois matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On suppose que la matrice M est diagonalisable et que $AC = CB$.

1. (a) Montrer que pour tout polynôme P à coefficients complexes, il existe une matrice D carrée d'ordre n telle que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes scindé à racines simples vérifiant $\begin{cases} P(A) = 0 \\ P(B) = 0 \end{cases}$.

   (c) En déduire que les matrices A et B sont diagonalisables.

2. Soit N la matrice carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs par $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $MN = NM$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice R inversible et deux matrices diagonales D et D' telles que :
$M = R^{-1}DR$ et $N = R^{-1}D'R$.

(c) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

3. Montrer que la matrice C est nulle .

S20B

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$, de dimension n, muni de sa base canonique orthonormale $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$(x \mid y) = {}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et y lorsqu'ils sont représentés dans la base B par les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Sa norme associée sera notée $\| \quad \|$.

L'endomorphisme identité de E est noté e et sa matrice dans n'importe quelle base : I_n.

Pour $y \in E$: $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note $\|y\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$.

Enfin, si $f \in L(E)$, $sp(f)$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

Préliminaire.

Soit u un endomorphisme de E et $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base B.

Dans cette partie, U n'est pas inversible.

1. Justifier l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = 0$.

2. Prouver qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|u_{ii}| \|x\|_\infty \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |u_{ij}| |x_j|$.

3. En déduire qu'il existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tel que $|u_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |u_{ij}|$.

4. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Partie 1.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $M = (m_{ij})$ où :

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \forall j \in \{1,...,n\},\quad m_{ij} = \begin{cases} -2 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Le but de cette partie est de calculer les éléments propres de M sans utiliser son polynôme caractéristique.

Question 1.

1.1. Justifier que les valeurs propres de M sont réelles et que la matrice M est diagonalisable sur **R**.

M se décompose sous la forme : $M = -2\,I_n + T$ et g désigne l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{ij})$.

1.2. Prouver l'équivalence : $(\lambda \in sp(f)) \Leftrightarrow (\lambda + 2 \in sp(g))$.

Comparer alors les sous-espaces $Ker(f - \lambda\, e)$ et $Ker(g - (\lambda + 2)\, e)$

Recherche des valeurs propres de T.

Question 2.

Soit μ une valeur propre de T.

2.1. Montrer qu'il existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tel que $|t_{ii} - \mu| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |t_{ij}|$.

2.2. En déduire que $|\mu| \leqslant 2$.

Justifier alors l'existence d'un réel $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $\mu = 2\cos(\alpha)$.

Question 3.

La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0,\pi]$ et une suite complexe $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ x_{k-1} - 2x_k \cos(\alpha) + x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

3.1. A quelle condition le vecteur représenté dans la base B par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de T pour la valeur propre $\mu = 2\cos(\alpha)$?

Dans la suite, cette condition est vérifiée.

3.2. Prouver que $\alpha \in]0,\pi[$.

3.3. Montrer l'existence de deux nombres complexes c_1 et c_2 tels que :

$$\forall k \in \{1,2,...,n\},\ x_k = c_1 e^{ika} + c_2 e^{-ika}.$$

(i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$).

3.4. En déduire les valeurs possibles pour α : $\alpha_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

3.5. Déterminer les valeurs propres de T. Donner une base de vecteurs propres de T.

Question 4. : Valeurs propres de M :

Prouver que les valeurs propres de M sont les $\lambda_j = -4\sin^2\left(\dfrac{j\pi}{2(n+1)}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et que les sous-espaces propres associés E_{λ_j} sont de dimension 1.

Donner une base de chaque E_{λ_j}.

Partie 2.

Pour tout réel r strictement positif, on considère les deux matrices :

$H = 2I_n - rM$ et $K = 2I_n + rM$ où M désigne la matrice définie à la partie 1

Question 1. : Quelques propriétés de la matrice H.

1.1. Déterminer les éléments propres de H.

1.2. Montrer que H est inversible.

Question 2.

Soit w l'endomorphisme de E représenté dans le base B par la matrice $W = H^{-1}K$

2.1. Déterminer les éléments propres de w.

Question 3.

Soit $S \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique, $sp(S) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ son spectre et s l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice S.

3.1. Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de la matrice S, tels que :

$$\forall x \in E, \quad p\|x\|^2 \leqslant (s(x) \mid x) \leqslant q\|x\|^2.$$

3.2. En notant : $N(S) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|s(x)\|$, prouver que $N(S) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\sigma_j|$.

Question 4.

Vérifier que :

i) W est une matrice symétrique ;

ii) pour tout réel $r > 0$, on a : $N(W) < 1$.

Question 5.

Déterminer la limite de la suite $(W^k)_{k \geqslant 0}$ lorsque $k \to +\infty$.

Fin du sujet.

L25Z

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP- EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

R est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

Partie A Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les deux parties suivantes.

1° Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$. Etudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note γ sa limite.

2° Pour x élément de $]0,+\infty[$, on considère l'application h_x de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$h_x(t) = \frac{\ln t}{t^x}.$$

a) Déterminer le tableau de variation de h_x.

b) Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3$, $\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\, dt \leq \frac{\ln n}{n}$ et $\forall n \geq 4$, $\frac{\ln n}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\, dt$.

c) Prouver que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$\text{On pose : } S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Les deux parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B On se propose, dans cette partie, de calculer S.

Pour $n \geq 3$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $a_n = t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

1° Utiliser les inégalités établies à la question 2° b) de la Partie A pour démontrer que :

a) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante

b) la suite $(a_n)_n$ converge.

2° Montrer que : $\forall\, n \geq 3$, $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln 2$. En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n , a_{2n} et u_n .

3° Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln 2$). Déterminer S.

Partie C

On note F l'application de $]1,+\infty[$ vers **R** définie par : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geq 1$, on considère l'application φ_n de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par : $\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonctions $\sum \varphi_n$, puis on retrouve la valeur de S.

1° Pour $n \geq 1$, on considère les applications v_n et w_n de $[1,+\infty[$ vers **R** définies par :

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt .$$

a) i) Calculer $(v_n)'(x)$.

ii) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1,+\infty[$.

b) i) Prouver que pour $n \geq 1$, w_n est continue sur $[1,+\infty[$.

ii) Montrer que : $\forall\, x \geq 1$, $\forall\, n \geq 1$, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

iii) On considère la fonction W définie par : $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Démontrer que W est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

c) i) Montrer que : $\forall\, x>1$, $W(x)=F(x)+\dfrac{1}{1-x}$.

ii) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(F(x)+\dfrac{1}{1-x}\right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).

2° a) Montrer que la série de fonctions $\sum\varphi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

b) Soit a un élément de $]0,+\infty[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum(\varphi_n)'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

c) On considère la fonction φ définie par : $\varphi=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\varphi_n$. Montrer que φ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Exprimer $\varphi'(1)$ sous forme de somme d'une série.

3° a) Etablir que : $\forall\, x>1$, $\varphi(x)=(1-2^{1-x})F(x)$.

b) Déterminer un développement limité de $1-2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1, puis un développement limité de $\varphi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1.

c) En déduire la valeur de S.

Exercice 2

R est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n\geq 1$.

$x_0, x_1, ..., x_n$ sont des éléments de **R** deux à deux distincts.

$\mathbf{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

$\mathbf{R}_n[X]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}[X]$ de degré au plus égal à n.

Pour tout k appartenant à $\{0,1,....,n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{X-x_j}{x_k-x_j}\,.$$

1° Pour k et i éléments de $\{0,1,....,n\}$, calculer $P_k(x_i)$.

2° Montrer que $(P_0,P_1,....,P_n)$ est un système libre de $\mathbf{R}_n[X]$. Que peut-on en déduire ?

3° a) Soit Q un élément de $\mathbf{R}_n[X]$. Démontrer que : $Q=\sum\limits_{k=0}^{n}Q(x_k)P_k$.

b) Pour m élément de $\{1,2,....,n\}$, on pose: $s_m=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^m\,P_k(0)$. Calculer s_m.

Les questions 4° et 5° qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

4° Dans cette question Q est un élément de $\mathbf{R}[X]$. On pose : $Q_1 = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

a) Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes.

b) On pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

i) Déduire de la question 4° a) que : $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$.

ii) Calculer s_{n+2}. Exprimer le résultat en fonction de n, de $\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$.

5° Dans cette question Q est un polynôme unitaire de $\mathbf{R}_n[X]$ de degré égal à n.

On suppose de plus que $x_0, x_1, ..., x_n$ sont des entiers relatifs vérifiant : $x_0 < x_1 < .... < x_n$.

Pour k élément de $\{0,1,....,n\}$, on note : $y_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$.

a) Prouver que : $|y_k| \geq k!(n-k)!$.

b) Déduire de la question 3° a) que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$.

c) On définit M par : $M = \max_{0 \leq k \leq n} |Q(x_k)|$. Démontrer que : $M \geq \frac{n!}{2^n}$.

M10K

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geqslant 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

I. Étude de la suite des polynômes (T_n)

1 °) Déterminer les polynômes T_2 et T_3.

2 °) Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.

Tournez la page S.V.P.

3 °) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 °) a) Établir par récurrence les relations suivantes pour tout nombre réel x :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \; ; \; T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx).$$

On rappelle que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)$.

b) En déduire que $|T_n(u)| \leqslant 1$ pour $|u| \leqslant 1$.

c) Soit n un entier $\geqslant 1$. Montrer que, pour tout u dans $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$ (on pourra poser $u = \mathrm{ch}(x)$).

d) En déduire que, pour tout n entier $\geqslant 1$ et pour tout u dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.

5 °) a) Pour tout n entier $\geqslant 1$, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.

b) En déduire que, pour tout n entier $\geqslant 1$, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

c) Soit n un entier $\geqslant 1$. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

6 °) Établir la convergence et calculer la somme des séries suivantes pour $|t| < 1$ et x réel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos(nx) \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin(nx).$$

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel non nul et les n racines de T_n par $\cos(x_1)$, $\cos(x_2)$, ... , $\cos(x_n)$ où :

$$x_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \; k \in \{1, ..., n\}.$$

II.A) Étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos(x))\, Q(\cos(x)) \; \mathrm{d}x.$$

1 °) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 °) a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $\langle T_p, T_q \rangle$.

b) Calculer $\langle T_0, T_0 \rangle$ et $\langle T_n, T_n \rangle$.

c) En déduire que, pour $n \geqslant 1$, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d) En utilisant les questions I.2), II.A.2.b) et II.A.2.c), montrer que $\langle T_n, X^n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$.

3 °) Montrer que la famille $(T_0, ..., T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$

II. B) Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos(x))\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n(P) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\cos(x_k)).$$

1 °) On note, pour $j \in \{0, ..., n\}$, $c_j = \sum_{k=1}^{n} \cos(jx_k)$.

a) Calculer c_0.

b) Calculer pour $j \in \{1, ..., n-1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{ij\frac{\pi}{n}})^k.$$

c) En déduire que, pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, $c_j = 0$.

2 °) a) Pour $p \in \{0, ..., n-1\}$, calculer $I(T_p)$ et $S_n(T_p)$.

b) En déduire que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

3 °) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n ; on a donc $P = QT_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a) Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) En déduire, en utilisant II.A.2.c), que $I(P) = I(R)$.

c) En déduire que, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

4 °) Calculer $I(T_{2n})$ et $S_n(T_{2n})$; qu'en conclut-on ?

T.S.V.P

Tournez la page S.V.P.

III. Calcul approché d'une intégrale

On associe à toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ l'intégrale et la somme suivantes :

$$I(f) = \int_0^{\pi} f(\cos(x)) \, \mathrm{d}x \; ; \; S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\cos(x_k)).$$

1 °) On admet le théorème sur les sommes de Riemann :

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Soit p un entier naturel non nul. On pose pour k dans $\{0, ..., p-1\}$, $\alpha_k = a + k\frac{b-a}{p}$. Alors, pour tous $c_0, ..., c_k, ..., c_{p-1}$ tels que, $\forall k \in \{0, ..., p-1\}, c_k \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(c_k) = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = I(f)$.

2 °) On suppose que f est l'application définie par $f(t) = \ln\left(a^2 - 2at + 1\right)$ où a est un réel tel que : $a > 0$ et $a \neq 1$.

a) Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$ et en déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = I(f)$.

b) i. Exprimer les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 dans $\mathbb{C}$ en fonction de $x_1, ..., x_n$ (on pourra les classer par conjugués).

ii. Donner la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

iii. En déduire que la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2\cos(x_k)X + 1) \, .$$

iv. Montrer que :

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln\left(a^{2n} + 1\right).$$

c) Donner la limite de $\frac{\pi}{n} \ln\left(a^{2n} + 1\right)$ quand n tend vers $+\infty$ (on distinguera les cas : $a \in]0, 1[, a \in]1, +\infty[$). En déduire la valeur $I(f)$ selon la valeur de a.

d) Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ quand n tend vers $+\infty$, en distinguant les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$.

***

D80S

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et l'espace vectoriel complexe $E = \mathbb{C}^n$, muni de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1°) a) Montrer que si u est diagonalisable, alors $u^2 = u \circ u$ est aussi diagonalisable.

b) Que pensez-vous de la réciproque en général si $n \geq 2$? Pour répondre à cette question, on pourra considérer u tel que $u(e_1) = e_2$, et $u(e_2) = \cdots = u(e_n) = 0$.

2°) On suppose dans cette question que u est bijectif.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, on a :

$$\ker(u^2 - \alpha^2 \mathrm{id}_E) = \ker(u - \alpha \mathrm{id}_E) \oplus \ker(u + \alpha \mathrm{id}_E).$$

Indication : On pourra écrire $x \in \ker(u^2 - \alpha^2 \mathrm{id}_E)$ sous la forme $x = \frac{1}{2\alpha}[(u(x) + \alpha x) - (u(x) - \alpha x)]$.

b) Montrer que si μ est une valeur propre de u, alors μ^2 est une valeur propre de u^2.

c) Montrer que si u^2 est diagonalisable, alors E est somme directe de sous-espaces propres de u, et en déduire que u est diagonalisable.

3°) Soit

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$, de matrice U relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de E.

a) Calculer la matrice U^2.

b) Calculer le rang de u.

c) Montrer que u^2 est diagonalisable et en donner les éléments propres.

d) Étudier si u est diagonalisable.

Exercice II

Le plan affine euclidien est assimilé à $E = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $||.||$. La base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est alors une base orthonormale directe de E.

Pour tout réel θ, on note :

$$\begin{cases} u_\theta &= (\cos(\theta), \sin(\theta)) &= \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ \rho(\theta) &= 1 + 2\cos(3\theta) \\ M(\theta) &= \rho(\theta)u_\theta \end{cases}$$

Soit enfin $\Gamma = \{M(\theta)\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

1°) On se propose dans cette question de représenter la courbe Γ' d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

a) Déterminer les valeurs de θ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho(\theta) = 0$.

b) Calculer la dérivée ρ' de ρ et déterminer les valeurs de θ dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ pour lesquelles $\rho'(\theta) = 0$.

c) Expliciter les tangentes à Γ' aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.

d) Représenter Γ'. On fera apparaître sur le dessin les tangentes aux points $M(0)$, $M(\frac{2\pi}{9})$ et $M(\frac{\pi}{3})$.

2°) On se propose dans cette question de déduire la représentation de la courbe Γ de celle de la courbe Γ'. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\theta = \frac{\pi}{3}$ et τ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer l'image par σ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence

$$M(\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \sigma(M(\theta)) \in \Gamma.$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer l'image par τ du point $M(\theta)$. En déduire l'équivalence

$$M(\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \tau(M(\theta)) \in \Gamma.$$

c) Représenter Γ : On utilisera σ pour représenter $\{M(\theta)\ ;\ \theta \in [0, 2\pi/3]\}$ et τ et τ^{-1} pour conclure.

3°) Soit $G = \{f \in O(E)/f(\Gamma) = \Gamma\}$, où l'on a noté $O(E)$ le groupe des transformations orthogonales de E.

a) On note D le cercle centré en l'origine de rayon 3. Expliciter $D \cap \Gamma$.

b)Soit $f \in G$. Montrer que $f(M(0))$ est un élément de $D \cap \Gamma$.

c) Soit f une rotation dans G. En distinguant selon la valeur de $f(M(0))$, déterminer l'angle de f. Quelles sont les rotations de G ?

d) Quelles sont, dans G, les symétries orthogonales par rapport à une droite ?

e) Décrire tous les éléments de G. Quel est le cardinal de G ?

Exercice III

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(0) = 1$, et pour $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

1°) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

b) Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(x+1)[xy' - y] + y^2 = 0.$$

c) Pour tout x dans $]-1,0[$, démontrer que : $0 \leq f(x) \leq 1$.

2°) Soit $g(x) = \int_0^1 (1+x)^t\, dt$ pour $x \in]-1,1[$.

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$, et donner une relation entre f et g.

b) Pour tout $t \in [0,1]$, donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^t$ sur $]-1,1[$.

c) Montrer que g est développable en série entière sur $]-1,1[$. On précisera bien le théorème du cours utilisé. On écrira ce développement sous la forme $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, en exprimant a_k sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer en général.

d) Calculer a_0, a_1, a_2.

e) Exprimer, selon la parité de l'entier naturel $k \geq 1$, le signe de a_k.

f) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} |a_k| x^k \leq 1$. Pour cela, on pourra considérer $g(-x)$ et utiliser le résultat de la question 1°)c).

g) En déduire la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0.$$

b) En considérant $\ln(1+x)g(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on a aussi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{a_k}{n-k} = 0.$$

c) Trouver ainsi la valeur de a_3 en utilisant 2°) d).

4°) Justifier les égalités : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} = \int_0^1 \frac{2^{1+t}-1}{t+1}\,dt.$

V53C

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage des calculatrices est interdit

Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
$\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note : désigne

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) \,;\, \int_I |f| \text{ existe} \right\} \text{ et } \quad \forall f \in L^1(I),\ \|f\|_1 = \int_I |f|$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) \,;\, \int_I |f|^2 \text{ existe} \right\} \text{ et } \quad \forall f \in L^2(I),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$$

Partie I

1 - Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :

$$y' + cy = f$$

admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, et qui vérifie :

$$\varphi(f)(0) = 0$$

Démontrer :

$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tournez la page S.V.P

2 - Exprimer $\varphi'(f)$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant 0 < b$.

1 - Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|f\|_1 \leqslant M_1 \|f\|_2 \leqslant M_2 \|f\|_\infty$$

2 - Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant M_0 \|f\|_\infty$$

3 - Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant A \|f\|_1$$

4 - Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant B \|f\|_2$$

En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_2 \leqslant K \|f\|_2$$

5 - L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue

a) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_\infty$?

b) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_1$?

c) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

1 - Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

2 - Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

3 - Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

4 - Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_1$$

5 - On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.
Démontrer :

$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_2$$

Partie IV

Soit R un réel strictement positif. On note G l'espace vectoriel réel des fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

1 - Démontrer que φ est un endomorphisme de G.

2 - Pour f élément de G, on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles pour lesquelles :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Exprimer, pour tout entier naturel n, b_n en fonction des termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser la relation $f = \varphi(f)' + c\varphi(f)$.

Partie V

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I),\ \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}$$

1 - a) Démontrer que si f et g sont dans $H(I)$ alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

b) Démontrer que l'application :

$$\phi : \begin{array}{ccc} H(I)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $H(I)$.

c) En déduire que l'application $\|\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I),\ \|f\|_H = \sqrt{\int_I f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

est une norme sur $H(I)$.

2 - On suppose dans cette question que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.
On pose :

$$K = \{f \in H(I),\ f(0) = 0\}$$

a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K.
Démontrer :

$$\exists A > 0,\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leqslant A\,\|f\|_2$$

b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

c) Démontrer que φ est continue de $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$ dans $(K, \|\|_H)$.

d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\|_H)$ dans $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$.

Tournez la page S.V.P

Partie VI

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques muni de la norme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. F est muni de la norme :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

1 - Démontrer que, pour tout f dans E, il existe une unique solution, notée $\psi(f)$, dans F de l'équation :

$$y' + cy = f$$

Exprimer $\psi(f)(0)$ en fonction de f et c.
Démontrer que ψ est un isomorphisme de E dans F.

2 - Pour tout f dans E et tout entier relatif k, on pose :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad d_k(f) = c_k\left(\psi(f)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(f)(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $d_k(f)$ en fonction de $c_k(f)$.

3 - Démontrer que, pour tout f dans E, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et :

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$$

Pour g dans F, calculer $\|g\|_F$ en fonction des $c_k(g)$.
Comparer $\|f\|_E$ et $\|\psi(f)\|_F$ pour f dans E. *On pourra distinguer les cas* $c \leqslant 1$ *et* $c > 1$.

4 - Démontrer que ψ est continue de $(E, \|\|_E)$ dans $(F, \|\|_F)$.
Démontrer que ψ^{-1} est continue de $(F, \|\|_F)$ dans $(E, \|\|_E)$.

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ une série alternée avec :

i) $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$,

iii) la suite (u_n) converge en décroissant vers 0,

iv) $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$.

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

1. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| + |R_{n+1}| = u_n$.

2. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{n+p} - u_{n+1+p} \right]$.

En déduire la monotonie de la suite $\left(|R_n| \right)_{n\geqslant 0}$.

3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \dfrac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{2}$.

4. En déduire qu'au voisinage de l'infini : $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{u_n}{2}$.

Tournez la page S.V.P

5. *Application* :

Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 2.

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs et telles que : $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur **R**.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\quad a_n = b_n\,(1+\gamma_n)$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}$.

3.1. Prouver l'existence de $\delta_m = \sup_{n\geqslant m} |\gamma_n|$.

3.2. Montrer que :

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, m \in \mathbf{N},\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}\, t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n\, t^n.$$

3.3. En déduire que : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Applications :

4. Soit h la fonction définie par : $t \mapsto h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}\, t^n$.

4.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

4.2. Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Soit (E) l'équation différentielle définie sur **R** :

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) = 1$$

5.1. Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

Préciser les coefficients de ce développement.

5.2. Donner une expression simple de $z'(t)$ pour $t > 0$.

5.3. Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisinage de l'infini.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = M_n(\mathbf{C})$. La matrice identité de E est notée I_n.

Soit $F = (f_{ij})$ la matrice de E définie par : $\begin{cases} \forall\, i \in \{1,...,n-1\},\ f_{i,i+1} = 1 \\ f_{n,1} = 1 \\ fij = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Question 1.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de F.

On note $\{\lambda_k\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ les valeurs propres de F.

2. La matrice F est-elle diagonalisable dans E ? La matrice F est-elle inversible ?

3. Soit $G = \{ F^p,\ p \in \mathbf{Z} \}$.

Montrer que G est un groupe cyclique d'ordre n pour la multiplication des matrices.

Préciser tous les éléments générateurs du groupe G.

4. Déterminer la dimension et une base de $Vect(G)$.

5. Calculer la trace d'un élément de G.

Question 2.

Soit le polynôme $p = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $A = p(F)$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de la matrice A est :

$$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{n}{\lambda_k - 1}\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}.$$

2. Vérifier que : $\det(A) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n+1)\, n^{n-1}}{2}$.

Question 3.

On se propose dans cette question de déterminer l'inverse de la matrice A.

1. Prouver que : $A^{-1} \in Vect\left(\{A^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\} \right)$.

2. En déduire qu'il existe des scalaires $(u_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ tels que : $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k\, F^k$.

3. Montrer que : $(F - I_n)^2\, A = n\,(F - I_n)$.

4. Prouver que : $\begin{cases} u_2 = u_3 = \ ... \ = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \dfrac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Tournez la page S.V.P

5. En calculant de deux façons différentes la trace de la matrice A^{-1}, déterminer la valeur de u_0.

6. En déduire A^{-1}.

Fin de l'épreuve.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Soit (L) l'équation différentielle : $y''(x) - y(x) = b(x)$, définie sur $[0,1]$, où b et y sont des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, b continue et y de classe C^2 et (L_0) l'équation différentielle homogène associée : $y''(x) - y(x) = 0$.

Partie 1 : Expression des solutions de (L).

1. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (L_0) ? En donner une base.

2. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (L) ?

3. Vérifier que la fonction $h : x \in [0,1] \mapsto h(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\, b(t)\, dt$ est une solution de l'équation différentielle (L).

$\left(\text{Rappel : pour tout } z \text{ réel, } \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)$.

4. En déduire que les solutions de (L) s'écrivent sous la forme :

$$\forall\, x \in [0,1],\ y(x) = A\,\mathrm{ch}(x) + B\,\mathrm{sh}(x) + h(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

5. Soient α et β deux nombres réels.

Prouver l'existence d'une unique solution s de (L) vérifiant : $\begin{cases} s(0) = \alpha\,\mathrm{sh}(1) \\ \quad et \\ s(1) = \beta\,\mathrm{sh}(1) \end{cases}$

Tournez la page S.V.P

On admettra que la fonction s est la fonction :

$$s : x \in [0,1] \mapsto s(x) = \alpha \operatorname{sh}(1-x) + \beta \operatorname{sh}(x) - \int_0^1 H(x,t)\ b(t)\ dt$$

où H est la fonction de deux variables définie par :

$$H : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$$

$$(x,t) \mapsto H(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(1-x) \operatorname{sh}(t) & \text{si } t \leqslant x, \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(1-t) & \text{si } t \geqslant x \end{cases}$$

et que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 H(x,t)\ b(t)\ dt$ est de classe C^2 sur $[0,1]^2$.

Partie 2 : Développement en série de Fourier de la fonction H.

On fixe x dans $[0,1]$ et soit φ la fonction impaire, 2 – périodique, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall\ t \in [0,1],\ \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(1-x)}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(1)} \operatorname{sh}(1-t) & \text{si } x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Donner une allure de la représentation graphique de φ sur $[-2,2]$ dans le cas où $x = \frac{1}{4}$ avec $\operatorname{sh}(1) \simeq 1{,}2$, $\operatorname{sh}\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0{,}8$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0{,}25$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de φ.

3. La série de Fourier de φ converge-t-elle ? Vers quelle fonction ? Justifiez votre réponse.

4. En déduire que : $\forall (x,t) \in [0,1]^2,\ H(x,t) = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)\ \sin(\pi n t)}{n^2 \pi^2 + 1}$.

Partie 3 : Etude d'un endomorphisme auto-adjoint défini par H.

Soit $E = C^0([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire suivant :

$$\forall\ (f_1, f_2) \in E^2,\ (f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(t)\, f_2(t)\ dt$$

dont la norme associée est notée $\|\ \ \|$.

Soit Ψ l'application qui à tout élément f de E associe $\Psi(f)$ définie par :

$$\forall\ x \in [0,1],\ \Psi(f)(x) = \int_0^1 H(x,t)\, f(t)\ dt.$$

1. Vérifier que Ψ est un endomorphisme de E.

2. Justifier que pour toute application f appartenant à E et pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\Psi(f)(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2 + 1} \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi n t)\, dt \right).$$

3. Donner la définition d'un endomorphisme auto-adjoint (ou symétrique) de E.
Prouver que Ψ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

4. Vérifier que : $\forall f \in E, \quad (\Psi(f) \mid f) \geqslant 0.$

5. Soit $u \in E$ telle que : $(\Psi(u) \mid u) = 0.$

5.1. Vérifier que : $\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 u(x) \sin(\pi n x)\, dx = 0.$

5.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$, impaire et $2-$ périodique, telle que :

$$F : x \in [0,1] \mapsto F(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in]0,1[\\ 2 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Exprimer les coefficients de Fourier de F en fonction de u.

En déduire que : $\int_0^1 u^2(x)\, dx = 0.$

5.3. Prouver alors que :
Pour toute fonction v différente de la fonction nulle de E, $(\Psi(v) \mid v) > 0.$

5.4. Quel résultat peut-on en conclure pour les valeurs propres de Ψ ?

6. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, soit la fonction f_m définie par :

$\forall x \in [0,1], \quad f_m(x) = \sin(\pi m x).$

6.1. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer : $\int_0^1 \sin(\pi p x) \sin(\pi q x)\, dx.$

6.2. Déterminer, pour $m \in \mathbf{N}^*$, $\Psi(f_m)$.

7. Soit λ une valeur propre de Ψ et f_λ un vecteur propre associé.

7.1. Prouver que f_λ est de classe C^2 sur $[0,1]$.

7.2. Vérifier que f_λ est solution du problème : $\begin{cases} y''(x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

7.3. Prouver qu'il est impossible que $\lambda = 1$.

7.4. Prouver qu'il est impossible que $1 - \frac{1}{\lambda} > 0$.

7.5. Lorsque $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$, montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\lambda = \frac{1}{m^2\pi^2 + 1}$.

7.6. Déterminer alors les éléments propres de Ψ.

Tournez la page S.V.P

Partie 4 : Calcul de la norme de l'endomorphisme Ψ.

1. Déterminer, pour $m \in \mathbf{N}^*$, $\|f_m\|$.

On pose alors, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $h_m = \dfrac{f_m}{\|f_m\|}$.

2. Vérifier que :

2.1. $\forall f \in E,\ \Psi(f) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m \mid f)}{m^2\pi^2 + 1}\, h_m$,

2.2. $\forall f \in E,\ \|f\|^2 = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} (h_m \mid f)^2$.

3. En déduire que :

$$\forall f \in E,\quad \|\Psi(f)\|^2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{(\pi^2+1)^2}.$$

4. Prouver que Ψ est un endomorphisme continu de $(E, \|\ \ \|)$.

5. Enfin, calculer : $\displaystyle\sup_{\|f\|=1} \|\Psi(f)\|$.

Fin du problème.

F55T

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

On note **C** l'ensemble des nombres complexes, **R** l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geq 2$.

1° Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes.
On note $V(a_1, a_2, ..., a_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n telle que, pour (i, j) élément de $\{1, 2, ..., n\}^2$, le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne vaut $a_j^{\,i-1}$ (on rappelle que $a_j^{\,0} = 1$).

Pour $n \geq 3$, montrer que : $V(a_1, a_2, ..., a_n) = V(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)$.

Etablir l'égalité : $V(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Les questions 2° et 3° qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

2° On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes en X, à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n. Soient $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ des nombres complexes 2 à 2 distincts.
Démontrer que $\left((X+\lambda_0)^n, (X+\lambda_1)^n, ..., (X+\lambda_n)^n\right)$ est une base de E.

3° Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels non nuls, 2 à 2 distincts et $c_1, c_2, ..., c_n$ des nombres complexes.

On considère l'application g de **R** vers **C** telle que : $g(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i x_k t}$.

a) Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que les n nombres complexes $e^{i\alpha x_1}$, $e^{i\alpha x_2}$, ..., $e^{i\alpha x_n}$ soient 2 à 2 distincts.

Tournez la page S.V.P

b) Pour t réel, on pose : $Y(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ g(t+\alpha) \\ g(t+2\alpha) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(t+(n-1)\alpha) \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{ix_1 t} \\ c_2 e^{ix_2 t} \\ c_3 e^{ix_3 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{ix_n t} \end{pmatrix}$

i) Déterminer une matrice carrée A d'ordre n à coefficients complexes telle que : $Y(t) = AX(t)$.

ii) Montrer que la matrice A est inversible.

c) On suppose que g admet une limite L dans **C** quand t tend vers $+\infty$.

i) Démontrer que $X(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.

ii) En déduire que pour k élément de $\{1,2,.....,n\}$, $c_k = 0$.

Exercice 2

R est le corps des nombres réels, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E le **R**-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans **R**, $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de E et I_n la matrice unité de E. Pour M élément de E, ${}^tM$ et $tr(M)$ désignent respectivement la matrice transposée de M et la trace de M.

Pour (i,j) élément de $\{1,2,.....,n\}^2$, on note E_{ij} la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.

Soient A et B deux éléments fixés de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in \mathrm{E} \ , \ f(M) = AMB.$$

1° Soit C un élément de E. Calculer CE_{ij} et $E_{ij}C$.

On suppose que pour tout M élément de E , $CM = MC$. Prouver qu'il existe a dans **R** tel que : $C = aI_n$.

2° Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M|N\rangle = tr\left({}^tMN\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite de l'exercice, E est muni de ce produit scalaire.

3° On note f^* l'endomorphisme adjoint de f. Montrer que :

$$\forall M \in \mathrm{E} \ , \ f^*(M) = {}^tA M {}^tB.$$

4° Dans cette question on veut déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit un endomorphisme orthogonal de E.

a) On suppose que f est un endomorphisme orthogonal de E.

i) Prouver que les matrices ${}^tAA$ et $B\,{}^tB$ sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.

ii) Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que ${}^tAA = aI_n$.

b) Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal de E si et seulement s'il existe un réel λ strictement positif et deux matrices Ω_1 et Ω_2 appartenant à $O_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $A = \lambda\Omega_1$ et $B = \frac{1}{\lambda}\Omega_2$.

Exercice 3

Dans cet exercice, **R** est l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel.

1° Soit Γ la fonction numérique de la variable réelle suivante : $x \to \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de Γ est $]0,+\infty[$.

On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Dans la suite de la question 1°, x désigne un réel strictement positif.

b) Pour $n \geq 1$, on considère l'application f_n de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ si } 0 < t \leq n \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \text{ si } t > n .$$

i) Etablir, pour tout réel u, l'inégalité : $1 + u \leq e^u$.

ii) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \Gamma(x)$.

c) On pose : $I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n\, t^{x-1}\, dt$.

Prouver que pour $n \geq 1$, on a : $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = n^x I_n(x)$ et $I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$.

d) En déduire : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$.

2° Soit p un entier naturel non nul et $a_n = \int_0^1 (1-t^p)^n\, dt$.

a) Prouver que pour $n \geq 1$, on a : $a_n = np(a_{n-1} - a_n)$.

b) En déduire une expression de a_n en fonction de n et de p ne comportant pas de signe d'intégrale.

c) Etablir l'équivalence : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(1/p\right)}{pn^{1/p}}$.

Tournez la page S.V.P

d) Soit c un élément de $]0,1[$ .On pose : $a_n(c) = \int_0^c (1-t^p)^n\,dt$.

Prouver que : $a_n - a_n(c) \le (1-c^p)^n$. En déduire l'équivalence : $a_n(c) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

3° Soit g une application de $[0,1]$ vers $[0,1]$ continue, décroissante telle que :

$$g(t) = 1 - \lambda t^p + t^p \varepsilon(t)$$

où p est un entier naturel non nul, λ un élément de $]0,+\infty[$ et où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

On pose : $u_n = \int_0^1 (g(t))^n\,dt$.

a) Soit λ_1 , λ_2 deux réels tels que : $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

i) Justifier l'existence d'un réel c élément de $]0,1[$ vérifiant :

$$\forall t \in [0,c],\ 0 \le 1-\lambda_2 c^p \le 1-\lambda_2 t^p \le g(t) \le 1-\lambda_1 t^p \quad .$$

ii) En déduire que : $\int_0^c (1-\lambda_2 t^p)^n\,dt \le u_n \le (g(c))^n + \int_0^c (1-\lambda_1 t^p)^n\,dt$.

iii) Prouver que : $\frac{1}{\lambda_2^{1/p}} a_n\left(c\lambda_2^{1/p}\right) \le u_n \le (g(c))^n + \frac{1}{\lambda_1^{1/p}} a_n\left(c\lambda_1^{1/p}\right)$.

b) Cette question est plus technique et pourra être admise afin d'aborder directement la question 4°.

Etablir l'équivalence : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(1/p\right)}{p(n\lambda)^{1/p}}$

4° Pour $n \ge 1$, on considère : $v_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{sht}\right)^n dt$.

a) Justifier l'existence de v_n.

b) Déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

partie I

Un entier naturel $n \geqslant 2$ étant fixé, on note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

On définit alors pour tout polynôme $P = \sum_{k\geqslant 0} p_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$:

- le polynôme *tronqué* de P au degré n : $T_n(P) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$;
- le polynôme *composé* de P et $X + X^2$: $\varphi(P) = \sum_{k\geqslant 0} p_k (X + X^2)^k$.

On confondra tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale réelle associée : $x \mapsto P(x)$.

1. (a) Établir que $T_n : P \mapsto T_n(P)$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer l'image de T_n.
   (c) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ appartient au noyau de T_n si et seulement si :
   $$P(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n).$$

2. (a) Déterminer, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ une relation entre le degré de P et celui de $\varphi(P)$.
   (b) Prouver que φ définit un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$; φ est-il surjectif ?

3. On définit maintenant un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
   $$\varphi_n(P) = T_n(\varphi(P))$$
   et on note $M_n = [m_{i,j}]_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathscr{B} = (X^j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On remarquera que l'indice i de ligne et l'indice j de colonne varient de 0 à n.
   (a) Calculer les $\varphi_4(X^j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant 4$ et en déduire M_4 (il s'agit d'une matrice 5×5).
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est triangulaire inférieure, et expliciter son terme général $m_{i,j}$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

Tournez la page S.V.P

4. (a) Inverser la matrice M_4.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est inversible. Que peut-on en conclure pour l'endomorphisme φ_n ?

   (c) Montrer que la matrice inverse de M_n, notée $Q_n = [q_{i,j}]_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, est triangulaire inférieure.

5. (a) Montrer que les $T_n((X+X^2)^i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ forment une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $Q_n = (M_n)^{-1}$ est la matrice de $\mathscr{B} = (X^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$.

   (b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$, lorsque x tend vers 0 : $x^j = \sum_{i=0}^{n} q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n)$.

   (c) Pour tous les entiers naturels i, j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$, en remarquant que $X^j = (X+X^2)\,X^{j-1} - X^{j+1}$, établir la relation de récurrence :
   $$q_{i,j} = q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1}.$$

   (d) Construire alors la matrice $Q_5 = (M_5)^{-1}$ à partir de sa première colonne et de sa diagonale, en indiquant l'enchaînement des calculs.

   (e) Vérifier que lorsque $n = 5$, on a pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant i$:
   $$q_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\frac{j}{i}\binom{2i-j-1}{i-j}$$
   où pour $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leqslant p \leqslant m$, $\binom{m}{p}$ désigne le coefficient binomial noté parfois C_m^p.

   Dans le reste du problème, ce résultat sera admis pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

partie II

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0, de partie régulière $P \in \mathbb{R}_n[X]$; c'est-à-dire que :
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

   (a) En utilisant éventuellement le I 1°c, montrer que l'application $x \mapsto f(x+x^2)$ admet en 0 un développement limité d'ordre n de partie régulière $\varphi_n(P)$, c'est-à-dire que :
   $$f(x+x^2) \underset{x\to 0}{=} T_n(P(x+x^2)) + o(x^n).$$

   (b) Si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$, déterminer à l'aide des notations de la partie I, un calcul matriciel fournissant directement le développement limité d'ordre n de $x \mapsto f(x+x^2)$ en 0 à partir du vecteur colonne formé de $p_0, \ldots, p_n$; expliciter alors ce développement limité.

2. (a) Appliquer le II 1°b pour obtenir le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application :
   $$g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

   (b) Vérifier ce résultat par un calcul direct de développement limité que l'on détaillera.

3. Soit une application f, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, fini ou non :
   $$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\, x^n.$$

   (a) Déterminer le plus grand ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\,(x+x^2)^n$ converge (il faudra distinguer différents cas selon les valeurs de R).

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose : $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n (x + x^2)^n$. Montrer que :

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} \left(\sum_{n=k/2}^{\min(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n} \right) x^k.$$

(Dans une telle somme, n ne prend que les valeurs entières entre les bornes indiquées.)

(c) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mu_k = \sum_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{k-n}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $h_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \mu_k x^k$. Montrer que :

$$|h_N(x) - g_N(x)| \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| (x^2 + |x|)^n.$$

(d) Déduire de ce qui précède que, sur un intervalle à préciser, on a : $f(x + x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k x^k$.

Retrouver alors le développement limité d'ordre n en 0 de $x \mapsto f(x + x^2)$ obtenu en II 1°b.

4. (a) En remarquant que $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, développer en série entière au voisinage de 0 l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

(b) Utiliser ce résultat et celui de la question II 3°d pour évaluer, selon $k \in \mathbb{N}$, les sommes :

$$S_k = \sum_{n=k/2}^{k} (-1)^n \binom{n}{k-n}.$$

partie III

1. (a) Déterminer des intervalles ouverts I et J, contenant 0 et aussi grands que possible, tels que $a : x \mapsto u = x + x^2$ définisse une bijection de I vers J. Exprimer alors $a^{-1}(u)$ pour $u \in J$.

(b) Montrer que cette fonction $a^{-1} : J \to I$ est développable en série entière au voisinage de 0, et préciser le rayon de convergence de la série entière associée que l'on notera $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k$.

(c) Montrer, à l'aide du I 5°a, que les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont les termes de la deuxième colonne de $Q_n = (M_n)^{-1}$ (colonne d'indice 1).

(d) Calculer directement le développement en série entière de $a^{-1}(u)$ au voisinage de 0 et comparer les résultats obtenus à ceux résultant du I 5°e.

2. On considère maintenant l'application $\alpha : z \mapsto w = z + z^2$, définie sur le demi-plan ouvert Π formé des $z = x + i\,y$ tels que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x > -1/2$.

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, si bien que en posant $w = u + i\,v$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, α est aussi l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ définie sur l'ensemble Π des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > -1/2$.

(a) Établir que lorsque w décrit $\mathbb{C}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z + z^2 = w$ restent symétriques par rapport à un point fixe, puis montrer ensuite que l'application α définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre Π et le plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ privé d'une demi-droite à préciser.

(b) Soient dans Π les droites D_k, d'équations $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k > -1/2$). Montrer que ces droites ont pour images par α des paraboles d'axe Ou et toutes de même foyer F, à préciser.

3. On pose maintenant $\beta(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k w^k$ lorsque cette série converge, les b_k étant définis au III 1°b. Montrer que, sur son disque de convergence, cette série a pour somme $\alpha^{-1}(w)$.

(On pourra considérer, sans le calculer, le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application $w \mapsto (\beta(w))^2 + \beta(w) - w$.)

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

E est l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
E_1 est le sous-ensemble de E formé des fonctions f telles que l'intégrale impropre

$$\int_x^{+\infty} f(t).\exp(-t)dt$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Etude de quelques exemples :

   a) Montrer que $\int_x^{+\infty} \exp(-t)dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_x^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_x^{+\infty} cost \exp(-t)dt$ existe-t-elle ?

   c) En déduire des exemples de fontions appartenant à E_1.

2. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E_1 & \to & E \\ & f & \longmapsto & F \end{array}$$

où $F(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} f(t).\exp(-t)dt$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $F = F' + f$
   c) φ est-ele injective ?
   d) Montrer que, si $f \in E_1$ est un vecteur propre de φ alors f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants .
   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
   e) Soit $f \in E_1$, bornée et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, montrer que la dérivée f' de f appartient à E_1, et que $\varphi(f') = ((\varphi(f))'$.

Tournez la page S.V.P

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_2 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   a) Montrer que $E_2 \subset E_1$.
   b) Soit ψ la restriction de φ à E_2.
      (i) Montrer que ψ est un endomorphisme de E_2.
      (ii) Est-ce un automorphisme de E_2 ?
      (iii) ψ est-il diagonalisable ?
   c) Soit $f \in E_2$. Montrer que si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$, alors :

$$\sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(x) \geq 0,$$

   pour tout $x \geq a$. ($f^{(k)}$ désignant la dérivée k^{ieme}de la fonction polynôme f)

Exercice 2

Soient : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. a) Montrer que A est diagonalisable.
   b) Montrer que la matrice P est inversible.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si f et g commutent, les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.
3. En déduire que si f et g commutent, f et g sont simultanément diagonalisables.
4. On considère l'équation matricielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad M^2 - 6M = A$$

   d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels.
   a) Montrer que si la matrice M est solution de $(\mathcal{E})$, alors M et A commutent.
   b) En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ est équivalente à l'équation $(\mathcal{E}')$ d'inconnue D matrice carrée d'ordre trois diagonale :

$$(\mathcal{E}') \qquad D^2 - 6D = \Delta$$

   où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
   c) Résoudre l'équation $(\mathcal{E}')$, puis déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 3

E est un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal de sens direct $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$. On choisit O comme pôle et $(O, \vec{i})$ comme axe polaire ; a est un réel strictement positif.

1. Tracer la courbe Γ d'équation polaire $\rho = a(1 + cos\theta)$
2. Déterminer la longueur de Γ.
3. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : &]-\pi, +\pi[& \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & t = \tan\dfrac{\theta}{2} \end{array}$$

a) Montrer que : $x = 2a\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $y = \dfrac{4at}{(1+t^2)^2}$ sont des équations paramétriques de Γ.

b) Montrer que la tangente à Γ en le point M de paramètre τ a pour équation :

$$(\tau^3 - 3\tau)y + (3\tau^2 - 1)x + 2a = 0$$

c) Montrer que cette tangente recoupe Γ en deux points P_1 de paramètre t_1 et P_2 de paramètre t_2 si et seulement si $\tau^2 \geq 3$ et alors $t_1.t_2 = 3$.

On considère les tangentes à Γ en ces points P_1 et P_2 ; montrer qu'elles se coupent en le point N de coordonnées (α, β) si et seulement si t_1 et t_2 sont racines de :

$$P(t) = (t^3 - 3t)\beta + (3t^2 - 1)\alpha + 2a$$

et alors la troisième racine t_3 est $t_3 = \dfrac{\alpha - 2a}{3\beta}$

d) En déduire que l'ensemble des points d'intersection N lorque τ décrit $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]+\sqrt{3}, +\infty[$ est inclus dans la courbe dont une équation est :

$$10x^2 - 54y^2 - 22ax + 4a^2 = 0$$

e) Reconnaître et déterminer les éléments remarquables de cette courbe. La représenter dans le repère orthonormal $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Objectifs.

Le but du problème est d'étudier, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, la distance d'un vecteur à un hyperplan.

Dans la partie I, on étudie un exemple dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Dans la partie II, on étudie le cas de la dimension finie, puis on montre que les hyperplans sont fermés ou denses.

Dans la partie III, on étudie le cas des hyperplans denses.

Dans la partie IV, on étudie un exemple d'hyperplan fermé.

Les quatre parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels, on le munit du produit scalaire défini par :

$$(A|B) = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$$

où A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est la transposée de la matrice A et $\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est la trace de la matrice ${}^tAB$.

Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f_{i,i} = 1, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,1} = 1 \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant n. \\ f_{i,n} = 1 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1. \\ f_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On note H l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(F|X) = 0$.

1) Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On note $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, exprimer $(F|X)$ en fonction des $x_{i,j}$.

3) On rappelle que la distance d 'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'hyperplan H est définie par :

$$d(M,H) = \inf_{U \in H} \|M - U\|$$

où la norme $\|\|$ est la norme associée au produit scalaire $(\ |\ )$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$d(M,H) = \frac{|(F|M)|}{\|F\|}.$$

4) Calculer $\|F\|$ en fonction de n.

5) On note $B = F - I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

   a) Déterminer le rang de B.

   b) Calculer B^2, montrer que B^2 et B ont le même rang.

   c) On appelle g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, tel que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit la matrice B.
   On rappelle que Ker$g$ et Img désignent respectivement, le noyau et l'image de l'endomorphisme g. Montrer que :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}g \oplus \mathrm{Im}g$$

   d) En déduire que la matrice B est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où B' est une matrice carrée d'ordre 2 inversible.

   e) Calculer les traces , $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}\left(B^2\right)$, des matrices B et B^2, en déduire les valeurs propres de B'.

   f) En déduire les valeurs propres de F ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

6) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $k \geqslant 0$, de la forme $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on définit $P\left({}^tF\right)$ par :

$$P\left({}^tF\right) = a_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} a_i \left({}^tF\right)^i.$$

Calculer la distance de la matrice $P\left({}^tF\right)$ à l'hyperplan H en fonction de P.
On pourra utilement poser : $S(X) = XP(X)$ et calculer $S\left({}^tF\right)$.

Partie II.

H est un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, h est une forme linéaire non nulle sur E, dont le noyau est égal à H.

1) Dans cette question, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E.

a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d' éléments de H tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)\cdot$$

b) Montrer qu'il existe une suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ extraite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers un élément de H.

c) En déduire qu'il existe y_0 appartenant à l'hyperplan H tel que :

$$d(x_0, H) = \|x_0 - y_0\|\cdot$$

On dit que la distance de x_0 à l'hyperplan H est atteinte en y_0.

2) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

a) Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau, Ker$h$, est fermé dans E.

b) Montrer que si le noyau, Ker$h$, de h est fermé alors h est continue. On pourra montrer que, si h n'est pas continue, alors il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0. \\ h(t_n) = 1, \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

Puis, on utilisera la suite $(t_n - t_0)_{n\geqslant 0}$ pour mettre en évidence une contradiction.

c) Montrer que si H est un hyperplan de E alors l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E.

d) En déduire que tout hyperplan de E est fermé ou dense, c'est à dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Partie III.

On suppose dans cette partie que E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire : $\begin{array}{ccc} E\times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$ et que H est un hyperplan dense de E, c'est à dire $\overline{H} = E$.

1) Déterminer $H^{\perp}$, l'orthogonal de H.

2) Que dire de $H \oplus H^{\perp}$?

3) Pour tout vecteur x de E, calculer la distance $d(x, H)$.

4) La distance $d(x, H)$ est-elle toujours atteinte? Justifier.

Partie IV.

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension quelconque. H est le noyau de la forme linéaire h, continue non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E. On rappelle que la norme de l'application h subordonnée à la norme de E est définie par :

$$|||h||| = \sup_{x\neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|}.$$

1) a) Montrer que, pour tout élément y de H on a :

$$\|x_0 - y\| \geqslant \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}$$

b) En déduire que la distance de x_0 à l'hyperplan H est supérieure ou égale à $\dfrac{|h(x_0)|}{|||h|||}$.

c) Montrer que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$.

d) On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

α) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $E\setminus\{0\}$ vérifiant :

$$|||h||| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}.$$

β) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n non nul et un vecteur y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

γ) Prouver que, pour tout entier n :

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

e) En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E, on a :

$$d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{|||h|||}.$$

2) Dans cette question, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est à dire que si $u \in E$ alors $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, E est ainsi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

h est l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

a) Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

b) Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E, en déduire $|||h||| \leqslant 1$.

c) Soit $(v_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p. On définit v_p par :

$$\begin{cases} v_p(n) = 1 \text{ si } 0 \leqslant n \leqslant p. \\ v_p(n) = 0 \text{ si } n \geqslant p+1. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$, en déduire $|||h|||$.

d) Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$|||h||| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}.$$

e) On note H le noyau de h, vérifier que H est un hyperplan fermé de E.

f) Montrer que la distance d'un vecteur x de E à l'hyperplan H n'est pas toujours atteinte.

---

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i.$$

Soit α un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle $\mathcal{E}$:

$$xy' + \alpha y = F(x).$$

1. On désigne par J un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0. Résoudre sur J l'équation homogène $xy' + \alpha y = 0$; on pourra poser $z = |x|^\alpha y$ et déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par z.

On désigne par I la réunion des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2. 2a) Résoudre sur I l'équation homogène $xy' + \alpha y = 0$

2b) Quelles sont les solutions sur I de l'équation homogène $xy' + \alpha y = 0$ qui admettent une limite finie en 0 ?

3. Soient a, b deux réels. Justifier que l'équation différentielle $\mathcal{E}$ admet une unique solution f définie sur I et telle que $f(-1) = a$ et $f(1) = b$. On énoncera précisément le théorème utilisé.

4. Montrer qu'il existe au plus une solution de $\mathcal{E}$ sur I qui admet une limite finie en 0.

5. Soit f une fonction développable en série entière ; son rayon de convergence noté R est supposé non nul. On note $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les coefficients de f :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

5a) On suppose que f est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[$. Exprimer les coefficients $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en fonction des coefficients $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de F. Que peut on dire alors de R ?

5b) Réciproquement, démontrer que $\mathcal{E}$ admet une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On introduira la série entière :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i}{i+\alpha} x^i$$

dont on déterminera le rayon de convergence.

5c) Au vu des résultats précédents, quelles précisions peut-on apporter à la question 4 ?

6. Dans cette question, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^x$.

6a) Soit $x \in]0, +\infty[$; démontrer que l'intégrale $\int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt$ est convergente.

On définit h sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ h(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^t dt.$$

6b) Montrer que h est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$.

6c) Montrer que $h(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Déterminer cette limite.

6d) En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+\alpha)i!} x^i.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.

   1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

   1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

   1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1,0)$ et $(-1,0)$.

   1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h,k) \mapsto f(1+h,k)$ au voisinage de $(0,0)$. Le point $(1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?

   1e). De même, le point $(-1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.

   1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.

2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

   2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.

   2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

   2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.

   2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.

Exercice 3

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On considère J_n la matrice de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté $\mathbf{v}$.

1. Montrer l'égalité $J_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
2. Déterminer l'image de J_n. Quelle est la dimension du noyau de J_n ?
3. Calculer J_n^2.
4. Montrer que J_n est diagonalisable. Expliciter ses valeurs propres et pour chacune, préciser la multiplicité.

Soit M une matrice de taille n à coefficients réels.

5. Dans cette question, on considère l'équation $\mathcal{E}$ d'inconnue le réel x :

$$\det(M + xJ_n) = 0 \qquad (\mathcal{E}).$$

On note $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{E}$.

(a) Lorsque $M = 0$, la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.

(b) Lorsque $M = I$, la matrice identité, montrer que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est réduit à un unique élément. Préciser cet élément.

(c) On suppose M inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer qu'un vecteur $\mathbf{w}$ dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$.

(ii) Soit $\mathbf{w} = M^{-1}\mathbf{v}$. En notant σ la somme des coordonnées du vecteur $M^{-1}\mathbf{v}$, démontrer l'équivalence :

$$(M + xJ_n)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow (1 + x\frac{\sigma}{n}) = 0.$$

En déduire que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est au plus de cardinal 1. Pour quelle valeur de σ, l'ensemble $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est-il vide ?

(d) On se propose de déterminer $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ lorsque M est non inversible.

(i) Montrer que $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est non vide.

(ii) S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ et l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{F})$ d'inconnue x, définie par :

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0 \qquad (\mathcal{F}).$$

(iii) Conclure.

6. Soit f la fonction de la variable réelle x définie en posant :

$$f(x) = \det(M + xJ_n).$$

(a) Démontrer qu'il existe des réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha + x\beta$. Expliciter α et β en fonction de M et des coefficients de la comatrice de M.

On rappelle que la comatrice de M est la matrice dont le (i,j)-ème coefficient est le déterminant de la matrice obtenue en retirant à M sa i-ème ligne et sa j-ème colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$, pour tous les indices i et j dans $\{1, ..., n\}$.

(b) Retrouver ainsi les résultats de la question 5.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Questions de cours.

1. Donner la définition du rang d'une matrice.

2. Citer sans démonstration le théorème du rang.

3. Quand dit-on que deux matrices sont semblables ? Ont-elles alors même rang ? (On ne demande pas de justifier votre réponse)

4. Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice ?

Problème.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.

La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle O_n.

L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $B = \left(e_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

v^0 est l'endomorphisme identité,

et $\forall\ m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v o v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$J(\lambda) = \left(u_{ij}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall\ i \in \{1,\ldots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall\ i \in \{1,\ldots,n\},\ u_{ii} = \lambda \\ u_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que :

$$e^{z} = e^{x}\, e^{iy} = e^{x}\,(\cos y + i \sin y)$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice : $\alpha(M) = \lim\limits_{m \to +\infty} S_m$ avec $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m.

On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\ \alpha(B)$.

Partie 1 : **Quelques calculs préliminaires**.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A.

2. Vérifier que : $\ker (A + I_3)^2 \ \oplus\ \ker (A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie 2 : **Quelques propriétés de la matrice $J(0)$**.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.

2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n-1$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$.

2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.

3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Partie 3 : **Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme**.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\ker\left(u^i\right) \subset \ker\left(u^{i+j}\right)$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim\left(\ker u^{\,m}\right)$.

Prouver que : $r = \inf\left\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\right\}$ existe.

3. Montrer que :

(i) $\quad \forall\ m < r,\ \ker\left(u^{\,m}\right)$ est strictement inclus dans $\ker\left(u^{\,m+1}\right)$,

(ii) $\quad \ker\left(u^{\,r}\right) = \ker\left(u^{\,r+1}\right)$,

(iii) $\quad \forall\ m \geqslant r,\ \ker\left(u^{\,m}\right) = \ker\left(u^{\,m+1}\right)$.

Partie 4 : **Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.**

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant : $V^{\,n} = O_n$.

On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de $v^{\,q}$ à $\mathrm{Im}\left(v^{\,p}\right)$.

1.1. Déterminer Im (w).

1.2. Prouver que : $\ker(w) \subset \ker\left(v^{\,q}\right)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a :

$$\dim\left(\ker\left(v^{\,p+q}\right)\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(v^{\,p}\right)\right) + \dim\left(\ker\left(v^{\,q}\right)\right).$$

1.4. En déduire :

$$\forall\ i \in \{1,\ldots,n\},\quad \dim\left(\ker\left(v^{\,i}\right)\right) \leqslant i.$$

1.5. Démontrer qu'en fait : $\forall\ i \in \{1,\ldots,n\},\quad \dim\left(\ker\left(v^{\,i}\right)\right) = i.$

2. Prouver alors que $v^{\,n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que :

$$B_1 = \left(e,\ v(e),\ v^{\,2}(e),\ \ldots.\ ,\ v^{\,n-1}(e)\right)$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base.

Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Partie 5 : **Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.**

1. Montrer que : $\forall\ M \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall\ P \in GL_n(\mathbb{C})$,

$$P^{\,-1}\,\alpha(M)\,P = \alpha\left(P^{\,-1}MP\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$e^{\,z} = i,\quad e^{\,z} = -1,\quad e^{\,z} = -3-4i.$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$.

Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que : $e^{\,z} = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que : $e^{s} = \mu$.

4.1. Déterminer : $\alpha(s I_n)$.

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = s I_n + J(0)$.

Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.

4.3. Vérifier que la matrice : $\mu\left[\ \alpha(J(0)) - I_n\ \right]$ est nilpotente de rang $n - 1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}\ \alpha(J(s))\ Q = J(\mu).$$

5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée : $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation : $\alpha(X) = {}^{t}J(\mu)$.

7. *Applications*

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),\ i^2 = -1$.

Déterminer une matrice X_1 telle que : $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.

7.2.1. Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2. Soit $H = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.

7.2.3. Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que : $\alpha(X_2) = A$.

Fin de l'épreuve.

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

C est l'ensemble des nombres complexes, **R** celui des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de **C non tous nuls** et P le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par : $P = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n$.

Dans tout cet exercice z désigne une racine dans C de P.

Le but de l'exercice est d'établir par deux méthodes différentes une majoration de $|z|$ en fonction des coefficients de P. Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

Partie A Utilisation de méthodes algébriques.

On note E le **C**-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans **C**. I_n est la matrice identité de E.

On note F le ***C***-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans **C**. Pour X élément de F, on note x_i l'élément de la i-ème ligne de X.

Pour M élément de E, m_{ij} est le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

1° Soit M une matrice de E. On suppose que M n'est pas inversible.

a) Montrer qu'il existe X élément de F tel que : $MX = 0$ et $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 1$.

b) En déduire qu'il existe i élément de $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $|m_{ii}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{ij}|$.

2° Soit N la matrice de E définie par : $n_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i-1 \\ -a_{n+1-i} \text{ si } j = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Par exemple pour $n = 4$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que, si λ est un élément quelconque de **C**, $\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda)$.

3° Déduire des 2 questions précédentes que $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

Partie B Utilisation de méthodes analytiques.

Soit Q le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par : $Q = X^n - |a_1|X^{n-1} - .... - |a_{n-1}|X - |a_n|$.

1° Soit g l'application de $]0,+\infty[$ vers **R** telle que : $g(t) = 1 - \frac{|a_1|}{t} - .... - \frac{|a_{n-1}|}{t^{n-1}} - \frac{|a_n|}{t^n}$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Prouver que Q admet une seule racine dans $]0,+\infty[$; cette racine sera notée t_0 .

2° Soit α élément de $]0,+\infty[$ tel que $Q(\alpha) \geq 0$. Etudier le signe de $Q(|z|)$.

En déduire que $|z| \leq t_0 \leq \alpha$.

3° En appliquant le résultat de la question précédente pour une valeur de α judicieusement choisie , retrouver l'inégalité établie à la question 3° Partie A et prouver qu'elle est stricte.

Exercice 2

R est l'ensemble des nombres réels, **Z** est l'ensemble des entiers relatifs et n un entier naturel. Soit f une application continue de **R** vers **R**. On note (E_f) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = f(x).$$

Dans cet exercice on appelle solution de (E_f) toute application de **R** vers **R** de classe C^2 vérifiant (E_f) sur **R**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions périodiques de (E_f).

On rappelle qu'une application φ de **R** vers **R** est périodique si et seulement s'il existe T élément de $\mathbf{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x+T) = \varphi(x)$. On dit alors que φ est T-périodique ou que T est une période de φ.

Partie A Dans cette partie on établit quelques propriétés des applications périodiques.
Soit φ une application T-périodique de **R** vers **R**.

1° Montrer que si φ est continue sur **R** alors φ est bornée sur **R**.

2° Montrer que si φ est dérivable sur **R** alors φ' est T-périodique.

3° On considère l'ensemble P_φ suivant : $P_\varphi = \{t \in \mathbf{R},\ \forall\ x \in \mathbf{R},\ \varphi(x+t) = \varphi(x)\}$.

Montrer que P_φ est un sous groupe de $(\mathbf{R},+)$.

Partie B Etude des sous-groupes de $(\mathbf{R},+)$.

Soit G un sous groupe de $(\mathbf{R},+)$ non réduit à $\{0\}$.

1° Montrer que $G \cap]0,+\infty[$ n'est pas vide.

2° On pose $a = \inf(G \cap]0,+\infty[)$.

a) On considère le cas où $a > 0$.
   i) Montrer qu'alors a appartient à G (on pourra faire un raisonnement par l'absurde, en montrant que si que a n'appartient pas à G il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction) .
   ii) Etablir l'égalité $G = a\mathbf{Z}$.

b) On considère le cas où $a = 0$. Prouver que G est dense dans **R**.

Partie C Etude du nombre de solutions périodiques de (E_f) dans trois cas simples.

1° Montrer que si (E_f) admet une solution T-périodique alors f est T- périodique.

Que peut-on conclure dans le cas où f n'est pas périodique ?

2° Résoudre l'équation différentielle (E_0) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$.

Prouver que la fonction nulle est la seule solution périodique de (E_0).

3° Résoudre l'équation différentielle (E_c) suivante : $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos x$.

Prouver que (E_c) admet une seule solution périodique que l'on déterminera.

Partie D Dans cette partie on suppose que f est continue et de plus périodique.
On veut établir qu'alors (E_f) admet une seule solution périodique.

1° Dans cette question on prouve que (E_f) admet au moins une solution périodique.

a) Soit T une période de f et y une solution de (E_f). On considère l'application z de **R** vers **R** définie par : $z(x) = y(x+T)$.
   i) Prouver que z est solution de (E_f).
   ii) Montrer que y est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.

b) Démontrer que (E_f) admet une solution périodique.

2° Dans cette question on prouve que (E_f) admet une seule solution périodique.

a) Cas où P_f est dense dans **R**.
   i) Montrer que f est constante (on pourra établir que : $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)$) .
   ii) Conclure.

b) Cas où $P_f = a\mathbf{Z}$ avec a appartenant à $\mathbf{R}_+^*$.

Soient y_1 et y_2 des solutions périodiques de (E_f), T_1 une période de y_1, T_2 une période de y_2.

i) Prouver que T_1 et T_2 sont des éléments de P_f.

ii) Montrer que y_1 et y_2 possèdent une période commune.

iii) En déduire que $y_1 = y_2$ (on utilisera la question 2° de la Partie C).

Partie E Détermination de la solution périodique de (E_f) dans un cas particulier.
Les questions 1° et 2° qui suivent sont indépendantes du reste de l'exercice.

Dans cette partie f est l'application de **R** vers **R**, 2π - périodique, telle que :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2 .$$

1° Calculer les coefficients de Fourier réels de f. Etudier la convergence de la série de Fourier de f (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Pour $n \geq 1$, on considère l'application u_n de **R** vers **R** définie par :

$$u_n(x) = \frac{4(-1)^n}{n^2(n^4+4)}\left((2-n^2)\cos(nx) - 2n\sin(nx)\right).$$

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur **R**. Soit S l'application de **R** vers **R** définie par : $S(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que S est de classe C^2 sur **R**.

3° Prouver que S est l'unique solution périodique de (E_f).

4° Pour $x \in [-\pi, \pi]$ calculer $S(x)$. Vérifier que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n(2-n^2)}{n^2(n^4+4)} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}$.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème.

* Les deux parties de ce problème et les questions dans chaque partie sont très largement indépendantes les unes des autres. Dans les rares cas où un résultat précédent est utile pour traiter une question alors l'énoncé précise clairement le numéro de la question où se trouve le résultat.

* Dans différentes questions du problème, le candidat est invité à énoncer avec soin un théorème de cours.

Dans tout le problème, on désigne par :

- f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$
- t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{th(x)}-\dfrac{1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

Partie A : Etude de la fonction f.

1) Solution d'une équation différentielle :

On considère l'équation différentielle (E) dont la fonction inconnue est y, de la variable x : (E) $(e^x-1)\,y' + e^x\,y = 1$.

a) Après avoir déterminé les intervalles de résolution de (E), résoudre (E) sur chacun de ces intervalles.
b) Montrer que (E) possède une unique solution (dérivable) sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2) Etude de f en 0 :

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

b) Peut-on déduire du développement limité du a), sans nouveaux calculs, que : (justifier avec soin)
   * f est continue en 0 ?
   * f est dérivable en 0 et la valeur de f '(0) ?
   * f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de f "(0) ?

c) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.

3) Variations de f :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x-e^x+1$.

a) Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.

b) Donner les variations de f.

c) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de (C) : montrer en particulier que (C) possède 2 asymptotes et préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

d) Donner l'allure de (C) (faire apparaître les asymptotes et T).

4) Expression hyperbolique de f :

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)}-1\right)$.

b) Soit la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=f(x)-1+\frac{x}{2}$.

   i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $f_1(x)=\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right)$.(la fonction t est définie en préliminaire)

   ii) Montrer que f_1 est une fonction paire.

   iii) Quelle propriété géométrique peut on en déduire pour (C) ?

5) Intégrale impropre associée à f :

a) Montrer que $I=\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe.

b) Justifier l'existence de $J=\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du$ et montrer que J=I.

c) On pose $I_k=-\int_0^1 u^k \ln(u)du$ pour $k \in \mathbb{N}$, calculer I_k.

d) Enoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle I quelconque.

e) En déduire que $I=\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$, puis que $I=\zeta(2)$ où $\zeta(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Partie B : Développement en série entière de f :

1) Un développement en série de Fourier :

On considère $a \in \mathbb{R}^*$ et la fonction g_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

* g_a est 2π périodique.
* Si $t \in]-\pi,\pi]$, $g_a(t)=ch(at)$.

a) Donner l'allure du graphe de g_a, g_a est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b) Si $n \in \mathbb{N}$, montrer, par exemple en utilisant une double intégration par parties, que $\int_0^{\pi} ch(at)\cos(nt)dt = (-1)^n \dfrac{a\, sh(a\pi)}{a^2+n^2}$.

c) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients réels a_n et b_n de la série de Fourier associée à g_a.

d) Enoncer les théorèmes de convergence simple et normale pour les séries de Fourier. La série de Fourier de g_a converge-t-elle simplement vers g_a sur $\mathbb{R}$? converge-t-elle normalement vers g_a sur $\mathbb{R}$?

e) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $2x\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2\pi^2} = t(x)$. (on pourra poser $x=a\pi$).

2) Etude d'une série entière :

On considère :

* la série numérique $\zeta(p)=\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^p}$ pour $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$.

* la série entière, $h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} t^{2k}$ où $\alpha_{2k} = \dfrac{(-1)^k \zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}$ et si $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(t)$ la somme partielle suivante : $S_N(t)= \sum_{k=0}^{N} \alpha_{2k} t^{2k}$.

* la série de fonctions définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $m(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^2+n^2\pi^2}$.

a) Montrer que la série de fonctions définissant m converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale, en déduire l'existence de $\zeta(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et pour $n,p \in \mathbb{N}-\{0,1\}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}$$

En déduire que $1 \leq \zeta(p) \leq 1 + \dfrac{1}{p-1}$ et donner la limite de $\zeta(p)$ pour $p \to +\infty$.

c) Montrer que pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, la série entière $h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k} t^{2k}$ converge.

d) En intervertissant soigneusement deux sommes, montrer pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in]-\pi,\pi[,\ S_N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^N \left(\dfrac{t}{n\pi}\right)^{2N+2}}{t^2+n^2\pi^2}.$$

En déduire que : $\forall N\in\mathbb{N},\forall t\in]-\pi,\pi[: \left|S_N(t)-m(t)\right|\leq\left(\frac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t)$.

e) En déduire que les fonctions m et h sont égales sur $]-\pi,\pi[$.

3) Développement en série entière de f :

a) Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière en 0.
b) En utilisant B)1)e) et B)2)e) montrer que la fonction t est développable en série entière en 0.
c) En déduire en utilisant la question A)4)b)i) que la fonction f est développable en série entière en 0 et que son développement en série entière est :

$\forall x\in]-2\pi,2\pi[: f(x)=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n x^{2n}$ où $\beta_n=\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}}$.

d) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser si $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)$.
e) Application : Déduire de la question A)2)a) la valeur de $\zeta(2)$ et de la question A)5)e) la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$.

Remarque : On peut obtenir ainsi en poursuivant le développement limité de f, les valeurs de $\zeta(2n)$.

* * *

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère un endomorphisme u de E tel que: $u^3 - 2u^2 + u = 0$ (endomorphisme nul). On pose $v = id_E - u$.

1) a) Montrer que si le réel λ est valeur propre de u, alors $\lambda \in \{0, 1\}$.

b) Soit U la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$. Montrer que si le complexe λ est valeur propre de U, alors $\lambda \in \{0, 1\}$. En déduire les valeurs possibles du polynôme caractéristique de U, défini par $P(X) = det(U - XI_3)$.

c) En déduire les quatre valeurs possibles du polynôme caractéristique de u.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme $A(X) = X.(X-1)^2$ (on pourra utiliser le polynôme $k.X^{k-1}$, dérivé de X^k). En déduire l'expression de u^k au moyen de k, u^2, u et id_E.

2) On suppose dans cette question seulement que u est diagonalisable.

a) Montrer alors que u et v sont des projecteurs. Que valent alors les espaces $\ker(u) + \ker(v)$ et $Im(u) + Im(v)$.

b) Déterminer quatre matrices diagonales: D_0, D_1, D_2, D_3, telles que D_r soit de rang r, et telles que U soit nécessairement semblable à l'une de ces quatre matrices.

3) a) Grâce à la division euclidienne de $(X-1)^2$ par X, en déduire un polynôme B tel que: $(X-1)^2 + XB(X) = 1$.

b) Vérifier que: $(u - id_E)^2 + (2id_E - u) \circ u = id_E$.

c) Justifier que: $\ker(v^2) = Im(u)$ et $\ker(u) = Im(v^2)$.

d) Montrer que: $E = \ker(u) \oplus \ker((u - id_E)^2)$.

4) On suppose dans cette question que $\ker(u)$ et $\ker(v)$ sont tous les deux de dimension 1.

a) Quelle est la dimension de $F = \ker(u) + \ker(v)$?

b) Justifier que $\ker(v^2)$ contient $\ker(v)$, et est de dimension 2.

c) Grâce à 3)*d*), justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. de E dans laquelle la matrice de u soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) Déterminer dans les deux cas suivants, la valeur du polynôme caractéristique de U, et si U est semblable ou non à l'une des cinq matrices D_0, D_1, D_2, D_3, T.

a) Premier exemple: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Deuxième exemple: $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

On considère pour tous réels x et y: $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique, tel que la base canonique (e_1, e_2) soit orthonormale directe.

Soit: $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad F(x,y) = 0\}$.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $D_t = \{(x, tx), x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer l'intersection: $D_t \cap \Gamma$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$, on note:

$$\alpha(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad \beta(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad \varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t)).$$

Comparer Γ avec $\Phi = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$: on précisera si l'on a une inclusion ou une égalité.

c) Etudier la courbe paramétrée Φ: établir un tableau de variations et préciser l'étude d'éventuelles branches infinies.

d) Donner l'allure de la courbe Γ.

e) Donner une représentation polaire de la courbe Γ.

On notera selon l'usage $u_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, et on calculera $r(\theta)$ tel que $M(\theta) = r(\theta)u_\theta$ soit sur Γ, pour des valeurs de θ que l'on précisera.

f) Déterminer deux (différentes) transformations orthogonales $u \in O(\mathbb{R}^2)$ telles que $u(\Gamma) = \Gamma$. On justifiera la réponse.

2) On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire canonique, tel que la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ soit orthonormale directe.

On note ici:

$$\Gamma = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / F(x,y) = 0\}, \quad \Delta = \{(x,x,0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\},$$
$$\text{et } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = F(x,y)\}.$$

a) Que représente Γ vis-à- vis de la surface S ?

b) Soit $M = (x, y, 0)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la projection orthogonale de M sur la droite Δ. En déduire la distance euclidienne de M à la droite Δ.

c) Soit $N = (X, Y, Z)$ dans $\mathbb{R}^3$, et toujours $M = (x, y, 0)$. Déterminer à quelles conditions N et M ont la même projection orthogonale sur Δ, et sont à la même distance euclidienne de $O = (0, 0, 0)$.

En déduire une équation cartésienne de la surface Σ décrite alors par ces points N lorsque M décrit Γ (on pourra calculer $(x + y)^3$ et $(x + y)^2$).

d) Déterminer une équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent à S au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = F(x_0, y_0)$.

Dans quels cas, ce plan est-il horizontal (d'équation de la forme $z = c$) ?

EXERCICE 3

Pour tous réels x et t, on note $f(x, t) = e^{x \sin(t)}$.

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin(t)}\, dt$, pour x réel.

1) a) Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et préciser l'expression et le signe de $g'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a: $\quad t \geq \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$.

c) En déduire une majoration de $g(x)$ pour $x < 0$, et une minoration de $g(x)$ pour $x > 0$.

d) Déterminer: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

e) Préciser les variations de g et donner l'allure de sa représentation graphique.

2) a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixé, préciser le développement en série entière de: $x \mapsto f(x, t)$.

b) En déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$; on précisera bien le théorème utilisé. On écrirera ce développement sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on exprimera a_n au moyen de $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

c) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\big(g''(x) - g(x)\big) + g'(x) = 1$$

d) En déduire une relation entre W_{n+1} et W_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$, et retrouver cette formule grâce à une intégration par parties.

e) Déterminer toutes les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle:

$$xy'' + y' - xy = 1 \qquad (E).$$

Comment détermine-t-on g parmi toutes ces solutions ?

f) Quels résultats du cours peut-on appliquer concernant l'ensemble des solutions réelles de cette équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $a < 0$. Grâce à l'encadrement de 1)b), déterminer un encadrement de $\int_a^0 g(x)\,dx$. g est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_-$?

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et $\varphi_x : t \mapsto f(x,t)$.

a) Justifier que φ_x est développable en série de Fourier: on précisera bien les résultats du cours que l'on peut lui appliquer.

b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $d_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)-ikt}\,dt$. Que représente ce nombre complexe ? Ecrire l'égalité de Parseval pour φ_x, en utilisant les nombres $d_k(x)$.

c) Grâce à 2)a, justifier que l'on peut écrire $d_k(x)$ comme somme d'une série.

d) Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer: $I_{k,n} = \int_0^{2\pi} \sin^n(t)e^{-ikt}\,dt$ sous forme d'une somme ; pour cela, on développera $(e^{it} - e^{-it})^n$. En déduire une expression de $d_k(x)$.

62BQ

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours et exemples.

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur de f.

2. Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f?

3. Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f.

4. Prouver l'existence de π_f.

5. **Un premier exemple**.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{ij}) \text{ où } \forall (i,j) \in \{1,...,4\} \times \{1,...,4\},\ m_{ij} = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{i+j}\right).$$

5.1. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Déterminer π_f.

6. **Un second exemple**.

6.1. Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = ch(x) \qquad \text{et} \qquad y'' + y = sh(x)$$

où *ch* et *sh* sont respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.2. On considère (H_1) l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$.

Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

6.3. Résoudre l'équation (H_2).

6.4. En déduire les solutions de (H_1).

6.5. On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $(\cos, \sin, ch, sh)$.

6.5.1. Quelle est la dimension de E ?

6.5.2. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.

6.5.3. Déterminer le polynôme minimal π_δ de E.

Problème.

Dans tout le problème, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E muni de ses opérations usuelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n sera noté $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme identité de E est noté e, l'endomorphisme nul θ. Lorsque l'on est dans l'espace vectoriel normé E_n, on notera respectivement ces endomorphismes e_n et θ_n.

On rappelle que si f est un endomorphisme de E, $f^0 = e$ et

$$\forall\ m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = f \circ f^{m-1}.$$

Lorsque f est un endomorphisme de E_n, on note χ_f son polynôme caractéristique.

Soient $u : P \in E \mapsto u(P) = P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P, et

$$v : P \in E \mapsto v(P) = R \text{ où } R(X) = P(X+1).$$

Partie 1 : Quelques propriétés des endomorphismes u et v.

1. Rappeler la dimension de E_n. En donner une base usuelle.

2. Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n.

On note alors u_n et v_n les endomorphismes induits par restriction de u et de v à E_n.

3. Ecrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n.

4. Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.

5. Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?

6. Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?

7. Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?

8. On note $w_n = v_n - e_n$ et on pose :

$$Q_0 = 1, \qquad \forall\ k \in \{1,\ldots,n\},\ Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j).$$

8.1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n.

8.2. Déterminer $w_n(Q_0)$.

Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un réel α_k non nul, tel que :

$$w_n(Q_k) = \alpha_k Q_{k-1}.$$

8.3. Ecrire la matrice W_n de w_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(w_n)$ ainsi que de $\mathrm{Im}(w_n)$.

8.5. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,...,n\}$, $w_n^j(Q_k)$.

On rappelle que $w_n^j = \underbrace{w_n o w_n o ... o w_n}_{j \text{ facteurs}}$.

9. Détermination des composantes d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.

9.1. Soit $P \in E_n$.

Justifier l'existence et l'unicité de scalaires $(\beta_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^{n} \beta_k Q_k$.

9.2. Calculer $w_n^j(P)(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

9.3. Exprimer alors les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.

9.4. Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$.

10. Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(Q_n)$.

Partie 2 : Recherche de quelques polynômes minimaux.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. Justifier que π_f divise χ_f.

2. Recherche de π_{u_n}.

2.1. Déterminer u_n^{n+1}.

2.2. Calculer : $u_n^n\left(X^n\right)$.

2.3. Conclure.

2.4. De même, déterminer le polynôme minimal de w_n.

3. Recherche de π_{v_n}.

3.1. Montrer qu'il existe $m \in \{1,...,n+1\}$ tel que $\pi_{v_n} = (X-1)^m$.

3.2. Prouver que : $m = n+1$.

4. Polynômes annulateurs de u.

Soit P un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}$ écrit : $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$.

4.1. Que sait-on de a_m ?

4.2. On note r l'endomorphisme $P(u)$. Déterminer $r\left(\frac{X^m}{m!}\right)$.

4.3. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

5. Polynômes annulateurs de v.

Soit P un polynôme non nul annulateur de v.

5.1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^{n+1}$ divise P.

5.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v.

6. Soit s l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(1 - X).$$

6.1. Vérifier que s est une involution de E.

6.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s.

Partie 3.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel normé E_n.On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{f^m}{m!}$$

1. Montrer que l'on a la relation : $v_n = \exp(u_n)$.

2. On va démontrer dans cette question que : $u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m$.

2.1. Prouver que :

$$\forall\ k \in \{0,...,n\},\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0)\ Q_{k-m}.$$

On pourra utiliser la question **9.3.** de la partie **1.**

2.2. Calculer pour tout $m \in \{0,...,n\}$, $u_n(Q_m)(0)$.

2.3. Conclure.

Fin du problème

LK57

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

1. On considère la fonction g de variable réelle définie par : $g(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0,1[$ tel que : $\displaystyle\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

   (c) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,\mathrm{d}t$ pour en déduire que :
   $$\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

2. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\pi]$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par le demi-cercle de centre O, de rayon π et d'ordonnées positives.

   (a) Pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

   (b) Énoncer le théorème de DIRICHLET. S'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de FOURIER trigonométriques de f notés a_n et b_n.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{n}\, g(\pi\, n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de FOURIER de f. Cela contredit-il le 2°b ?

   (b) Montrer à l'aide du théorème de PARSEVAL que la série de FOURIER de f converge vers f.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)\, f(x,y).$$

   (b) En déduire que les solutions de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\,\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathscr{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ,ψ) ?

(c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.
Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x, y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
   (b) Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Exercice III

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel on note Π le plan affine d'équation $z = 0$ et Δ la droite affine passant par O et dirigé par $\vec{k}$.

On désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan Π ; il lui correspond la projection vectorielle orthogonale π sur le plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$, liée à p par : $\forall (A,B) \in E^2,\ \overrightarrow{p(A)p(B)} = \pi(\overrightarrow{AB})$.

1. (a) Montrer que, pour tous points A et B, on a la relation entre distances : $p(A)p(B) \leqslant AB$. Préciser les cas où cette inégalité devient une égalité.
   (b) Soit D une droite affine de E, passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Déterminer avec précision la nature de l'ensemble $p(D)$?

2. Soit D une droite affine de E, non parallèle à Δ, et dont la projection orthogonale $p(D)$ sur le plan Π est notée d. On désigne alors par h le projeté orthogonal du point O sur $d = p(D)$.
   (a) Montrer l'existence d'un unique point H de D tel que $p(H) = h$.
   (b) H' désignant le projeté orthogonal de H sur Δ, montrer que :

$$\forall (M,N) \in \Delta \times D,\ HH' = Oh \leqslant MN.$$

   On a donc $HH' = \min\{MN \mid (M,N) \in \Delta \times D\} = \mathrm{d}(\Delta, D)$: c'est la distance de Δ à D.

   On rappelle d'autre part que si D est parallèle à Δ, la distance de Δ à D est l'une quelconque des distances NN', lorsque $N \in D$ et que N' désigne le projeté orthogonal de N sur Δ.

3. On note $\mathscr{C}$ le cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 1.
   (a) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ et en déduire que les plans tangents à ce cylindre sont les plans d'équations $x\cos\omega + y\sin\omega = 1$, pour $\omega \in\,]-\pi, \pi]$.
   (b) Montrer que toute droite D telle que $\mathrm{d}(\Delta, D) = 1$ est incluse dans un plan tangent à $\mathscr{C}$.
   (c) Réciproquement, toute droite D incluse dans un plan tangent à $\mathscr{C}$ vérifie-t-elle $\mathrm{d}(\Delta, D) = 1$?

4. Soit Δ' une droite parallèle à Δ et telle que $\mathrm{d}(\Delta, \Delta') = 1$, coupant le plan Π en un point O'.
   (a) Soient, dans le plan Π, les cercles Γ et Γ' de rayon 1 et de centres respectifs O et O'. Déterminer dans ce plan les tangentes communes à Γ et Γ'.
   (On pourra au besoin considérer le plan Π comme orienté par la base $(\vec{i}, \vec{j})$.)
   (b) Décrire précisément l'ensemble des droites affines D de E telles que $\mathrm{d}(\Delta, D) = \mathrm{d}(\Delta', D) = 1$.

FL74

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours.

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative vous donnerez un contre exemple.

1) (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow$ (u_n) converge vers 0.

3) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

4) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Préliminaires :

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |t_n| \leqslant \varepsilon.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$.

1. On écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > N$,

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} t_k,$$

1.1. Prouver que : $\left| \displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} t_k \right| \leqslant n\varepsilon$.

1.2. En déduire que la suite (T_n) converge vers 0.

2. Prouver alors le cas général :

" Si (t_n) converge vers T alors (T_n) converge aussi vers T " .

On pourra par exemple utiliser la suite (v_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}, v_n = t_n - T$.

3. On prend dans cette question : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ t_n = \cos(n\theta),\ \theta \in]0, 2\pi[$, fixé .

3.1. Montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3.2. La suite (T_n) converge-t-elle ?

3.3. On prend ici $\theta = \frac{\pi}{3}$.
La suite (t_n) converge-t-elle ?

3.4. Conclure.

Partie 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0.$

1. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n}$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0, 1[$.

On note alors $f(x)$ sa somme : $\forall\ x \in [0, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Désormais, on suppose de plus que :

ii) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = L \in \mathbb{R}.$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1[,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

4.1. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k \geqslant n} (|k a_k|)$.

4.2. Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

5. Déduire de ce qui précède que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1[,$

$$|\ u_n| \leqslant |\ L - f(x)\ | + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\ \left(1 - x^k\right) + \frac{1}{n\ (1-x)}\ M_n$$

puis que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1[,$

$$|\ u_n| \leqslant |\ L - f(x)\ | + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n\ (1-x)}\ M_n.$$

6. On prend : $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant tout ce qui précède, y compris les préliminaires, prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.

Partie 2.

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2 y''(x) + 4x y'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre (E) ?

2. On note $I =]0,1[$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?

3. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Donner les domaines de convergence des séries obtenues.

4. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E).

Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

5. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

5.1. Déterminer les constantes α et β tels que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

5.2. Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ et $h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$.

Montrer que $h(u) = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

5.3. En déduire une expression simple de $H(x)$.

On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

5.4. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5.5. Calculer la valeur de $L = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \varphi(x)$.

6. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$.

6.1. Vérifier que la suite (a_n) satisfait les hypothèses *i)* et *ii)* de la Partie 1.

6.2. Calculer, à l'aide des résultats précédents, la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

7. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

Prouver que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Conclure.

Partie 3.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

On note alors, pour $x \in]-1, 1[$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = H \in \mathbb{R}$.

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ est-elle toujours convergente ?

On pourra utiliser des résultats établis dans la partie précédente.

2. On suppose de plus, et dans cette question uniquement, que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ c_n \geqslant 0$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge et que l'on a : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

3. On revient au cas général.

En utilisant un résultat établi dans l'une des parties précédentes, quelle condition suffit-il de rajouter concernant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge ?

Fin du problème.

B47H

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice1

R désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de **R** non vide et non réduit à un point.

1° Enoncer le Théorème de Rolle.
2° Soit h une application de I vers **R**, dérivable sur I, et p un entier naturel, $p \geq 2$. On suppose que h s'annule p fois sur I, démontrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois sur I.
3° On considère les applications a et b de $]0,+\infty[$ vers **R** définies par :
$a(x) = 3x^{-20} + x^{-10} + 4x^{10} + 2x^{20} + 11x^{30}$ et $b(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11}$.
On suppose que b s'annule au plus 3 fois dans $]0,+\infty[$. Montrer que a s'annule au plus 4 fois dans $]0,+\infty[$.
4° Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < ..... < \alpha_n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un élément de $\left(\mathbf{R}^*\right)^n$ et f_n l'application de $]0,+\infty[$ vers **R** définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, x^{\alpha_k} .$$

Démontrer que f_n s'annule au plus $n-1$ fois dans $]0,+\infty[$.
5° On considère le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ suivant : $P = X^{400} - 7X^{201} - 4X^{101} + 1$.
Prouver que P admet au plus 6 racines réelles.

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$.
On introduit les notations suivantes :
$M_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $M_{n,1}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, une colonne et à coefficients réels,
$GL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{R})$,
$O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$,

$S_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, $S_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle, $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive.

Pour toute matrice M on note : ${}^tM$ la transposée de M, m_{ij} le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M, det(M) le déterminant de M lorsque M est une matrice carrée.

Partie A

Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$. Le but de cette partie est d'établir l'inégalité (1) :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii} \ .$$

Soit S une matrice de $S_n(\mathbf{R})$. On rappelle qu'il existe une matrice P de $O_n(\mathbf{R})$ et un élément $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ de $\mathbf{R}^n$ tels que : ${}^tPSP = D$ où D est la matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall\, i \in \{1,2,....,n\},\ d_{ii} = \lambda_i$.

1° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$.

Déduire du rappel précédent :

a) qu'il existe M élément de $M_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tMM$.

b) que pour tout X élément de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tXSX \geq 0$.

c) que : $\forall\, i \in \{1,2,....,n\},\ s_{ii} \geq 0$.

2° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ démontrer :

a) qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tMM$.

b) que pour tout X élément non nul de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tXSX > 0$.

c) que : $\forall\, i \in \{1,2,....,n\},\ s_{ii} > 0$.

3° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$ n'appartenant pas à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Etablir l'inégalité (1) pour S.

4° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\, i \in \{1,2,....,n\},\ s_{ii} = 1$.

a) Prouver que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.

En déduire que : $\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2.....\lambda_n} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

b) Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

5° Soit S une matrice quelconque de $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Soit T la matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\, i \in \{1,2,....,n\},\ t_{ii} = \frac{1}{\sqrt{s_{ii}}}$ et B la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ définie par $B = TST$.

a) Montrer que pour tout X élément non nul de $M_{n,1}(\mathbf{R})$: ${}^tXBX > 0$.

b) En déduire que B appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

c) Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

Partie B

Dans cette partie on utilise l'inégalité (1) de la Partie A pour établir l'inégalité d'Hadamard .
Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$.

1° Vérifier que l'on peut appliquer l'inégalité (1) à ${}^tAA$.

2° En déduire l'inégalité d'Hadamard : $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2}$.

Partie C

Dans cette partie on utilise l'inégalité d'Hadamard pour établir un résultat concernant les fonctions développables en série entière en 0 .
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ l'unique suite réelle vérifiant :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

1° Pour $n \geq 1$, on considère la matrice A de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A appartient à $GL_{n+1}(\mathbf{R})$. Appliquer les formules de Cramer pour en déduire que $b_n = \dfrac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est une matrice de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ à préciser .

2° On suppose qu'il existe un réel r strictement positif tel que la série de terme général $|a_n| r^n$ converge. On pose : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = C$. Montrer que la série de terme général $(a_n)^2 r^{2n}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 r^{2n} \leq C^2$.

3° Utiliser alors l'expression de b_n établie à la question 1° de la Partie C et l'inégalité d'Hadamard pour démontrer que : $\forall n \geq 1, |b_n| \leq \dfrac{1}{|a_0|} \alpha^n$ où α est un réel positif indépendant de n à préciser (on pourra considérer la matrice A'' de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ obtenue à partir de A' en multipliant la i-ème ligne de A' par r^{i-1}, pour tout i élément de $\{1,2,....,n+1\}$).

4° Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ développable en série entière en 0 telle que $f(0) \neq 0$.

Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ définie au voisinage de 0 est développable en série entière en 0.

Exercice3

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction numérique F de la variable réelle x telle que :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch} t}\, dt .$$

1° Question préliminaire

Soit a une application de **R** vers **R** telle que $\lim_{t\to+\infty} a(t) = +\infty$. Soit p un entier naturel non nul, pourquoi l'égalité $e^{-a(t)} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(a(t))^p}\right)$ est-elle vérifiée ?

2° Montrer que l'ensemble de définition de F est $]0,+\infty[$.

3° Prouver que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

4° Montrer que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{1}{x}y' - y = 0$ (E).

5° Etude de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.

Dans cette question, x est un réel vérifiant : $0 < x < 1$.

a) On pose $H(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \dfrac{1}{u}\right)du$.

Montrer que H est définie et bornée sur $]0,1[$.

b) On pose $K(x) = \int_x^1 \dfrac{e^{-v}}{v}\, dv$.

Prouver que pour v élément de $[x,1]$ on a : $0 \le 1 - e^{-v} \le v$. En déduire que $K(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

c) Montrer que $F(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}}du$.

d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.

6° Etablir que : $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} xF'(x) = 0$ (indication : on pourra considérer une suite quelconque $(x_n)_n$ d'éléments de $[1,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$ et utiliser le théorème de la convergence dominée).

7° Soit G une solution non nulle de (E) sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} G'(x) = 0$.

On rappelle que le wronskien de F et G est l'application notée W de $]0,+\infty[$ sur **R** définie par : $W = FG' - F'G$.

a) Vérifier que W est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ et pour $x > 0$, calculer $W(x)$.

b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que pour tout x de $]0,+\infty[$, $G(x) = \lambda F(x)$.

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Le problème comporte quatre parties qui peuvent être traitées de façon largement indépendante.
Notations : n est un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
$\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
a est un paramètre réel.
Objectifs : Etude d'une famille d'applications linéaires et d'équations différentielles associées à ces applications linéaires .

1 Première partie : Etude de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_a : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X). \end{array}$$

1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_a$.

1.1.1) Montrer que $\mathcal{A}_a$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

1.1.2) Ecrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_a$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq 3)$.

1.1.3) Etude du cas particulier $a = -4$.

a) La matrice $M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{A}_{-4}$.

1.1.4) a) Déterminer en fonction du réel a les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$.

b) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme $\mathcal{A}_a$ admet-il des valeurs propres doubles ?

c) Existe-t-il une valeur du réel a pour laquelle $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre triple ?

1.1.5) Pour quelles valeurs de a, $\mathcal{A}_a$ est-il diagonalisable ?

1.1.6) Pour quelles valeurs du réel a le degré du polynôme $\mathcal{A}_a(P)$ est-il égal au degré de P, pour tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}_3[X]$?

1.2 Etude de cas particuliers.

On suppose dans tout ce paragraphe que a n'appartient pas à $\{-2, -1, 0\}$.

1.2.1) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_a)$ par la donnée d'une de ses bases.

1.2.2) Montrer que $(-1 + aX, X^2, X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(\mathcal{A}_a)$.

1.2.3) Discuter selon $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 3$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ solutions de l'équation :

$$X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X) = X^p.$$

2 Deuxième partie : Quelques propriétés de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_{(a,n)} : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & X(X+1)P''(X) + (aX-1)P'(X). \end{array}$$

2.1) Justifier rapidement que $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2) Ecrire la matrice M_a de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $(X^k, 0 \leq k \leq n)$.

2.3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ tel que $\lambda = k(a + k - 1)$.

2.4) Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'endomorphisme $\mathcal{A}_{(a,n)}$ est diagonalisable.
Dans le cas particulier où $a = 0$, $\mathcal{A}_{(0,n)}$ est -il diagonalisable ?

3 Troisième partie : Recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$ et qui sont des sommes de séries entières dans cet intervalle : ainsi f appartient à $\mathcal{E}$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3.1) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ alors f est de classe C^∞ sur $]-1,+1[$.

On considère alors dans toute cette partie l'endomorphisme $\mathcal{D}_a$ de $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_a : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ & f & \longmapsto & \mathcal{D}_a(f) \end{array}$$

où $\mathcal{D}_a(f)(x) = x(x+1)f''(x) + (ax-1)f'(x)$ pour tout $x \in]-1,+1[$.

3.2) Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}_a(f) = af$. On pose pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n-1)((n+a)a_n + (n+1)a_{n+1}) = 0.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} a_2$$

et dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner les valeurs de a pour lesquelles la série entière est un polynôme ; on déterminera alors son degré et son coefficient dominant en fonction de a.

c) Déterminer, selon $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3.3) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}_a(f) = af$.

3.4) Comparer, selon $a \in \mathbb{R}$, les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{(a,n)} - aId_{\mathbb{R}_n[X]})$ et $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_a - aId_{\mathcal{E}})$.

4 Quatrième partie : Résolution d'une équation différentielle

On note $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et Δ_a l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty$:

$$\begin{array}{rccc} \Delta_a : & \mathcal{C}^\infty & \to & \mathcal{C}^\infty \\ & f & \longmapsto & \Delta_a(f) \end{array}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Delta_a(f)(x) = x(x+1)f"(x) + (ax-1)f'(x)$.

4.1) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x+1)y" + (ax-1)y' - 2(a+1)y = 0 .$$

Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.2) Soit φ une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E), on pose $\varphi(x) = x^2.\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que ψ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty$, et que ψ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Peut-on prévoir ce résultat ?
Déterminer cette équation différentielle.

4.3) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_1) \quad x(x+1)u' + ((4+a)x + 3)u = 0.$$

En déduire ψ'.

4.4) On se place dans le cas particulier $a = -4$.
a) Résoudre (E).
b) Comparez les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_{-4} + 6Id_{\mathbb{R}_3[X]})$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_{-4} + 6Id_{\mathcal{C}^\infty})$.

V66G

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Premier exercice

Cet exercice a pour but d'étudier les extrémums d'une fonction liée à une matrice symétrique. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$, dont la norme associée est notée $\|\ \|$.

1. *Étude d'un exemple.*

   (a) Vérifier les inégalités $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$ pour tous réels x et y et préciser, dans chaque cas, les situations d'égalité.

   (b) En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction

   $$r : (x,y,z) \mapsto \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

   sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et montrer que c'est son minimum.

   (c) Trouver de même le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

   (d) Comparer ce minimum et ce maximum à la plus grande et à la plus petite valeur propre de la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Étude du cas général.* Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs $\vec{u}_k$ étant associé à la valeur propre λ_k. On suppose $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (a) Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, que l'on écrit

   $$\vec{w} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

dans la base $\mathcal{B}_0$. Vérifier que

$$\frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2} = \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2}.$$

(b) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction

$$r_f : \vec{w} \mapsto \frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(c) Déterminer de même le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(d) Vérifier que l'on retrouve ainsi les résultats de la question **1**.

3. *Une application.* On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'on note f son endomorphisme canoniquement associé.

(a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de f.

(b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ et préciser les vecteurs en lesquels ils sont atteints.

(c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par

$$g(x,y,z) = \frac{-x + y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

et P la partie de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x + y + 2z = 1$. Soit $(x,y,z) \in P$ et $\vec{w} = (x,y,z)$. Vérifier que $g(x,y,z) = r_f(\vec{w})$.

(d) En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.

Deuxième exercice

On note $A = [0,1] \times [0,+\infty[$. Cet exercice a pour objet l'étude de l'existence et de l'unicité, sous certaines conditions, de solutions à l'équation des ondes

$$\forall (x,t) \in A, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = 0\,. \tag{1}$$

Toutes les fonctions intervenant dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. Soit $F : (x,t) \mapsto F(x,t)$ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant (1). On considère alors la fonction E_F définie sur $[0,+\infty[$ par:

$$E_F(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right)^2\right] dx.$$

(a) Montrer que E_F est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $[0,+\infty[$. *On précisera avec soin le théorème utilisé.* La fonction E_F est-elle de classe C^1 sur $[0,+\infty[$?

(b) Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ E'_F(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(1,t)\frac{\partial F}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\frac{\partial F}{\partial t}(0,t).$$

2. On se donne deux fonctions g et h définies et continues sur $[0,1]$ ainsi que deux fonctions α et β définies et continues sur $[0,+\infty[$. On cherche à résoudre le problème suivant, d'inconnue f, fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, vérifiant le système (S):

$$(S)\quad \begin{cases} \forall (x,t) \in A,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0,1],\ f(x,0) = g(x), \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = h(x) & (3) \\ \forall t \geq 0,\ f(0,t) = \alpha(t), \quad f(1,t) = \beta(t). & (4) \end{cases}$$

Les fonctions g et h sont appelées *données initiales* et les fonctions α et β *valeurs aux bords*.

(a) On suppose que f_1 et f_2 sont deux solutions de (S) et l'on pose $F = f_1 - f_2$. Vérifier que F satisfait (1).

(b) Montrer que $E'_F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

(c) Montrer que $E_F(0) = 0$ et en déduire que (S) possède *au plus* une solution.

3. Le but de cette question est de construire quelques solutions de (S). On considère à cet effet une suite *bornée* $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels. On définit les fonctions h et f par

$$\begin{aligned} h(x) &= \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x), \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x)\sin(n\pi t). \end{aligned}$$

(a) Montrer que h est définie et continue sur $[0,1]$.

(b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et possède des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^2$. *On admettra que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*

(c) Montrer que la fonction f satisfait

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in A,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (5) \\ \forall x \in [0,1],\ f(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = h(x) & (6) \\ \forall t \geq 0,\ f(0,t) = 0, \quad f(1,t) = 0. & (7) \end{cases}$$

Troisième exercice

Ce problème a pour objet l'étude des solutions *maximales* d'un système différentiel non linéaire.

1. *Question préliminaire.* Soit a et b deux réels avec $a < b$, $I = [a, b[$ et f une fonction définie et de classe C^1 sur I, à valeurs réelles. On suppose que f et f' sont bornées sur $[a, b[$.

(a) Montrer qu'il existe une constante M telle que la fonction

$$g : t \mapsto f(t) + Mt$$

soit croissante sur I

(b) En déduire que f possède une limite finie en b.

On donne un réel t_0 et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On rappelle qu'une solution du *problème de Cauchy*

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

est un triplet (I, X, Y) où $I =]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert contenant t_0, X et Y deux fonctions définies et de classe C^1 sur I vérifiant, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) = -X(t) + X(t)Y(t) \\ Y'(t) = -2Y(t) - X^2(t) \\ (X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

et que ce problème possède une unique solution *maximale* (I, X, Y) c'est à dire que pour toute autre solution (J, X_1, Y_1) de (S), on a $J \subset I$, $X_1(t) = X(t)$ et $Y_1(t) = Y(t)$ pour tout $t \in J$.

Par la suite, le point (x_0, y_0) est donné, on prend $t_0 = 0$ et (I, X, Y) est la solution *maximale* du problème de Cauchy (S) correspondant. Que ses extrémités soient finies ou infinies, on notera $I =]\alpha, \beta[$. Les questions suivantes ont pour but de déterminer l'intervalle I. Soit u la fonction définie sur I par $u(t) = X^2(t) + Y^2(t)$.

2. On suppose dans cette question que β est un nombre réel.

(a) Vérifier que la fonction u est décroissante sur I.

(b) En déduire que les fonctions X, Y puis X' et Y' sont bornées sur $[0, \beta[$.

(c) En déduire que X et Y possèdent des limites finies en β, que l'on notera respectivement x_1 et y_1.

(d) On considère la solution maximale (I_1, X_1, Y_1) du problème de Cauchy

$$(S_1) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(\beta), y(\beta)) = (x_1, y_1). \end{cases}$$

On note $I_1 =]\alpha_1, \beta_1[$ et l'on définit les fonctions X_2 et Y_2 sur $]\alpha, \beta_1[$ par

$$X_2(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in]\alpha, \beta[\\ X_1(t) & \text{si } t \in [\beta, \beta_1[\end{cases} \quad Y_2(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{si } t \in]\alpha, \beta[\\ Y_1(t) & \text{si } t \in [\beta, \beta_1[. \end{cases}$$

Montrer que $(]\alpha, \beta_1[, X_2, Y_2)$ est une solution de (S). En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure?

3. On considère la fonction v définie sur I par $v(t) = e^{2t}u(t)$.

(a) Vérifier que v est décroissante sur I.

(b) En déduire que $u(t) \leq (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$ pour tout $t \geq 0$ puis que $(X(t), Y(t)) \to (0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

4. Montrer que $\alpha = -\infty$ (dans le cas contraire, on pourra utiliser la fonction $w : t \mapsto e^{4t}u(t)$ et en déduire que les fonctions X, Y puis X' et Y' sont bornées sur $]\alpha, 0]$).

GAN8

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.

Partie I

Soit x un nombre réel dans $]-1,1]$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

2. En déduire l'égalité :

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

3. Démontrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i$ converge vers $\ln(1+x)$. On citera précisément le théorème utilisé.

4 Démontrer les égalités :

$$\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \quad (1)$$

$$\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\,2^i} \quad (2)$$

5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de nombres réels qui converge vers 0.

i. Justifier que la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ converge.

ii. Soit S la somme de la série de terme général $(-1)^{n-1}u_n$ et soit S_n la somme partielle $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}u_i$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b) Démontrer que S vérifie, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}.$$

iii. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$|S - S_n| \leqslant u_n.$$

6. Soit p un entier naturel. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N_p$.

7 Soit p un entier naturel. On se propose de calculer une valeur de $\ln(2)$ à 10^{-p} près en utilisant les sommes partielles $(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,2^i})_{n\geqslant 1}$.

i. Pour un entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i\,2^i}$. Justifier l'inégalité :

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

ii. Déterminer un entier naturel N'_p tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}$ est une valeur approchée de $ln(2)$ à 10^{-p}, pour tout entier naturel $n \geqslant N'_p$.

iii. Comparer N_p (introduit dans la question 5) et N'_p.

Partie II

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant n$.

1. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, noté $\varphi_n(P)$ tel que $P(-1) - P(X) = (X+1)\varphi_n(P)(X)$.

2. Soit φ_n l'application ainsi définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que φ_n est une application linéaire. Déterminer le noyau de φ_n. L'application φ_n est-elle surjective ?

3. Ecrire la matrice de φ_n de la base $1, X, X^2, ..., X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ sur la base $1, X, X^2, ..., X^{n-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Soit P le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Démontrer que $\varphi_n(P) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ où les nombres réels $b_0, ..., b_{n-1}$ sont définis par :

$$\forall j \in \{0, ..., n-1\}, b_j = (-1)^j \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^i a_i.$$

Partie III

Dans la suite du problème, on désigne par I l'intervalle $]0, 1]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, et intégrable sur l'intervalle I.

1. Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \frac{f(x)}{1+x}.$$

Démontrer que g est intégrable sur l'intervalle I.

2. Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle I par :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = x^n f(x).$$

Démontrer que la fonction f_n est intégrable sur l'intervalle I.

Dans la suite du problème, on note :

$$S_f = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(f) = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. Démontrer que la série de terme général $(-1)^n u_n(f)$ converge.

4. Justifier l'égalité $\mathcal{E}_f$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n(f) = S_f$.

5. Que devient précisément l'égalité $\mathcal{E}_f$ dans les cas suivants :

   (i) La fonction f est la fonction constante égale à 1 sur l'intervalle I.

   (ii) La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

   (iii) La fonction f est la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

   Indication : On pourra démontrer que $S_f = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ et déterminer des nombres réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b(-1+2x)}{1-x+x^2} + \frac{c}{1-x+x^2}\ .$$

Partie IV

1. Soit P un polynôme et soit n son degré. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = P(-1)S_f - \int_0^1 \varphi_n(P)(x)f(x)dx.$$

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n, \\ T_n(-1) \neq 0 \end{cases}$$

On pose

$$S_n = \int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)f(x)dx \quad \text{et} \quad M_n = \sup_{x\in[0,1]} |T_n(x)|.$$

2. Pour tout entier naturel n, démontrer l'inégalité :

$$\left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| \leqslant \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}.$$

Partie V

Dans toute la suite du problème, on considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{aligned} T_0(X) &= 1 \\ T_1(X) &= 1 - 2X \\ T_{n+2}(X) &= 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X), \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$, pour tout entier naturel n.

   (i) Etablir une relation entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n, pour tout entier naturel n.

   (ii) En déduire l'existence de nombres réels α et β tels que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha(3+\sqrt{8})^n + \beta(3-\sqrt{8})^n$.

   (iii) Déterminer les nombres réels α et β.

2 Justifier que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la partie IV.

3 Démontrer que les coefficients du polynôme $T_n(X)$ sont des entiers relatifs, pour tout entier naturel n.

4 Démontrer l'égalité $T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)$, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x.

5 Soit n un entier naturel. Démontrer que $M_n = 1$ et en déduire l'inégalité :

$$\frac{M_n}{|T_n(-1)|} \leqslant \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

6 Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$|\ln 2 - t_n| \leqslant \frac{K}{(3+\sqrt{8})^n}.$$

Partie VI

On suppose de plus dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^5$ sur l'intervalle $[0,1]$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(\sin^2 x)\sin 2x}{1+\sin^2 x}.$$

1. Justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^5$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit P un polynôme. Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\sin^2 t) g(t)dt.$$

3. Soit n un entier naturel non nul et soit T_n le n-ième polynôme de la suite introduite dans la partie V. Démontrer l'égalité :

$$4n^2 \int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x} f(x)dx = (-1)^n g'(\frac{\pi}{2}) - g'(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\, g''(x)dx.$$

4. Soit alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n(x) = (n+2)^2 T_{n+2}(x) - n^2 T_n(x).$$

Soit n un entier naturel non nul.

(i) Démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2nx) - \cos(2(n+2)x))\, g''(x)dx.$$

(ii) On définit U et V par :

$$U = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx \ \text{ et } \ V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{\sin(2nx)}{n^3} + \frac{\sin(2(n+2)x)}{(n+2)^3}) g^{(5)}(x)dx.$$

Exprimer U en fonction de $g^{(3)}(\frac{\pi}{2})$, $g^{(3)}(0)$ et V.

(iii) En déduire qu'il existe un nombre réel K tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{1+x} f(x)dx \right| \leqslant \frac{K}{n^3}.$$

5. Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante K strictement positive vérifiant, pour tout entier naturel n,

$$\left| \ln 2 - q_n \right| \leqslant \frac{K}{n^5(3+\sqrt{8})^n}.$$

WL81

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I :

1) Déterminer le rayon de convergence R strictement positif de la série entière $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$.

2) a) Calculer $\int_0^1 t^{3n} dt$ où n est un entier naturel.

b) En déduire, en justifiant avec soin, la permutation des symboles $\sum$ et $\int$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$ lorsque x appartient à l'intervalle $]-R, R[$.
(Il pourra être utile pour les calculs de poser : $a = \sqrt[3]{x}$)

3) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et calculer sa somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice II :

Soit n un entier strictement positif, A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. On définit deux matrices U et V carrées d'ordre $2n$ à coefficients complexes par :

$$U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Première partie.

Dans cette partie, on suppose que les deux matrices U et V sont semblables, c'est à dire qu'il existe une matrice P inversible d'ordre $2n$ à coefficients complexes vérifiant l'égalité :

$$U = P^{-1}VP$$

1) Soit R un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$$

où R' est le polynôme dérivé du polynôme R.

2) On note $\prod$ le polynôme minimal de la matrice A, c'est à dire le polynôme unitaire annulateur de la matrice A de plus petit degré α strictement positif. On pose $\prod(X) = \sum_{p=0}^{\alpha} b_p X^p$.

Déterminer la matrice V^k pour k entier naturel, en déduire la matrice $\prod(V)$.

3) Établir l'égalité : $\alpha \prod(X) = X \prod'(X)$, où $\prod'$ est le polynôme dérivé du polynôme $\prod$.

4) En déduire que la matrice A est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier N tel que $A^N = 0$.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que la matrice A carrée d'ordre n à coefficients complexes vérifie la propriété suivante :

$$A^n = 0 \quad \text{et } A^{n-1} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer une matrice D diagonale d'ordre n telle que :

$$DJ - JD = J.$$

3) Déterminer une matrice H carrée d'ordre n telle que : $HA - AH = A$.

4) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

5) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice III :

On considère, trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique $(\sum)$ dont une équation est

$$\alpha^2 (x+y+z)^2 + \beta^2 (-x+y)^2 + \gamma^2 (2y+z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'un espace affine de dimension trois.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+y+z=0$ et $-x+y=0$ sont orthogonaux.

   b) On note $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ainsi que le vecteur $\vec{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = \left(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ soit orthonormé direct.

   c) Déterminer une équation de la quadrique $(\sum)$ dans le repère $\mathcal{R}'$. On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

   d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique $(\sum)$?

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique $(\sum)$ avec le plan d'équation $Z=0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

   Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = \left(O, \vec{I'}, \vec{J'}, \vec{K'}\right)$ tel que l' équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique $(\sum)$ soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

   avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X', Y' *et* Z'.

3) Soit k un réel quelconque, on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

   a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}\left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2\right)$$

   montrer que l'intersection $(\mathcal{C}_k)$ du plan (P_k) et de la quadrique $(\sum)$ est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k.

   b) Montrer que l'ensemble $(\mathcal{C}_k)$ est un cercle dont on précisera le rayon.

   c) Que peut-on dire du rayon du cercle $(\mathcal{C}_k)$? Pouvait-on le prévoir?

JU20

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Applications simples du cours

Rappels.

Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère : $V : (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté du plan de paramétrage :

$t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I, parcouru dans le sens des t croissants.

On rappelle que la circulation de V le long de γ, notée $\int_\gamma V$ se calcule par la formule :

$$\int_\gamma V = \int_\gamma \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U. L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U .

On rappelle la formule de **Green-Riemann** :

$$\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Question 1.

Dans cette question uniquement, on prend $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant x^2 \text{ et } y^2 \leqslant x\right\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine,

parcouru dans le sens trigonométrique.

1.1. Représenter le domaine G et γ.

1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\int_\gamma V$ avec $P : (x,y) \mapsto 2xy - x^2$ et $Q : (x,y) \mapsto x + y^2$.

1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.

Question 2.

On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

2.1. Que vaut : $\int_\gamma V$?

2.2. Donner un exemple de champ de vecteurs V, non identiquement nul, et vérifiant la propriété :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Question 3.

3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes : $A_1 = \int_\gamma x\,dy$, $A_2 = -\int_\gamma y\,dx$ et $A_3 = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$ sont égales.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques : $t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

On précisera les tangentes aux points singuliers.

3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ.

Problème

Préliminaires

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t$.

2. On veut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi : x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\,dt$.

Montrer que l'on a : $\forall x > 1$, $\phi(x) = \cos 1 - \dfrac{\cos x}{x} - \int_1^x \dfrac{\cos t}{t^2}\,dt$.

2.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultats que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

Partie 1 : Une première façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Soient les deux fonctions :

$$P : (x,y) \mapsto P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[x \sin x - y \cos x\right]$$

$$Q : (x,y) \mapsto Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[x \cos x + y \sin x\right]$$

et V le champ de vecteurs : $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

Question 1.

Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas l'origine.

Question 2.

Soit γ un arc fermé sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique.

Démontrer que : $\displaystyle\int_\gamma V = 0$.

Question 3.

On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho > 0$ paramétré par : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\theta) = \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ et on note A_ρ l'intégrale :

$$A_\rho = \int_\Gamma \Big(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\Big).$$

3.1. Montrer que : $A_\rho = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)\,d\theta$.

3.2. Calculer : $\lim\limits_{\rho\to 0^+} A_\rho$.

3.3. Montrer que : $\lim\limits_{\rho\to+\infty} A_\rho = 0$.

On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.

Question 4.

Soient r et R deux réels tels que : $0 < r < R$. On considère l'arc γ constitué par :

γ_1 : le segment $[A_1, A_2]$ où $A_1 = (r,0)$ et $A_2 = (R,0)$,
γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3 = (0,R)$,
γ_3 : le segment $[A_3, A_4]$ où $A_4 = (0,r)$,
γ_4 : le quart de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1.

4.1. Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

4.2. Montrer que : $\displaystyle\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$.

4.3. Vérifier que : $\displaystyle\int_{\gamma_3} V = 0$.

4.4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Partie 2 : Une deuxième façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\sin(2nt)}{\sin t}\,dt$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,dt$.

Question 1.

1.1. Vérifier que u_n et v_n existent pour toute valeur de l'entier naturel n non nul.

1.2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.

Question 2.

Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \displaystyle\int_\alpha^\beta h(t)\,e^{imt}\,dt$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties que : $\lim\limits_{m\to+\infty} H_m = 0$.

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

Question 3.

Montrer que la fonction $h : t \mapsto h(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Question 4.

4.1. Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.

4.2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Partie 3 : Une troisième façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\Delta = [0, u] \times [0, u]$ et $J = \displaystyle\iint_\Delta (\sin x)\, e^{-xy}\, dxdy$

Question 1.

Donner une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x)\, e^{-\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Question 2.

En utilisant l'intégrale J, montrer que : $\displaystyle\int_0^u \frac{\sin x}{x}\left[1 - e^{-xu}\right] dx = \int_0^u \frac{1 - e^{-yu}(\cos u + y \sin u)}{1 + y^2}\, dy$.

Question 3.

On note alors : $K_1 = \displaystyle\int_0^u e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx$ et $K_2 = \int_0^u \frac{y \sin u + \cos u}{1 + y^2}\, e^{-yu}\, dy$.

3.1. Prouver que : $\lim\limits_{u \to +\infty} K_1 = 0$.

3.2. En utilisant une majoration, déterminer : $\lim\limits_{u \to +\infty} K_2$.

3.3. Retrouver alors la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Question 4.

4.1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ est convergente.

4.2. En utilisant le résultat de la question 3.3. calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$.

Fin du problème.

QC31

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On considère une matrice carrée A d'ordre 4 à coefficients réels. On suppose que le rang de A est égal à 3, que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1, que -1 est valeur propre double de A.

1° Prouver que 0 est valeur propre de A.

2° Prouver que 1 est valeur propre de A.

3° Déterminer le polynôme caractéristique noté $P_A(X)$ de la matrice A.

4° Pour k entier naturel, $k \geq 4$, déterminer le reste, noté $R_k(X)$, de la division euclidienne de X^k par $P_A(X)$.

5° Pour k entier naturel, $k \geq 4$, démontrer que A^k est combinaison linéaire de A, A^2, A^3 et déterminer cette combinaison linéaire.

Exercice 2

Soit α et β deux réels, avec $\alpha < \beta$. Soit a et b deux applications de $[\alpha,\beta]$ vers **R**, continues sur $[\alpha,\beta]$. On note (E) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Dans cet exercice on appelle solution de (E) toute application de $[\alpha,\beta]$ vers **R** de classe C^2 vérifiant (E) sur $[\alpha,\beta]$.

Soit f une solution de (E) sur $[\alpha,\beta]$. On suppose que f admet une infinité de zéros dans $[\alpha,\beta]$. Le but de l'exercice est d'établir que f est l'application nulle sur $[\alpha,\beta]$.

Pour cela on considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de zéros de f, deux à deux distincts, appartenant à $[\alpha,\beta]$.

1° Dans cette question on suppose que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel x.

a) Prouver que x appartient à $[\alpha,\beta]$. En déduire que $f(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe au moins un zéro de f', noté y_n, strictement compris entre x_n et x_{n+1}.

c) Calculer $f'(x)$.

d) Conclure.

2° Prouver que f est aussi l'application nulle sur $[\alpha,\beta]$ lorsque la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente.
3° Prouver à l'aide d'un contre-exemple que le résultat établi dans cet exercice est faux si l'on remplace $[\alpha,\beta]$ par **R**.

Exercice 3

R est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit $(\alpha_n)_n$ une suite réelle.

On rappelle que la relation $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : Règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall\, n \geq n_0\ ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1° Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2° Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.
3° On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge.
On choisit β tel que : $\lambda > \beta > 1$.

a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait : $u_n \leq K v_n$.

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4° On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5° Pour $n \geq 2$, on pose : $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la Règle de Raabe-Duhamel.

Partie B Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la Règle de Raabe-Duhamel.

1° Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2° Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b) Etablir que : $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3° Soit α un réel donné, n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose :

$a_0 = 1$, pour $n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$ et pour x réel, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et, pour x élément de $]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

b) Utiliser la Règle de Raabe -Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$.

d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

e) On suppose que : $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que : $\lim_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 4

E est un espace euclidien de dimension n, $n \geq 1$. Le produit scalaire sur E est noté $\langle \ | \ \rangle$.

$(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ et $(y_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,....,p\}^2, \ \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle .$$

Le but de cet exercice est d'établir la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

Il existe un automorphisme orthogonal f de E vérifiant :

$$\forall k \in \{1,2,....,p\}, \ f(x_k) = y_k .$$

1° Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$. Prouver que $\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i \right\|$.

En déduire que si $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E alors $y_1, y_2, ..., y_p$ sont aussi linéairement indépendants dans E.

2° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E et que $p = n$. Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.

3° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement indépendants dans E et que $p \neq n$. On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(x_k)_{1\leq k\leq p}$ et G le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $(y_k)_{1\leq k\leq p}$. $F^{\perp}$ désigne le sous-espace de E orthogonal à F, $G^{\perp}$ désigne le sous-espace de E orthogonal à G.

a) Justifier l'inégalité $p < n$; préciser les dimensions des sous espaces vectoriels F, $F^{\perp}$, G, $G^{\perp}$.

b) Donner une condition sur l'entier naturel q pour assurer l'existence d'une famille orthonormale $(x_k)_{p+1\leq k\leq q}$ de vecteurs de $F^{\perp}$ et d'une famille orthonormale $(y_k)_{p+1\leq k\leq q}$ de vecteurs de $G^{\perp}$.

Pour tout (i, j) élément de $\{1,2,....,q\}^2$, comparer $\langle x_i | x_j \rangle$ et $\langle y_i | y_j \rangle$.

c) Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.

4° Dans cette question, on suppose que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont linéairement dépendants dans E. Etablir la propriété $(\mathcal{P})$.

ELA4

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Ce problème a pour but d'étudier les crochets de Lie sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 1, 2 ou 3.
  Les parties I et II sont indépendantes, la partie III utilise certains résultats de la partie I.
- E étant un $\mathbb{R}$ espace vectoriel :
  Une application B de $E\times E$ dans E est dite antisymétrique ssi
  $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in E^2\right)\left(B\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-B\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right)$.
  On appelle crochet de Lie sur E noté [,] toute application telle que :
  - [,] : $E\times E\to E$
  - [,] est bilinéaire
  - [,] est antisymétrique
  - $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in E^3\right)\left(\left[\vec{u},\left[\vec{v},\vec{w}\right]\right]+\left[\vec{v},\left[\vec{w},\vec{u}\right]\right]+\left[\vec{w},\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right]=\vec{0}\right)$
- Dans ce problème l'ensemble des vecteurs de la géométrie plane est identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de la géométrie dans l'espace à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Si E est le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ la notation de la géométrie vectorielle pour les éléments de E sera adoptée : ils seront notés avec une flèche.
- Dans les parties I et III, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire usuel de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et le produit vectoriel de ces deux vecteurs sera noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
  On rappelle la formule : $\left(\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in\mathbb{R}^3\right)\left(\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v}-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}\right)$.
  $b_0=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques.

❖ Si b est une base de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{M}_b(\vec{u})$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ formé par les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base b et $\mathfrak{M}_b(f)$ la matrice de f dans la base b.
Si $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, φ_A désignera l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base b_0 est A.

Questions de cours.

1) Montrer que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier si $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ donner l'unique décomposition de C en $C=S_C+A_C$ où $S_C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

2) Si $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ avec $rang(S) \leq 2$, montrer qu'il existe une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormée directe telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Application : on considère $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer une base b et les valeurs de β et γ. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice S^n (distinguer n pair et n impair).

Partie I : Exemples de crochets de Lie et premières propriétés.

1) Exemples de crochet de Lie :

a) On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque, montrer que $[\ ,\ ] : \begin{cases} E \times E \to E \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{0} \end{cases}$ est un crochet de Lie sur E.

b) Montrer que $[\ ,\ ] : \begin{cases} E \times E \to E \\ (A, B) \mapsto AB - BA \end{cases}$ est un crochet de Lie sur $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $E=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce un crochet de Lie sur $E=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$? (justifier la réponse)

2) Crochet de Lie usuel sur $\mathbb{R}^3$:

a) Montrer que $\left(\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3\right)\left(\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}\right)$. En déduire que $[\ ,\ ] \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$ est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

b) On considère $\vec{a} \in \mathbb{R}^3, \vec{a} \neq \vec{0}$ et $\psi_{\vec{a}} \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{u} \end{cases}$.

i) Montrer que $\psi_{\vec{a}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

ii) Déterminer le noyau et le rang de $\psi_{\vec{a}}$.

iii) Dans la suite de cette question, on pose $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ où $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, donner la matrice $A_{\vec{a}}$ de $\psi_{\vec{a}}$ dans la base b_0, vérifier que $A_{\vec{a}} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

iv) Calculer le polynôme caractéristique de $A_{\vec{a}}$.

v) $\psi_{\vec{a}}$ est-il diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

vi) On considère une matrice antisymétrique quelconque $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe un unique $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = A_{\vec{a}}$.

Partie II : Détermination des crochets de Lie en dimension 1 et 2.

1) On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque muni d'un crochet de Lie [,].

a) Montrer que si $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée de E alors $[\vec{u},\vec{v}] = \vec{0}$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

2) Détermination des crochets de Lie en dimension 1.

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 1.

a) Si E est muni d'un crochet de Lie [,], montrer que $(\forall (\vec{u},\vec{v}) \in E^2)\left([\vec{u},\vec{v}] = \vec{0}\right)$.

b) Quels sont tous les crochets de Lie sur E ?

3) Détermination des crochets de Lie en dimension 2.

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $B = (\vec{u_0},\vec{v_0})$. Le déterminant de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ de E dans la base B sera noté $\det_B(\vec{u},\vec{v})$.

a) On suppose dans cette question que E est muni d'un crochet de Lie [,] quelconque. Si $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ avec $\vec{x} = x_1\vec{u_0} + x_2\vec{v_0}$ et $\vec{y} = y_1\vec{u_0} + y_2\vec{v_0}$ où $x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$, montrer que $[\vec{x},\vec{y}] = \det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k_0}$ où $\vec{k_0} = [\vec{u_0},\vec{v_0}]$.

b) Dans cette question, on considère $\vec{k}$ un vecteur quelconque de E et on pose si $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$: $[\vec{x},\vec{y}] = \det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k}$, le but de cette question est de montrer que c'est un crochet de Lie sur E.

i) Montrer que $\left(\forall (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3\right)\left(\det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w} + \det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u} + \det_B(\vec{w},\vec{u})\vec{v} = \vec{0}\right)$.

ii) Montrer que $\left(\forall (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3\right)\left([\vec{u},[\vec{v},\vec{w}]] = [\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u},\vec{k}]\right)$.

iii) En déduire que [,] est un crochet de Lie sur E.

c) Quels sont tous les crochets de Lie sur E ?

Partie III : Etude des crochets de Lie en dimension 3.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes. On rappelle que $b_0=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ désigne la base orthonormale directe canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Expressions des crochets de Lie sur $\mathbb{R}^3$:

Dans toute la question 1), [,] représente un crochet de Lie quelconque sur $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $\overrightarrow{c_1}=\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_2}=\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\\c_{32}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_3}=\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\begin{pmatrix}c_{13}\\c_{23}\\c_{33}\end{pmatrix}$ et

$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}$ avec $C\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Le but de cette question est de montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\left[\vec{x},\vec{y}\right]=f\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)$.

i) Montrer que si $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ alors

$$\left[\vec{x},\vec{y}\right]=(x_2y_3-x_3y_2)\overrightarrow{c_1}+(x_3y_1-x_1y_3)\overrightarrow{c_2}+(x_1y_2-x_2y_1)\overrightarrow{c_3}.$$

ii) En déduire que pour tout $\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\varphi_C\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)$.

iii) Montrer que φ_C est l'unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\left[\vec{x},\vec{y}\right]=f\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)$.

b) D'après la question de cours 1) il existe un unique $S_C\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A_C\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tels que $C=S_C+A_C$.

i) D'après (Partie I)2)b)vi)), il existe un unique $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ tel que $A_C=A_{\vec{a}}$ c'est-à-dire $\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^3:\ \varphi_{A_C}\left(\vec{u}\right)=\vec{a}\wedge\vec{u}$. Montrer que $2\vec{a}=\begin{pmatrix}c_{32}-c_{23}\\c_{13}-c_{31}\\c_{21}-c_{12}\end{pmatrix}$.

ii) Montrer que $2\vec{a}=\vec{i}\wedge\overrightarrow{c_1}+\vec{j}\wedge\overrightarrow{c_2}+\vec{k}\wedge\overrightarrow{c_3}$.

iii) Montrer que $\left[\vec{i},\overrightarrow{c_1}\right]+\left[\vec{j},\overrightarrow{c_2}\right]+\left[\vec{k},\overrightarrow{c_3}\right]=\vec{0}$.

iv) En déduire que $\varphi_C\left(2\vec{a}\right)=\vec{0}$ et que $\vec{a}\in\mathrm{Ker}\left(\varphi_{S_C}\right)$.

c) Déduire des questions précédentes que $\left(\forall\left(\vec{x},\vec{y}\right)\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2\right)$

$$\left(\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\varphi_{S_C}\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{y}\right)\vec{x}-\left(\vec{a}\cdot\vec{x}\right)\vec{y}\right).$$

2) Réciproque :

Dans cette question, on considère $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\vec{a} \in \mathrm{Ker}(\varphi_S)$ quelconques.
On définit [,] par : $\left(\forall (\vec{x},\vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2\right)\left([\vec{x},\vec{y}] = \varphi_S(\vec{x}\wedge\vec{y}) + (\vec{a}\cdot\vec{y})\vec{x} - (\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{y}\right)$ et l'on veut montrer que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ (dit crochet de Lie associé à S).

a) Montrer que [,] est bilinéaire antisymétrique.

b) On suppose dans cette question $\vec{a} \neq \vec{0}$, on pose $\rho = \|\vec{a}\|$. Dans la question de cours 2), a été établie l'existence d'une base b de $\mathbb{R}^3$ orthonormale directe telle que $\mathfrak{M}_b(\varphi_S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

i) Montrer que le premier vecteur de b peut-être choisi égal à $\frac{1}{\rho}\vec{a}$.

Dans la suite de cette question, le premier vecteur de b est $\frac{1}{\rho}\vec{a}$.

ii) Si $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathfrak{M}_b(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{M}_b(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, montrer que

$$[\vec{u},\vec{v}] = (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{d} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e} \text{ où } \mathfrak{M}_b(\vec{d}) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{M}_b(\vec{e}) \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

iii) Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathfrak{M}_b(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{x},\vec{d}]$ et $[\vec{x},\vec{e}]$.

iv) En déduire que si $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ avec $\mathfrak{M}_b(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{M}_b(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et

$$\mathfrak{M}_b(\vec{z}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ alors } [\vec{x},[\vec{y},\vec{z}]] = x_1\left((y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d'} + (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e'}\right) \text{ où}$$

$$\mathfrak{M}_b(\vec{d'}) \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 - \beta\gamma \\ -2\rho\gamma \end{pmatrix} \text{ et } \mathfrak{M}_b(\vec{e'}) \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho\beta \\ \rho^2 - \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

v) Montrer que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

vi) Application : En utilisant la partie Question de cours)2), donner l'expression d'un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$ associé à $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) On suppose dans cette question $\vec{a} = \vec{0}$, montrer par un raisonnement similaire à III)2)b) que [,] est un crochet de Lie sur $\mathbb{R}^3$.

* * *

NV25

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par:

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).

Soit $\Delta : E \to E$ défini par:

$$\forall P \in E, \quad \Delta(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que P'' ou $P''(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de $P = P(X)$.

1°) **a)** Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de F et de G.

b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

c) En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ. Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.

d) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, et on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k, tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k.

e) Montrer que pour tous P et Q dans E, on a: $\langle \Delta(P), Q\rangle = \langle P, \Delta(Q)\rangle$.

En déduire que pour tout $(k,h) \in [\![0,2n]\!]^2$ tel que $k \neq h$, on a: $\langle P_k, P_h\rangle = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n})$?

f) Montrer que $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une base de G.

2°) On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par:

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

a) Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1°), et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.

b) Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E.

c) Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

d) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).

EXERCICE 2

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \quad ; \quad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1°) On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par: $f_1(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

(i) Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

(ii) Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par f_1, c'est-à-dire:

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire:

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire:

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $\quad (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1.$

2°) On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a) Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.

b) Soit $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$.
Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

c) Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1. De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.
En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ.

d) Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques: c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.
En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.

e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose: $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

f) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

EXERCICE 3

1°) **a)** Justifier l'existence des intégrales:

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

b) Justifier l'existence et calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$.
Calculer les coefficients de Fourier de f.
En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé.

d) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$, et grâce à c) en déduire la valeur de T.

e) En utilisant la série de terme général u_n, justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de a).

f) Justifier l'existence des intégrales suivantes: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$ et les calculer grâce aux résultats précédents.

2°) **a)** Calculer: $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, et justifier l'existence de: $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

b) Justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -(\ln(2))^2 - B$.

c) Calculer: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

3°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On pourra noter $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}$.

4°) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx$, et montrer que: $v_n = -\frac{h_{n+1}}{n+1}$.

b) Montrer l' égalité des trois réels U, V et W, avec

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}, \quad V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt, \quad W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$

e3a

10MP01

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours

1. Donner la définition de deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E.
2. On prend $E = \mathbb{R}^n$ et on rappelle que les applications

$$N_p : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto N_p(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; p \geqslant 1 \text{ et } N_\infty : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto N_\infty(X) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Prouver, par un calcul explicite, que $\forall p \geqslant 1$, N_p et N_∞ sont équivalentes.

3. Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont-elles équivalentes ? (On ne demande pas de démonstration).
4. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme N_∞.

Peut-on trouver $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(u(X)) \leqslant K\, N_\infty(X)$?

Dans l'affirmative, donner une valeur de K.

5. Citer sans démonstration trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé soit continu.
6. Caractériser les endomorphismes continus de $\mathbb{R}^n$. On justifiera la réponse.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Partie 1.

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $||X||$.

L'espace E est orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale directe de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale.

2. Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme u.

3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

4. On rappelle que si w est un endomorphisme continu de E, $(w \in \mathcal{L}_C(E))$, la norme de l'endomorphisme w est définie par :

$$|||w||| = \sup_{||X||=1} ||w(X)||$$

4.1 Vérifier que u est un endomorphisme continu de E et que : $|||u||| = 1$.

4.2 Soit $w \in \mathcal{L}_C(E)$. Prouver qu'il existe $X_0 \in E$ tel que $\|X_0\| = 1$ et $|||w||| = \|w(X_0)\|$

5. On définit dans $\mathcal{L}_C(E)$ la suite (u^k) des endomorphisme itérés de u : $u^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u^{k-1} \circ u$.
Prouver que la suite (u^k) est une suite bornée de $\mathcal{L}_C(E)$.

6. Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = id_E - u$.

6.1 Déterminer $\ker(v)$.

6.2 $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont-ils orthogonaux ?

6.3 Prouver que $E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

6.4 En déduire que, pour tout $X \in E$, il existe $Z \in E$, et un unique $X_1 \in \ker(v)$ tels que :

$$X = X_1 + Z - u(Z)$$

6.5 On pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

Montrer que $\forall X \in E$, la suite $(p_m(X))$ converge vers la projection de X sur $\ker(v)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(v)$.

Partie 2.

On prend dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2$, $< X, Y >= {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $||X||$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente dans la base $\mathcal{B}$ un endomorphisme u de E, on note $|||A||| = \sup_{||X||=1} ||AX||$.

1. Vérifier que $|||\ \ |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Quelques propriétés de la matrice $B = {}^tAA$.

2.1 Montrer que B est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont positives ou nulles.
Etudier le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.2 On note $\rho(B) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$ où $\mathrm{sp}(B)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice B.
Soit U une matrice semblable à B. A-t-on $\rho(U) = \rho(B)$?

2.3 Montrer que $|||A|||^2 \leqslant \rho(B)$.

2.4 Prouver enfin que $|||A|||^2 = \rho(B)$.

3. On suppose dans cette question que u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$.

3.1 Calculer $|||A|||$.

3.2 Dans quel cas la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

3.3 On suppose que $|\gamma| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_m = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.

Expliciter pour tout $m \in \mathbb{N}$, P_m puis déterminer $\lim\limits_{m\to\infty} P_m$.

4. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme de E diagonalisable et on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de u, les λ_i étant distincts ou non.

4.1 Calculer $|||\, A \,|||$.

4.2 Dans quel cas la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

4.3 On suppose que $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, $|\lambda_i| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.

Calculer $\lim\limits_{m\to\infty} P_m$.

Partie 3.

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel normé réel de dimension finie n, et que u est un endomorphisme continu de E tel que la suite des endomorphismes itérés $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans $(\mathcal{L}_C(E), ||| \; |||)$.

On pose $v = id_E - u$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \dfrac{1}{m}(id_E + u + u^2 + ... + u^{m-1})$.

1. Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, X \in \ker(v)$, $p_m(X) = X$.

2. Justifier le fait que $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $p_m \circ v = v \circ p_m$. Exprimer l'endomorphisme $p_m \circ v$ en fonction de u.

3. Soit $X \in \operatorname{Im} v$ fixé.

3.1 Déterminer en fonction de X, une constante positive K telle que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $||p_m(X)|| \leqslant \dfrac{K}{m}(1 + |||u^m|||)$.

3.2 En déduire que la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

4. Montrer alors que la somme $H = \ker v + \operatorname{Im} v$ est directe c'est-à-dire que $H = \ker v \bigoplus \operatorname{Im} v$.

5. Préciser H.

6. Prouver alors que la suite $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur E vers le projecteur p sur $\ker v$ parallèlement à $\operatorname{Im} v$.

Partie 4.

On suppose dans cette partie que E est de dimension infinie. Soit u un endomorphisme continu de E tel que $||| \, u \, ||| \leqslant 1$.

On garde les notations définies dans la partie 3.

1. La suite des itérés de u : $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

2. Prouver que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $|||p_m||| \leqslant 1$.

3. On note $\overline{\operatorname{Im} v}$ l'adhérence de $\operatorname{Im} v$ et on prend $X \in \overline{\operatorname{Im} v}$.

3.1 Prouver que pour tout entier naturel m non nul, il existe $T \in \operatorname{Im}(v)$ tel que :

$$||p_m(X)|| \leqslant |||p_m||| \, . \, ||X - T|| \, + \, ||p_m(T)||$$

3.2 Démontrer que la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E.

4. Prouver que la somme $H = \ker(v) + \overline{\operatorname{Im} v}$ est directe.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

5.1 Démontrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im}(v)$ est stable par p_m.

5.2 En déduire que $\overline{\operatorname{Im} v}$ est aussi stable par p_m.

5.3 Prouver enfin que H est stable par p_m.

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note π_m la restriction de p_m à H et π le projecteur de H sur $\ker(v)$ parallèlement à $\overline{\operatorname{Im} v}$.

6.1 Prouver que la suite (p_m) converge simplement sur H vers π.

6.2 Vérifier que $\forall\, X \in H$, $||\pi(X)|| \leqslant ||X||$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

6.3 En déduire que $\pi \in \mathcal{L}_C(E)$.

Partie 5.

On prend dans cette partie pour E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées que l'on munit de la norme :

$$\forall X \in E, ||X|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

On considère alors l'application u de E qui à la suite $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1}$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. Prouver que $|||u||| = 1$.
3. Préciser $\ker(v)$ où $v = id_E - u$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(v)$ est constitué des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la suite $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

soit bornée.

5. Peut-on construire un exemple tel que $X \in E$ et la suite $(p_m(X))_{m\in\mathbb{N}}$ diverge ?

FIN DE L'EPREUVE.

e3a

10MP02

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \qquad y' - y = \frac{-1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. On note S sa somme.

a. Rappeler le développement en série entière de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} u : &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{-1}{\mathrm{e}} \cdot \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

et préciser sur quel intervalle ce développement est valable.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients a_n pour que la somme S soit solution de (E) sur $]-1,1[$.

c. On suppose la condition précédente satisfaite, démontrer qu'alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{a_0}{n!} - \frac{1}{\mathrm{e}n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k!$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

d. Démontrer que la suite (a_n) est bornée et justifier la relation $R \geq 1$.

2. Démontrer que pour $x > -1$, la fonction :

$$F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On définit une fonction f sur $]-1, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

3. Démontrer que f admet un développement en série entière en 0 de la forme :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

et expliciter les coefficients b_n à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,\mathrm{d}t$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

4. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x) - f(x)$ pour $x > -1$.

5. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!$ à l'aide des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^p}\,dt$.

Exercice 2

On étudie dans cet exercice des équations de la forme :

$$(\mathcal{E}_{p,q}) : \qquad M^2 + pM + qI_n = 0$$

où l'inconnue M est une matrice carrée de taille n à coefficients réels ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), p et q sont deux paramètres réels et I_n désigne la matrice identité de taille n.

1. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$E(M) = \{PMP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

Démontrer que si M est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ alors toute matrice $M' \in E(M)$ est également solution.

Dans la suite, les ensembles de solutions des équations $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles $E(A)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$:

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$$

avec a et b deux réels distincts.

a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable (on énoncera complètement le théorème utilisé).

b. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$.

3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est à dire l'équation $M^2 = 0$).

a. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Démontrer que $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}f$.

b. Énoncer précisément le théorème du rang.

c. Démontrer que $\mathrm{rg}f \leq \frac{n}{2}$.

d. On pose $p = \mathrm{rg}f$. Démontrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$M^2 - 2aM + a^2 I_n = 0$$

avec a un réel.

a. Démontrer que toute solution M peut s'écrire $M = N + aI_n$ avec $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N^2 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.

5. Démontrer que si n est impair, l'équation $M^2 + I_n = 0$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est à dire l'équation $M^2 + I_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.

a. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right)$$

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice 3

Soit n un entier, $n \geq 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f(P) = ((X^2-1)P')'$$

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.

On considère dans la suite l'espace euclidien E associé au produit scalaire φ. La norme euclidienne de $P \in E$ est notée $\|P\|$.

2. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
3. Rappeler les définitions de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien et d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.
4. Démontrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
5. Déterminer $\ker f$ et en déduire le rang de f.
6. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et on définit le polynôme $P_0 = 1+X$.

a. Déterminer le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathrm{Im}f$.

b. Déterminer $m = \inf_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P_0 - f(P)\|$.

c. Résoudre l'équation $\|P_0 - f(P)\| = m$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

7. On définit une suite $(L_k)_{k\geq 0}$ de polynômes en posant $L_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ L_k = \left((X^2-1)^k\right)^{(k)}$$

(c'est à dire : L_k est la dérivée k-ième de $(X^2-1)^k$).

a. Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3.

b. Déterminer le degré de L_k.

c. À l'aide de la formule de Leibniz, exprimer les polynômes :

$$A_k = ((X^2-1)(X^2-1)^k)^{(k+2)}$$
$$B_k = (X(X^2-1)^k)^{(k+1)}$$

à l'aide des polynômes L_k, L_k' et L_k''.

d. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0$$

e. À l'aide de la relation précédente, démontrer que L_k est un vecteur propre de f (on précisera la valeur propre associée).

f. Démontrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de E.

FIN DE L'EPREUVE

e3a

10PSI10

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Dans tout le sujet, E désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Applications directes du cours

Soit $f \in E$.

1. Démontrer que si f est paire alors f' est impaire.

2. Démontrer une propriété analogue lorsque f est impaire.

3. Soit H l'application de E dans E qui à toute application $u \in E$ associe l'application $v \in E$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) = u(-x)$$

3.1 Vérifier que H est une symétrie vectorielle de E.

3.2 Retrouver, à l'aide de H, que tout élément de E se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4. Les réciproques des résultats obtenus dans les questions 1 et 2 sont-elles vraies ?

5. Déduire des questions précédentes toutes les fonctions de E qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = 1 + \sin(2x)$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Préliminaires.

On rappelle $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ l'application qui à $y \in E$ associe $\varphi(y) = y'' + \lambda y$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2. Soit $h \in E$. Existe-t-il $y \in E$ telle que $\varphi(y) = h$?

3. φ est-elle surjective ?

4. Montrer que le noyau de φ est de dimension finie.

5. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ uniquement constituée de fonctions paires et de fonctions impaires. On pourra discuter suivant le signe de λ.

6. Quelle est la structure de l'ensemble des antécédents de la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ par φ ? Décrire précisément cet ensemble.

7. **7.1** Déterminer l'intersection de $\ker(\varphi)$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions bornées de E.

7.2 Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe ?

7.3 Si on suppose $\lambda < 0$, existe-t-il $f \in \ker(\varphi)$ et $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = f(x) + g(x)$?

7.4 Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$, les sous-espaces $\ker(\varphi)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Partie 1.

1. Soit f la fonction 2π - périodique, définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}\left(3x^2 - \pi^2\right).$$

1.1 Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 5\pi]$.

1.2 Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

1.3 Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

1.4 Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et calculer sa somme β.

1.5 Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier q tel que $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{q} \frac{(-1)^n}{n^2} - \beta\right| < \varepsilon$.

1.6 Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.7 La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $h : x \longmapsto h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$.

2.1 Prouver que h est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2.2 Déterminer les fonctions $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

2.3 Vérifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2.4 Prouver que h est de classe C^2 sur $]-\pi, \pi[$.

3. Montrer que h est solution sur $]-\pi, \pi[$ d'une équation différentielle du type $y'' + \lambda y = k$ où λ et k sont des constantes réelles.

4. Calculer $h'(0)$ et $h'_g(\pi)$ (dérivée à gauche de h en π).

5. En déduire que : $\forall\, x \in]-\pi, \pi[,\ h(x) = \dfrac{\pi \operatorname{ch}(a\,x)}{2\,a \operatorname{sh}(a\,\pi)} - \dfrac{1}{2\,a^2}$.

6. Justifier que l'égalité précédente est encore valable sur le segment $[-\pi, \pi]$.

7. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

8. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie 2.

On prend dans cette partie : $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Prouver que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx$ converge.

2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin(ax)\, dx$.

   2.1 Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale J_k existe-t-elle ?

   2.2 Pour ces valeurs, calculer J_k.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer sous forme d'une intégrale

$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx - a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2}$$

4. Prouver que : $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

5. En déduire le résultat :

$$\forall\, a > 0,\ \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2\, a \operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2\, a^2}.$$

Fin de l'épreuve

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I.— Dans cet exercice les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder la partie B en admettant le résultat de la question A(3)(b)

Soit n un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note respectivement I_n et O_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$, sa trace $\mathrm{Tr}(A)$ et son polynôme caractéristique est désigné par $P_A(X)$.

Partie A

(1) Soient A, B, C et et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

$$\det\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(D), \quad \det\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = 1 \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A).$$

(b) En déduire $\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

(c) De la question précédente, déduire $\det\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

(2) Dans toute la suite de cette partie, A, B, C et D sont quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que, si la matrice D est inversible, alors on a

$$\det(M) = \det(AD - BC).$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

(3) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que l'on a $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$\mathcal{R}_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \qquad \mathcal{L}_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
$$X \mapsto AX \qquad X \mapsto XA$$

(1) Déterminer les matrices de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

(a) $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$,

(b) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix})$,

(c) $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\Big((1+q)^2\det(A) - q\left(\mathrm{Tr}(A)\right)^2\Big)$.

(4) On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.

(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- Il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$.
- On a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

(5) Soit A un matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe une matrice B non nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Exercice II .— Dans cet exercice, la partie C peut-être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a, \quad b_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(1) Montrez que pour tout entier $n > 0$ on a

(a) $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$,

(b) $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.

(2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n.$$

(3) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n,$$

puis que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|1 - a|.$$

(4) En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Partie B

Désormais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les suites de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ en posant

$$a_0(x) = x, \quad b_0(x) = 1, \quad a_{n+1}(x) = \frac{a_n(x) + b_n(x)}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1}(x) = \sqrt{a_n(x) b_n(x)}.$$

(1) Déduire de la partie A que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f.

(2) (a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

(b) Montrer qu'on a $\sqrt{x} \leq f(x) \leq x$ pour tout x positif.

(3) Soit A un réel strictement positif. Montrer que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0, A]$ vers f. (On pourra utiliser la question A(3).

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

(4) En déduire que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Partie C

(1) Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, la fonction S_x définie par $S_x(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{x}{t})$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant le changement de variable $s = S_{\alpha\beta}(t)$, démontrer que l'on a

$$\forall x > 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + (\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

(c) En déduire l'égalité

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + (\frac{\alpha+\beta}{2})^2)(t^2+\alpha\beta)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}.$$

Partie D

(1) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + (a_n(x))^2)(t^2 + (b_n(x))^2)}}.$$

(2) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on définit la fonction

$$h_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2 + (a_n(x))^2)(t^2 + (b_n(x))^2)}}.$$

(a) Montrer que, pour $t > 0$ et $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = \dfrac{1}{t^2 + (f(x))^2}$.

(b) Démontrer l'inégalité $0 < h_n(t) \leq \dfrac{1}{t^2+x}$ où $t > 0$, $x > 0$ et $n \geq 1$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \frac{\pi}{2f(x)}$ où $x > 0$.

(d) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2f(x)}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

FIN DE L'EPREUVE

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace.
Les parties I et II sont consacrées à la définition et à certaines propriétés de cette transformation. Les résultats de ces deux parties pourront être admis pour aborder la partie III. Enfin, la partie IV est totalement indépendante des parties II et III.

Dans tout ce problème, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :

il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq Ct^n.$$

Partie I : la transformation de Laplace

1. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale impropre

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt.$$

(a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ est convergente et que

$$I_0(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Indication : le réel $T > 0$ étant donné, on pourra intégrer $\int_0^T t^n e^{-xt}dt$ par parties.

2. (a) Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

(b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

(c) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

3. On se donne $f \in E$.

(a) Soit x un réel strictement positif; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
On notera alors jusquà la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

(b) Énoncer le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de E dans l'espace constitué des applications définies et continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

Partie II : quelques propriétés des transformées de Laplace

Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1. On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leq Ct^n$ pour tout réel $t \geq A$.
   (a) Montrer que
   $$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|\, dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}$$
   pour tout réel $x > 0$.
   (b) Montrer que
   $$\int_0^A |f(t)e^{-xt}|\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   (c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
2. (a) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[x_0, +\infty[$ en énonçant le théorème utilisé.
   (b) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que
   $$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}dt$$
   pour tout $x \in]0, +\infty[$.
3. On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $f' \in E$.
   (a) Montrer que
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$
   pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   (b) Vérifier que la fonction $h : t \mapsto tf'(t)$ appartient à E et montrer que
   $$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)$$
   pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   (c) On suppose que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et que $f'' \in E$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de x, $\mathcal{L}(f)(x)$, $f(0)$ et $f'(0)$.

Partie III : une application de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on se donne un entier $p \geq 1$ et on considère :
- le problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y''(t) - ty'(t) + 2py(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
où y désigne une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

– l'équation différentielle

$$(J) \quad xu'(x) + (x^2 + 2p + 1)u(x) = x,$$

où u désigne une fonction définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles.

1. Justifier que $(\mathcal{P})$ possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$, que l'on notera Y.

L'objectif de cette partie est d'expliciter Y en passant par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Dans ce but, on note f la restriction de Y à l'intervalle $[0, +\infty[$ et *on admet que* f, f' *et* f'' *appartiennent à* E. On note alors $U = \mathcal{L}(f)$.

2. À l'aide des résultats de la Partie II, montrer que U est une solution de (J) sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n+1}e^{\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier n et tout réel x une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

(b) En déduire que

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}2^n n! + n!e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}$$

pour tout entier n et tout réel x.

4. (a) Donner une base de l'espace des solutions de l'équation sans second membre associée à (J) sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que l'ensemble des solutions de (J) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{2p+1}} + p! \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!} \frac{1}{x^{2k+1}},$$

où C est un réel quelconque.

5. (a) Parmi les solutions ci-dessus, on désigne par U_0 celle correspondant à $C = 0$. Montrer, à l'aide des résultats de la Partie I, qu'il existe un polynôme R, dont on donnera les coefficients, tel que la restriction R_0 de R à $[0, +\infty[$ vérifie $\mathcal{L}(R_0) = U_0$.

(b) Montrer que R est la solution de $(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{R}$.

Partie IV : injectivité de la transformation de Laplace

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

On se donne $f \in E$ et on considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s}ds.$$

1. Justifier que $g(t)$ possède une limite finie L lorsque $t \to +\infty$.
2. En déduire que $g \in E$. *Indication :* on pourra utiliser I 2 (b).
3. (a) Montrer que $g' \in E$ et déduire de II 3 (a) que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}dt.$$

   (b) Soit φ l'application définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{pour } u \in]0, 1] \\ L & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

   (i) Vérifier que φ est continue sur $[0, 1]$.

   (ii) Montrer après avoir énoncé le théorème de changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\varphi(u)du$$

   pour tout $x \in]0, +\infty[$.

On suppose désormais que $\mathcal{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

4. Vérifier que $\int_0^1 u^n\varphi(u)du = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $u \mapsto \cos(p\pi u)$.

   (b) En déduire que $\int_0^1 \cos(p\pi u)\varphi(u)du = 0$ pour tout entier p en citant avec précision le théorème utilisé.

   (c) Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, périodique et de période 2 définie par $\psi(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in [0, 1]$.

   (i) Vérifier que ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (ii) Calculer ses coefficients de Fourier sous forme trigonométrique et en déduire, en citant le théorème utilisé, que ψ est nulle sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Montrer que f est la fonction nulle.

   (b) Montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

FIN DE L'EPREUVE

e3a

10PC07

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

1) Calculs préliminaires

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x) .$$

b) Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

ii) Montrer que φ admet un développement en série entière autour de 0.

iii) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) On pose

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx,$$

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx,$$

i) Montrer, et justifier leur convergence, que

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telle que :

$$I(a) = C\int_a^{3a} \varphi(x)dx + D$$

la fonction φ ayant été définie en 1)b)i).

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie 3 rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; les coordonnées d'un vecteur dans cette base sont notées (x, y, z).
L'identité sur E, notée Id_E est l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$.
f est un endomorphisme de E et A est sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
${}^tA$ est la matrice transposée de la matrice A.
$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices à une colonne et 3 lignes à coefficients réels.

Préliminaires

1) Pourquoi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique (1) de $\mathbb{R}$ de la forme linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 & \longmapsto & ax + by + cz \end{array}$$

est la matrice ligne $L = (\ a\ \ b\ \ c\ )$?

2) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E :
   a) Montrer que $\varphi \circ f$ est une forme linéaire sur E et que
   $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est stable par f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$.
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$
   c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $L.A = \lambda L$, où L est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme linéaire φ.

3) Il existe un plan de E stable par f si et seulement si il existe une matrice colonne non nulle C, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et un scalaire λ tel que ${}^tA.C = \lambda C$.

Exemple numérique

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4) Recherche des sous-espaces-vectoriels de E stables par f :
   a) Montrer que 2 et 4 sont valeurs propres de A, puis déterminer les sous-espaces propres de A, de ${}^tA$.
   b) Quelles sont les droites vectorielles de E stables par f ?
   c) Déterminer les plans vectoriels de E stables par f ; on en donnera une équation cartésienne, ainsi qu'une base.

5) Etude de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)/g \circ f = f \circ g\}$:
   a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Reconnaître le sous espace vectoriel de E engendré par (e'_1, e'_2).
   b) Montrer que si f et g commutent alors $Ker(f - 2Id_E)$ et $Ker(f - 4Id_E)$ sont stables par g.
   c) Montrer que f et g commutent si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

.

d) En déduire que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension trois et que

$$\mathcal{C}(f) = Vect\{Id_E, f, f^2\}$$

.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$,les coordonnées d'un point quelconque M du plan sont notées (x, y) ; le point A est le point de coordonnées $(3, 0)$ et le point B est le point de coordonnées $(0, 2)$; m est un paramètre réel et la courbe $\mathcal{C}_m$ est la conique d'équation, dans ce repère :

$$4x^2 + 9y^2 + 2(m-6)xy - 24x - 36y + 36 = 0$$

1) Etude d'un exemple : $m = 6$. Montrer que $\mathcal{C}_6$ est une ellipse dont on donnera le centre, les sommets, les tangentes aux sommets et les axes. Tracer la courbe $\mathcal{C}_6$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) a) Montrer que toutes les coniques $\mathcal{C}_m$, obtenues lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, passent par les points A et B et que ce sont leurs seuls points communs.

   b) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A ainsi qu'en B . Etudier le cas particulier $m = 12$.

3) a) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur m la conique $\mathcal{C}_m$ est-elle du type ellipse ? Cette ellipse peut-elle être dégénérée ? peut-elle être un cercle ?

   b) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur m la conique $\mathcal{C}_m$ est-elle du type hyperbole ?

   c) Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la conique $\mathcal{C}_m$ est une parabole éventuellement dégénérée ?

4) Soit $\mathcal{P}$ la courbe paramétrée par $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 3t^2 \\ y(t) & = & 2(1-t)^2 \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$

   a) Montrer que $\mathcal{P}$ admet une unique direction asymptotique d'équation, $2x - 3y = 0$, puis que $\mathcal{P}$ est une parabole obtenue à la question 3°)c). Donner la direction de son axe.

   b) Quels sont les coordonnées du point de la parabole $\mathcal{P}$ en lequel la tangente est perpendiculaire à l'axe ? Donner les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$. Tracer $\mathcal{P}$.

   c) Soit le réel t_0, $(t_0 \neq 0,\ t_0 \neq 1)$, et le point M de paramètre t_0 de la parabole $\mathcal{P}$. La tangente en M à $\mathcal{P}$ coupe l'axe $x'Ox$ en Q et l'axe $y'Oy$ en R . Les perpendiculaires à l'axe $x'Ox$ en Q et à l'axe $y'Oy$ en R se coupent en N. Quel est l'ensemble des points N lorsque t_0 parcourt $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$?

   d) En admettant que la directrice de la parabole est l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à la parabole perpendiculaires entre elles, montrer que la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ passe par le point O et déterminer les coordonnées du foyer F. Que remarque-t-on ?

FIN DE L'EPREUVE

e3a

11MPO1

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Notations

Dans tout le problème, ln désigne le logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1-t)/t & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Soit S la série entière :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Partie I

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière S.
2. Démontrer l'égalité $f(t) + S(t) = 0$, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $]-1, 1[$.
3. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.
4. Déterminer le signe de $f(t)$, selon la valeur du nombre réel t dans $]-\infty, 1[$.

Partie II

Soit L la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par :

$$L(x) = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$.
2. Démontrer que la fonction L admet un prolongement par continuité à gauche au point 1.
3. Justifier que la fonction L est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.
4. Démontrer que la fonction L admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$; on énoncera explicitement le théorème utilisé. Expliciter les coefficients de ce développement.
5. Soit x dans l'intervalle $]-1, 1[$. Démontrer la relation :

$$L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

   Cette relation est-elle vérifiée pour $x = 1$?

6. Justifier l'égalité :

$$L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Partie III

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'application qui envoie un entier m sur l'entier $m + 2^{n-1}$ induit une bijection de l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ sur l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 2^{n-1} et $2^n - 1$.

2. Soit x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer l'égalité :

$$\frac{4}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)}.$$

3. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

4. On se propose de démontrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

   (a) Démontrer, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

   (b) Démontrer qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que tout entier naturel n non nul et tout entier naturel k compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ vérifient l'inégalité :

$$\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leqslant \frac{C}{(2k+1)^2}.$$

   (c) Conclure.

5. En déduire la valeur de $L(1)$ et la valeur de $L(-1)$.

6. Démontrer, pour tout x dans l'intervalle $]0, 1[$, la relation :

$$L(1-x) = L(1) - \ln(x)\ln(1-x) - L(x).$$

7. En déduire une expression de $L(\frac{1}{2})$ en fonction de π et de $\ln 2$.

8. En déduire en fonction de π la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\ln 2} \frac{t}{1 - e^{-t}}\, \mathrm{d}t.$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Partie IV

1. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $L(x)$.
2. Quel est l'image de l'intervalle $]0,1[$ par la fonction h_1 qui envoie x sur $1-\dfrac{1}{x}$?
3. Soit h_2 la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $h_2(x) = L(1-x) + L(1-\frac{1}{x})$.
   (a) Après avoir justifié que la fonction h_2 est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$, calculer la dérivée de h_2.
   (b) En déduire, pour tout x dans l'intervalle $]0,1[$, la relation
   $$L(1-x) + L(1-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2}\ln^2(x).$$
4. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\dfrac{L(x)}{x}$.
5. Quelle est la nature de la branche infinie de L en $-\infty$?
6. Représenter le graphe de la fonction L sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

Partie V

Soit J un intervalle contenu dans $]-\infty,0[\cup]0,1[$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_J) \qquad (1-x)xy' + (1-x)y = 1.$$

1. Résoudre sur l'intervalle J l'équation homogène associée. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?
2. En déduire les solutions sur l'intervalle J de l'équation $(\mathcal{E}_J)$.

Soit alors $(\mathcal{F}_J)$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{F}_J) \qquad (1-x)xy'' + (1-x)y' = 1.$$

3. Démontrer que les solutions sur l'intervalle J de $(\mathcal{F}_J)$ sont les fonctions g de la forme $g(t) = L(t) + A\ln|t| + B$, où A et B sont des constantes.
4. Peut-on trouver des solutions de l'équation différentielle $(1-x)xy'' + (1-x)y' = 1$ sur l'intervalle $]-\infty,1[$? Si oui, les décrire. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?

FIN DE L'EPREUVE

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice I :

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté $\mathcal{X}_A$, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.

On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, qui commutent avec la matrice A.

On suppose dans tout cet exercice que : $\mathcal{X}_A = P_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

   a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

   b) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.

   c) Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases}$$

   où a, b, c sont les valeurs propres de la matrice B.

   d) En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité :

$$B = T(A).$$

   e) En déduire le commutant de la matrice A.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

2) On suppose, dans cette question, qu' il existe un nombre complexe λ tel que : $P_A = (X-\lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$, tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

a) Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est à dire vérifiant les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

c) Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$ où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

d) Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$H = Q(A).$$

e) En déduire le commutant de la matrice A.

3) On suppose, dans cette question, qu' il existe deux nombres complexes distincts, λ_1 et λ_2 tels que :

$$P_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2.$$

a) Montrer que :

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(f-\lambda_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_2 Id)^2.$$

b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$

c) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

α) Montrer que :

$$\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$$

β) Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

γ) Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X-\lambda_1 \text{ divise } S-\mu \\ (X-\lambda_2)^2 \text{ divise } S-R \end{cases}$

δ) En déduire que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

d) Déterminer le commutant de la matrice A.

Exercice II :

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{dt}$, on donne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
La fonction cosinus hyberbolique est notée ch, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On admet l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

1) Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, on note $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ch}(t^2) - \cos x}$.

a) Montrer que l 'application $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ch}(t^2) - \cos x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

b) Montrer que l'application $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \mathrm{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\mathrm{ch}(t^2) - 1)} \right|$ définie sur $]0, 1]$, est prolongeable par continuité en 0.

c) En déduire que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ch}(t^2) - \cos x} - \int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

d) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x}$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{(2(1-\cos x))^{\frac{1}{4}}}$.
En déduire un équivalent de l'intégrale $I(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} \mathrm{dt}$$

3) Pour tout entier N supérieur ou égal à 1 et pour tout réel x, on note : $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

a) Calculer, pour tous réels x et t, la somme $\sum_{n=1}^{N} e^{-nt} \sin nx$. (On pourra remarquer que $e^{-nt}\sin nx$ est la partie imaginaire du nombre complexe $e^{(-t+ix)n}$)

b) En utilisant l'égalité, $S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}\sin nx}{\sqrt{t}} \mathrm{dt}$, montrer que la suite $(S_N(x))$ est convergente pour tout x réel élément de $]0, 2\pi[$ et que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall x \in]0, 2\pi[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{ch(t^2) - \cos x}$$

4) En déduire un équivalent de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice III :

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, x, y, z)$.

1) Quelle est la nature de la quadrique d'équation $x^2 + z^2 = 1$ dans le repère $\mathcal{R}$?

2) On considère le solide $\mathcal{S}$ défini dans le repère $\mathcal{R}$, par les équations $x^2 + z^2 \leqslant 1$ et $y^2 + z^2 \leqslant 1$.

   a) Soit γ un nombre réel. Décrire précisément la nature géométrique de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $z = \gamma$, selon la valeur de γ.

   b) Déterminer le volume de $\mathcal{S}$.

3) Soit Σ la portion de surface définie dans le repère $\mathcal{R}$ par les équations :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = k \\ y^2 + z^2 = k \\ (x, y, z, k) \in [0, 1]^4 \end{cases}$$

   Déterminer l'aire de Σ.

FIN DE L'EPREUVE

e3a

11PSI10

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Dans toute l'épreuve,

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels à n lignes et n colonnes,
- on identifiera la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f_A de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé,
- I_n est la matrice identité et O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Questions de Cours

1. Donner la définition de deux matrices semblables.

2. Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou est-elle fausse ?
On justifiera la réponse par une démonstration ou un contre-exemple en dimension adéquate.

2.1 Deux matrices semblables ont le même rang.

2.2 Deux matrices ayant le même rang sont semblables.

2.3 Deux matrices semblables ont le même déterminant.

2.4 Deux matrices ayant le même déterminant sont semblables.

2.5 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 + 5A - 6I_n = O_n$, alors $\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \ker(A + 6I_n)$.

2.6 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 + 5A - 6I_n = O_n$, alors $\mathbb{R}^n = \ker(A + I_n) \oplus \ker(A - 6I_n)$.

2.7 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

2.8 Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont semblables.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Problème

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

On appelle a_{ij} le coefficient de A situé sur la i-ième ligne et sur la j-ième colonne.

On suppose que pour tout couple $(i,j) \in \{1,...,n+1\}^2$, on a :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } j = i \\ a_{ij} = i \text{ si } j = i+1 \\ a_{ij} = n-i+2 \text{ si } j = i-1 \\ a_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, pour $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, dans tout le problème, on note $E = \mathbb{R}^{n+1}$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$ et on note ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $B = {}^tA\,A$. On trouvera B de la forme : $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & * \\ * & 2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

1.1 B est-elle diagonalisable ?

1.2 Démontrer, sans les calculer, que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.

1.3 Vérifier le résultat de la question précédente par le calcul des valeurs propres de B.

2. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$2x^2 + 4xz + y^2 + 2z^2 = 1$$

2.1 Donner la nature de $\mathscr{C}$ et ses éléments de symétrie.

2.2 Déterminer les intersections de $\mathscr{C}$ avec chacun des trois plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, notées respectivement C_1, C_2 et C_3.

2.3 Sur la feuille jointe à annexer à la copie, donner une représentation graphique de chacune de ces intersections et une allure de $\mathscr{C}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$.

3.1 Déterminer le reste de la division enclidienne de X^p par $X^3 - 10\,X^2 + 16\,X$

3.2 Justifier que $B^3 - 10\,B^2 + 16\,B = O_n$.

La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

3.3 Déterminer les réels a_p et b_p tels que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ B^p = a_p\,B^2 + b_p\,B$$

3.4 Soit $T_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k$.

Vérifier que : $\forall\, p \in \mathbb{N}$, T_p est combinaison linéaire de I_n, B et B^2.

Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} T_p$.

Les résultats établis dans cette partie ne sont pas utiles pour traiter la suite du problème.

Partie 2

On prend dans cette partie $n = 3$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.

On rappelle que : $f^0 = id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \, o \, f$.

1. Pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, on pose $u_{i+1} = f^i(e_1)$. Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{U}$.
3. Calculer le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun des sous-espaces propres de A. On choisira pour chaque vecteur propre, la première composante non nulle égale à 1.
5. Soient $K = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   Existe-t-il une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $K\,A\,P = D$? Si oui, en déterminer une.
6. Déterminer toutes les fonctions x, y, z et u de la variable réelle t, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 3\,x(t) + 2\,z(t) \\ z'(t) = 2\,y(t) + 3\,u(t) \\ u'(t) = z(t) \end{cases}$$

Partie 3

On rappelle que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit g l'application définie par :

$$\forall Q \in E_n \ , \ g(Q) = n\,X\,Q - (X^2 - 1)\,Q'$$

où Q' désigne le polynôme dérivé du polynôme Q.

1. Vérifier que g est un endomorphisme de E_n et donner sa matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2, ..., X^n)$ de E_n.
2. Soit $(\mathcal{E}_\lambda)$ l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)\,y'(x) + (\lambda - n\,x)\,y(x) = 0$$

   où λ est un réel quelconque.

   2.1 Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ pour $x \in]-1, 1[$.

   On pourra remarquer que : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

   2.2 Discuter suivant les valeurs du paramètre réel λ l'existence de solutions polynomiales non nulles de $(\mathcal{E}_\lambda)$ sur $]-1, 1[$.
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de g.
4. La matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie au début du problème est-elle diagonalisable ?
5. Calculer le déterminant de la matrice A.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Partie 4

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{F})$: $y''(x) - y(x) = 0$ et on note :

$$\begin{cases} y_1 \text{ la solution de } (\mathcal{F}) \text{ qui vérifie } y_1(0) = 1 \text{ et } y_1'(0) = 0 \\ y_2 \text{ la solution de } (\mathcal{F}) \text{ qui vérifie } y_2(0) = 0 \text{ et } y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Soient, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = [y_1(x)]^{n-k} \times [y_2(x)]^k$ et $\mathcal{G} = (g_0, ..., g_n)$.

1. Exprimer y_1 et y_2 comme combinaisons linéaires des fonctions ch et sh.
2. Prouver que $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ dont $\mathcal{G}$ est une base.
3. Soit Δ l'endomorphisme de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à une fonction h associe $\Delta(h) = h'$.
   - **3.1** Montrer que Δ induit sur G un endomorphisme que l'on notera δ.
   - **3.2** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ.
   - **3.3** On note, pour tout $m \in \mathbb{N}$, φ_m l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_m(x) = e^{(2m-n)x}$

     Prouver que la famille $\mathcal{F} = (\varphi_m\ ,\ m \in \{0, ..., n\}\ )$ est une base de $\mathcal{G}$.

     On pourra montrer que tout élément de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.
   - **3.4** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de δ.
   - **3.5** Ecrire la matrice S de δ dans la base $\mathcal{G}$.
   - **3.6** Quels résultats retrouve-t-on ?

FIN DE L'EPREUVE

Document Reponse ENSAM 210x350 2009:Document Reponse ENSAM 210x350 2009 22/01/09 8:54 Page 1

DANS CE CADRE

Académie : Session : Modèle EN.

Examen ou Concours Série* :

Spécialité/option : Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM :

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms :

Né(e) le :

N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens

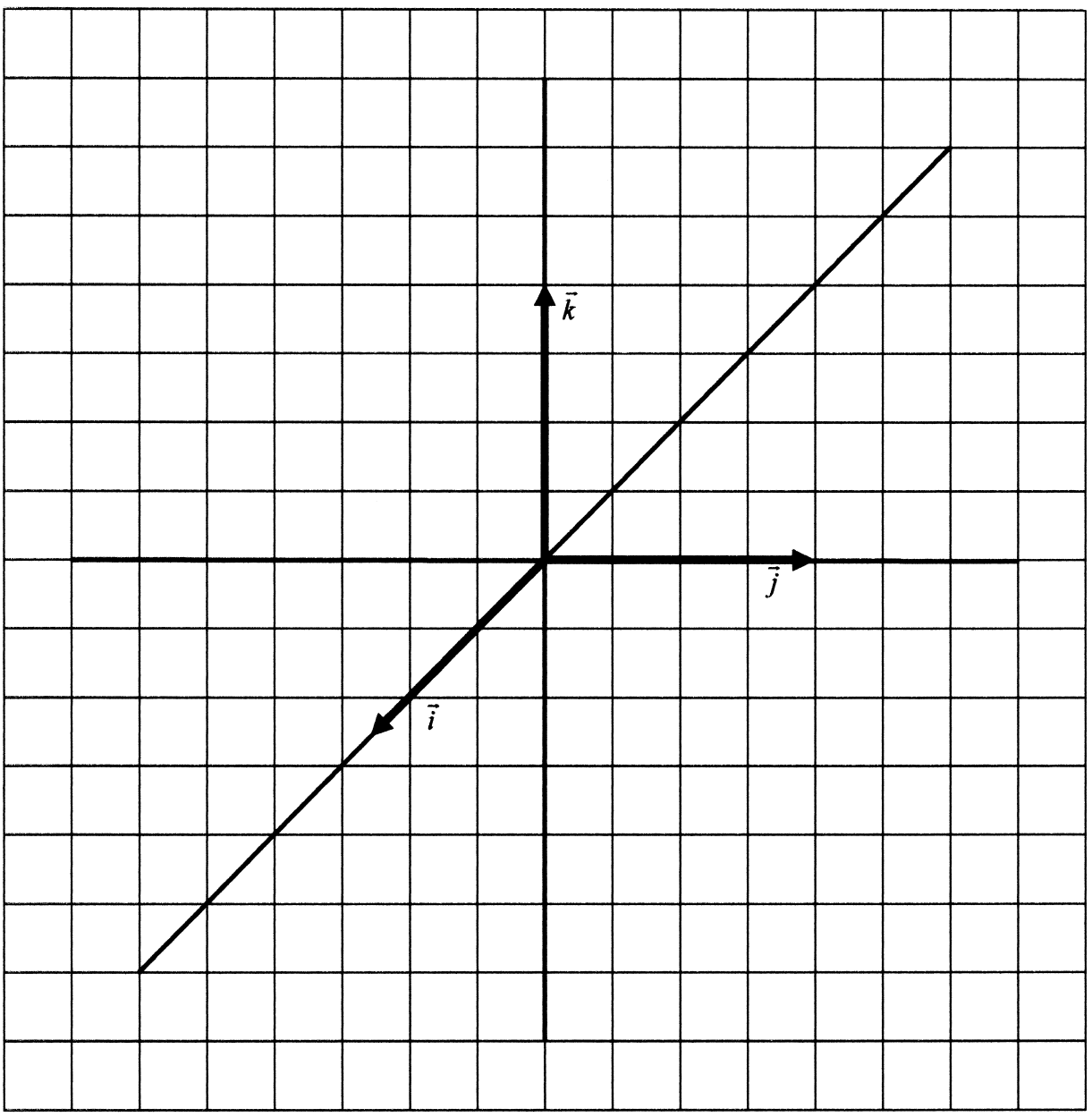
Note : /20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

11PSI10

Feuille à joindre à la copie



Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Document Reponse ENSAM 210x350 2009:Document Reponse ENSAM 210x350 2009 22/01/09 8:54 Page 2

e3a

11PSI11

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

(1) Montrer que, si a est une racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

(2) Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

(a) Vérifier que, lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n, le nombre complexe a_n est une racine de P.

(b) Montrer que, lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

(c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

(d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

(3) Déduire des questions précédentes que, si a est une racine complexe de P, alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

(4) Montrer que si le degré de P est strictement supérieur à 0 alors P a pour unique racine 0.

(5) Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice II

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie comme l'ensemble des points du plan, $M(t)$, de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) &= \varphi(t) \\ y(t) &= t\varphi(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Partie A

(1) Montrer que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et que le point P de coordonnées $(-1, 0)$ est élément de $\mathcal{C}$.

(2) Déterminer les points doubles, points stationnaires et asymptotes éventuels de la courbe $\mathcal{C}$.

(3) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.
On pourra utiliser les approximations $\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0,5$ et $\varphi\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \approx -0,6$.

Partie B

(1) Soient a, b et t trois réels.

(a) Justifier, sans calculer explicitement les déterminants, la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ (a-b)\varphi(b) & (a-t)\varphi(t) \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire alors :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a)-\varphi(b) & \varphi(a)-\varphi(t) \\ a\varphi(a)-b\varphi(b) & a\varphi(a)-t\varphi(t) \end{vmatrix} = \frac{2(a-b)(a-t)(b-t)}{(a^2+1)(b^2+1)(t^2+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+t \\ b+t & t^2-1 \end{vmatrix}.$$

(2) On définit pour a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$ le réel

$$h(a,b) = -\frac{1+ab}{a+b}.$$

Lorsque $A = M(a)$ et $B = M(b)$ avec $a+b \neq 0$, on note $A \star B$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ de paramètre $h(a,b)$, c'est-à-dire $M(h(a,b))$.

(a) On suppose que A et B sont deux points de $\mathcal{C}$, distincts, différents de O et non symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Montrer que la droite (AB) recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star B$
Vérifier que $A \star B$ est différent de O.

(b) On suppose que A est différent de P.
Montrer que la tangente à $\mathcal{C}$, en A recoupe $\mathcal{C}$ en l'unique point $A \star A$.
Vérifier que $A \star A$ est différent de O et de P.

(3) On pose à présent $D = A \star B$, ainsi que $E = A' \star B$ et $F = D' \star E$ où A' et D' sont respectivement les symétriques de A et D par rapport à l'axe des abscisses.
Montrer que la droite (FA) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A. Illustrer graphiquement.

Exercice III

La partie C est indépendante des parties A et B à l'exception des questions 4 *et* 5.

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A

(1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$

(b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u_n' convergent uniformément sur $[-a, a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v_n'.

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.

(b) Démontrer que F est paire.

(c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Partie B

(1) Montrer que , pour tout entier naturel k,

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\mathrm{d}x$$

En déduire les coefficients de Fourier réels de la fonction F.

(2) Démontrer que, pour tout réel t, on a :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$$

où l'on précisera l'expression des réels a_k.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\mathrm{d}s$ est convergente.

(b) Montrer que $a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ks)}{1+s^2}\mathrm{d}s$.

On pourra utiliser les changements de variables $s = x + 2n\pi$ et $r = 2n\pi - x$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Partie C

Soit ϕ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\phi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{1+s^2}\mathrm{d}s$.

(1) Montrer que ϕ est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ et calculer $\phi(0)$.

(2) (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\phi(x)=x\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que la fonction ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\forall x>0,\ \phi'(x)=\frac{1}{x}\phi(x)-2x^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer alors que

$$\forall x>0,\ \phi'(x)=\frac{1}{x}\phi(x)-\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s.$$

(3) Soit la fonction ψ définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=-2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s$.

(a) Montrer que ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a

$$\forall x>0,\ \psi'(x)=x\phi(x).$$

(b) En déduire que ϕ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall x>0,\ \phi''(x)=\phi(x).$$

(4) Déterminer alors a_k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

(5) En déduire que, pour tout réel t, on a :

$$F(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2(1-2\mathrm{e}^{-1}\cos(t)+\mathrm{e}^{-2})}.$$

FIN DE L'EPREUVE

e3a

11PC06

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les quatre parties sont très largement indépendantes.
- Dans tout le problème :

  * f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

  * F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

  * $\alpha=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

  * pour tout $n\in\mathbb{N}$: $a_n=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires.

1) Etude de f :
   a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative (C_f).
   b) (C_f) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.
   c) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f.
   d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour k∈{1,…,8}. Enoncer avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).

2) Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.
   d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

3) Etude d'une intégrale impropre :
   a) Justifier l'existence de F . Enoncer avec précision le théorème utilisé.
   b) Justifier l'existence de α.
   c) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).
   d) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.
   e) i) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.
      ii) Montrer que $\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha + 1$.

Partie II : Intégrales de Wallis.

Dans cette partie si $n\in\mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1 .
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n > 0$.
4) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.
5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par parties).
6) Montrer que la suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).
7) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.
8) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.
   b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.
   c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers +∞.

9) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ quand n tend vers +∞.

c) Donner la nature des séries de terme général :

i) a_n ii) $\frac{a_n}{4n+1}$ iii) $(-1)^n a_n$ iv) $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$

Partie III : Etude de F .

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

1) Etude globale de F :
   a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   b) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que F est impaire.
   d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq 1 - \frac{1}{x}$.
   e) Enoncer le théorème concernant l'existence de la limite en +∞ d'une fonction croissante définie sur [A,+ ∞[(où A∈ℝ).
   f) Déduire des 2 questions précédentes que F a une limite finie en +∞.

2) Etude locale de F :
   a) Donner le développement limité de F en 0 à l'ordre 9. Enoncer le théorème utilisé.
   b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.
   c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

3) Lien avec α :
   a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
   b) En déduire que la limite de F en +∞ est égale à $2F(1)$.
   c) En utilisant la partie I)3), montrer que la limite de F en +∞ est α et retrouver le résultat de III)3)b).

4) Tracé de (C) :
   a) Dresser le tableau de variations de F.
   b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
   c) Tracer (C) en tenant compte des différents points de l'étude précédente. Pour le tracé, prendre $\alpha \approx 1.85$.

5) Quelques applications de F :
   a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+t^4)y' + 2t^3 y = 1$.
   b) On considère la courbe paramétrée : (Γ) $\begin{cases} x(t) = F(t) \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$.
      i) Montrer que l'étude de (Γ) peut être restreinte à]0,+∞[. Préciser alors les symétries de (Γ).
      ii) Dresser le tableau de variations de (Γ).
      iii) Déterminer de manière précise le comportement de (Γ) quand t tend vers +∞.
      iv) Tracer la courbe (Γ).

c) On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 F(xy)}{x^2+y^2} & \text{si (x,y)} \neq (0,0) \\ 0 & \text{si (x,y)=(0,0)} \end{cases} \end{cases}$.

i) Montrer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les trois inégalités suivantes :

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $0 \leq f(xy) \leq 1$ $\qquad$ $|F(xy)| \leq |xy|$

ii) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$.

iv) φ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Partie IV : Développement en série entière de F et utilisation.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de la question II)9)b) : a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

1) Etude de h :
   a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.
   b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.
   c) Enoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon R>0 sur le segment [0,R] et en déduire que h est continue sur [-1,1].
   d) i) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ est normalement convergente sur [-1,1].
   ii) Retrouver le résultat de IV)1)c). Enoncer le théorème utilisé.

2) Développement en série entière de F :
   a) Rappeler, si $\beta \in \mathbb{R}$, le développement en série entière de la fonction b définie par $b(x) = (1+x)^\beta$. Sur quel intervalle ce développement est-il valable ?
   b) En déduire que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.
   c) Montrer que pour tout $x \in$[-1,1] : $F(x) = h(x)$ (on pourra utiliser IV)1)c)).
   d) En déduire que $\alpha = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α :
   Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p[ième] somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ soit $S_p = \sum_{n=0}^{p} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.
   a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.
   b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{3/2}}$ (utiliser II)9)a)).
   c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

FIN DE L'EPREUVE

e3a

11PC07

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

EXERCICE 1

On considère ici l'espace vectoriel réel $E = M_4(\mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles, et qui est aussi muni du produit matriciel noté $\times$.

On notera $G = GL_4(\mathbb{R}) = \{M \in E \quad / \quad det(M) \neq 0\}$ le groupe (pour $\times$) des matrices de E inversibles.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on notera $diag(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ (matrice diagonale de E), $\mathbf{O} = diag(0,0,0,0)$ la matrice nulle, et $\mathbf{I} = diag(1,1,1,1)$ la matrice unité.

On s'intéresse ici à certains sous-espaces vectoriels de E stables pour $\times$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

1) Soit $K \in E$, dont tous les coefficients valent 1.

(i) Calculer K^2 et déterminer un polynôme réel P de degré 2 annulateur de K: tel que $P(K) = \mathbf{O}$. Quelles sont les valeurs propres de K ?

(ii) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que M est diagonalisable, préciser les valeurs propres de M, et donner une matrice diagonale semblable à M.

(iii) Démontrer que $F = \{x\mathbf{I} + yK/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension. Vérifier que F est stable pour $\times$: si $M, N \in F$, alors $M \times N \in F$.

(iv) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer à quelle condition M est inversible, et exprimer alors M^{-1} (en fonction de $x, y, \mathbf{I}, K$).

2) Soient $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et:

$$H = Vect(K, Z) = \{aK + bZ \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(i) Démontrer que les quatre matrices $K^2, Z \times K, K \times Z, Z^2$ sont dans H. En déduire que H est stable pour le produit matriciel $\times$.

(ii) Déterminer les sous-espaces propres pour K et Z.

(iii) En déduire une matrice $Q \in G$, vérifiant les trois conditions:

- La valeur absolue de tous les coefficients de Q vaut $\frac{1}{2}$,
- ${}^tQ \times Q = \mathbf{I}$,
- $K' = Q^{-1} \times K \times Q$ et $Z' = Q^{-1} \times Z \times Q$ sont toutes les deux diagonales.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que vaut alors: ${}^tQ \times \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} \times Q$?

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer A^2 et A^3. La famille (A, A^2, A^3) est-elle libre ?

(ii) Quel est le rang de A ? A est-elle semblable à $J = diag(1, 1, 0, 0)$?

(iii) Déterminer un polynome réel R de degré 3, annulateur de A, tel que $R(A) = \mathbf{O}$. Préciser les valeurs propres de A.

(iv) Justifier que A est diagonalisable, et montrer l'existence de trois matrices U, V, W et de deux réels a et b tels que: $A = aU + bV$, avec:

$$U + V + W = I,\ U^2 = U, V^2 = V, W^2 = W,$$

$$\text{et} \qquad U \times V = V \times U = U \times W = W \times U = V \times W = W \times V = \mathbf{O}.$$

A est-elle semblable alors à $\Delta = diag(a, b, 0, 0)$?

(v) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de A et A^2.

(vi) Démontrer que $C = \{M \in E \quad / \quad A \times M = M \times A\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et calculer sa dimension.

(vii) Étudier s'il peut exister M dans E, telle que $M^2 = A$.

EXERCICE 2

1) (i) Montrer l'existence de $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et de $b = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, et établir une relation entre a et b.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

Démontrer que F est ainsi définie sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F(0)$.

(iii) Démontrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et vérifier que:

$$\forall x > 0, \qquad e^{-x}\,(F'(x) - F(x)) = -a\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

(iv) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$; pour cela, on pourra d'abord établir une majoration de $F(x)$ pour $x > 0$ en fonction de x et a.

(v) En déduire, pour $x \geq 0$, une expression de $F(x)$ grâce à $J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, puis les valeurs de a et b.

2) (i) Soit $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que G est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Déterminer le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de G'. En déduire que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en précisant ce développement ainsi que le rayon de convergence.

(iii) Soit $H(x) = e^{x^2}G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et écrire ce développement sous la forme : $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k+1}$, en exprimant u_k sous forme d'une somme.

(iv) Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont H est solution sur $\mathbb{R}$. En déduire une relation de récurrence entre u_{k+1} et u_k, puis la valeur de u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

3) (i) Soit $\Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que Φ est bien définie, et relier Φ avec G de la question **2)**. Démontrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de $\Phi'(x)$ pour tout réel x.

(ii) Préciser $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$, et grâce au calcul de a en **1)**, $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x)$.

(iii) Démontrer l'existence d'un polynôme réel P et d'une constante réelle C, que l'on explicitera, tels que:

$$\forall x > 0, \qquad \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = e^{-x^2}P(\frac{1}{x}) + C\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,du.$$

(iv) En déduire un équivalent simple de $\Phi(x)$ quand $x \to +\infty$, puis que Φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(v) Au moyen d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,dx$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 3

1) On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ étant orthonormale.

(i) Préciser la nature de la conique $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = 2y\}$, et préciser son ou ses foyers, sa ou ses directrices.

Rappeler alors comment on peut définir cette conique grâce à son ou ses foyers, et grâce à sa ou ses directrices.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2})$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{B}$ de la tangente $\mathcal{T}_x$ à $\mathcal{P}$ en M_x ; préciser un vecteur dirigeant cette droite $\mathcal{T}_x$. Déterminer (par une équation) la droite $\mathcal{N}_x$ passant par M_x et perpendiculaire à $\mathcal{T}_x$.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et la droite $D_x = \{(x, t), t \in \mathbb{R}\}$. Déterminer la droite Δ_x obtenue par symétrie orthogonale de D_x par rapport à $\mathcal{N}_x$, et déterminer le point d'intersection de Δ_x avec $\delta = \{(0, u), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy). Comment interprétez-vous ce résultat ?

2) On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{C} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ étant orthonormale.

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta : (x, y, z) \mapsto (\cos(\theta)x + \sin(\theta)z, y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)$. Justifier que R_θ est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$. Déterminer la nature de $\Gamma_x = \{R_\theta(M_x), \theta \in [0, 2\pi]\}$, ainsi que des équations dans la base $\mathcal{C}$ de Γ_x.

(iii) Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ de la surface $S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \Gamma_x$. Que peut-on dire de cette surface ?

(iv) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, z) \mapsto (x, \frac{x^2 + z^2}{2}, z)$, et la surface: $\Sigma = F(\mathbb{R}^2)$.

Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r\sin(\theta), \frac{r^2}{2}, r\cos(\theta))$, et la surface: $\Phi = G(\mathbb{R}^2)$. Comparer (par des inclusions ou des égalités) les trois surfaces S, Σ, Φ.

(v) Soit $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et $A_0 = F(x_0, z_0)$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ du plan tangent à Σ en A_0.

Déterminer A_0 tel que ce plan tangent soit de la forme: $P_c = \{(X, c, Z), (X, Z) \in \mathbb{R}^2\}$ (où c est une constante réelle).

3) Toujours dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère les deux courbes:

$$C_1 = \{(x, \frac{x^2}{2}, 0), \quad x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{(0, y, \frac{y^2}{2}), \quad y \in \mathbb{R}\}.$$

et soit: $\Delta = \{(0, u, 0), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy), et $O = (0, 0, 0)$.

(i) Soit $P = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$ sur C_1, $x \neq 0$. Déterminer le point A_1 d'intersection entre Δ et la tangente à C_1 au point P.

(ii) Soit $Q = (0, y, \frac{y^2}{2})$ sur C_2, $y \neq 0$. Déterminer le point A_2 d'intersection entre Δ et la tangente à C_2 au point Q. A quelle condition a-t'on $A_1 = A_2$?

(iii) Soit σ la réunion des droites (dites "génératrices") (PQ) où $P \in C_1$ et $Q \in C_2$ avec $P \neq Q$, et tels que la tangente à C_1 au point P, et la tangente à C_2 au point Q, se coupent sur Δ. Déterminer une représentation paramétrique de σ grâce à une fonction H (définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$).

(iv) Démontrer que les plans tangents à σ en tous les points de σ qui appartiennent à une même droite génératrice (PQ) donnée, sont tous parallèles.

FIN DE L'EPREUVE

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Notations

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x.$$

Soit S la série entière :

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n.$$

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir le tableau de variations de f.
3. Représenter le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
5. Justifier l'existence d'une fonction g continue sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{e}, +\infty[$. et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \quad g(x)e^{g(x)} = x.$$

Dans la suite du problème, on considère la fonction réciproque de la restriction de f à $[-1, +\infty[$, c'est-à-dire une fonction g définie et continue sur l'intervalle fermé $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \quad g(x)e^{g(x)} = x.$$

Partie II

1. Calculer $g(0)$, $g(\frac{-1}{e})$ et $g(e)$.
2. Exprimer la fonction dérivée g' en fonction de g.
3. Représenter le graphe de la fonction g sur l'intervalle $[-\frac{1}{e}, +\infty[$. La fonction g admet-elle une tangente au point d'abcisse $-\frac{1}{e}$?
4. Démontrer que la fonction g admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
5. Soit h la primitive de g définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ et qui prend la valeur 0 en 0.
   (a) Exprimer $h(u)$ fonction de $g(u)$ pour u dans l'intervalle $]-\frac{1}{e}, +\infty[$. (*Indication : on pourra faire le changement de variables $x = g(t)$ dans l'intégrale $\int_0^u g(t)dt$.*) Ce résultat reste-t'il valable pour $u = -\frac{1}{e}$?
   (b) En déduire la valeur de $\int_{-1/e}^0 g(t)dt$.

Partie III

Soit c un nombre réel tel que $0 < c < e^{1/e}$. On considère la suite récurrente $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = c, \\ u_{n+1} = c^{u_n} = e^{u_n \ln c}, \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Que dire de la suite U dans le cas particulier $c = 1$?

On suppose dans la suite de la partie III que $c \neq 1$.

2. On suppose que la suite U converge. On note ℓ cette limite. Démontrer que $\ell = -g(-\ln(c))/\ln c$.
3. On suppose dans cette question uniquement que $c = \sqrt{2}$.
   (a) Démontrer les inégalités $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
   (b) Démontrer que la suite U est croissante et majorée par 2.
   (c) Démontrer que la suite U converge vers 2.
4. On suppose dans cette question uniquement que $c = e^{-e}$.
   (a) Etablir le tableau de variation de la fonction w définie par $w(x) = e^{-ex}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) En déduire les propriétés suivantes de la suite U :
      i. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de U est monotone et contenue dans $]0, 1/e]$.
      ii. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de U est monotone et contenue dans $[1/e, 1[$.
      iii. $u_0 \leqslant u_2$ (*Indication : on pourra comparer* $\ln(u_0)$ *et* $\ln(u_2)$).
      iv. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
      v. Un calcul qui n'est pas demandé assure que la fonction qui envoie le nombre réel x sur $w(w(x)) - x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Démontrer que la suite U converge et déterminer sa limite.

Partie IV

1. (a) Démontrer que la suite de terme général $(1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers le nombre e.
   (b) En déduire le rayon de convergence de la série S.
2. On se propose d'étudier le comportement de la série entière S sur le cercle d'équation $|z| = R$, R étant le rayon de convergence de S.
   (a) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n.$$

Tournez la page S.V.P.

i. Déterminer un équivalent de la suite v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ii. En déduire la nature de la série de terme général v_n.

iii. Démontrer que la suite de terme général u_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. On notera L cette limite.

iv. En déduire un équivalent de la suite $\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Démontrer que la série de terme général $\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ est convergente.

(c) Conclure.

Partie V - A

Etant donné R un nombre réel > 0, on note :

- $\mathcal{K}_R$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[\backslash\{0\}$,
- $\mathcal{C}_R$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}_R$ des fonctions qui se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$,
- $\mathcal{E}_R$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_R$ des fonctions qui admettent un développement en série entière sur $]-R, R[$.

On note ϕ et ψ les fonctions dans $\mathcal{K}_R$ définies par :

$$\forall x \in]-R, R[\backslash\{0\},\ \phi(x) = x \text{ et } \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

On remarque que le produit de deux fonctions de $\mathcal{K}_R$ est une fonction de $\mathcal{K}_R$. En particulier, si h est une fonction de $\mathcal{K}_R$ et si n est un entier naturel non nul, $\psi^n h$ est la fonction de $\mathcal{K}_R$ définie par :

$$\forall x \in]-R, R[\backslash\{0\},\ (\psi^n h)(x) = \frac{h(x)}{x^n}.$$

Soit $\mathcal{L}_R$ l'ensemble des fonctions $\psi^n h$ où n est un entier naturel et h une fonction dans $\mathcal{E}_R$.

1. Démontrer que $\mathcal{L}_R$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}_R$ et que $\mathcal{L}_R$ contient $\mathcal{E}_R$.
2. Soit h dans $\mathcal{L}_R$. Démontrer qu'il existe une unique suite de nombres réels $(\alpha_i(h))_{i\in\mathbb{Z}}$, ayant au plus un nombre fini de termes indexés négativement et non nuls, telle que
$$\forall x \in]-R, R[\backslash\{0\},\ \ h(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(h) x^i.$$
3. Démontrer que α_{-1} est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_R$ qui s'annule sur $\mathcal{E}_R$.
4. Soit h dans $\mathcal{L}_R$. Démontrer que sa fonction dérivée h' appartient à $\mathcal{L}_R$ et vérifie $\alpha_{-1}(h') = 0$.
5. Soit f la fonction étudiée dans la partie I.
   (a) Démontrer que la fonction f'/f appartient à $\mathcal{L}_R$ et expliciter, en fonction de l'entier k, $\alpha_k(f'/f)$, pour tout entier relatif k.

(b) Soit n un entier naturel. Démontrer que la fonction $1/f^n$ appartient à $\mathcal{L}_R$ et expliciter en fonction de l'entier k $\alpha_k(1/f^n)$, pour tout entier relatif k.

Partie V - B

On admet que la fonction g étudiée dans la partie II est développable en série entière sur $]-1/e, 1/e[$: il existe une suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout x dans $]-1/e, 1/e[$, $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$. On se propose de calculer les coefficients $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Déterminer c_0 et c_1.
2. Démontrer qu'il existe un nombre réel R tel que $\forall x \in]-R, R[$, $|xe^x| < 1/(2e)$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i f^i$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers la fonction ϕ.
4. Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$ converge uniformément sur $]-R, R[$.
5. Soit n un entier naturel.
   (a) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^i$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$.
   (b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$ converge normalement sur $]-R, R[$ vers une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$. (*Indication : on pourra commencer par justifier qu'une série entière de rayon de convergence non nul $U(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i x^i$ et telle que $U(x)/x^n$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 vérifie $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$*).
   (c) Démontrer, pour tout nombre réel x dans $]-R, R[\backslash\{0\}$, l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) + c_n \frac{f'(x)}{f(x)} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f'(x) f^{i-n-1}(x) = \frac{x f'(x)}{f^{n+1}(x)}.$$

   (d) En déduire que :

$$c_n = \alpha_{-1}\left(\frac{\phi f'}{f^{n+1}}\right).$$

   (e) En considérant la dérivée de la fonction ϕ/f^n, démontrer que

$$c_n = \alpha_1\left(\frac{-1}{n f^n}\right).$$

   En déduire la valeur de c_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
6. Quelle relation peut-on en déduire entre la fonction g et la série S ?

IN CHOISY – 12 1015 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMÈDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice I

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $< , >$.
On note $\| \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour tout π, endomorphisme de E, on note π^* son *endomorphisme adjoint*, c'est-à-dire l'unique endomorphisme vérifiant :

$$\forall x, y \in E, < \pi(x), y >=< x, \pi^*(y) > .$$

On dit qu'un endomorphisme π de E est un *projecteur* s'il vérifie $\pi^2 = \pi$. On dit que le projecteur π est *strict* si π n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'identité Id_E.

Un projecteur π est dit *orthogonal* si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(\pi)$ et $\ker(\pi)$ sont orthogonaux.

1. Soit π un projecteur de E.
   (a) Démontrer que $E = \ker(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.
   (b) Dans le cas où π est un projecteur orthogonal, démontrer que :
      i. Tout vecteur x dans E vérifie : $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Dans quel cas a-t'on l'égalité ?
      ii. Tout vecteur x dans E vérifie : $< \pi(x), x >\geqslant 0$. Dans quel cas a-t'on l'égalité ?
   (c) Démontrer que π est un projecteur orthogonal si et seulement si $\pi = \pi^*$.
2. On considère ici le cas particulier du plan euclidien : $E = \mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Démontrer que M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E si et seulement si $d = 1 - a, b = c$ et $a(1 - a) = b^2$.
   (b) Qu'impose cette dernière égalité pour la valeur a ?
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E. Exprimer le produit de matrices :

   $$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}.$$

   Justifier que la matrice N est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur E. Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. En déduire que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable sur une base orthonormée (on citera précisément le théorème utilisé) et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
   (c) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ et que celui-ci induit sur $\mathrm{Im}(\pi_1)$ un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Soit G le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Im}(\pi_1) + \ker(\pi_2))$. On note $G^\perp$ son orthogonal dans E. Démontrer que $G^\perp = \ker(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2)$. Que vaut l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ sur $G^\perp$?
   (e) Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (f) Soit r_2 le rang de π_2. Démontrer que $\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant r_2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice II

Etant donné un entier naturel non nul n, $M_n(\mathbb{C})$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On désigne par I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.
Etant donnée une matrice M dans $M_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ son polynôme caractéristique.

Si A, B, C, D sont quatre matrices dans $M_n(\mathbb{C})$, on note $M_{A,B,C,D}$ la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par :

$$M_{A,B,C,D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices dans $M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Exprimer la matrice produit $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,0_n,I_n}$.
   (b) On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :

$$\det M_{A,B,C,D} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

Tournez la page S.V.P.

2. On suppose que les matrices A et C commutent.
   (a) On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que $\det M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB)$.
   (b) On ne suppose plus la matrice A inversible.
      i. Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $M_{A,B,C,D}$ vérifie $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$. Expliciter U et V en fonction des matrices A, B, C et D.
      ii. En déduire que $\det M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB)$.
3. Dans cette partie, on suppose que $A = D = I_n$ et que C et B sont deux matrices à coefficients réels transposées l'une de l'autre. On désigne la matrice $M_{I_n,B,{}^tB,I_n}$ par S.
   (a) Justifier que ${}^tBB$ est une matrice symétrique positive et que ses valeurs propres sont toutes des nombres réels positifs ou nuls.
   (b) Exprimer le polynôme χ_S en fonction du polynôme $\chi_{{}^tBB}$.
   (c) Soit T une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que T est définie positive (i.e. tout vecteur non nul X de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tXTX > 0$) si et seulement si les valeurs propres de T sont toutes > 0.
   (d) En déduire que la matrice S est symétrique définie positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$ sont toutes < 1.
4. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} \text{ et pour } n > 1, A_n = \begin{pmatrix} 2A_{n-1} & iA_{n-1} \\ iA_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   (a) Soit $n > 1$. Déterminer une relation de récurrence entre $\det A_n$ et $\det A_{n-1}$.
   (b) Soit $n \geqslant 1$. Exprimer $\det A_n$ en fonction de n.
   (c) Soit $n > 1$. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice A_n, χ_{A_n}, en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{(-A_{n-1})}$.
   (d) Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n.

Exercice III

Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite $(O, \vec{i})$ et $\mathcal{D}'$ la droite de vecteur directeur $\vec{i}$ passant par le point $B = (0, 1)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle tangent à $\mathcal{D}$ en 0 et tangent à $\mathcal{D}'$ en B. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient M_t le point sur la droite $\mathcal{D}'$ d'abcisse t et N_t l'intersection de la droite OM_t et du cercle $\mathcal{C}$ autre que le point O.
   (a) Que peut-on dire du triangle ON_tB ?
   (b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ et l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$.
   (c) En déduire que le point N_t a pour coordonnées $(t/(1+t^2), 1/(1+t^2))$.
   (d) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$?
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$; on pose $P_0 = O$.
   (a) Représenter la courbe Γ lieu des points P_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles asymptotes.
   (b) Préciser la nature du point P_0 de Γ.
   (c) Calculer l'aire comprise entre la courbe Γ et la droite $\mathcal{D}'$.
3. Si z est un nombre complexe, on note $\bar{z}$ son conjugué. On considère l'application σ définie sur le plan P privé du point O par : l'image par σ du point M d'affixe z est le point M' d'affixe $1/\bar{z}$.
   (a) Soit M un point de P distinct de l'origine et soit $M' = \sigma(M)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$ non nul. Déterminer les coordonnées du point U_t, image par σ du point P_t défini dans la question 2.
   (c) Quelle est l'image par σ de la courbe Γ ?

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

QUESTIONS D'APPLICATIONS DU COURS

Parmi les affirmations suivantes indiquez sans justification (sauf à la question **2.d.**) celles que vous jugez vraies et celles que vous jugez fausses

Soient a et b deux réels. On note $\mathscr{E}_{a,b}$ l'espace vectoriel des suites **réelles** qui vérifient la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

Question 1.

a. Pour tous réels a et b, $\mathscr{E}_{a,b}$ contient au moins une suite géométrique non nulle.

b. Pour que $\mathscr{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il suffit que $a = -3$ et $b = 4$.

c. Pour que $\mathscr{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il faut que $a = -3$ et $b = 4$.

d. $\mathscr{E}_{a,b}$ contient deux suites géométriques indépendantes lorsque $a = 2$ et $b = -1$.

e. La condition $a^2 + 4b \geqslant 0$ est une condition nécessaire pour qu'il existe dans $\mathscr{E}_{a,b}$ deux suites géométriques indépendantes.

Question 2.

a. L'application $f : u \in \mathscr{E}_{a,b} \longmapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire toujours surjective mais injective seulement si $a^2 + 4b < 0$.

b. La condition $a \neq 0$ est une condition suffisante pour que $g : u \in \mathscr{E}_{a,b} \longmapsto (u_0, u_2) \in \mathbb{R}^2$ soit un isomorphisme.

c. La dimension de $\mathscr{E}_{a,b}$ est égale à deux seulement si $a^2 + 4b \geqslant 0$.

d. Donner en le justifiant soigneusement une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}_{a,b}$ dans le cas où $a = -1$ et $b = -1$.

Question 3.

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ où $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ et on note R son rayon de convergence.

a. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et on en déduit que $R = 1$.

b. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ et on en déduit que la série entière diverge pour toute valeur du réel x.

c. On a $R < \dfrac{1}{2}$.

Question 4.

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ où $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ et on note r son rayon de convergence.

a. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc, $r \leqslant 1$.

b. On a : $r \geqslant 1$.

c. Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(n)\, x^{n-1}$ vaut 1 et donc, $r = 1$.

d. On a : $r \geqslant \dfrac{1}{2}$.

e. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}\, x^n = \arctan\left(\frac{x - \cos(1)}{\sin(1)}\right)$.

f. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}\, x^n = -\ln\left|1 - x\, e^i\right|$.

g. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}\, x^n = \frac{1}{2}\ln\left(1 - 2x\cos(1) + x^2\right)$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel des suites réelles.

On pourra noter une suite $u \in E$ sous la forme : $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ ou sous la forme $u = (u_n)$.

Une suite u de E est dite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

PARTIE A

Soit l'ensemble $\mathscr{S}_0 = \{u \in E |\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\}$.

1. Soient les deux suites λ et μ définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\mu_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

1.1 Vérifier que λ et μ sont des éléments de $\mathscr{S}_0$.

1.2 Montrer que ces deux suites sont périodiques.

2. Montrer que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Donner une base de $\mathscr{S}_0$ et préciser sa dimension.

4. Soit $u \in \mathscr{S}_0$ non nulle.

4.1 La suite u est-elle convergente ?

4.2 La série $\sum u_n$, de terme général u_n, est-elle convergente ?

4.3 Soit f la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n$

Donner l'ensemble de définition de f et une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles et des termes u_0 et u_1.

PARTIE B

Soit $\mathscr{S} = \{u \in E \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles u pour lesquelles

il existe une constante réelle a telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + u_n = 2a$

1. **1.1** On prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. Vérifier que $u \notin \mathscr{S}$.

1.2 On prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{E(n/2)}$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

1.3 On prend $u_n = 5$. Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

2. Vérifier que les suites constantes appartiennent à $\mathscr{S}$.

3. Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathscr{S}$.

Tournez la page S.V.P.

4. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

5. A-t-on $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_0$? $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$?

6. Soit φ l'application définie par : $\varphi : u \in \mathscr{S} \longmapsto \varphi(u) = \dfrac{u_0 + u_2}{2}$.

   Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}$.

   Quel est son noyau ?

7. Soit $v \in E$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1$;

   Montrer que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \oplus$ Vect(v) où Vect(v) est la droite vectorielle engendrée par la suite v.

8. Soit $u \in \mathscr{S}$. Déterminer alors pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

9. Montrer que tout élément u de $\mathscr{S}$ est une suite périodique de période 4.

10. Prouver que l'application $\theta : u \in \mathscr{S} \longmapsto \theta(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

    On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base de $\mathscr{S}$ obtenue comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par θ :

    $$\theta(I) = (1,0,0),\ \theta(J) = (0,1,0) \text{ et } \theta(K) = (0,0,1)$$

11. Expliciter les cinq premiers termes de chacune des suites I, J et K.

12. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $T_k : u \in E \longmapsto T_k(u) = w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{kn}$.

    12.1 Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.

    12.2 Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_2 ?

    12.3 Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_3 ?

    12.4 Ecrire la matrice, dans la base $\mathcal{C}$ obtenue à la Question **10.**, de l'endomorphisme τ_3 induit par T_3 sur $\mathscr{S}$.

    12.5 L'endomorphisme τ_3 de $\mathscr{S}$ est-il diagonalisable ?

    12.6 Reconnaître alors la nature géométrique de τ_3.

13. Soient $u \in \mathscr{S}$ et h la fonction de la variable réelle x donnée par $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n$.

    Exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in]-1, 1[$.

    Etudier les prolongements possibles en -1 et 1.

Partie C

Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathscr{S}_p = \{u \in E \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + u_n = 2a\}$

1. Montrer que tout élément de $\mathscr{S}_p$ est périodique de période $2p$.

2. Soit $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$.

   2.1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice F.

   2.2 Déterminer les valeurs propres de F.

   2.3 F est-elle inversible ?

   2.4 F est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?

3. Prouver que l'application δ définie par : $\forall u \in \mathscr{S}_p$, $\delta(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, a) \in \mathbb{R}^{p+1}$ où $a = \dfrac{u_0 + u_p}{2}$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_p$?

On note $\mathcal{C}_p$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ par δ.

4. Soit ψ l'application définie par :

$$\psi : u \in \mathscr{S}_p \longmapsto \psi(u) = t \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_{n+1}$$

4.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.

4.2 Sans nouveaux calculs, préciser $\psi^{2p} = \psi \circ \psi \circ \ldots \circ \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ.

4.3 Ecrire la matrice de ψ dans la base $\mathcal{C}_p$ de $\mathscr{S}_p$.

4.4 ψ est-elle diagonalisable ?

4.5 Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1}.

Fin de l'épreuve

IN CHOISY – 12 1025 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2.1 Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4.

2.2 Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.3 Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^u$.

2.4 Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

2.5 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale.

3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\ \mathrm{d}t$.

3.1 Calculer J_0, J_1, J_2.

3.2 Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.

3.3 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k+1)} = \frac{2.4.6.8.\cdots(2n)}{1.3.5.7.\cdots(2n+1)}$

3.4 En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

3.5 Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4. À l'aide d'un changement de variable donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 2

1. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel, on note u l'endomorphisme dont la matrice canoniquement associée est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner la nature géométrique de u et ses éléments caractéristiques.

2. Soient $d \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 + X^2 + d$. Déterminer les valeurs de d telles que le polynôme P soit scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $Q(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$ dont on note α, β et γ les racines dans $\mathbb{C}$.

3.1 Exprimer les coefficients a, b et c à l'aide des racines α, β et γ.

3.2 Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel.

EXERCICE 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si à la fois :
$$\begin{cases} \bullet\ a_1 \geqslant 1, \\ \bullet\ \text{la suite } (a_n) \text{ est bornée}, \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n>0} a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ \forall n \geqslant 2\ ,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans le démontrer la propriété suivante, notée (R) :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs.**

$$\textbf{Si :} \begin{cases} (a) \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ \textbf{et} \\ (b)\ \text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \ \text{ diverge} \end{cases} \qquad \textbf{alors :} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$$

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :
$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. **2.1** De façon analogue, montrer que :
$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

2.2 En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

2.3 Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).

3. Etude de deux exemples.

3.1 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P).
- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

3.2 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P).
- En utilisant la propriété (R) et la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

4.1 Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$

4.2 Prouver que :
$$\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

Tournez la page S.V.P.

4.3 Déterminer alors la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{A_n}$.

4.4 A l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5. Soit (u_n) le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente.

Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que : $\begin{cases} \bullet\ v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n) \\ \bullet\ \text{la série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ diverge} \end{cases}$

6. Soit (a_n) une suite vérifiant la propriété (P).

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(G, \times)$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall X \in G \ , \ X^p = I_n$$

où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $E = \text{Vect}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la partie G.

Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = O_n$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

1. Quel est le spectre d'une matrice nilpotente ?

2. Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

3. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

3.1 Déterminer deux nombres complexes α et β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

3.2 Prouver l'équivalence :

$$A \text{ nilpotente} \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0$$

On admettra dans toute la suite de l'exercice que cette propriété se généralise pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \ldots = \text{tr}(A^n) = 0}$$

4. **4.1** Vérifier que E est un espace vectoriel de dimension finie.

4.2 Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(M_1, M_2, \ldots, M_r)$ d'éléments de G tels que $(M_1, \ldots, M_r)$ soit une base de E.

On ne cherchera pas à calculer r ni à déterminer les matrices M_j.

5. On note $\mathbb{U}_p$ l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité.

5.1 Préciser le cardinal de $\mathbb{U}_p$ et expliciter ses éléments.

5.2 Soit X une matrice élément de G et λ une valeur propre de X. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_p$.

6. Prouver que tout élément de G est diagonalisable.

7. Prouver que l'ensemble $\mathscr{S} = \{\, \text{tr}(X),\ X \in G \,\}$ est fini. Donner un majorant du cardinal de $\mathscr{S}$.

On considère alors l'application :

$$\varphi : X \in G \longmapsto \varphi(X) = (\ \text{tr}(XM_1), \ldots, \text{tr}(XM_r)\ ) \in \mathbb{C}^r$$

8. Soient A et B deux éléments de G tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$.

On note $N = AB^{-1} - I_n$.

8.1 Justifier que $AB^{-1} \in G$.

En déduire que N est diagonalisable.

8.2 Montrer que :

$$\forall i \in \{1, ..., r\},\ \mathrm{tr}(AM_i) = \mathrm{tr}(BM_i)$$

En déduire que :

$$\forall X \in E,\ \mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$$

8.3 Soit $k \in \mathbb{N}$.

En écrivant que $(AB^{-1})^k = AB^{-1}AB^{-1}...AB^{-1}$ (k facteurs) et en utilisant la question précédente, montrer que :

$$\mathrm{tr}\left[(AB^{-1})^k\right] = n$$

8.4 Calculer alors $\mathrm{tr}(N)$, $\mathrm{tr}(N^2)$, ..., $\mathrm{tr}(N^n)$.

Que peut-on alors dire de la matrice N ?

8.5 Montrer que φ est injective.

9. Montrer que $\varphi(G) \subset \mathscr{S}^r$.

10. Que peut-on en déduire pour G ?

Fin de l'épreuve

IN CHOISY – 12 1026 – D'après documents fournis

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes sur des espaces vectoriels réels construits à l'aide de formes linéaires.
On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel et tout entier $p \geq 1$, on note f^p l'endomorphisme composé $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$.
Les deux premières parties sont consacrées à deux exemples et les deux suivantes à une étude théorique de tels endomorphismes. Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. À tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, on associe le vecteur colonne

$$X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tournez la page S.V.P.

Première partie

On considère la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que la surface

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 \,/\, {}^tX_M A X_M = 0\}.$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1. Vérifier qu'une équation de S dans $\mathcal{R}$ est

$$(2x - 2y - z)(x + 2y - 2z) = 0$$

et en déduire que S est la réunion de deux plans perpendiculaires.

2. On se propose dans cette question de retrouver la nature de S par une autre approche. On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1).$$

(a) Vérifier que $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$.

(b) En déduire que A est semblable à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et justifier qu'il existe une matrice orthogonale P, que l'on précisera, telle que $U = P^{-1}AP$.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(d) Soit M un point de l'espace. On note X'_M le vecteur colonne de ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{C})$.

(i) Écrire X_M en fonction de P et X'_M.

(ii) En déduire qu'un point M de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ appartient à S si et seulement si $x'z' = 0$ et retrouver la nature géométrique de S.

3. (a) Déterminer le rang de f et calculer $f \circ f$.

(b) Déterminer une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{v}) = \phi(\vec{v})\vec{c}.$$

Deuxième partie

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \quad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n). \end{cases}$$

1. (a) Exprimer $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$ et en déduire que $v_n = -2w_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

(b) En déduire que $u_n = -3w_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(c) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de w_n, u_n et v_n en fonction de n uniquement puis prouver la convergence de ces trois suites.

2. On se propose dans cette question de retrouver les limites de ces suites par une autre approche.

(a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$

(b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}MP$ et préciser D et P.

(c) Retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $Y_n = P^{-1}X_n$.

Troisième partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$; on fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle. On considère enfin l'application f définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = u(\vec{x})\vec{a}.$$

Tournez la page S.V.P.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et préciser son rang.

2. (a) Vérifier que 0 est une valeur propre de f et exprimer son sous-espace propre associé à l'aide de Ker u.

(b) On suppose que λ est une valeur propre non nulle de f et que $\vec{x}$ est un vecteur propre associé. Montrer que $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$ et que $\lambda = u(\vec{a})$.

(c) En déduire, en distinguant les cas $u(\vec{a}) = 0$ et $u(\vec{a}) \neq 0$, toutes les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

(d) Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur $u(\vec{a})$ pour que f soit diagonalisable.

3. On adopte un autre point de vue pour étudier la diagonalisation de f.

(a) Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que

$$f^p(\vec{x}) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^{p-1}\vec{a}.$$

(b) Énoncer précisément la caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynôme annulateur.

(c) On suppose que $u(\vec{a}) = 0$. Vérifier que $f^2 = O$ (endomorphisme nul) et en déduire que f n'est pas diagonalisable.

(d) On suppose $u(\vec{a}) \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.

On considère à présent un endomorphisme g de E de rang 1.

4. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $\vec{b}$ et une forme linéaire v sur E, qui n'est pas la forme linéaire nulle, tels que

$$\forall \vec{x} \in E, \quad g(\vec{x}) = v(\vec{x})\vec{b}.$$

5. On suppose que $g^2 \neq O$ (endomorphisme nul). Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que $g^2 = 0$ et on considère un vecteur $\vec{e}_n$ tel que $g(\vec{e}_n) \neq 0$.

(a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

(b) Justifier l'existence de vecteurs $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ tels que $(g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Déduire des questions **5** et **6** que deux matrices carrées de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Quatrième partie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension infinie ou de dimension finie $n \geq 2$. On fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E. On considère l'application h définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = u(\vec{a})\vec{x} - u(\vec{x})\vec{a}$$

et on supposera $u(\vec{a}) \neq 0$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} h$ est la droite vectorielle dirigée par $\vec{a}$ puis démontrer que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} u$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de h. On suppose, dans cette question seulement, que E est de dimension finie $n \geq 2$; l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

3. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\vec{x} \in E$,

$$h^p(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^{p-1} h(\vec{x}).$$

4. L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\| \ \|$ et l'on suppose que $|u(\vec{a})| < 1$. Montrer que

$$\left\| h^p(\vec{x}) \right\| \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. *Applications.*

(a) Soit f une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles. On considère la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f_{p+1}(t) = \frac{2}{3} f_p(t) - \sin 3t \int_0^\pi f_p(s) ds.$$

Démontrer que pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_p(t) \to 0$ lorsque $p \to +\infty$.

(b) En considérant le vecteur $\vec{a} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ et et la forme linéaire $h : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) de la partie II.

IN CHOISY – 12 1020 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

On note $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 \in E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \; f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$$

Pour tout réel $a > 0$, on note $I_a = [-a, a]$.

1. Donner l'expression du développement en série entière de la fonction exponentielle et préciser son domaine de validité.

2. Soient g un élément de E et β un réel.

2.1 Démontrer que l'application $G : x \longmapsto G(x) = e^x \displaystyle\int_\beta^x g(t)\, e^{-t}\, dt$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \; y'(x) - y(x) = g(x)$$

2.2 Calculer $G(\beta)$.

2.3 Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

2.4 Énoncer un problème de Cauchy, lié à l'équation $(\mathscr{E})$, dont G est l'unique solution.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda y''(x) - (1+\lambda)\, y'(x) = 0$$

4. Démontrer qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in I_a, \; \forall k \in \mathbb{N}, \; |f_k(x)| \leqslant M\, \frac{|x|^k}{k!}$$

5. Démontrer alors que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F.

6. Démontrer que F est de classe C^1 sur I_a, puis sur $\mathbb{R}$.

7. Calculer $F(0)$.

8. Prouver que F est solution d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

9. Donner alors une expression de F en fonction de f_0.

10. Dans cette question, on prend $f_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto f_0(x) = x^2$. Déterminer précisément F.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

11.1 Prouver qu'il existe des scalaires $(a_0, ..., a_n)$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_{n+1}^{(n+1)}(t)\, dt$$

11.2 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_0(t)\, dt$$

11.3 En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_0^x f_0(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} \right) dt$$

11.4 Retrouver alors l'expression de F obtenue à la question 9.

12. Soit $\psi : f \in E \longmapsto H = \psi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad H(x) = e^x \int_0^x f(t)\, e^{-t}\, dt$$

12.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de E.

12.2 ψ est-elle injective ?

12.3 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ψ.

EXERCICE 2

Question préliminaire :

Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que : $(1+\alpha)(1+\beta) \geqslant (1+\alpha+\beta)$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour $n \geqslant 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n\, v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \qquad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\, \Delta_{n-2}$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel j.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

5.1 Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

5.2 Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

6.1 Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.

6.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$

Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 2} t_n$.

Tournez la page S.V.P.

6.3 Prouver alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

EXERCICE 3

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1. Soit $\mathscr{D}_1$ la partie de la courbe $\mathscr{D}$ correspondant à $t \in [0, \pi]$.

Montrer que l'on obtient toute la courbe $\mathscr{D}$ à partir de $\mathscr{D}_1$: préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.

2. **2.1** Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

2.2 Montrer que la courbe $\mathscr{D}_1$ présente deux points singuliers pour $t = 0$ et pour $t = t_0$ que l'on déterminera.

On note I le point de paramètre t_0.

3. Donner l'allure de la courbe au voisinage du point O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4. Montrer que le vecteur $\vec{u_0} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{D}_1$ en I.

Ecrire une équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

On admet que le point I est un point de rebroussement de première espèce.

5. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3, 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

5.1 Vérifier que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point Ω.

5.2 Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_1$.

5.3 Soit J le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

6. Tracer dans $\mathscr{P}$ muni du repère $\mathscr{R}$, les courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathcal{T}$.

7. Montrer que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Calculer la longueur de $\mathscr{D}$.

Fin de l'épreuve

IN CHOISY – 12 1021 – D'après documents fournis

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

L'objet du problème est l'étude des deux suites récurrentes doubles définies par :

$$u_0 = a, u_1 = b, \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \text{ et } v_0 = a, v_1 = b, \forall n \geqslant 0, v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1} v_n}}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

Partie I : étude de la suite (v_n)

Soit $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geqslant 0$ par : $v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1} v_n}}$.

1. Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite (v_n) ? (On justifiera précisément la réponse.)
2. On pose $w_n = \ln(v_n)$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n). *On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes vérifiant cette relation de récurrence.*
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Si $(x_n) \in F$, que peut-on dire quant à la convergence de (x_n) ?
3. Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (v_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$? de la série $\sum_{n \geqslant 0} (v_n - 1)$?

Partie II : étude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $||.||_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$||(z_1, z_2, \ldots, z_n)||_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$$

et on identifie le n-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $|||A|||_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $||.||_\infty$. On rappelle que celle-ci est définie de la manière suivante :

$$|||A|||_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, ||X||_\infty \leqslant 1} ||AX||_\infty$$

Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in M_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$N_P(Z) = ||PZ||_\infty$$

1. Soit $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

   On pose $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |m_{i,i}|$.
   (a) Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que : $||DZ||_\infty \leqslant m||Z||_\infty$.
   (b) Déterminer $|||D|||_\infty$.

2. (a) Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si P est une matrice inversible.

   Lorsque que P est inversible, on notera dorénavant $||.||_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $||.||_P$ sur $M_n(\mathbb{C})$ sera notée $|||.|||_P$.

   (b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par :

$$\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \mathrm{sp}(M)\}$$

   (a) Montrer que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant |||A|||_P$.

   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) = |||A|||_P$.

   (d) Un exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

   (e) Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

   (a) On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que pour $Z \in \mathbb{C}^2$, on a : $||AZ||_\infty \leqslant m||Z||_\infty$. Déterminer $|||A|||_\infty$.

   (b) On suppose la matrice A non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A.

      i. Démontrer que $\mathrm{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α.

      ii. Démontrer l'existence d'une base e de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\mathrm{mat}_e(f) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

      iii. Soit $\epsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\mathrm{mat}_{e'}(f) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ où } |\beta'| \leqslant \epsilon$$

      iv. En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant \rho(A) + \epsilon$.

   (c) Déterminer $\inf_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P$.

   (d) Un exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant 2$.

   (e) On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P < 1$. Que peut-on en déduire concernant la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Tournez la page S.V.P.

Partie III : étude de la suite (u_n)

Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geqslant 0$ par : $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n}$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f : & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (y, \frac{2}{x+y}) \end{array}$$

On a alors : $f(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que f est de classe C^1. *Dans la suite, on note respectivement* $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}$ *et* $J_{(x_0,y_0)}$ *la différentielle et la matrice jacobienne de* f *au point* $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Déterminer les points fixes de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
3. Déterminer la matrice $J_{(1,1)}$.
4. Démontrer l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||J_{(1,1)}|||_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. On fixe un réel α vérifiant $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, ||(1,1) - (x_0,y_0)||_P \leqslant \eta \implies |||J_{(x_0,y_0)}|||_P \leqslant \alpha$$
   Dans la suite, on note D *le disque fermé de centre* $(1,1)$ *et de rayon* η *pour la norme* $||.||_P$ *et on suppose qu'il existe un entier* n_0 *tel que* $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.
   (b) Soit $(x_0, y_0) \in D \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit, pour $t \in [0,1]$:
   $$\varphi(t) = f\Big((1,1) + t\big[(x_0,y_0) - (1,1)\big]\Big)$$
   Justifier que φ est de classe C^1 et obtenir une expression de $\varphi'(t)$ faisant intervenir la différentielle de f. En déduire :
   $$||(1,1) - f(x_0,y_0)||_P \leqslant \alpha ||(1,1) - (x_0,y_0)||_P$$
   (c) Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.
   (d) Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, on a l'inégalité :
   $$||(1,1) - (u_n, u_{n+1})||_P \leqslant \alpha^{n-n_0} ||(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})||_P$$
   (e) Obtenir que $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.
   (f) Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (u_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$? de la série $\sum_{n \geqslant 0} (u_n - 1)$?

Partie IV : suite de l'étude

On considère une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On rappelle qu'une valeur d'adhérence de (x_n) est un réel λ pour lequel il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers λ. On rappelle que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence et on admet que toute suite bornée admet une plus petite et une plus grande valeur d'adhérence.

1. (a) Soit (x_n) une suite bornée non convergente admettant λ pour valeur d'adhérence. Justifier l'existence d'un réel $\tau > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ vérifiant $|x_n - \lambda| > \tau$. En déduire que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.
   (b) Montrer que toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.
   (c) Soit (x_n) une suite bornée. On note l_- sa plus petite valeur d'adhérence et l_+ sa plus grande. Montrer l'équivalence :
   $$(x_n) \text{ est convergente } \Leftrightarrow l_- = l_+$$

2. Dans cette question, (u_n) désigne la suite étudiée dans la partie III. On pose $\alpha = \min\{u_0, u_1, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}\}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha}$. On note alors l_- et l_+ les plus petite et plus grande valeurs d'adhérences de (u_n).

   (b) Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\varphi(n)+1})$ convergent et $u_{\varphi(n)+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_-$. En déduire l'inégalité $l_- l_+ \geqslant 1$.

   (c) Montrer qu'on a : $l_- l_+ = 1$.

   (d) En considérant une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$, $(u_{\varphi(n)+1})$ et $(u_{\varphi(n)+2})$ convergent et $u_{\varphi(n)+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_-$, obtenir l'égalité $l_- = l_+$ et conclure.

   (e) Que peut-on dire de l'hypothèse d'existence d'un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$ dans la question 5.(a) de la partie III ?

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

EXERCICE n°1

On note A une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes, I_n est la matrice identité carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.

Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associés à cette matrice.

On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

1) Soit φ l'application qui à tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^{2n}$.

   a) Montrer que φ est une application linéaire.

   b) Montrer que φ est bijective du noyau de la matrice A vers le noyau de la matrice M_A. Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\ker(M_A)$ et de $\ker(A)$?

   c) En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A. Citer le théorème utilisé.

2) On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.

   a) Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.

   b) Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.

   c) Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.

   d) En déduire, en citant le théorème du cours utilisé, que la matrice M_A est diagonalisable.

3) On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.

   a) Démontrer que $\mathrm{Im}(M_A) = \mathrm{Im}(M_A^2)$.

   b) En déduire $\ker(M_A) = \ker(M_A^2)$.

   c) Montrer que la matrice A est inversible (indication : pour $X \in \ker A$, on pourra considérer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$.)

   d) Démontrer que la matrice A est diagonalisable.

4) Que peut-on déduire des questions 2) et 3) ?

EXERCICE n°2

1) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière réelle : $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

b) On note $S(x)$ sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$. Préciser son ensemble de définition I.

2) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto xS(x)$ est dérivable sur I et donner une expression simple de sa dérivée.

b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}, \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$, en déduire que :

$$\forall x \in I,\ xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3) a) Montrer, en énonçant le théorème du cours utilisé, que l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx.$$

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$ est convergente et que:

$$\int_0^1 \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt$ existe.

5) Calculer $J = \displaystyle\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ 0 \leqslant y \leqslant x\ \}$.

6) On admet la convergence de l'intégrale suivante :

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta.$$

Montrer que l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta$ est convergente.

7) On admet que les intégrales J et K sont égales.

a) Exprimer $K + L$ en fonction de I.

b) Exprimer $K - L$ en fonction de I.

c) En déduire la valeur de l'intégrale I.

8) En déduire, à l'aide des questions précédentes, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE n°3

1) On sait qu'une hyperbole $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

On rappelle qu'une hyperbole est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère si et seulement si $a = b$. On considère que cette condition est maintenant réalisée.

2) Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = \left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ dans lequel $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $XY = k$ avec $k \neq 0$.

3) On considère quatre points A, B, C, D, distincts deux à deux de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}'}$ et de rayon $r > 0$.

   a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

   b) Montrer que les abscisses X_A, X_B, X_C, X_D des points A, B, C, D dans le repère $\mathcal{R}'$ vérifient une équation polynomiale de degré quatre.

   c) Montrer que le produit de leurs abscisses dans le repère $\mathcal{R}'$ est constant.

4) La condition obtenue à la question 3)c) est-t-elle suffisante pour affirmer que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle?

IN CHOISY – 13 1045 – D'après documents fournis

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet comporte des questions préliminaires et un problème de quatre parties numérotées **A**, **B**, **C** *et* **D**. *Les parties* **B** *et* **C** *du problème sont indépendantes de la partie* **A**.

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Soit n un entier strictement supérieur à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M. On note χ_M le polynôme caratéristique de la matrice M défini par $\chi_M(X) = \det(M - X\,I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note ω le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Autant que possible, on préférera écrire ω plutôt que $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

Questions préliminaires d'application directe du cours.

Les résultats de ces questions seront utilisés dans les parties **B** *et* **C** *du problème.*

1) a) Expliciter, sans justification, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité à l'aide de ω.

b) Factoriser, sans justification, le polynôme $X^n - 1$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Soit $r \in \mathbb{Z}$. Montrer que, selon la valeur de r, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ est égale, soit à 0, soit à n.

2) Soient M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. Chaque valeur propre est écrite autant de fois que son ordre de multiplicité.

a) Démontrer que l'on a $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$.

b) Soient λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé. Montrer que pour tout entier naturel ℓ, le vecteur V est un vecteur propre de M^ℓ associé à la valeur propre λ^ℓ.

c) Montrer que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, la matrice $p(M)$ est diagonalisable.

d) Des questions précédentes, déduire que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\det(p(M)) = \prod_{k=0}^{n-1} p(\lambda_k).$$

Problème

A. 1) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) \mathrm{d}u$$

après en avoir justifié l'existence.

2) Pour tous réels x et t, calculer le module $|1 - xe^{\mathrm{i}t}|$ du nombre complexe $1 - xe^{\mathrm{i}t}$.

3) Montrer que, si $x \in]-1,1[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) \mathrm{d}t$ existe.

On note h la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) \mathrm{d}t\,.$$

4) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction h est paire.

5) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

6) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2} \mathrm{d}t &= \frac{2}{x+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 - \lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) \mathrm{d}u \end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$.

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

7) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner, pour tout $x \in]-1,1[$, une expression de $h'(x)$ et de $h(x)$.

Tournez la page S.V.P.

B. 1) Soit a un nombre complexe. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A = (\gamma_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ où

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a^{j-i} & \text{si } i < j \\ a^{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'on a $\det(A) = (1 - a^n)^{n-1}$.
On pourra utiliser les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a^{j-1}C_1$ sur les colonnes pour j variant de 2 à n.

2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$ une base de E. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(e_1) = e_n \quad \text{et} \quad u(e_s) = e_{s-1} \quad \text{si} \quad 2 \leqslant s \leqslant n.$$

a) Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_U de U est donné par

$$\chi_U(X) = (-1)^n(X^n - 1).$$

c) Préciser les valeurs propres de U. La matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

3) Soit le n-uplet $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On lui associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C_\alpha = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & & \alpha_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont précisément définis par $c_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ \alpha_{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases}$.

On admettra que l'on a $C_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k$.

Montrer que C_α est diagonalisable.

4) Montrer que les valeurs propres de C_α sont les nombres complexes $q(\omega^\ell)$ où $q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la matrice $\Gamma_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Gamma_\varphi = C_\alpha$ où $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1) a) Vérifier que les valeurs propres de Γ_φ sont les

$$\lambda_\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks}\right)\omega^{k\ell} \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

b) En déduire, en utilisant la question **1)c)** des questions préliminaires, que, pour tout entier $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a $\lambda_\ell = \varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)$.

c) Montrer que l'on a $\det(\Gamma_\varphi) = \prod_{\ell=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)$.

2) Dans cette question, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-a^n}{1-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ où $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$.

a) Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que l'on a $\varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a^\ell \omega^{s\ell}$.

c) Démontrer, qu'alors, Γ_φ est égale à la matrice A de la question **B.1)**.

D. 1) Soit F une fonction continue sur $[0, 2\pi]$. Justifier l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}F\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Dans cette question, on considère que a est réel tel que $|a| < 1$ et on pose

$$F(t) = \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right|\right).$$

a) Vérifier que la fonction F est définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

b) A l'aide de la partie **C**, montrer que, pour tout $a \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right|\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{(\det(A))^{\frac{1}{n}}}{(1-a^n)}\right)$$

où A est la matrice de la question **B.1)**.

c) Retrouver alors l'expression de $h(x)$ obtenue à la question **A.7)**.

IN CHOISY - 13 1054 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre avec la copie : 1 feuille de papier millimétré.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES.

LES CANDIDATS VEILLERONT À JUSTIFIER LEURS DÉMONSTRATIONS EXCLUSIVEMENT À L'AIDE DES OUTILS DU PROGRAMME DE LA FILIÈRE.

EXERCICE 1

Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Γ la courbe paramétrée, pour $t \in \mathbb{R}$, par : $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$

On appelle *podaire de* Γ *par rapport à un point* P *du plan*, l'ensemble des projetés orthogonaux de P sur les tangentes à Γ.

1. Donner une équation cartésienne de Γ.
2. Reconnaître Γ et en donner les éléments caractéristiques.
3. Soit M un point de Γ de paramètre t.
   Déterminer une équation de la tangente à Γ en M.
4. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$.
   Vérifier que la podaire de Γ par rapport à F est une droite que l'on reconnaitra.
5. On cherche dans cette question à déterminer la podaire γ de Γ par rapport à O.
   5.1 Déterminer des équations paramétriques de γ.
   5.2 Représenter graphiquement, sur la feuille de papier millimétré prévue à cet effet, les courbes γ et Γ dans un même repère. (On étudiera soigneusement les éventuels points stationnaires et branches infinies de la courbe γ).

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

PARTIE A

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+(nx)^2}$ converge.

   On définit alors la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de f.
3. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. **5.1** Vérifier que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I,\ \frac{1}{1+(p+1)^2 x^2} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2 x^2} \leqslant \frac{1}{1+p^2 x^2}$$
   5.2 En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B

1. Justifier pour tout $x \in I$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

2. On définit alors la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que φ est continue sur I.

3. Le but de cette question est de prouver $\varphi = f$.

3.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$.

3.1a Justifier l'existence de l'intégrale : $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kxt}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

3.1b Vérifier que l'on a : $J_k = \dfrac{1}{1+k^2x^2}$.

3.2 Conclure.

Exercice 3

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme associée notée $||.||$

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ tels que la propriété (P) suivante soit vérifiée :

$$(P) \qquad \forall x \in E,\ \ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{B}$.

On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit la matrice symétrique $A = ((e_i|e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **1.1** Soit $x \in F^{\perp}$. Calculer $||x||^2$.

1.2 En déduire que E est de dimension finie.

2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ ||e_i|| \geqslant 1$

Montrer qu'alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose que $\mathscr{B}$ est une famille libre de E.

3.1 Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

3.2 Énoncer une identité de polarisation liant produit scalaire et norme associée.

3.3 En utilisant la propriété (P), démontrer : $\forall (x, y) \in E^2,\ \ (x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$

3.4 En déduire que l'on a $A^2 = A$.

3.5 Soit a l'endormorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer le noyau de a.

3.6 En déduire que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans tout l'exercice on identifie un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et sa matrice colonne associée d'une part et un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec sa matrice canoniquement associée, d'autre part.

I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Soit $||\ ||$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.

On considère $\mathcal{N}$ la norme subordonnée à $||\ ||$, c'est-à-dire telle que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{||X|| \leqslant 1} ||A\,X||$$

On rappelle que l'on a : $\forall\,(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\quad \mathcal{N}(A\,B) \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$

1. Démontrer que l'on a : $\forall\,X \in \mathbb{C}^n,\ ||A\,X|| \leqslant \mathcal{N}(A)\,||X||$.

2. Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathbb{C}^n, X_0 \neq 0$ tel que l'on a : $\mathcal{N}(A) = \dfrac{||A\,X_0||}{||X_0||}$.

3. Vérifier l'égalité $\mathcal{N}(I_n) = 1$

On rappelle que la norme $\mathcal{N}_\infty$ est définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\,a_{ij}\,|$$

4. Justifier, sans les calculer, l'existence de deux réels strictement positifs α et β tels que l'on a :

$$\forall\,A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\quad \alpha\mathcal{N}_\infty(A) \leqslant \mathcal{N}(A) \leqslant \beta\mathcal{N}_\infty(A)$$

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall\,A \in \mathcal{G},\quad \mathcal{N}(A - I_n) \leqslant 1$$

ce que l'on peut traduire par : $\mathcal{G}$ est inclus dans la boule fermée de centre I_n et de rayon 1 pour la norme $\mathcal{N}$.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ est borné pour la norme $\mathcal{N}$.

6. Soient $A \in \mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

6.1 Justifier que $A^k \in \mathcal{G}$.

6.2 Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

Justifier que λ est non nul et déterminer $A^k X$.

6.3 Montrer que l'on a : $||(A^k - I_n)\,X|| \leqslant ||X||$.

En déduire les inégalités : $|\lambda^k - 1| \leqslant 1$ puis $\big||\lambda|^k - 1\big| \leqslant 1$

6.4 Démontrer que $|\lambda| = 1$.

(On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et distinguer les cas $|\lambda| > 1$ et $|\lambda| < 1$).

On pose dans la suite de cette question $\lambda = e^{i\,\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$.

6.5 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(k\theta) - 1| \leqslant 1$, puis $\cos(k\theta) \geqslant 0$.

6.6 Montrer alors successivement que l'on a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ puis $\forall q \in \mathbb{N},\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2^q}, \frac{\pi}{2^q}\right]$.

6.7 En déduire : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$

7. Dans toute cette question, on étudie le cas $n = 2$.

Soit A une matrice non diagonalisable de $\mathcal{G}$.

7.1 Montrer que A est semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a est un complexe non nul.

7.2 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^m puis $\mathcal{N}_\infty(T^m)$.

7.3 Démonter $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$, puis $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$.

7.4 En déduire que toute matrice de $\mathcal{G}$ est diagonalisable.

7.5 Décrire alors l'ensemble $\mathcal{G}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

IN CHOISY - 13 1055 - D'après documents fournis

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les trois parties sont relativement indépendantes.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Préambule

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

a) Préciser un équivalent simple de $\operatorname{ch}(t)$ et de $\operatorname{sh}(t)$ lorsque le réel t tend vers $+\infty$.

b) Établir les tableaux de variation (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$: $g_1 : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ et $g_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\operatorname{sh}(t)}$.

Partie I : Intégrales et développements en série

I-1.1. Justifier l'existence de : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

I-1.3. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha > 0$, la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\, dt$.

I-2.1. Justifier que pour tout $t \geq 0$, on a: $\dfrac{e^t}{2} \leq \operatorname{ch}(t) \leq e^t$

I-2.2. En déduire l'existence de $C_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un encadrement du rapport $\dfrac{C_n}{I_n}$.

I-2.3. Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $t \mapsto \operatorname{Arctan}(e^t)$, calculer C_0.

I-2.4. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\dfrac{1}{2\operatorname{ch}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}$.

I-2.5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad C_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$.

On énoncera et on appliquera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

I-2.6. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$.

I-3.1. Montrer l'existence de : $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I-3.2. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\dfrac{1}{2\operatorname{sh}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}$.

I-3.3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$.

I-4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{si } t \in]0, \pi[\qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

I-4.1. Déterminer les coefficients de Fourier $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

I-4.2. Grâce à des résultats que l'on précisera sur les séries de Fourier et appliqués à φ retrouver la valeur de C_0 et donner la valeur de S_1.

Partie II : Intégrales à paramètre

II-1. Pour tout réel x on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\mathrm{ch}(t)}\,dt$

II-1.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

II-1.2. Montrer que F est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Justifier grâce à **I-2.2** que le rayon de convergence de ce développement vaut 1.

Pour cela on exprimera d'abord e^{ixt} comme somme d'une série.

II-1.3. En effectuant une intégration par parties, majorer $|xF(x)|$ indépendamment du réel x. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

II-2. Pour tout réel x on pose : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\,dt$

II-2.1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **I-2.4**, justifier que :

$$\left|\frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}\right| \quad \leq \quad e^{-(2n+3)t}$$

II-2.2. En déduire que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)\,dt\right)\right| \leq 2\int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\,dt.$$

II-2.3. Pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)\,dt$.

II-2.4. Conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

II-3. Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. On considère $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$h_x(t) = \mathrm{sh}(xt) \quad \text{si } t \in]-\pi,\pi[\qquad \text{et} \qquad h_x(\pi) = h_x(-\pi) = 0.$$

II-3.1. Justifier que h_x est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

II-3.2. Déterminer les coefficients de Fourier : $b_n(h_x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II-3.3. En déduire : $H(x) = \dfrac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}$.

On pourra admettre la relation, valable pour tout réel a : $\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(a)$.

Partie III : Étude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à : $\mathcal{S} = \{y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/ \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}\}$.

III-1. En utilisant ch et sh, déterminer toutes les $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $y'' = y$.

III-2.1. Donner la forme générale d'une solution $y \in \mathcal{S}$.

On rappelle qu'il y a au moins deux méthodes possibles de résolution :
soit en posant $y(t) = u(t)\,\mathrm{ch}(t) + v(t)\,\mathrm{sh}(t)$, *soit en posant* $y(t) = z(t)\,\mathrm{ch}(t)$;
avec des conditions sur les fonctions u *et* v, *ou sur la fonction* z, *qui seront précisées en cas d'utilisation de l'une de ces méthodes.*

III-2.2. Existe-t-il des solutions impaires dans $\mathcal{S}$?

III-2.3. Expliciter l'unique solution $\theta \in \mathcal{S}$, paire et telle $\theta(0) = 1$.

III-3.1. Déterminer explicitement l'unique suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}.$$

III-3.2. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_0 a_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0.$$

III-3.3. Préciser b_0, b_1, b_2.

III-3.4. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |b_n| \leq 1$.

On pourra considérer comme connu que $\mathrm{ch}(1) \leq 2$.

III-3.5. En déduire que pour tout $t \in]-1,1[$, la série $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n}$ converge absolument, avec de plus : $\mathrm{ch}(t)g(t) = 1$.

Remarque : On a ainsi prouvé que $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$.

III-4. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et telle que la série entière définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$, et vérifie :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad f''(t) - f(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.$$

III-4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et b_n.

III-4.2. En déduire qu'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leq 1$$

III-4.3. En déduire que la fonction θ considérée en **III- 2.3** est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

III-4.4. Justifier que $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

Fin de l'énoncé.

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°1 :

Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1,...,f_k)$ une famille de vecteurs de E, $\text{Vect}(f_1,...,f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1,...,f_k)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Sp(A) désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et ${}^tA$ la transposée de A.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

  Par définition, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $Sp(A) \subset]0,+\infty[$.
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles **triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.**
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
  Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\,.\,\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = {}^tX\,X$.
- Les candidats seront amenés à utiliser le théorème suivant :
  Théorème d'orthonormalisation de Schmidt : Si (E,(. | .)) est un espace préhilbertien réel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1,...,f_p)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1,...,g_p)$ telle que pour tout $k \in \{1,...,p\}$:

  $$\text{Vect}(f_1,...,f_k) = \text{Vect}(g_1,...,g_k) \text{ et } (f_k \mid g_k) > 0.$$

  La famille $(g_1,...,g_p)$ s'appelle alors l'orthonormalisée de Schmidt de $(f_1,...,f_p)$.

I. Etude d'un exemple numérique :

On considère, dans cette question I uniquement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Enoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOSO = D$ où D est une matrice diagonale.

2) Déterminer O et D telles que $\det(O) = 1$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\alpha < \beta < \gamma$ puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

3) Démontrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$.
   On explicitera la matrice T.

II. Résultats préliminaires :

1) On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\varphi_S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto {}^tX\, S\, Y \end{cases}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) Proposition : $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer cette proposition pour n=2. Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^tA\,A$.

1) Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que si $\lambda \in Sp(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\|Ax\|^2 = \lambda \|x\|^2$ en déduire que $\lambda \in [0,+\infty[$.

3) En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV. Décomposition de Cholesky :

Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :
Théorème : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que s'il existe $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) On suppose qu'il existe T_1, T_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tT_1\,T_1 = {}^tT_2\,T_2$.

   a) Montrer que $\Delta = T_1 (T_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. (utiliser II.2))
   b) En déduire, en utilisant ${}^tT_1\,T_1 = {}^tT_2\,T_2$, que $\Delta^2 = I_n$.
   c) En déduire que $T_1 = T_2$.

3) On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en II.1). Soit b=$(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et b'=$(v_1,...,v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de b pour le produit scalaire φ_S.
On note T la matrice de passage de la base b' à la base b.

   a) Montrer $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $S = {}^tT\,T$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°2 :

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

1) Enoncer le théorème de dérivation pour les fonctions définies par : $F: x\in I \mapsto \int_J f(x,t)dt$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

2) Etude de g :

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g a un développement limité en 0 à l'ordre 1.
En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $g'(0)$.

c) Déterminer le signe pour $t\in\mathbb{R}$ de $(1+t)e^{-t}-1$.

d) Dresser le tableau de variations de g et tracer le graphe de g.

e) i) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction g, préciser le rayon de convergence de la série entière.
ii) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout k$\in\mathbb{N}$, $g^{(k)}(0)$ (énoncer le (ou les) théorème(s) utilisé(s)).

3) On considère la fonction h définie par $h(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)\,dt$.

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(u)}{u}du$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties).

On notera alors α la valeur de cette intégrale et on pourra écrire
$$h(x)=\alpha-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt.$$

b) En déduire que h est définie sur [0,+∞[. Que vaut $h(0)$?

c) Montrer que h est dérivable sur tout intervalle de la forme [a,+∞[(a>0).
En déduire que pour tout $x>0$, $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x>0$: $h(x)=\int_0^{+\infty}g(u)\sin\left(\dfrac{u}{x}\right)du$.

e) En déduire que pour tout $x>0$: $h(x)=x+x\int_0^{+\infty}g'(u)\cos\left(\dfrac{u}{x}\right)du$.

f) En déduire que pour tout $x>0$: $|h(x)|\leq 2x$.

g) Montrer que h est continue sur [0,+∞[et que pour tout $x\geq 0$: $h(x)=\text{Arctan}(x)$.

h) En déduire que $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice n°3 :

On se place dans le plan affine euclidien et on considère :

- F un point du plan.
- $\mathcal{D}$ une droite du plan ne contenant pas F.
- Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F et A le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ.
- p la distance AF.
- S le milieu du segment $[AF]$.

Le but de cet exercice est l'étude de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
Par définition $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$:
$M \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

On considère le repère orthonormé direct $\mathfrak{R}=\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i}=\frac{1}{p}\overrightarrow{AF}$.

1)

a) Donner les coordonnées dans $\mathfrak{R}$ de A, S, F et une équation de la droite $\mathcal{D}$.

b) On considère M de coordonnées $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ dans $\mathfrak{R}$, montrer que $M \in \mathcal{P}$ ssi $y^2 = 2px$.

2) $\mathcal{P}$ est alors paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2}{2p} \\ y(t)=t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. On considère $t_0 \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathcal{P}$ de paramètre t_0.

a) Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 et de $\mathcal{N}_0$ la normale à $\mathcal{P}$ en M_0.

b) On note H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

i) Donner la nature du triangle FH_0M_0.

ii) Vérifier que $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

3)

a) Déterminer en M_0 le repère de Frenet de $\mathcal{P}$ noté $\left(M_0,\vec{T_0},\vec{N_0}\right)$.

b) Déterminer en M_0 le rayon de courbure de $\mathcal{P}$ noté R_0.

c) On appelle centre de courbure en M_0 à $\mathcal{P}$ noté Ω_0 le point défini par $\overrightarrow{M_0\Omega_0} = R_0\vec{N_0}$, déterminer dans $\mathfrak{R}$ les coordonnées de Ω_0.

4) On considère la courbe paramétrée (C) définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t)=2+\dfrac{3}{4}t^2 \\ y(t)=-\dfrac{t^3}{4} \end{cases}$.

a) Etudier la symétrie de (C).
b) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y.
c) Etudier avec précision le point stationnaire de (C).
d) Etudier la branche infinie de (C) lorsque t tend vers $+\infty$.
e) Tracer la courbe (C) et la courbe $(\mathcal{P})$ (pour p=2) sur une même figure.

****

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

084

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.

2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A\cos x+B\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?

5. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} z : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$, telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$ et on considère les équations différentielles :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$
$$(E'_\alpha) \qquad xz'' + (2\alpha + 1)z' + xz = 0$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.

10. a. Rappeler une définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

10. b. On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R, R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

11. a. Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

11. c. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}a_0$.

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

13. Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction z :

$$\begin{array}{rccl} z : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{-\alpha}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n+\alpha}$$

Tournez la page S.V.P.

est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x, expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière. En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = k f_p'(x)$.

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x \sin t)\, dt$$

17. Démontrer que g_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme intégrale) les fonctions g_p' et g_p''.

18. En intégrant par parties $g_p'(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p).

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\, dt$.

19. a. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $n w_n = (n-1) w_{n-2}$.

19. b. Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n.

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t)\, \mathrm{d}t$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2 g_p'(x)$$

23. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les fonctions g_p et f_p sont égales.

Partie V

On considère dans cette partie un réel $x \in \mathbb{R}$ fixé et on définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) \end{array}$$

(où Re *désigne la partie réelle). On reprend par ailleurs les notations définies dans les parties précédentes.*

24. Démontrer que g est périodique de période 2π.

25. Les coefficients de Fourier trigonométriques de g sont notés a_n ($n \in \mathbb{N}$) et b_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Rappeler les expressions de a_n et b_n et étudier la convergence de la série de Fourier de g (on donnera l'énoncé complet du théorème utilisé).

26. Déterminer b_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Démontrer que g est π-périodique et que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

28. Démontrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 2(-1)^k g_{2k}(x)$.

29. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) = g_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n g_{2n}(x)\cos(2nt)$$

IN CHOISY – 14 1084 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

085

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice I

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u, et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, ..., u_m$ des endomorphismes de E tels que :
$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $< , >$ usuel:
$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Pour toute matrice A, on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.

   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   (a) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$.
   (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\mathrm{Im}(A + {}^tA) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$.

Exercice II

1. Questions de cours : Enoncer précisément le théorème de convergence dominée.
2. Soit n un entier naturel. On considère la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.
   (a) Etablir le tableau de variation de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2.
3. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on explicitera. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t'elle uniformément vers f sur $[0,1]$?

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie) qui converge vers 0.
5. Démontrer que
$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}dx.$$
6. En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :
$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}dx.$$
8. En déduire des nombres réels α et β qu'on explicitera tels que la suite (u_n) admette un développement de la forme :
$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$
9. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \int_0^1 x^n g(x)\,dx.$$
   Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement de la forme :
$$v_n = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o(\frac{1}{n^k}).$$
   Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.
10. Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Démontrer que la suite $(n\int_0^1 x^n h(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.

Tournez la page S.V.P.

Exercice III

Soit P le plan euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On identifiera le plan euclidien P au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}$ la conique d'équation $x^2 - y^2 + ax + by = \frac{1}{2}$.

Soit $p = a + ib$.

1. Quelle est la nature de la conique $\mathcal{C}$?
2. Préciser les axes de la conique $\mathcal{C}$.
3. Représenter graphiquement la conique $\mathcal{C}$ pour les valeurs particulières $a = b = 1$.
4. Justifier que le point $\dfrac{-a + ib}{2}$ est centre de symétrie de la conique $\mathcal{C}$.
5. Expliciter (en fonction de p) des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que pour tout nombre complexe z, on ait l'équivalence :
$$z \in \mathcal{C} \iff \alpha_1 z^2 + \alpha_2 \bar{z}^2 + \beta_1 z + \beta_2 \bar{z} = 1.$$
6. A quelle condition le point p est-il un point de la conique $\mathcal{C}$?

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Soit q le nombre complexe tel que $p + q = -1$.

On suppose $b \geq 0$ et $pq = 2$.

7. Donner un polynôme de degré 2 dont les racines sont p et q. En déduire les valeurs de a et b.
8. Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = 2$.
9. En déduire que :
- soit $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$,
- soit $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = q$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = p$.
10. On admet que $\cos(\frac{4\pi}{7}) \geq -\frac{1}{2}$ et que $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) > 0$. Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$.
11. Démontrer que $\omega, \omega^2, \omega^4$ sont les trois racines du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - 1$.
12. Déterminer un polynôme de degré 4 dont les racines sont $1, \omega, \omega^2, \omega^4$.
13. En déduire que $1, \omega, \omega^2, \omega^4$ sont exactement les points d'intersection de la conique $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre 0 et de rayon 1.
14. On note σ la symétrie orthogonale d'axe $0x$ du plan euclidien P.
    (a) Quelle est l'image du point d'affixe p ?
    (b) Représenter sur une même figure le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\mathcal{C}$, ainsi que $\sigma(\mathcal{C})$.
    (c) Soit E l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et de $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})$. Décrire E.

IN CHOISY - 14 1085 - D'après documents fournis

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

094

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème

Etant donné un entier naturel n on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n lorsque le coefficient a_n est non nul ; ce coefficient est alors appelé « *coefficient dominant de* P ». Dans tout le problème on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et sa fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie pour $x \in [-1, 1]$ par : $c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

Partie 1.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur [-1,1].

2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ et $c_3(x)$.

3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2 et c_3.

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [-1, 1]$, $c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2\, x\, c_n(x)$.

5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie 2.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$.

1.1 Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Dans toute la suite du problème $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.2 Soient p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\,\theta)\, \cos(q\,\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

Démontrer que, si l'on a $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.

Calculer $I_{p,p}$.

1.3 Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ définie dans la partie **1** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est-elle orthonormale ?

1.4 Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.5 Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels et P le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k$

2.1 Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que l'on a : $P = \sum_{k=0}^{n} b_k\, T_k$

2.2 Calculer b_n.

2.3 Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geqslant \dfrac{\pi}{2}\, b_n^2$

2.4 En déduire la valeur de :

$$\inf_{(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t \right)$$

Partie 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\,\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **1** .

2. Soit $\mathscr{L} = (L_1, ..., L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, ..., x_n)$, c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_i^j$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker : $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2.1 $\mathscr{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.2 Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$\forall\, G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, G(x_i) \quad \text{avec} \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\},\quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$$

2.3 Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

2.3a Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $R = S\, T_n + U$.

2.3b Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, R(x_i)$$

2.4 Dans toute cette question on fixe un entier naturel k dans $[\![1, n]\!]$.

2.4a On rappelle que $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie 1.).

Montrer que :

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}\, n}{\sin(\theta_k)}$$

Tournez la page S.V.P.

2.4b Soit la fonction $\psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \psi_k(x) = \dfrac{T_n(x)}{(x - x_k)\, T_n'(x_k)} \quad \text{lorsque} \quad x \neq x_k \\ \text{et} \\ \psi_k(x_k) = 1 \end{cases}$

Vérifier que, pour tout x réel, on a : $\psi_k(x) = L_k(x)$.

2.4c Soit $j \in \mathbb{N}$.

Calculer $\lim\limits_{\theta \to \theta_k} \dfrac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$.

En déduire que l'intégrale $u_j = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(j\,\theta) - \cos(j\,\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, \mathrm{d}\theta$ existe.

Montrer que l'on a $\lambda_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{n}\, u_n\, \sin(\theta_k)$.

2.4d Vérifier que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad u_{j+2} - 2\, u_{j+1}\, \cos(\theta_k) + u_j = 0$$

2.4e En déduire que $\lambda_k = \dfrac{\pi}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right)\right)$$

IN CHOISY – 14 1094 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

095

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, E désigne l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

I_3 est la matrice unité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$.

1. Citer le Théorème de Cayley-Hamilton.

En déduire un polynôme non nul annulateur de la matrice A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? Dans E ? Justifier vos réponses.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer A^k.

4. Démontrer que le sous-espace vectoriel F de E engendré par les puissances de la matrice A est de dimension finie.

Exhiber une base $\mathscr{B}$ de F constituée de puissances successives de la matrice A.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k\,!} A^k$$

Justifier que $S_n \in F$.

Donner les composantes de S_n dans la base $\mathscr{B}$ obtenue à la question précédente.

6. Démontrer que $M = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe.

7. Vérifier que $M \in F$ et donner ses composantes dans la base $\mathscr{B}$.

8. Soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté usuel.

Démontrer que M est la matrice dans $\mathscr{C}$ d'une rotation vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

9. Déterminer les valeurs du réel θ pour lesquels $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n^2$ est la matrice d'une symétrie vectorielle.

Exercice 2.

Préliminaires

1. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)$.

On pourra admettre, dans tout le problème et sans le démontrer, le résultat suivant valable lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + o(\ln(n))$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = |\sin(x)|$$

1. **1.1** Donner une représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

1.2 Déterminer les coefficients réels de Fourier de f.

2. Prouver :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}$$

5. Pour tout entier naturel non nul m, on pose :

$$\rho_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)} \, \mathrm{d}x$$

5.1 Justifier l'existence de ρ_m.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) \right) \times \sin(x) = \sin^2\Big((n+1)x\Big)$.

5.3 Démontrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2nm-1}}{4n^2 - 1}$ est convergente.

5.4 En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_m = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2nm-1}}{4n^2 - 1}$$

6. **6.1** Soit $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.

Montrer que g se prolonge en une application continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.2 On note alors pour tout m entier naturel non nul :

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(mx)| \, g(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{x} \, \mathrm{d}x$$

Exprimer ρ_m à l'aide de α_m et β_m.

Tournez la page S.V.P.

7. Soient, pour $u > 0$, $G(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

7.1 Vérifier que la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.2 Trouver une relation entre $G\left(\dfrac{m\pi}{2}\right)$ et β_m pour $m \in \mathbb{N}^*$.

7.3 Soit N la partie entière de $\dfrac{u}{\pi}$; vérifier que l'on a, pour u assez grand :

$$G(u) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N-1} v_n + \int_{N\pi}^u \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

7.4 En déduire la double inégalité :

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1} \leqslant G(u) \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

7.5 Déterminer alors un équivalent de $G(u)$ lorsque u tend vers $+\infty$.

8. En déduire un équivalent simple de ρ_m lorsque m tend vers l'infini.

EXERCICE 3.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

PRÉLIMINAIRES

1. Soit f une application de classe C^n définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

(a) Justifier :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Prouver alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\,x^k + \frac{x^n}{(n-1)\,!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,f^{(n)}(xt)\,\mathrm{d}t$$

2. Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Prouver que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \int_0^x u(x-t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)\,v(x-t)\,\mathrm{d}t$$

3. Soient :

- a, b, c et d des réels tels que : $a < b$ et $c < d$,
- f une application continue de $K = [a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 en la première variable.

3.1 Montrer que l'application H définie sur K par :

$$H(x,y) = \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

possède des dérivées partielles par rapport à x et à y que l'on déterminera.

3.2 Soit G une application de $[a,b]$ dans $[c,d]$ de classe C^1.

Montrer en utilisant la question précédente que l'application F définie sur $[a,b]$ par :

$$F(x) = \int_c^{G(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et admet pour dérivée :

$$F'(x) = f(\,x, G(x)\,) \times G'(x) + \int_c^{G(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 1

Soient φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ des réels fixés.

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1)\quad y^{(n)} = \varphi$$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$X' = AX + B \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

2. Justifier que l'équation (E_1) admet une unique solution h vérifiant :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\quad h^{(k)}(0) = a_k$$

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k\,!}\, x^k + \frac{x^n}{(n-1)\,!} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, \varphi(xt)\,\mathrm{d}t$$

Partie 2

Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $c_1, ..., c_n$ des réels fixés.

On considère les équations différentielles :

$$(E_2)\quad y^{(n)} + c_1\, y^{(n-1)} + ... + c_n\, y = \psi \quad \text{i.e.} \quad y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, y^{(n-k)} = \psi$$

et

$$(H_2)\quad y^{(n)} + c_1\, y^{(n-1)} + ... + c_n\, y = 0 \quad \text{i.e.} \quad y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, y^{(n-k)} = 0$$

Tournez la page S.V.P.

1. Soient s l'unique solution de (H_2) vérifiant les conditions initiales :

$$\forall\, k \in [\![0, n-2]\!],\quad y^{(k)}(0) = 0 \ \text{ et } \ y^{(n-1)}(0) = 1$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^x s(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x s(t)\,\psi(x-t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit ψ_1 la primitive de ψ qui s'annule en 0.

Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \int_0^x s'(x-t)\,\psi_1(t)\,\mathrm{d}t$$

3. En utilisant les préliminaires, démontrer que g est dérivable et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \int_0^x s''(x-t)\,\psi_1(t)\,\mathrm{d}t$$

4. En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = \int_0^x s'(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

5. On admet alors que : $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^x s^{(k)}(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad g^{(n)}(x) = \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

6. En déduire que g est solution de (E_2).

7. Retrouver alors le résultat obtenu à la partie 1.

Application

Soit l'équation différentielle :

$$(E_3)\quad y'' + y = \alpha$$

où α est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\alpha(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } \ x \in [\,0, \pi\,] \\ \pi + x & \text{si } \ x \in [\,-\pi, 0\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Donner une représentation graphique de la fonction α sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant les résultats précédents, déterminer une solution particulière de (E_3).

On donnera les expressions de cette solution sur chacun des intervalles $]-\infty, -\pi[$, $]-\pi, 0\,[$, $]\,0, \pi\,[$ et $]\,\pi, +\infty[$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_3).

Fin de l'épreuve

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

089

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Ce sujet a pour objet l'étude du comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles linéaires du deuxième ordre.
Les deux premières parties, indépendantes entre elles, sont consacrées à des exemples. La troisième partie a pour but d'établir quelques résultats utiles pour la quatrième partie ; ces résultats pourront être éventuellement admis pour traiter la quatrième partie qui est consacrée à l'obtention d'un résultat général.

Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Questions préliminaires

1. Énoncer la formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque.
2. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre pour une fonction $f : x \in I \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\,dt$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
3. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Première partie

On considère les intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

1. Justifier l'existence des intégrales I_1 et I_2 et les calculer.
2. Justifier l'existence de I_3 et la calculer en introduisant la fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$.
3. On considère la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$
   (a) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer, en effectuant une intégration par parties, que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$
4. On se donne une fonction q, définie et de classe C^1 sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que
$$\forall x \in I, \quad q'(x) \leq 0$$
et on considère une fonction z de classe C^2 sur I et solution sur I de l'équation différentielle
$$z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$
   (a) On note $u : x \mapsto q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$. Démontrer que la fonction u est décroissante sur I.
   (b) En déduire que s'il existe un réel $q_0 > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad q(x) \geq q_0,$$
   alors z est bornée sur I.

5. Soit y une fonction définie et de classe C^2 sur $I = [1, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

et z la fonction définie sur I par $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$. Déterminer une fonction q telle que

$$\forall x \in I, \quad z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

6. Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$$

où f est la fonction définie en **3.** de cette partie.

Deuxième partie

Soit y une fonction définie et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère alors la fonction z définie sur $]0, +\infty[$ par $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Démontrer que y est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad 4x^4 y''(x) - y(x) = 0$$

si et seulement si z est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad 4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0.$$

2. (a) Démontrer qu'une série entière $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ à coefficients réels (a_n) et de rayon de convergence non nul R satisfait

$$\forall t \in]-R, R[, \quad 4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0, \quad u(0) = 1$$

si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de la série entière obtenue en (a) à l'aide des fonctions usuelles.

3. Déterminer une solution y de (E_1) sur $]0, +\infty[$ autre que la fonction nulle telle que $\frac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Tournez la page S.V.P.

Troisième partie

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de nombres réels avec $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|f(s) - f(u)| \leq \frac{C}{u}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = f(n^2)$.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On notera L sa limite (on ne demande pas de calculer L).

(c) Démontrer que $f(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

2. Soit g une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ telle que $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a) Démontrer que g' est bornée sur $[0, +\infty[$. On notera alors M un réel tel que $|g'(x)| \leq M$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Démontrer, en citant avec soin le théorème utilisé, que

$$\int_0^1 g'(tx_n)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En déduire que $\dfrac{g(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) En déduire que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit h une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On suppose que h' possède une limite finie L en $+\infty$. Démontrer en considérant la fonction $g : x \mapsto h(x) - Lx$ que $\dfrac{h(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

4. En déduire que si u est une fonction définie et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et telle que u' possède une limite finie L en $+\infty$, alors $\dfrac{u(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Quatrième partie

On se donne une fonction q définie et continue sur $[1, +\infty[$. On considère sur $[1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Soit y une solution de (E) de classe C^2 sur $[1, +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout couple (s,u) de réels tels que $s \geq u \geq 1$, on a

$$y'(s) - y'(u) = -\int_u^s q(t)y(t)\,dt.$$

2. En prenant $u = 1$, déduire du **1.** de cette partie que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\,dt\right) ds.$$

On supposera désormais que la fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et en notant

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)|\,dt,$$

on supposera que $r < 1$.

3. On fixe un réel $A > 1$.

(a) Justifier l'existence du réel $M_A = \max_{x\in[1,A]} \left|\frac{y(x)}{x}\right|$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in [1,A]$,

$$\left|\frac{y(x)}{x}\right| \leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)|\,dt\right) ds.$$

(c) En déduire que

$$M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}.$$

4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$ est bornée sur $[1,+\infty[$.

5. *On suppose de plus que la fonction $t \mapsto t^2q(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.*

(a) Déduire des questions **1.** et **4.** de cette partie l'existence d'un réel $K > 0$ tel que pour tout couple (s,u) de réels vérifiant $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|y'(s) - y'(u)| \leq \frac{K}{u}$$

et en déduire que $y'(x)$ possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) En déduire que $\dfrac{y(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

6. Peut-on affirmer, pour toute solution y de l'équation différentielle (E_1) de la **deuxième partie**, l'existence d'une limite à $\dfrac{y(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.

IN CHOISY - 14 1089 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

090

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice I

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
   Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.
   (b) En déduire que le résultat de 1. est vérifié pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & -c \\ b & 3d \end{pmatrix}$.

   On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

4. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Donner la matrice C de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
7. Que vaut le déterminant de φ ? l'endomorphisme φ est-il inversible ?
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $f^p = \varphi$.

Exercice II

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. On note F_1 le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(-1, 0)$ et F_2 celui de coordonnées $(1, 0)$.

On considère dans $\mathcal{P}$ la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan vérifiant $d(M, F_1)d(M, F_2) = 1$ où $d(M, F_1)$ (respectivement $d(M, F_2)$) est la distance euclidienne entre les points M et F_1 (respectivement F_2).

1. (a) Donner la nature de la conique $\mathcal{C}$ puis, en déterminer l'axe focal, le ou les sommets, le centre éventuel et les asymptotes éventuelles.
   (b) Représenter $\mathcal{C}$.
2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$. Montrer que :
$$M \in \mathcal{L} \iff (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$
3. Préciser les éventuelles symétries de l'ensemble $\mathcal{L}$.
4. (a) Montrer que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\rho = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ est une équation polaire de $\mathcal{L}$ dans le quart de plan $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
   (b) Etudier puis représenter $\mathcal{L}$.
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$
   En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des complexes, on pourra identifier f à l'application qui à un complexe z associe le complexe z^2.
   (a) Montrer que l'image de $\mathcal{L}$ par f est un cercle de centre F_2 et de rayon à déterminer.
   (b) Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par f est une droite passant par F_2 dont on donnera une équation.
6. On note F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par
$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \qquad G(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$
   (a) Montrer que les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ possèdent des points d'intersections dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Calculer le gradient de F et de G.
   (c) En déduire qu'en un point d'intersection de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{C}$, les tangentes à $\mathcal{L}$ et à $\mathcal{C}$ sont orthogonales.
   (d) Représenter les ensembles $f(\mathcal{L})$ et $f(\mathcal{C})$. Que remarque-t-on ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice III

On s'intéresse dans cette exercice à la résolution du problème de Dirichlet suivant :

Etant donné une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, on cherche une fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, & \Delta u(x,y) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

avec $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
Une fonction u vérifiant ces conditions sera dite solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.

On notera i le complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Soient g et h les fonctions définies par $g(x,y) = \arctan(\frac{x}{y+1})$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $h(x) = \arctan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer Δg et vérifier que g est solution du problème de Dirichlet avec h pour condition au bord.
2. Soit k la fonction définie par $k(x,y) = e^{x+iy}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
   (a) Vérifier que k est solution du problème de Dirichlet avec une condition au bord à préciser.
   (b) Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{re^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi$ (on pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle).
   (c) Soient $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Déduire de la question précédente :

$$k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta.$$

On se donne, pour toute la suite de l'exercice, une fonction f, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dx$ les coefficients de Fourier de f.

3. (a) Enoncer le résultat de cours donnant la convergence normale de la série de Fourier d'une fonction vérifiant certaines hypothèses à préciser.
   (b) Vérifier que la série de Fourier de f est normalement convergente.
   (c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n>0} (c_{-n}(f)e^{-inx} + c_n(f)e^{inx})e^{-ny}$ est convergente.

On note alors, pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} e^{-|n|y}$.

4. (a) Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $v_{y_0} : x \mapsto u(x, y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.

   (b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $w_{x_0} : y \mapsto u(x_0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée seconde.

5. Montrer que u est solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.

6. (a) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} e^{inx}$ puis calculer sa somme.

   (b) On note h la fonction 2π-périodique et continue définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$h(x) = \frac{2}{2 - e^{ix}}.$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(h) = \frac{1}{2^n}$ si $n \geq 0$ et $c_n(h) = 0$ si $n < 0$.

   (c) Calculer la solution du problème de Dirichlet construite à la question 5, avec h pour condition au bord (on donnera une expression sans signe somme de cette solution).

7. On revient au cas général et l'on considère $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la solution u construite à la question 5. vérifie :

   $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta.$$

IN CHOISY - 14 1090 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice n°1

On appelle A la matrice carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 2 sur la diagonale et des 1 ailleurs, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice carrée d'ordre $n > 0$ dont le terme général est égal à 1, c'est à dire :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer la matrice J^2 en fonction de la matrice J.

(b) En déduire un polynôme annulateur du second degré de la matrice A.

(c) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

2. (a) Montrer qu'il existe une matrice Q appartenant au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que :
$$A = QDQ^{-1}.$$

(b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A, en déduire la matrice D.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices U carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$$^tUA = AU$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels.

(b) Pour toute matrice U de l'ensemble $\mathcal{E}$, on pose $V = {}^tQUQ$ où la matrice Q est la matrice de la question 2)a). Montrer que :
$$^tVD = DV$$
où D désigne la matrice diagonale de la question 2).

(c) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices V carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$$^tVD = DV$$
On admet que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels, montrer que : $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}$.

(d) En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

4. On appelle φ l'application de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ où X et Y désignent les matrices colonnes formées par les coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

(b) A chaque matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, on associe l'application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que la matrice de u dans la base canonique soit la matrice U.
Montrer que l'application linéaire u est symétrique pour le produit scalaire φ.

(c) En déduire que pour toute matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, il existe une matrice B appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice Δ diagonale appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\begin{cases} U = B\Delta B^{-1} \\ {}^tBAB = I_n \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°2

A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels et à toute suite de réels non nuls $(b_n)_{n\geqslant 1}$ on associe la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier strictement positif.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X)$ son polynôme caractéristique qui est égal à $\det(XI_n - A_n)$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.

2. (a) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.
   (b) Soit λ une valeur propre réelle de la matrice A_n, calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ & \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

   extraite de la matrice $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.
   (c) En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de la matrice A_n.
   (d) En déduire que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ de la matrice A_n admet n racines distinctes.

3. On appelle $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$ où $P'_{n+1}(x)$ et $P'_n(x)$ désignent respectivement les fonctions polynômes dérivées des fonctions polynômes $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.
   (a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$.
   (b) Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout x réel. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour tout $n \geqslant 2$.

4. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n.
   (On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$)

Exercice n°3

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe. On admet alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} dt.$$

   (a) Montrer que I est réelle.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx$.
   Montrer que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

   (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.

   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I .

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4

Des bits d'information, c'est-à-dire des 1 ou 0, sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie, c'est-à-dire qu'un 1 (respectivement un 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.

On note b le bit envoyé et b' le bit en sortie ($b \in \{0,1\}$ et $b' \in \{0,1\}$).

$$b \rightarrow \boxed{\text{canal bruité}} \rightarrow b'$$

Après observation, on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste :

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b : On note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé, (c'est-à-dire $\alpha = P(b = 1)$) et donc $1 - \alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste :
  - On désigne par p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission (c'est-à-dire $p = P(b' = 1|b = 1)$) et donc $1 - p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
  - On désigne par q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission, et donc $1 - q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

1. On a écrit ci-dessus $p = P(b' = 1|b = 1)$. Exprimer de la même manière $1 - p, q$ et $1 - q$ en terme de probabilités conditionnelles.
2. Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?
3. On reçoit le bit 1. Quelle est alors la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit b. On note $b'_1, ..., b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie. On remarque que les valeurs possiblement prises par X sont $0, 1, ..., n$.

$$b \rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{canal bruité}} \rightarrow b'_1 \\ \boxed{\text{canal bruité}} \rightarrow b'_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \\ \boxed{\text{canal bruité}} \rightarrow b'_n \end{cases}$$

4. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres p, q, α.
5. En déduire l'espérance de X en fonction des paramètres p, q, α.
6. Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

Le canal est désormais supposé symétrique, c'est-à-dire que chaque bit, que ce soit un 0 ou un 1, peut-être altéré avec la même probabilité $(1 - p)$. On suppose $\frac{1}{2} < p < 1$.

7. (a) Déterminer en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0 ?

   (b) Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

8. On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à-dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.

   (a) Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

   (b) Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

   (c) Ecrire une fonction `binome` en langage Python qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et retourne la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

   (d) On suppose $p = 0.95$. Ecrire un programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les différentes parties du problème ne sont pas indépendantes. Mais tout résultat d'une partie peut être admis et utilisé dans les parties suivantes.

Pour tout nombre réel $R > 0$, on note $D(0, R)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

Etant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $h^{(n)}$ la dérivée n-ième de h sur I. Si besoin , on pourra noter $h^{(0)} = h$.

Dans tout le problème on note f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie I .

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et possiblement infini tel que $a_0 = 1$. On se propose de démontrer qu'il existe un nombre réel R' tel que $0 < R' \leq R$ et $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R' telle que :

$$\forall z \in D(0, R'), \quad S(z)T(z) = 1.$$

Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < R$.

1. Rappeler la définition précise du rayon de convergence de la série entière S.
2. Justifier que la suite $(|a_n \rho^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. En déduire qu'il existe un nombre réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$|a_n| \leqslant (\frac{K}{\rho})^n.$$

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$b_0 = 1 \text{ et pour } n > 0, b_n = -(\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n-j}).$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|b_n| \leqslant (\frac{2K}{\rho})^n.$$

5. En déduire que la série

$$T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

a un rayon de convergence > 0.

6. Soit R' le minimum des rayons de convergence des séries S et T. Expliciter les coefficients de la série produit $S(z)T(z)$, pour z dans $D(0, R')$.
7. Conclure.

Partie IIA.

Soit f la fonction définie sur la première page.

1. Justifier précisement que la fonction f, restreinte à $\mathbb{R}$, est continue en 0.
2. Soit z un nombre complexe. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $e^z - 1$ en fonction de x et de y.
3. Déterminer l'ensemble des éléments z de $\mathbb{C}$ tels que $f(z) = 0$.
4. Justifier qu'il existe une fonction g définie sur le disque $D(0, 2\pi)$ définie par :
$$\forall z \in D(0, 2\pi), g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$
5. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle. Quel en est le rayon de convergence ?
   (b) En déduire que la fonction f admet un développement en série entière sur $\mathbb{C}$: on montrera qu'il existe une série entière $U(z)$ de rayon de convergence infini telle que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ U(z) = f(z).$$
   Expliciter les coefficients de la série entière U.
6. En utilisant les résultats de la partie I, justifier qu'il existe une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et un nombre réel R dans $]0, 2\pi[$ telle que le rayon de convergence de $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ est supérieur ou égal à R et telle que
$$\forall z \in D(0, R),\ V(z) = g(z).$$
7. (a) Démontrer que la fonction G définie par
$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[,\ G(t) = t + 2g(t),$$
   est une fonction paire.
   (b) Que peut-on en déduire pour les coefficients de la série $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$?

Dans toute la suite du problème, on note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :
$$\forall z \in D(0, R)\ , g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n.$$

On admet qu'on peut prendre $R = 2\pi$.

Tournez la page S.V.P.

Partie II B.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, γ_n est un nombre réel.
2. Expliciter $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.
3. Justifier les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ ,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!} = 0.$$

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, γ_n est un nombre rationnel.
5. Que peut-on dire de γ_n, lorsque n est un entier naturel impair ≥ 3 ?

Partie III.

Pour tout entier naturel n, on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui envoie t sur $(1 - e^t)$.

1. Expliciter un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, centré en 0, tel que

$$\forall t \in I,\ |e^t - 1| < 1.$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels telle que la série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1.

On se propose de démontrer que la série de fonctions $S_h = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Soit $t \in I$. Démontrer que la série $S_h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n(t)$ est convergente.
3. (a) Soit K un segment non réduit à un point contenu dans I. Justifier qu'il existe un nombre réel > 0, qu'on note C_K, tel que

$$\forall t \in K, |e^t| \leqslant C_K.$$

   (b) En déduire que S_h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que

$$\forall t \in I,\ S_h'(t) = -e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n(t).$$

   On citera précisément le théorème utilisé.

   (c) Justifier qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que

$$\forall t \in I,\ S_h'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n h^n(t).$$

4. Démontrer que S_h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I : On pourra démontrer par récurrence sur l'entier naturel $k \geq 1$ que S_h est de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} z^n$ de rayon de convergence au moins 1 telle que que $(S_h)^{(k)}$, la dérivée k-ième de S_h, vérifie

$$\forall t \in I,\ (S_h)^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} h^n(t).$$

Partie IV.

On conserve les notations de la partie III, en particulier la fonction h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 1 - e^t$ et I est l'intervalle ouvert défini dans la question III1.

1. Démontrer que pour tout $t \in I$, $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-e^t)^k}{k+1}$. On justifiera la convergence de cette série de fonctions.

2. (a) Enoncer précisément la formule de Leibniz.

   (b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel k que pour tout entier naturel n tel que $k > n$, $(h^k)^{(n)}(0) = 0$.

   (c) Démontrer que pour tous entiers naturels n, k tels que $k > n$, et pour tout H, fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I,

   $$(Hh^k)^{(n)}(0) = 0.$$

   (d) En déduire que

   $$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(h^k)^{(n)}(0)}{k+1}.$$

   On pourra décomposer $g(t)$, pour $t \in I$, sous la forme

   $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} H(t)$, avec H fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, et tout entier naturel k non nul,

   $$(h^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

   (b) Quelle expression de γ_n peut-on en déduire, pour tout entier naturel n ?

IN CHOISY - 15 1018 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

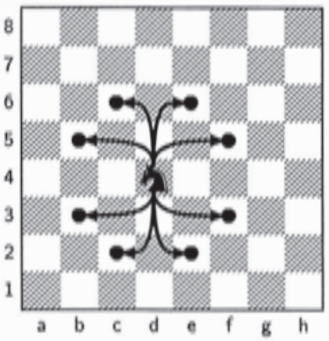
Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Le sujet est constitué de quatre exercices qui testent plusieurs compétences complémentaires des programmes de mathématiques et d'« informatique pour tous » de la filière PSI.
Il est donc demandé au candidat de répartir équitablement son travail sur les quatre exercices proposés. Il en sera tenu compte dans l'évaluation de l'épreuve.

Exercice 1.

But de l'exercice

Le jeu d'échec se joue sur un échiquier, c'est à dire sur un plateau de 8×8 cases. Ces cases sont référencées de a1 à h8 (cf. figure).
Une pièce, appelée le cavalier, se déplace suivant un "L" imaginaire d'une longueur de deux cases et d'une largeur d'une case.
Exemple : un cavalier situé sur la case d4 atteint, en un seul déplacement, une des huit cases b5, c6, e6, f5, f3, e2, c2 et b3 (voir figure ci-contre).



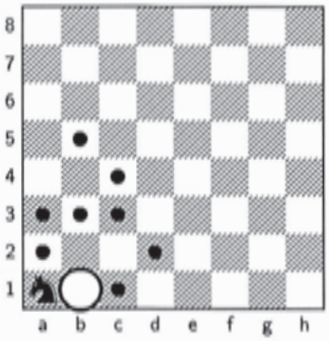
Dans toute la suite de l'exercice, on appellera **case permise** toute case que le cavalier peut atteindre en un déplacement à partir de sa position.

Le but de cet exercice est d'écrire un programme faisant parcourir l'ensemble de l'échiquier à un cavalier **en ne passant sur chaque case qu'une et une seule fois.**

Motivation et méthode retenue

Une première idée est de faire parcourir toutes les cases possibles à un cavalier en listant à chaque déplacement les cases parcourues. Lorsque celui-ci ne peut plus avancer on consulte le nombre de cases parcourues.

- Si ce nombre est égal à $64 = 8 \times 8$, alors le problème est résolu.
- Sinon, il faut revenir en arrière et tester d'autres chemins.



0. Exemple : on considère le parcours suivant d'un cavalier démarrant en a1 (figure ci contre) :

a1, b3, c1, a2, c3, b5, a3, c4, d2.

Avec ce début de parcours, au déplacement suivant :

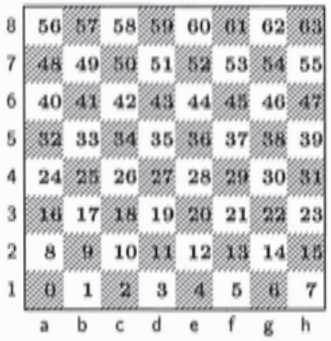
a. le cavalier va en b1. Peut-il accomplir sa mission ?

b. le cavalier ne va pas en b1. Peut-il accomplir sa mission ?

Il convient donc dans la résolution du problème proposé d'éviter de se retrouver dans la situation repérée à la question **0.**

Dans tout ce qui suit, nous nommerons **coordonnées** d'une case la liste d'entiers $[i, j]$ où i représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne (tous deux compris entre 0 et 7). Par exemple, la case b3 a pour **coordonnées** $[2, 1]$.

D'autre part, les cases sont numérotées de 0 à 63 en partant du coin gauche comme indiqué par la figure ci-contre.



Nous appellerons **indice** d'une case le numéro n compris entre 0 et 63 ainsi déterminé. Ainsi la case b3 a pour **indice** 17.

Les questions

1. Écrire une fonction `Indice` qui aux **coordonnées** $[i, j]$ d'une case renvoie son **indice**. Ainsi, `Indice` appliquée à $[2, 1]$ doit renvoyer 17.

2. Écrire une fonction `Coord` qui, à l'**indice** n d'une case renvoie la liste $[i, j]$ de ses **coordonnées**.
Ainsi `Coord` appliquée à 17 doit renvoyer $[2, 1]$.

3. On considère la fonction Python `CasA` suivante :

```
def CasA(n):
    Deplacements = [[1, -2], [2, -1], [2, 1], [1, 2], [-1, 2], [-2, 1], [-2, -1], [-1, -2]]
    L = []
    i, j = Coord(n)
    for d in Deplacements:
        u = i +d[0]
        v = j +d[1]
        if u >=0 and u <8 and v >=0 and v < 8:
            L.append(Indice([u, v]))
    return L
```

3.1 Que renvoient `CasA(0)` et `CasA(39)` ?

3.2 Expliquer **en une phrase** ce que fait cette fonction.

4. Écrire une fonction `Init` ne prenant aucun argument et qui modifie deux variables globales `ListeCA` et `ListeCoups`.
`ListeCoups` recevra la liste vide [].
`ListeCA` recevra une liste de 64 éléments. Chaque élément `ListeCA[n]` (pour $0 \leqslant n \leqslant 63$) devra contenir la liste des **indices** des cases qu'un cavalier peut atteindre en un coup à partir de la case d'indice n.

5. Après exécution de la fonction `Init()`, la commande `>>> ListeCA[0]` renvoie :

a - $[5]$
b - $[10, 17]$
c - $[10, 17, 0]$
d - $[17, 0, 10]$
e - []
f - Elle renvoie une autre valeur.

6. Au cours de la recherche, lorsqu'on déplace le cavalier vers la case d'indice n, cet indice n doit être retiré de la liste des **cases permises** à partir de la position n.

Exemple :
Après exécution de la fonction `Init()`, la liste des cases permises depuis b1 est $[a3, c3, d2]$, et `ListeCA[1]` vaut $[16, 18, 11]$.
La liste des cases permises depuis a3 est $[b5, c4, c2, b1]$ et `ListeCA[16]` vaut $[33, 26, 10, 1]$.
Puis on choisit de commencer le parcours en posant le cavalier en b1. Cette case doit donc être retirée de la liste des cases permises de a3, c3 et d2.
En particulier pour a3, la liste `ListeCA[16]` devient : $[33, 26, 10]$.

Cette méthode nous permet de détecter les blocages :
Le cavalier arrive sur la case d'indice n : n est alors retiré de toutes les listes `ListeCA[k]` pour toute case d'indice k permise pour n.
Si dès lors l'une de ces listes devient vide, nous dirons alors que nous sommes dans une **situation critique**, cela signifiera que la case d'indice k ne peut plus être atteinte que depuis la case d'indice n. Par conséquent :

- si le cavalier se déplace sur une autre case que celle d'indice k, alors cette dernière ne pourra plus jamais être atteinte ;
- si le cavalier se déplace sur la case d'indice k, le cavalier est bloqué pour le coup suivant. Et :
  - soit la mission est accomplie,
  - soit le cavalier n'a pas parcouru toutes les cases..

Le programme va réaliser la recherche en maintenant à jour la variable globale `ListeCoups` afin qu'elle contienne en permanence la liste des positions successives occupées par le cavalier au cours de ses tentatives de déplacement.
Nous avons alors besoin d'écrire trois fonctions :

Tournez la page S.V.P.

6.1 Écrire une fonction `OccupePosition` qui :

- prend comme argument un entier n (indice d'une case), l'ajoute à la fin de la variable globale `ListeCoups`,
- puis enlève n de toutes les listes `ListeCA[k]` pour toutes les cases d'indice k permises depuis la case d'indice n,
- renvoie enfin la valeur `True`, si nous sommes dans une situation critique et `False` sinon.

On pourra utiliser la méthode `remove` *qui permet de retirer d'une liste le premier élément égal à l'argument fourni. Si l'argument ne fait pas partie de la liste, une erreur sera retournée.*

```
L = [1, 2, 3, 4, 2, 5]
L.remove(2)
L
```

Les commandes précédentes renvoient la liste $[1,3,4,2,5]$.

```
L = [1, 2, 3, 4, 2, 5]
L.remove(6)
```

Les commandes précédentes provoquent une erreur.

6.2 Écrire une fonction `LiberePosition` qui ne prend pas d'argument et qui

- récupère le dernier élément n de la variable globale `ListeCoups` (i.e. n est l'indice de la dernière case jouée à l'aide de la fonction `OccupePosition(n)`),
- puis l'enlève de `ListeCoups`,
- et enfin, qui ajoute n à toutes les listes `ListeCA[k]` pour toutes les cases d'indice k permises depuis la case d'indice n.

À la fin de cette fonction les listes `ListeCoups` et `ListeCA` seront donc dans le même état qu'avant l'exécution de la fonction `OccupePosition(n)`.

On pourra utiliser la méthode `pop` *qui renvoie le dernier élément d'une liste et le supprime de cette même liste.*

```
L = [1, 2, 3, 4, 2, 5, 2]
n = L.pop()
```

Les commandes précédentes affectent la valeur 2 *à la variable* n*, la liste* L *étant ensuite :* $[1,2,3,4,2,5]$.

6.3 Écrire une fonction `TestePosition` d'argument un entier n (indice d'une case) qui :

- occupe la position d'indice n.
- vérifie si la situation est critique.

  Si tel est le cas,
  - la fonction vérifiera si 63 cases sont occupées et dans ce cas renverra `True` pour indiquer que la recherche est terminée.
  - Si les 63 cases ne sont pas occupées, la fonction libérera la case d'indice n et renverra `False`.

  Dans le cas contraire,
  - la fonction vérifiera, à l'aide de la fonction `TestePosition(k)`, toutes les cases d'indice k jouables après la case d'indice n. On prendra garde à affecter une variable locale avec la liste `ListeCA[n]` puisque celle-ci risque d'être modifiée lors des appels suivants.
  - La fonction retournera `True` dès qu'un appel à `TestePosition(k)` retourne `True` ou libérera la case d'indice n et retournera `False` si tous les appels à `TestePosition(k)` retournent `False`.

7. Afin de réduire notablement la complexité temporelle du programme on part du principe qu'il faut tester en priorité les cases ayant le moins de cases permises possible. On appellera **valuation** d'une case d'indice n le nombre de cases permises pour cette case.

7.1 Écrire une fonction `valuation` qui prend comme argument un indice n de case en entrée et renvoie la valuation de cette case.

7.2 Écrire une fonction `Fusion` qui prend comme argument deux listes `A` et `B` constituées chacune d'entiers naturels entre 0 et 63 (`A` et `B` sont donc des listes d'indice de cases) ; on suppose que ces listes, `A` et `B` sont triées par ordre croissant de valuation de leurs éléments ; la fonction `Fusion(A,B)` retourne alors comme valeur la liste fusionnée de tous les éléments de `A` et `B` triée par ordre croissant de valuation de ses éléments.

7.3 Écrire une fonction `TriFusion` qui prend comme argument une liste `L` d'entiers compris entre 0 et 63, a priori non supposée triée par valuation croissante de ses éléments, et qui retourne comme valeur la liste de tous les éléments de `L` triée par valuation croissante de ses éléments.

7.4 Modifier la fonction `TestePosition` pour qu'elle agisse ainsi que l'on a décidé en début de question.

Exercice 2.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y-4 & 2x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On note $E_1 = \{u \in \mathbb{R}_+,\ u^2 \notin \mathbb{N}\}$ et E_2 son complémentaire dans $\mathbb{R}_+$.

Prouver que E_2 est un ensemble dénombrable.

3. Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\quad f(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u^2 \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda}{2^{u^2}} \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ tel que f soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Préciser $X(\Omega)$.

4. Déterminer $X^2(\Omega)$ et la loi de probabilité de X^2.

5. Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X^2)$ de la variable aléatoire X^2.

6. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire X^2.

Retrouver alors la valeur de $\mathrm{E}(X^2)$ obtenue à la question précédente.

7. Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de la variable aléatoire X et suivant la loi :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(Y = u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \notin \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{2^{u+1}} \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit alors Z la variable aléatoire définie sur Ω par : $Z = X^2 + Y$.

Déterminer la fonction génératrice de Z. En déduire sa loi de probabilité.

8. Déterminer enfin la probabilité pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Y-4 & 2X \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3. On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

3. Calculer $f(1)$. (On pourra utiliser l'application $\varphi : u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \varphi(u) = \mathrm{ch}(u)$).

4. Calculer $f(2)$. (On pourra remarquer que la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ est égale à $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$)

5. Vérifier que f est positive sur I.

6. Montrer que f est décroissante sur I.

7. Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$.

   Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8. Soit $x \in I$. Démontrer la relation :
$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$
   On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10. Pour tout réel x strictement positif, on pose :
$$\phi(x) = x\, f(x)\, f(x+1)$$
    Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$.

    Calculer $\phi(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

12. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)\, f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$.

    En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

13. En utilisant des parties entières, prouver que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$

14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15. Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, pour tout entier naturel k, on identifie polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et fonction polynomiale associée pour la structure d'espace vectoriel normé.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ unitaire (le terme de plus haut degré de P est égal à 1).

1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |z - \alpha| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|$.

1.2 On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

En utilisant une factorisation de P, montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$$

où $\deg(P)$ désigne le degré du polynôme P.

1.3 On prend dans cette question $P(X) = X^3 + 1$.

(*a*) Donner une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

(*b*) Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que : $|P(z_0)| < |\mathrm{Im}(z_0)|^{\deg(P)}$

1.4 On suppose dans cette question que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$

Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

1.5 Enoncer clairement le résultat obtenu.

2. Soient q un entier naturel non nul et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A.

On appelle pour tout entier naturel n, P_n le polynôme caractéristique de A_n et P celui de la matrice A.

2.1 Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.

2.2 Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = P(x)$.

2.3 En déduire que A est trigonalisable.

2.4 Qu'en conclut-on pour l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$?

3. On prend dans cette question $q = 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{n} & 1 - \dfrac{\sin n}{n} \\ 0 & 1 + \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$. Où n est un entier non nul.

3.1 Déterminer $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

3.2 Etudier la diagonalisabilité des matrices A_n et A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3 Conclure.

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Dans tout le problème :

(a) E est un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(\,|\,)$ et la norme associée $\|\ \|$,

(b) $\mathscr{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E,

(c) $T(E)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient :

$$\forall x \in E, \quad (u(x)|x) \geqslant 0$$

Préliminaires

1. Justifier que $T(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $\mathbf{tr}(M)$ la trace de la matrice M. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

2.1 Prouver que : $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$

2.2 On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathbf{tr}(A)$ et $\mathbf{tr}(B)$.

2.3 Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.

3. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.

Soit H un hyperplan de E et G son complémentaire dans E.

Répondre en le démontrant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses

(1) G est un sous-espace supplémentaire de H.

(2) Pour tout vecteur a de G, Vect(a) est supplémentaire de H dans E.

(3) Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, Vect(a) est supplémentaire de H dans E.

(4) Le noyau de l'application $\mathbf{tr}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

(5) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

4. Montrer que l'application :

$$(f,g) \in \mathscr{S}(E)^2 \longmapsto < f,g >= \mathbf{tr}(f\,o\,g)$$

est un produit scalaire.

On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie 1

Soient $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad u_a(x) = (x|a)\ a$$

1. Montrer que $u_a \in T(E)$.

2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.

2.1 Ecrire la matrice de u_a dans une base $\mathscr{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $(\text{Vect}(a))^{\perp}$.

2.2 Déterminer alors $\mathbf{tr}(u_a)$ et $\mathbf{tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.

2.3 Soit f un endomorphisme de E.

Déterminer les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_a$ dans la base $\mathscr{B}$ définie précédemment.

2.4 Calculer alors $\mathbf{tr}(f \circ u_a)$ en fonction de a.

3. Soit $u \in T(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\text{Im}(u)$.

3.1 Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.

3.2 Prouver que : $\forall x \in E,\ u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}\ (x|b)\ b$.

3.3 En déduire que $\mu > 0$.

3.4 Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

4. L'application $\varphi : a \in E \longmapsto \varphi(a) = u_a \in T(E)$ est-elle :

- injective ?
- surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème f est un endomorphisme de $\mathscr{S}(E)$, fixé.

Pour tout vecteur x de E, on pose $\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2$ et $m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$.

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, soit $h_x : t \in \mathbb{R} \longmapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$.

1. Justifier l'existence de $m(f)$.

2. Prouver que : $\forall x \in E,\ \Phi(x) = [N(f)]^2 - 2\,(x|f(x)) + \|x\|^4$.

3. Montrer que h_x est une fonction polynômiale dont on précisera les coefficients.

Tournez la page S.V.P.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{C} = (e_1, ..., e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = \lambda_i\, e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_p$$

5. Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.

6. Exprimer $\alpha = \underset{z\in E,\ \|z\|=1}{\text{Sup}} (z|f(z))$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs z de E unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.

7. On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.

7.1 Déterminer $h'_a(0)$

7.2 Prouver que $f(a) = \|a\|^2\, a$.

7.3 Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de E de norme 1 :

$$\Phi(a+ty) - \Phi(a) = t^2\ \left[\,(\,t + 2\,(y|a)\,)^2 + 2\,\left(\|a\|^2 - (y|f(y))\,\right)\right]$$

7.4 Prouver que :

$$m(f) = \Phi(a) \iff \begin{cases} f(a) = \|a\|^2\, a \\ \text{et} \\ \forall\, y \in E \ \text{ tel que } \ \|y\| = 1,\ \ (y|f(y)) \leqslant \|a\|^2 \end{cases}$$

8. On suppose que $\lambda_p \leqslant 0$.

8.1 Prouver que : $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

8.2 Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomorphisme qui a été défini à la question **5.** des préliminaires.

9. On suppose que $\lambda_p > 0$.

9.1 Démontrer que $m(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$.

9.2 Prouver que : $m(f) = \Phi(x) \iff \begin{cases} x \in \ker\,(f - \lambda_p\,\mathrm{Id}_E) \\ \text{et} \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que :

$$\begin{cases} \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \ m_{ij} \geqslant 0 \\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1 \end{cases}$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

1.1 Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

1.2 Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{j \in [\![1,p]\!]}{\text{Max}} |x_j|$.

En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, prouver que $|\lambda| \leqslant 1$.

1.3 Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$. (On ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$).

1.4 En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $T(E)$ tel que : $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.

1.5 Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

Calculer $m(f_B)$.

Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.

3. On prend dans cette question $p > 1$.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

3.1 Déterminer les éléments propres de la matrice C.

3.2 Calculer $m(f_C)$.

3.3 Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in T(E)$ tel que $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$.

3.4 Cet endomorphisme w est-il unique ?

IN CHOISY - 15 1028 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Les quatre exercices sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on désigne par $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ tous nuls exceptés ceux tels que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad a_{k+1,k} = n-k, \quad a_{k,k+1} = k.$$

1 **1.a)** On prend $n = 2$. A_2 est- elle diagonalisable ? A_2 est-elle inversible ?

1.b) On prend $n = 3$. A_3 est -elle diagonalisable? A_3 est- elle inversible?

2 Dans cette question seulement on prend $n = 4$. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ notée simplement A et soit le polynôme $Q(X) = (X^2-1)(X^2-9)$.

2.a) Calculer les matrices A^2 et $Q(A)$.

2.b) Justifier que A est diagonalisable.

2.c) Déterminer une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients entiers, inversible et telle que $\Delta^{-1}A\Delta = D$ soit une matrice diagonale notée $diag(a,b,c,d)$ avec $a > b > c > d$.

2.d) Montrer que $\Phi : M \mapsto \Delta M \Delta^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et justifier que Φ est bijectif.

2.e) Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si N est une matrice diagonale.

2.f) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / \quad AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et, en utilisant les questions précédentes, déterminer sa dimension.

2.g) Justifier que la famille (I_4, A, A^2, A^3) est une base de $\mathcal{C}_A$ (où $I_4 = diag(1,1,1,1)$).

3 On note ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré $\leqslant n-1$, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de E.

Si $P(X) \in E, P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

3.a) Justifier que l'application $\varphi : P(X) \mapsto (n-1)XP(X) + (1-X^2)P'(X)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et calculer $\varphi(X^h)$ pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$.

3.b) Comparer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice A_n définie en préliminaire.

3.c) Pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le polynôme $P_h = (X-1)^h(X+1)^{n-1-h}$. Déterminer le réel λ_h tel que $\varphi(P_h) = \lambda_h P_h$. Que peut-on déduire de ce calcul ?

3.d) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.e) Préciser selon n dans quel cas A_n est inversible.

3.f) Montrer l'existence d'une matrice $U_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(U_n)^3 = A_n$.

Exercice 2

1 **1.a)** Rappeler la définition de la fonction Arctan, ainsi que son tableau de variation et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x, on a : $|\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

1.b) Étudier et représenter la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\cup]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}[, \qquad g(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x)).$$

1.c) Pour $x > 0$, soit $\psi(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer la dérivée $\psi'(x)$.

En déduire une relation entre $\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

1.d) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan sur $]-1, 1[$.

2 On considère la fonction h définie par $h(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}.$$

2.a) Justifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $h(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)}$.

On traitera le cas $|x| < 1$ et on étendra le résultat au cas $|x| = 1$, en utilisant un argument à préciser sur la continuité sur $[-1, 1]$ de la somme de la série de fonctions.

2.b) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (*on raisonnera sur* $]-1, 1[$ *puis sur* $\mathbb{R}$.)

3 Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3.a) Montrer que H est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; préciser H'.

3.b) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x) = H(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.
Pour cela, on pourra utiliser G'.

3.c) Soit $f(x) = \dfrac{H(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est développable en série entière sur $[-1, 1]$, et f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.d) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

4 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t\,(t^2+1)}\, dt$.

4.a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

4.b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *On précisera bien le théorème utilisé.*

4.c) Déterminer $\varphi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (avec une expression sans intégrale), si $x \neq 1$ puis $x = 1$. *Pour cela on pourra utiliser la relation :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$

4.d) En déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout réel x.

4.e) Si $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et calculer $K(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\, d\theta$.

4.f) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))\, d\theta$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ étant orthonormale et directe. On notera $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire tel que si $X, Y \in E$, $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1 On considére les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ définis par :

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y \rangle = \langle X, u(Y) \rangle\},$$
$$\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y \rangle = -\langle X, u(Y) \rangle\}.$$

1.a) Justifier que $\mathcal{S}(E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (on l'admettra pour $\mathcal{A}(E)$) et montrer que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E)$ est réduit à l'endomorphisme nul.

1.b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, avec $u : X \mapsto MX$.

Montrer que :

(i) $u \in \mathcal{S}(E) \iff {}^tM = M$, $\qquad$ (ii) $u \in \mathcal{A}(E) \iff {}^tM = -M$.

1.c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On lui associe $\hat{u} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{u}) = {}^tM$.

Montrer que $(u + \hat{u}) \in \mathcal{S}(E)$ et que $(u - \hat{u}) \in \mathcal{A}(E)$

1.d) Conclure que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

2 **2.a)** Soit $\sigma \in \mathcal{S}(E)$. Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et de trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall\, V \in E, \quad \sigma(V) = \lambda_1 \langle e_1, V \rangle e_1 + \lambda_2 \langle e_2, V \rangle e_2 + \lambda_3 \langle e_3, V \rangle e_3.$$

2.b) Préciser dans quel cas σ est une projection orthogonale, ou alors une symétrie orthogonale.

2.c) Exemple 1. Soit σ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour σ comme en **2.a)**.

3 Soit $\alpha \in \mathcal{A}(E)$ non nul.

3.a) Montrer que $Ker(\alpha)$ et $Im(\alpha)$ sont orthogonaux, puis que $E = Ker(\alpha) \oplus Im(\alpha)$.

3.b) Montrer que $Im(\alpha)$ est stable par α et que l'endomorphisme $\tilde{\alpha}$ induit par α sur $Im(\alpha)$ ne peut pas avoir de valeur propre (réelle). En déduire que α est de rang 2.

3.c) Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et d'un réel $k \neq 0$ tels que : $\qquad \forall\, V \in E, \quad \alpha(V) = k\,(\langle e_1, V \rangle e_2 - \langle e_2, V \rangle e_1)$.

3.d) Exemple 2. Soit α tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et $k \neq 0$ associés à α (cf. **3.c)**).

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et la rotation $r \in SO(E)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère aussi $\hat{r}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{r}) = {}^t\,(Mat_{\mathcal{B}}(r))$.

Donner la décomposition de $\sigma = \frac{r + \hat{r}}{2}$ comme en **2.a)**, ainsi que de $\alpha = \frac{r - \hat{r}}{2}$ comme en **3.c)** lorsque $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

On s'intéresse aux nombres de **Fibonacci** définis par récurrence par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1 **1.a)** Écrire en langage Python une fonction "$fib(n)$" permettant le calcul de F_n.

1.b) On peut démontrer et on l'admettra, que ces nombres vérifient les relations suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$F_n = 2F_{\frac{n}{2}-1}F_{\frac{n}{2}} + (F_{\frac{n}{2}})^2$ si n est pair, $\qquad F_n = (F_{\frac{n-1}{2}+1})^2 + (F_{\frac{n-1}{2}})^2$ si n est impair.

Vérifier cette propriété en calculant ainsi F_6.

Compléter l'écriture de la fonction "$fibb(n)$" ci-dessous permettant de calculer F_n, on commencera au dernier "else" sur la copie en rajoutant les instructions manquantes.

```
def fibb(n):
    if n <= 1:
        return n
    else :
        if n%2 == 0:
            a = fibb(n//2)
            b = fibb(n//2 - 1)
            return a * (2 * b + a)
        else : ...
```

2 **2.a)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les coefficients de A^n au moyen des nombres de Fibonacci F_{n+1}, F_n et F_{n-1}.

2.b) Écrire en langage Python une fonction "$fibbb(n)$" permettant le calcul de F_n en utilisant le calcul de A^n (dont le calcul doit intervenir dans le programme).

2.c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$.

3 **3.a)** Montrer la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et exprimer $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ au moyen de $L = \lim_{p \to +\infty} \frac{F_p}{F_{p+1}}$ (dont l'existence résulte de la convergence de la série).

3.b) Grâce à une propriété concernant les séries alternées et que l'on rappellera, étant donné $\varepsilon > 0$, écrire un algorithme (en français ou alors en langage Python) permettant de calculer une valeur approchée de L au moyen d'une somme partielle de cette série, avec une précision inférieure à ε.

4 On note $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On peut montrer et on l'admettra, que l'on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \varphi^n\right)$$

4.a) Calculer L de **3.a)** au moyen de Φ.

4.b) Pour tout $x \in]\varphi, -\varphi[$, montrer la convergence de la série ainsi que l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

IN CHOISY – 15 1022 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans tout le problème, on note tan la fonction tangente.

Etant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I. La notation $f^{(0)}$ désigne f.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie IA .

1. Quelle est la période de la fonction tan ?
2. Représenter la fonction tan sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
3. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - $T_0(X)=X$,
   - et pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :

$$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n)}(x)=T_n(\tan(x)).$$

   On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.
4. Expliciter les polynômes T_1,T_2,T_3.
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?
6. Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geq 1,\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{t_j}{(2j+1)!}x^{2j+1}+\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}T_{2n+2}(\tan(t))dt.$$

   On citera précisément le théorème utilisé.

Partie IB.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0\in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit f une fonction de la variable réelle x de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et R_n la fonction définie pour $x\in I$ par :

$$R_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

On suppose que f est impaire et que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x dans I tel que $x\geq 0$, $f^{(n)}(x)\geq 0$.

7. Soit $x\in I$. Pour tout entier naturel non nul n, justifier l'égalité :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

8. Soit $b\in I$ tel que $b>0$.
   (a) Démontrer que la suite $(R_n(b))_{n\geq 1}$ est convergente.
   (b) Soient $x\in[0,b]$ et n un entier naturel non nul.

i. Justifier l'égalité :

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}dt.$$

ii. En déduire que :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}dt.$$

iii. Démontrer que :

$$R_n(x) \leqslant (\frac{x}{b})^n R_n(b).$$

(c) En déduire que pour tout x dans $]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On justifiera précisément la convergence de la série.

9. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été définie dans la question IA6, démontrer que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

10. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$? Justifier votre réponse.

Partie II A.

Soit n un entier naturel ≥ 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note P' son polynôme dérivé.

Pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\psi_n(P)$ l'application de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \psi_n(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

1. Calculer $\psi_n(X^i)$, pour $i \in \{0, \cdots, n\}$.
2. Vérifier que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi_n(P)$ est une application polynomiale de degré $\leq n$.
3. Démontrer que ψ_n, l'application qui associe à P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi_n(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice de ψ_n sur la base $(1, X, ..., X^n)$.
5. Démontrer que ψ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. L'endomorphisme ψ_n est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Tournez la page S.V.P.

7. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Justifier qu'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $Q' = P$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_n(P)(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
   (c) Démontrer que $\psi_n(P)'$ le polynôme dérivé du polynôme $\psi_n(P)$ vérifie $\psi_n(P)' = \psi_n(P')$.

Partie II B.

8. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :
   (a) $S_0 = 1$,
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}, S'_{k+1} = (k+1)S_k$,
   (c) $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 1, \int_0^1 S_k(t)dt = 0$.
9. Expliciter les polynômes S_1, S_2 et S_3.
10. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que S_k est un polynôme unitaire de degré k.
11. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, démontrer l'égalité $S_k(0) = S_k(1)$.
12. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que S_m vérifie l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ S_m(1-x) = (-1)^m S_m(x).$$

    On pourra utiliser l'unicité de la suite définie par les conditions de la question IIB9.
13. Pour un entier naturel $k \leq n$, démontrer que S_k est l'unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$.

Dans toute la suite, on note $\sigma_k = S_k(0)$, pour tout entier naturel $k \leq n$. Ainsi, $\sigma_0 = 1$.

14. Expliciter les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.
15. On suppose $n \geq 3$. Démontrer que $\sigma_k = 0$, pour tout entier naturel impair k tel que $3 \leq k \leq n$.
16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k}.$$

17. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0.$$

18. Expliciter un programme en python qui permet de calculer σ_{50}.

Partie III .

Dans cette partie, on considère la série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} z^n.$$

On **admet** que la série entière à un rayon de convergence $R > 0$. On note D son disque de convergence.

1. Démontrer que pour tout z dans D, $e^z S(z) = z + S(z)$

2. Soit la fonction T définie par :

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z(e^{2iz}+1)}{(e^{2iz}-1)}, & \text{si } 0 < |z| < \pi \\ \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

   Démontrer qu'il existe un nombre réel ρ, $\rho \in]0, R]$, tel que T admet un développement en série entière sur le disque de centre 0 et de rayon ρ. Exprimer les coefficients de ce développement en série entière en fonction de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En utilisant l'égalité (qu'on justifiera)

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}, \quad i\tan x = \frac{2(e^{4ix}+1)}{(e^{4ix}-1)} - \frac{(e^{2ix}+1)}{(e^{2ix}-1)},$$

   déterminer pour tout entier naturel n, une expression de t_n en fonction de σ_n.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1023 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et on pose $F = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$ *et* $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AB = BA\}$. *Dans cet exercice, la transposée d'une matrice* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est notée* $M^\top$.

Partie 1 – Réduction de la matrice A

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A puis une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que P est orthogonale et $P^\top AP$ est diagonale.

Dans la suite, on pose $D = P^\top AP$.

Partie 2 – Étude de $\mathscr{C}(A)$

3. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que $F \subset \mathscr{C}(A)$.

5. Pour une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, établir l'équivalence :

$$B \in \mathscr{C}(A) \iff P^\top BPD = DP^\top BP$$

6. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

7. Démontrer que $\mathscr{C}(A) = F$.

8. La matrice A^3 appartient-elle à F (on justifiera la réponse) ?

Partie 3 – Étude du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Ker}(A)$

9. On note p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Ker}(A)$ et B la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $B \in \mathscr{C}(A)$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + y = v$$

où v *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique et impaire telle que :*

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ v(t) = t$$
$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ v(t) = \pi - t$$

On va étudier différentes méthodes de résolution approchée de l'équation différentielle (E) *sur* $[0,\pi]$.

1. Représenter graphiquement la fonction v sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Partie 1 – Approximation dans un espace préhilbertien réel

On note $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions qui sont définies sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et continues ; on rappelle que* $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*). On note* E *l'ensemble des fonctions* f *appartenant à* $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ *qui sont* 2π*-périodiques et impaires. Pour des éléments* f *et* g *de* E*, on pose :*

$$\varphi(f,g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

(on notera également $\big(f\,/\,g\big)$ *à la place de* $\varphi(f,g)$*). Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit la fonction*

$$s_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(nt)$$

2. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}(\mathbb{R})$.

3. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de E.

5. Démontrer que $(v\,/\,s_1) = 2$ et $(s_1\,/\,s_1) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Calculer $(v\,/\,s_2)$.

7. Déterminer le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Vect}(s_1, s_2)$ où v est la fonction définie en introduction. Ce projeté orthogonal est noté v_2.

8.

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = \sin(t)$.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = v_2$. Déterminer la solution qui s'annule en 0.

Partie 2 – Utilisation de la méthode d'Euler

On considère la fonction f*, solution de* (E) *sur* $[0,\pi]$ *et telle que* $f(0) = 0$*. On considère un entier* $N \geq 1$ *et* $N+1$ *réels* $t_0, \ldots, t_N$ *dans l'intervalle* $[0,\pi]$ *régulièrement espacés. On note* $y_0, \ldots, y_N$ *les valeurs approchées de* $f(t_0), \ldots, f(t_N)$ *obtenues par application de la méthode d'Euler. On utilise dans la suite le langage de programmation* PYTHON*. On pourra supposer que la constante* π *est définie et accessible dans une variable* `pi`*.*

9. Définir en PYTHON la fonction `v_0_pi(t)` qui renvoie la valeur de $v(t)$ en supposant que $t \in [0,\pi]$.

10. Définir en PYTHON la fonction `v(t)` qui renvoie la valeur de $v(t)$ pour tout réel t.

11. Écrire les commandes permettant de construire les listes `t` et `y` de taille $N+1$ contenant respectivement les valeurs $t_0, \ldots, t_N$ et $y_0, \ldots, y_N$.

Tournez la page S.V.P.

Partie 3 – Utilisation d'un calcul approché d'intégrale

On utilise toujours le langage de programmation PYTHON.

12. Écrire une fonction `rectangles(u,a,b,n)` qui détermine une valeur approchée de $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ par application de la méthode des rectangles sur l'intervalle $[a,b]$. On supposera que u représente une fonction définie et continue sur $[a,b]$.

13. Écrire les commandes PYTHON permettant d'afficher une valeur approchée du nombre $\dfrac{(v/s_3)}{(s_3/s_3)}$ en utilisant la méthode des rectangles avec $n = 100$.

Exercice 3

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \quad et \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

3. Soient a et b des réels avec $b > a > 0$. Démontrer que F est de classe C^1 sur $]a,b[$. Que peut-on en déduire ?

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

puis établir que $F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t - 1 \leq F(x)$.

6. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

7. Étudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

8. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

9. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

10. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, établir la convergence l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.

11. Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-2nxt}$$

12. En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Exercice 4

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathbf{Cov}(X, N)$.

7. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbf{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

8. On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

IN CHOISY – 16 1110 – D'après documents fournis

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les différentes parties de ce problème ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous le problème, on note e^x l'exponentielle du nombre réel x et $\ln y$ le logarithme népérien du nombre réel strictement positif y.

Etant donnée une fonction f à valeurs réelles, on rappelle qu'un zéro de f est un élément u tel que $f(u) = 0$.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Rappeler la définition d'une fonction convexe.
2. Justifier le fait que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.
3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Soit θ dans l'intervalle $]0,1[$. Démontrer l'inégalité :

$$a^\theta b^{(1-\theta)} \leq \theta a + (1-\theta)b.$$

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$.

4. (a) Que vaut $\int_u^v t^{x-1}dt$?
   (b) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge absolument. Quelle est sa valeur ?
5. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
6. (a) Déterminer la limite lorsque t tend vers 0 de $t^{x/2}\ln t$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
7. On suppose que $x \in [u,v]$.
   (a) Justifier que $|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}| \leq (\ln t)^2 t^{u-1}$, pour tout t dans $]0,1]$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
8. Soit F l'application définie par, pour x, un nombre réel strictement positif:

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$$

   Démontrer que F définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde. On citera explicitement le théorème utilisé.

Partie III

9. Soit x un nombre réel strictement positif. Déterminer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t/2}$.
10. En déduire que :
    (a) l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.
    (b) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

(c) l'intégrale $\int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

11. Soit G l'application définie par, pour x nombre réel strictement positif:

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Démontrer que G définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa derivée et sa derivée seconde.

Partie IV

On peut donc définir la fonction Γ de la variable réelle x strictement positive en posant :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Comme $\Gamma = F + G$, on sait que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

12. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

13. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$.

14. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

15. Justifier que la fonction Γ' admet au moins un zéro situé dans l'intervalle $]1,2[$. On citera explicitement le théorème utilisé.

16. Justifier que la fonction Γ est une fonction convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

17. Justifier que la fonction Γ' admet un unique zéro, noté α, dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et que la fonction Γ admet un minimum global en α.

18. Représenter le graphe de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$.

Partie V

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$, est dite ln-*convexe* si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \theta \in [0,1],\ \ln\left(f(\theta x + (1-\theta)y)\right) \leq \theta \ln\left(f(x)\right) + (1-\theta)\ln\left(f(y)\right).$$

La fonction f est donc ln-convexe si et seulement si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

19. Soit c un nombre réel. Justifier le fait que la fonction $x \mapsto e^{cx}$ est ln-convexe sur $\mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

20. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$ ln-convexe. Démontrer que f est convexe. La réciproque est-elle vraie? Si oui, on justifiera précisément sa réponse et si non, on donnera un contre-exemple.

21. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$. On suppose que, pour tout nombre réel c strictement positif, la fonction g_c définie pour x dans I par $g_c(x) = e^{cx}f(x)$ est convexe.

    Soient x, y dans I, $x < y$, et θ dans $]0,1[$.

    (a) Justifier $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x) + (1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y)$.

    (b) Soit H la fonction définie pour c dans $\mathbb{R}^+$ par : $H(c) = \theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x) + (1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y)$.

        i. Déterminer la limite de $H(c)$ lorsque c tend vers $+\infty$.

        ii. On admet que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et un calcul élémentaire qu'on ne demande pas de faire montre que sa fonction derivée H' s'annule en un unique nombre réel c_0 en changeant de signe, le nombre c_0 vérifiant la relation :

$$e^{c_0(x-y)} = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

        Démontrer que $H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{(1-\theta)}$.

        iii. Etablir le tableau de variations de H. Que représente le point c_0 pour la fonction H ?

    (c) Justifier que f est ln-convexe.

22. Soient c et θ des nombres réels strictement positifs. On note $\varphi_{c,\theta}$ la fonction de la variable réelle x définie pour x dans $]0,+\infty[$ par :

$$\varphi_{c,\theta}(x) = \theta^{x-1}e^{-\theta}e^{cx}.$$

    Démontrer que $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

23. En déduire que la fonction Γ est ln-convexe sur $]0,+\infty[$.

Partie VI

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ telle que :

- g est une fonction ln-convexe
- $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x+1) = xg(x)$,
- $g(1) = 1$.

On pose $G = \ln g$.

24. Exprimer $g(n)$ en fonction de l'entier naturel n, $n \geq 1$.

25. Soient x dans $]0,1[$ et n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

(a) Justifier les inégalités :

$$G(n) - G(n-1) \leq \frac{G(x+n) - G(n)}{x} \leq G(n+1) - G(n) \cdot$$

(b) En déduire que

$$(n-1)^x (n-1)! \leq g(x+n) \leq n^x (n-1)! \cdot$$

Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et soit x dans $]0,1]$. On pose :

$$u_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \cdot$$

Soit x dans $]0,1[$.

26. Démontrer pour un entier $n > 2$:

$$(\frac{n-1}{x+n-1}) u_{n-1}(x) \leq g(x) \leq u_n(x) \cdot$$

27. On se propose de démontrer que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$ converge vers $g(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(a) Soit α dans $]0,+\infty[$. Justifier que $(1+\alpha)^x - 1 \leq \alpha x$.

(b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$.

(c) Conclure.

28. En déduire que $g = \Gamma$.

IN CHOISY - 16 1111 - D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\,x^{n-1}$

1.3 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

2. On prend dans cette question, $a_n = \dfrac{1}{n\,\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.

2.1 Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2 Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$?

2.3 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,a_n$.

2.4 Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$?

3. On suppose dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n\,a_{2n} \leqslant u_n$.

3.2 En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,a_{2n}$.

3.3 Démontrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$.

3.4 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.5 A-t-on $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1 Vérifier que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n,\ \ B_n \geqslant A_m - m\,a_{n+1}$.

4.2 En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3 Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n, on note $e_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x}$.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ défini par : $E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, ..., e_N)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

2. Pour tout élément g de E, on note $\Delta(g) = g'$.

2.1 Démontrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$

2.2 Ecrire la matrice A de Δ dans la base $\mathscr{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?

2.3 Déterminer les éléments propres de Δ. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

3. Soient $k \in [\![0, N]\!]$ et $x \geqslant 0$.

Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x + n)$ est convergente.

4.

4.1 Pour tout entier naturel k, on considère une suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,k}$ converge .

Citer le théorème du cours qui justifie que l'on a pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$.

4.2 Soit $f \in E$.

Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n + x)$ est convergente pour tout $x \geqslant 0$.

On note alors $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n + x)$.

4.3 Justifier que la série de terme général $n^j \, \mathrm{e}^{-n}$ pour tout j fixé de $\mathbb{N}$ est convergente.

On note alors $A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j \, \mathrm{e}^{-n}$.

4.4 Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geqslant 0$.

4.5 En déduire que $F \in E$ et que l'application $\Phi : f \longmapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.

5. Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des A_j.

L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3.

1. Programmes mystères

1.1 On donne les programmes python P0 et P1 suivants. Que renvoient les appels `P0(5)` , `P1(5)` et `P0(9)` , `P1(9)` ?

Dire en une phrase ce que fait chacun des programmes P0 et P1 ?

P0

```
def P0(N) : # N entier naturel
    if N == 1 :
        return False
    if N == 2 :
        return True
    for d in range(2,N) :
        if N % d == 0 :
            return False
        return True
```

P1

```
def P1(N) : # N entier naturel
    if N == 1 :
        return False
    if N == 2 :
        return True
    for d in range(2,N) :
        if N % d == 0 :
            return False
    return True
```

1.2 En une phrase dire ce que fait le programme python, `P2`, qui utilise le programme P1 précédent :

```
def P2(N) : # N entier naturel
    L = []
    k = 0
    n = k * k + 1
    while n <= N :
        if P1(n) :
          L.append(n)
        k = k + 1
        n = k * k + 1
    return L
```

Que renvoie l'appel `P2(127)` ?

1.3 Écrire une fonction `nextPrime` en langage python qui prend un argument entier `N` et qui retourne comme valeur le premier nombre premier qui est strictement supérieur à `N`.

1.4 Nombres jumeaux

On appelle *couple de nombre premiers jumeaux* toute liste `[p,q]` telle que `p,q` sont deux nombres premiers vérifiant `p < q` et `q = p + 2`. Par exemple `[3,5]`, ou`[11,13]` sont des couples de nombres premiers jumeaux alors que `[2,3]` ne l'est pas.

1.4a Écrire à l'aide de la fonction `nextPrime` précédente, une fonction python nommée `jumeau`, prenant comme argument un entier `N` et renvoyant le couple `[p,q]` de nombres premiers jumeaux tel que `p` strictement supérieur à `N` et le plus petit possible.

Par exemple, `>>> jumeau(5)`, renvoie comme valeur : `[11, 13]`

1.4b Écrire avec les mêmes consignes une fonction, `lesJumeaux`, prenant en argument un entier `N` et renvoyant la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux `[p,q]` tels que `q` soit inférieur ou égal à `N`.

Par exemple, `>>> lesJumeaux(18)`, retourne : `[[3, 5], [5, 7], [11, 13]]`
(le couple `[17,19]` n'en fait donc pas partie.)

2. Fonction récursive

On considère la fonction définie comme suit en python :

```
1 def M(n) :
2     if n > 100 :
3         return n - 10
4     else :
5         return M (M (n + 11))
```

2.1 Que fait l'appel `M(101)` ?

2.2 Plus généralement, que fait l'appel `M(N)` si `N` > 100 ?

2.3 Que renvoient l'appel `M(100)` ? Puis `M(99)`, `M(98)` ?

2.4 Conjecturer ce que renvoie l'appel `M(N)` où `N` $\leqslant 100$, entier naturel, puis le démontrer.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul.

Préliminaires

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$ est-il stable par l'endomorphisme u ? Justifiez votre réponse.

2. Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E par :

$$u(e_1) = e_3,\ u(e_2) = e_4,\ u(e_3) = u(e_4) = 0$$

2.1 Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rg}(u)$. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?

2.2 L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.3 Ecrire dans une base de $\mathrm{Im}(u)$ la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes. Donner, en le justifiant, l'ordre de multiplicité de chacune de ces valeurs propres dans le polynôme caratéristique.

Tournez la page S.V.P.

* * *

Dans tout l'exercice :

• on identifie le vecteur V de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• on munit l'espace $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : $(X|Y) = {}^tX\,Y$ où ${}^tX$ désigne la transposée de la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

• M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes, $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on choisit un vecteur V_k non nul de $E_k = \mathrm{Ker}(M - \lambda_k\, I_n)$

1. Montrer que la matrice ${}^tM$, transposée de M, est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et admet les mêmes valeurs propres que M.

On choisit alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, un vecteur W_k non nul de $\mathrm{Ker}({}^tM - \lambda_k\, I_n)$.

2. Prouver que : $\forall\,(i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow {}^tV_i\, W_j = 0$.

3. Démontrer que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ {}^tV_i\, W_i \neq 0$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k = \dfrac{1}{{}^tV_k\, W_k}\,(V_k\, {}^tW_k)$.

4. Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que A posssède deux valeurs propres λ_1 et λ_2, distinctes et telles que $\lambda_1 < \lambda_2$.

Déterminer les matrices $B_1 + B_2$ et $\lambda_1\, B_1 + \lambda_2\, B_2$.

5. **On revient au cas général**.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le rang de B_k. Calculer B_k^2. La matrice B_k est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

6. Déterminer $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, B_k$.

7. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer $G_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k)^r\, B_k$.

Exercice 5

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.

1.1 Donner une représentation graphique de φ_x.

1.2 Calculer $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1.3 Donner une représentation graphique de Φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y, définie sur le même espace probabilisé par :

$$\forall\,\omega \in \Omega,\quad Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,\mathrm{d}t$$

2. Dans cette question, X suit une loi géométrique. Déterminer $Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3. Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

3.1 Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=x])$ où $x \in X(\Omega)$, l'espérance et la variance de X.

3.2 Déterminer $Y(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de Y.

4. On suppose dans cette question que l'on a : $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et que :

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{8},\ \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{3}$$

4.1 Déterminer la valeur de $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right)$.

4.2 Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y puis calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$.

4.3 On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = XY$.

Justifier que $Z(\Omega) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{16}, 4\right\}$.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

4.4 Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$ des deux variables aléatoires X et Y.

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe : $u = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}$

2. On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

2.1. Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$.

2.1.1. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

2.1.2. Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-ils irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?

2.2. **On revient au cas général.**

2.2.1. Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.

2.2.2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espression des racines N-ièmes de l'unité.

2.2.3. Calculer $P_n(i)$.

2.2.4. Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.

2.2.5. Soit $a \in \mathbb{C}$.

Prouver l'équivalence :

$$a \text{ racine de } P_n \iff \exists\, k \in [\![1, 2n]\!]\ ,\ a\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right)$$

2.2.6. Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat obtenu à la question **2.2.4.**

2.2.7. En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

On admettra l'unicité du polynôme Q_n obtenu.

2.2.8. Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.

2.2.9. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que : $S_n = \dfrac{n(2n-1)}{3}$

4. Illustrer graphiquement les inégalités suivantes que l'on admettra :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

En déduire que :

$$\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5. Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\,\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur.

2. Etude de la fonction H :

2.1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

2.2. Montrer que la fonction H est monotone sur D_H.

2.3. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0,1]$.

2.4. Démontrer que la fonction H est de classe C^1 sur D_H.
Retrouver alors la monotonie de la fonction H.

2.5. Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H(x_n)$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.

2.6. Démontrer que :

$$\forall\, x > -1, \quad H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2.7. Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

2.8. Soit $x > -1$.

2.8.1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

2.8.2. Prouver que pour tout entier naturel n non nul : $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

2.8.3. En déduire que $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

2.8.4. Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie 2

1. Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+k)^2}$$

2. Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = H(n)$.

3.1. Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

3.2. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,\mathrm{d}v$.

3.3. Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Tournez la page S.V.P.

Partie 3

Développement en série entière de la fonction H

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on note $Z_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$

1. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p \, [\ln(t)]^q \, \mathrm{d}t$ et on admettra que cette intégrale existe.

1.1. Justifier que si $q \geqslant 1$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$

1.2. En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

2. 2.1. Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $B_n = \int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1} \, \mathrm{d}t$.

2.2. Exprimer B_n à l'aide des intégrales $I_{p,q}$. (On pourra utiliser la série de terme général t^p)

2.3. Prouver enfin que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $B_n = (-1)^n \, (n+1)! \, Z_{n+2}$

3. En déduire alors que :

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, (k+1) \, Z_{k+2} \, x^k$$

4. Préciser alors le rayon de convergence de la série entière obtenue à la question précédente.

IN CHOISY – 16 1121 – D'après documents fournis

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Dans chacun des exercices, les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous les exercices, étant donnés deux entiers naturels a, b tels que $a < b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. On note N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $< , >$ et la norme associée $\| \|$.

A. Préliminaires : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$| < u_1, u_2 > | \leq \|u_1\| \, \|u_2\|$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(t) = \|u_1 + tu_2\|^2$ pour t dans $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs u_1, u_2 pour que $| < u_1, u_2 > | = \|u_1\| \, \|u_2\|$. Justifier votre réponse.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $< u_i, u_j >$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si p est un entier naturel non nul, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

On dit que la matrice M vérifie la propriété `G` s'il existe des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, ..., u_n).$$

B. Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3. On suppose que la matrice B vérifie la propriété `G`. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$.
4. Réciproquement, on suppose que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$. Justifier que B vérifie la propriété `G`.
Indications : En considérant (e_1, e_2) une base orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.
5. Justifier que la matrice B vérifie la propriété `G` si et seulement si, pour tout entier p dans N^*, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G`.

C. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que la matrice C vérifie la propriété `G`. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Démontrer que $a \geq 1$ et $a \geq b^2$.
   (b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est othonormale.

(c) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

(d) En déduire que $a \geq b^2 + 1$.

(e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

7. On suppose $a \geq b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

(a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

(b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété $\mathtt{G}$.

(c) Est-il vrai que, pour tout p dans N^*, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété $\mathtt{G}$? On argumentera précisément la réponse.

D. Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des fonctions f telles que pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 P(t)dt$ est absolument convergente. On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soit p dans N^*.

8. Démontrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt$ est absolument convergente.

9. On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \to & < f, g >_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt \end{array}$$

Démontrer que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

10. Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on note :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt.$$

11. Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}t^{p-1}dt$ en fonction de α, p et γ_p.

12. Soit n un entier naturel ≥ 2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par D la matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le (i, j)-ème coefficient $d_{i,j}$, pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, est défini par :

$$d_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, ..., u_n)$ dans E^n tels que la matrice $D^{\otimes p} = G(u_1, ..., u_n)$. On explicitera E, son produit scalaire ainsi que la famille $(u_1, ..., u_n)$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A. Soit F la fonction définie en un nombre réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée F'. La fonction F' est-elle continue ? est-elle dérivable ?
3. Etablir le tableau de variations de F et dessiner précisément le graphe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

B. Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

4. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
5. Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré ≤ 2. On pose $P : x \to ax^2 + bx + c$ et $Q : x \to dx^2 + ex + f$. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } x < 0 \\ Q(x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les nombres réels a, b, c, d, e, f pour que H soit une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire une base de E_0. Quelle est la dimension de E_0 ?
6. Soit Ψ_0 l'application de E_0 dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\Psi_0(H) = (H(0), H'(0), H(1))$.
   (a) Démontrer que Ψ_0 est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de Ψ_0.
   (c) En déduire que Ψ_0 est surjective.

C. Soit α un nombre réel. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $P : x \to ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soient u, v, w des nombres réels tels que $f(\alpha) = u$, $f'(\alpha) = v$. Soit H la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq \alpha \\ P(x), & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

7. Justifier que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\alpha+1) = w$ si et seulement si (a, b, c) est solution d'un système linéaire qu'on explicitera. *Indication : on pourra exprimer a en fonction de $P(\alpha+1)$, $P(\alpha), P'(\alpha)$.* Ce système linéaire a-t'il une unique solution ?
8. Ecrire une fonction `prolonge` en python qui prend en entrée des nombres (u, v, w, β) et donne en sortie un triplet (a, b, c) tel que la fonction polynomiale définie par $h : x \to ax^2 + bx + c$ vérifie : $h(\beta - 1) = u, h'(\beta - 1) = v$ et $h(\beta) = w$.

D. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $I_0 =]-\infty, 0]$, $I_1 =]0, 1]$, $I_2 =]1, 2]$, ... , $I_j =]j-1, j]$, ... ,$I_{n-1} =]n-2, n-1]$, $I_n =]n-1, +\infty[$.
Soit E l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que sur chacun des intervalles $I_0, I_1, ..., I_n$ la restriction de H est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

9. Pour j un entier compris entre 0 et n, soit $P_j : x \to a_j x^2 + b_j x + c_j$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soit H la fonction définie par : $H(x) = P_j(x)$, si $x \in I_j$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Démontrer que la fonction H appartient à E si et seulement si le vecteur $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_{n_1}, b_{n_1}, c_{n_1}, a_n, b_n, c_n)$ est solution d'un système linéaire à $2n$ équations qu'on explicitera.

   (b) Résoudre ce système si on suppose de plus que H s'annule en tout point i dans $[\![0, n-1]\!]$. On commencera par exprimer b_i et c_i en fonction de a_i et i pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.

   (c) On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & & H & \to & (H(0), H(1), ..., H(n-1)) \end{array}$$

      i. Justifier que φ est une application linéaire.

      ii. Quel est le noyau de φ ? En préciser la dimension.

      iii. Démontrer que φ est surjective. On pourra faire une démonstration par récurrence sur n.

      iv. Quelle est la dimension de E ? On citera précisément le théorème utilisé.

10. Soient $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{49}$ des nombres réels. Ecrire un programme `interpo` en python qui prend en entrée $\beta_0, ..., \beta_{49}$ et donne en sortie une liste de triplets $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), ..., (a_{50}, b_{50}, c_{50})$ tels que la fonction H définie par : $H(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$, si $x \in I_j$, pour $j \in [\![0, 50]\!]$, est dans E et vérifie de plus $H(i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![0, 49]\!]$.

Exercice 3

A. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $(x \to \dfrac{1}{1-x})$ au voisinage de 0. Quel est son rayon de convergence ?
2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note α et β les valeurs propres de la matrice M.
   (a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

   (b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

Tournez la page S.V.P.

i. $A + B = 4$,

ii. $A\alpha + B\beta = 3$,

iii. $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

4. Proposer une fonction en python, `suite`(N), qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous forme de nombres rationnels. Préciser la complexité de votre algorithme en fonction des opérations que vous utilisez (additions, multiplications...).

B. On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par *motif* le résultat de trois lancers successifs.
Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur« face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans N^*, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.

Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Soit n dans N^*. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers » , A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5. Déterminer $P(E_n), P(A_n), P(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

6. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, ..., x_k)$ dans $\{0, 1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement
$E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$?

7. Soit n dans N^*. On note v_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ et w_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 1)$.

(a) Exprimer v_1, v_2, w_1, w_2 en fonction de p et q.

(b) Soit n un entier naturel ≥ 3. En décomposant l'événement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que $v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$.

(c) Soit n un entier naturel ≥ 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1.) On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

(d) Soit n un entier naturel ≥ 3. Démontrer que $w_n = p^n + pv_{n-1}$.

8. Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape » , pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

(a) Soit n un entier naturel ≥ 2.

i. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

ii. En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

iii. Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
Indication : On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geq 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.

iv. Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

(b) Si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie. En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n).$$

(c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$. Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
Indication : On pourra calculer v_2 et v_3.

9. Soit n un entier naturel ≥ 3.

(a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

(b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

11. Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k\geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. (a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

   (c) En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$.

4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.

   (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I.

5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).
On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = \circ(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

Tournez la page S.V.P.

2. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.
   (c) Montrer que l'on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$
   (d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.
3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall k \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que
$$\forall n \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$
   (d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.
5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.

IN CHOISY – 16 1115 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

EXERCICE n°1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier n strictement positif.

   a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$.

   b) En effectuant le changement de variables $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du$ en fonction de l'intégrale I_n.

   c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0,\quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$

2) Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du.$$

   a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$.

   b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4) a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :
   $$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x} dt \ \text{ pour } |x| < R.$$

EXERCICE n°2

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in E \times E,\ (u(x)|y) = -(x|u(y))$$

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

   a) Etant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j) −ème coefficient de A. Justifier :

   $$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$$

   b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2) Montrer que l'entier n est un nombre pair.

   Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3) On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4) Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5) On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

   a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.

   b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

   c) Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

   Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\|x\|}x$ et $e'_2 = \dfrac{1}{a\|x\|}u(x)$.

   d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).

   Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}''$ de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE n°3

Première partie.

Soit un réel $a \in]0, 29[$, on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = 10t^3 + 31t^2 + 71t - a$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que : $H(\ell) = 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$.

Pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}$$

b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{H(t)}{H'(t)} \end{array} \right.$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$$

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n) H'(u_n)\right| \leqslant 46 |u_n - \ell|^2$$

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{46 |u_n - \ell|^2}{71}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{7 |u_n - \ell|^2}{10}$$

e) Pour tout réel $a \in]0, 29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 0.03 près.

3) Application informatique. On utilisera le langage python sans aucune bibliothèque supplémentaire.

Ecrire une fonction *suite(a,n)* en langage python qui prend en entrée le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 2) en fonction de a.

Deuxième partie.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux réels a et b strictement positifs et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X=0) = \dfrac{a}{100} \\ P(X=1) = \dfrac{b}{100} \\ P(X=2) = \dfrac{2}{5} \\ P(X=3) = \dfrac{21}{100} \\ P(X=4) = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [0,1],\ G_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n)t^n$$

1) Déterminer la relation reliant les réels a et b.

2) Déterminer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.

3) On suppose qu'une population évolue par générations. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 1$, on note Z_n la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus de la n-ième génération. Le nombre de descendants de chaque individu d'une génération quelconque suit la loi de la variable aléatoire X. On pose $Z_0 = 1$.

   On admet que pour tout entier naturel n, la fonction génératrice G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n vérifie la relation de récurrence :

   $$G_{Z_{n+1}} = G_X \circ G_{Z_n}$$

   Dans cet exercice, on s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population à long terme, ce qu'on mesure par le comportement asymptotique de la suite $(P(Z_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = P(Z_n = 0)$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de la fonction génératrice G_{Zn}.

   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

   c) Montrer que $G_X\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Montrer alors que la suite (w_n) est convergente vers un réel noté $L(a)$ appartenant à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   d) Montrer que le réel $L(a)$ est égal au réel ℓ de la partie I, en déduire une approximation de la probabilité $L(a)$ d'extinction de la population à long terme en fonction de a.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE n°4

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

A New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

A chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel non nul. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $u_i = E$ si au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'est et $u_i = N$ si au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le nord

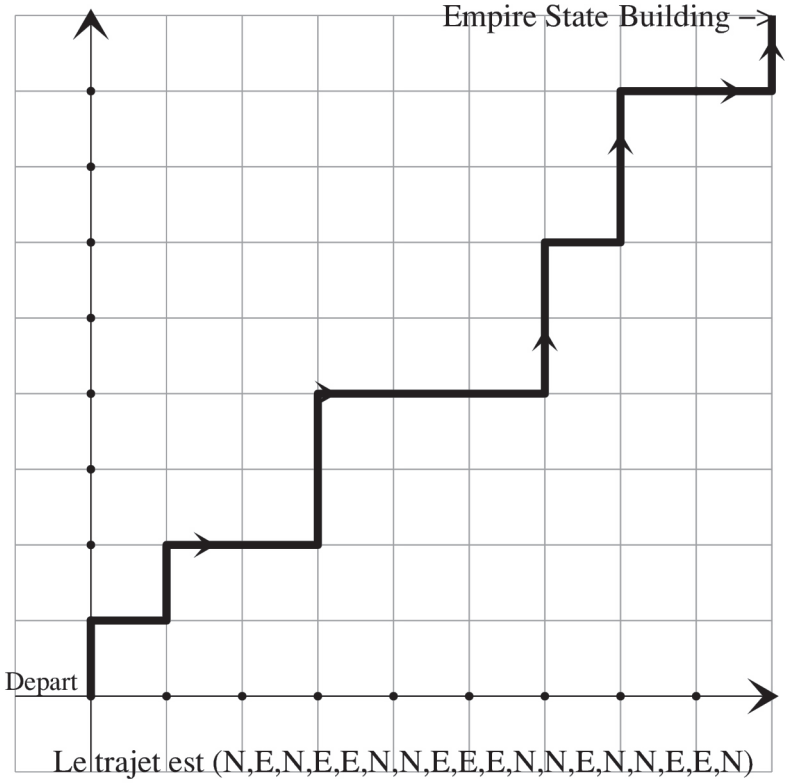
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant l$ définies par récurrence par :

$x_0 = y_0 = 0$

pour $1 \leqslant k \leqslant l$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si } u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si } u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



Depart

Le trajet est (N,E,N,E,E,N,N,E,E,E,N,N,E,N,N,E,E,N)

1) a) Ecrire en langage Python une fonction *deplacement(L,a,b)* dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L =$ "N" et $(a+1, b)$ si $L =$ "E".

b) Ecrire une fonction *chemin*(m) où m est un chaîne constituée des caractères "N" et "E"et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement " Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$." On pourra noter N_k l'évènement : "à l'étape k, le déplacement se fait vers le nord" et E_k l'évènement contraire de l'évènement N_k.

a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$

puis que :

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$$

Tournez la page S.V.P.

4) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $v_{n+1} = (2n-1)\,v_n - (2n+1)\,v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire?

---

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.

Etant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris en 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P - P' \end{array}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!], \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.$$
7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nX)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :

Soit n un entier naturel ≥ 2. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II.

8. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de* $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.)
    (b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel l.
        i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :
        $$\forall m \in \mathbb{N}, m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon.$$
        ii. En déduire que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l.
    (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = xe^{1-x}.$$

11. Etudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :
$$\forall x \in]-\infty, 1[\,, h(g(x)) = x.$$
Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.
13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$. *Indication : on pourra utiliser le fait que* $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$.
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leq 1$ et $|ze^{1-z}| \leq 1$. Soit n un entier naturel.
    (a) Justifier l'égalité :
$$1 - e^{-nz}T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$
    (b) En déduire que :
$$|1 - e^{-nz}T_n(z)| \leq 1 - e^{-n}T_n(1).$$
    (c) En déduire que $T_n(z) \neq 0$.
16. Soit n un entier naturel impair ≥ 3. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1}/(2m+1)$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :
$$e^{-u}S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t} dt.$$
18. Soit m un entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :
$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt = -\frac{n!e^n}{n^{n+1}}.$$
19. En déduire que la suite $(\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.

20. Démontrer que $(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}dt)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Partie V.

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes : Si n est un entier naturel ≥ 2, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des nombres complexes de modules ≤ 1. Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $|\sum_{i=1}^{p} \theta_i\alpha_i| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
    (a) Démontrer que $\alpha_1, ..., \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
    (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = e^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
    (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.
23. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

    On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
    (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
    (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X - 1)P(X)$.
    (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.*
24. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Soient $a_0, ..., a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

    On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
25. Conclure.

IN CHOISY – 17 1152 – D'après documents fournis

Académie : Session : Modèle EN.

Examen ou Concours : Série* :

Spécialité/option : Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM :

(en majuscules, suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms :

Né(e) le

N° du candidat

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient a_1, ... , a_n, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

1. Montrer que l'application $T : P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathscr{E} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathscr{B}' = (L_1, ..., L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. **Dans cette question uniquement,** on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1 Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice M.

3.2 Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3.3 En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)\,X + P(2)\,X^2$.

4. On revient au cas général.

4.1 Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question **2.**)

4.2 Établir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4.3 Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^{n} m_{1j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 0$.

4.4 Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, P \in E,\quad u(P) = Q \quad \text{avec } Q(X) = P(0)\, L_1(X) + P(1)\, L_2(X) + P(2)\, L_3(X)$$

5.1 Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

5.2 Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.

3. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t) \, \mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $< \mid >$.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 1

Soit h, élément de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

2. Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie **1.**

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. Démontrer que :

$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2\,[f(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \mathrm{d}t\right) \quad (*)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3.

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possible est noté Ω.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.

On considère alors une suite $(X_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que les variables aléatoires X_0, X_1, …, X_k et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraîne l'existence de l'espérance de Y.
On pourra constater que $([T = j])_{j\in[\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 4.

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

1.1 Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.

1.2 Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que `f(a)f(b)` < 0 et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de `f` à une précision `eps` près.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

2.1 Montrer que f admet un point fixe (c'est à dire un réel c de $[0,1]$ tel que $f(c)=c$).

2.2 Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de `f` à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste.

1. On propose l'algorithme suivant

```
1  def rech_dicho(L,g,d,x):
2      """L est une liste, telle que L[g:d+1] est triee"""
3      if x>L[d]:
4          return d+1
5      else:
6          a=g
7          b=d
8          while a!=b:
9              c=(a+b)//2
10             if x<=L[c]:
11                 b=c
12             else:
13                 a=c+1
14     return a
```


Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1.1 On prend `L = [2,4,5,7,7,8,10]`. Que renvoient les instructions suivantes ?

```
>>>rech_dicho(L,1,5,6)
>>>rech_dicho(L,0,5,1)
```

On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.

1.2 Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.

1.3 Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O, et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L)`, `g`, `d`, `x`.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.

Tournez la page S.V.P.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3. Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho`. Comparer avec le tri par insertion classique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IN CHOISY – 17 1161 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans tout le problème, on note $\mathscr{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, O_n désigne la matrice nulle de $\mathscr{E}$ et I_n la matrice unité de $\mathscr{E}$.

Pour toute matrice A de $\mathscr{E}$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathscr{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{E}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathscr{E}$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = O_n$. En particulier, la matrice nulle O_n est nilpotente.

On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}$ qui sont nilpotentes .

Questions de cours

1. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}$? En donner sans justification une base.

2. Soient $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Calculer le produit des deux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$. (On montrera en particulier que ce produit est nul lorsque $j \neq k$)

3. Enoncer le Théorème de Cayley Hamilton.

4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie 1 : Propriétés élémentaires

Soit A une matrice de $\mathscr{N}$

1. La matrice A peut-elle être inversible ? Justifier votre réponse.

2. On note $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A.

Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

4. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$ est inclus dans $\mathscr{N}$.

5. Vérifier que ${}^tA \in \mathscr{N}$.

6. Montrer que si M est semblable à A, alors $M \in \mathscr{N}$.

7. Montrer que $A^n = O_n$.

8. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice M de $\mathscr{E}$ soit nilpotente est que : $M^n = O_n$.

On pourra admettre ce résultat et l'utiliser dans la suite du problème.

9. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Quel est le rang maximal de la matrice A ?

10. Soient B et C dans $\mathscr{E}$.

10.1 On suppose que $BC \in \mathscr{N}$. Prouver qu'alors $CB \in \mathscr{N}$.

10.2 Ici, on suppose de plus que l'on a : $\underline{B \in \mathscr{N}}$ et $\underline{AB = BA}$.

Montrer que $AB \in \mathscr{N}$ et que $A + B \in \mathscr{N}$.

11. Déterminer l'ensemble de toutes les matrices symétriques réelles appartenant à $\mathscr{N}$.

12. Dans cette question on suppose que la matrice nilpotente A est antisymétrique.

12.1 Prouver que $A^2 = O_n$.

12.2 En déduire l'ensemble de toutes les matrices antisymétriques appartenant à $\mathscr{N}$. (On pourra utiliser la trace)

Partie 2 : Exemples

Dans cette partie M est une matrice de $\mathscr{E}$.

1. Dans cette question, on prend $M = (m_{ij}) \in \mathscr{E}$ définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geqslant j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Déterminer les éléments propres (valeurs propres et sous-espaces propres) de la matrice M.

1.2 On pose $S = M + {}^tM$. A-t-on $S \in \mathscr{N}$?

Montrer que $S^2 \in \mathrm{Vect}(I_n, S)$. Déterminer alors les éléments propres de la matrice S.

1.3 $\mathscr{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$?

2. Dans cette question on prend $n = 2$.

2.1 On suppose que M est de rang 1.

Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)\, M$. En déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

2.2 Déterminer une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la diagonale n'est pas identiquement nulle.

2.3 En déduire l'ensemble de toutes les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 3 : Sous-espace engendré par $\mathscr{N}$

Soient :

• T_0 le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des matrices de trace nulle

• V le sous-espace de $\mathscr{E}$ engendré par $\mathscr{N}$: $V = \mathrm{Vect}(\mathscr{N})$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathscr{N}$.

1. Déterminer la dimension de T_0.

2. Prouver que $\mathscr{N}$ et V sont inclus dans T_0.

3. Pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, on note :

- $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$
- $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$

3.1 Calculer F_j^2.

3.2 Montrer que $G_j \in V$.

Tournez la page S.V.P.

3.3 Soit $\mathscr{F}$ la famille de matrices de $\mathscr{E}$ constituée de toutes les matrices $E_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ où $i \neq j$ et de toutes les matrices G_k pour $k \in [\![2,n]\!]$.

Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est libre dans V.

3.4 En déduire que $V = T_0$.

Partie 4 : Sous-espaces de dimension maximale contenus dans $\mathscr{N}$

Soient $\mathcal{T}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée uniquement de 0.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_1$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_1$.

On pourra utiliser des résultats de la partie **1.**

3. Démontrer que $\mathscr{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_1$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ contenu dans $\mathscr{N}$ dont la dimension est notée d.

4.1 On suppose que $d > \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démontrer que l'on a : $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$. Conclure.

4.2 Quelle est la dimension maximale d'un sous espace de $\mathscr{E}$ contenu dans $\mathscr{N}$?

Donner un exemple d'un tel sous espace.

Partie 5 : Un peu de topologie

$\mathscr{E}$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que $\mathscr{N}$ est une partie fermée de $\mathscr{E}$.

2. Soient $A \in \mathscr{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.

Montrer que $\det(M) = 1$.

En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathscr{N}$ est vide.

3. Soit F un sous-espace de $\mathscr{E}$. Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = \mathscr{E}$.

Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Partie 6 : Deux autres résultats

Soient $A \in \mathscr{N}$, α un réel non nul et $M = I_n + \alpha A$.

1. On sait que M est inversible. Calculer son inverse à l'aide des puissances de la matrice A. On pourra utiliser une suite géométrique.

2. Donner sans démonstration le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

3. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathscr{E}$ telle que $B^2 = M$.

On exprimera la matrice B comme un polynôme de la matrice A.

IN CHOISY – 17 1162 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

EXERCICE 1

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

(2). Soit $a \in]1;+\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue l'intervalle $[a;+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

(3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a). Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$

(b). Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;+\infty[$ sous forme d'une série.

(4). Préciser le sens de variation de ζ.

(5). On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

(a). Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.

(b). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2, \quad 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(c). En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$

(6). On considère à présent $h \in]0,+\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

(7). Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.

(8). On pose : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

(a). Justifier que F est bien définie.

(b). Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c). Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[, \quad \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

(d). Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

(1). Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\ {}^tV_0$.

(a). Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

(b). Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

(c). **(i).** Calculer A_0U_0.

(ii). Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(iii). Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

(2). Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a). On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

(b). Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.

(c). Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.

Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right)X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0, \mathrm{tr}(A)\}$.

(d). Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

(e). Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f). Montrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$

(3). Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.

On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

(a). Montrer que $f(u) \neq 0$.

(b). En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c). Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 3

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est à dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

(1). **(a).** Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ admet une espérance et la calculer.

(b). En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$.

(2). Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

(3). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

(a). Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{R}_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

(b). Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq \mathrm{K}$, on a : $\mathrm{R}_{n,k} \leq \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$

(4). **(a).** Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq k) \leq \dfrac{k}{k-\lambda}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$.

Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k) \leq \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$.

(b). Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq i) \leq 1$.

(c). Dans le cas général, que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} \geq i)$? Le justifier.

(5). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

(a). Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1-t \leq \mathrm{e}^{-t}$.

(b). Montrer que : $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

(c). Montrer que : $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}=k) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.

(d). Quelle majoration de $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda+1$?

(e). En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda+1$: $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

EXERCICE 4

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1,3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage `Python`

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

(1). Écrire une fonction `divise(p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls p et q , renvoyant True si p divise q et False sinon.

(2). Écrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.

(3). Écrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.

(4). Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers : $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.

(a). Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).

(b). Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.

(c). Écrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \varepsilon$.

(d). Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50;5000]\!]$.

IN CHOISY – 17 1156 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

L'épreuve est constituée d'un problème dont les trois parties sont relativement indépendantes.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie I

I. 1) a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-ts}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

I. 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$

I. 3) a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Justifier l'égalité :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}\,dt.$$

c) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma.$$

I. 4) a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,dt.$

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,dt$

et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n}$.

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim\limits_{x\to1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

I. 5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$.

I. 6) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,dx = 1.$$

Partie II

II. 1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

b) Justifier que $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

II. 2) On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$.

À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

b) Étudier si M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

II. 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer des réels $b_0(x), \ldots, b_n(x)$ tels que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$. *Indication: On pourra citer et utiliser une formule de Taylor.*

b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II. 4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. Déterminer $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\quad y' - y + g = 0$.

Justifier que la solution générale est de la forme : $y : x \mapsto ke^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt,\ k \in \mathbb{R}$.

II. 5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et soit $N_\infty(g) = \sup\{|g(t)|, t \in \mathbb{R}\}$.

a) On définit $T_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t+x)\, dt$.

Justifier qu'alors $T_g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\, du$, et que T_g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et g.

b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Montrer qu'en général T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

d) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.

Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, alors $|T_g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

II. 6) a) Pour tout réel A, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t}\, dt$.

b) Soit $c : t \mapsto \cos(t),\ s : t \mapsto \sin(t)$ et F le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (c, s).

Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s). N est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Tournez la page S.V.P.

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $xy'' + y' - (x+1)y = 1$.

III. 1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite (a_n), montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}.$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

III. 2) On souhaite résoudre ici cette équation difffentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$\mathcal{S} = \{y \in C^2(I, \mathbb{R}) / \quad \forall x > 0, \quad xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1 \quad \}.$$

a) Pour tout $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$.

Montrer que $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0, \quad xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x} \qquad (\star).$$

b) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0.$$

c) Déterminer les $Z \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}.$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in C^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(\star)$ de **III.2.a)**, en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$: *On utilisera $R(x)$ et $R(2x)$.*

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in \mathcal{S}$.

III. 3) a) Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par : $S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma$ pour $x > 0$ (vu en **I. 3) c)**).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **III. 1)**: on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites (a_n) de **III.1)** ?

•• FIN ••

IN CHOISY – 17 1157 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad f_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \; ; \quad v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.
2. Soit n un entier naturel non nul. Quel est le signe de u_n ?
3. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
4. Etudier la fonction $(f : x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0, 1]$.
5. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente.
6. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.
   En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.
7. Que peut-on dire des suites $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} v_n$.

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$.

8. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0, 1[$.
9. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :
$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$
10. Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
11. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.
    Indication : Exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).

12. Soit r un entier naturel > 1.

(a) Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto (1/x^r))$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Soit a un nombre réel > 0. Exprimer en fonction de a et r :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

(c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0 et telle que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

i. Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on ait les inégalités :

$$a \leq n^r(w_{n+1} - w_n)) \leq b.$$

ii. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a \int_N^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}.$$

iii. En déduire l'encadrement :

$$-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)$$

où I a été défini dans la question 12(b).

iv. Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

v. Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 ?

13. Démontrer qu'il existe un nombre réel α qu'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Indication : On appliquera les résultats de la question 12 à une suite bien choisie.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $< \ , \ >$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad < \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\| \ \|$ la norme associée et $e_1, ..., e_n$ la base canonique de E.

1. Soit M une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, ..., v_n$ ses vecteurs colonnes.
   (a) Exprimer en fonction des vecteurs $v_1, ..., v_n$ les coefficients de la matrice ${}^tMM$.
   (b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont orthogonaux deux à deux, démontrer que

$$|\det(M)| = \|v_1\| \, \|v_2\| \cdots \|v_n\|.$$

2. Déterminer les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices M dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
— Tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$.
— Les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux 2 à 2.
Par exemple, on pourra constater que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_4$$

3. Ecrire une fonction en Python qui lorsqu'elle prend en entrée la liste des colonnes d'une matrice M, de taille n, renvoie 1 si la matrice est dans $\mathcal{H}_n$ et 0 sinon.
4. Soit $M \in \mathcal{H}_n$.
   (a) Quelle est la norme d'un vecteur colonne de M ?
   (b) Que vaut $|\det(M)|$?
5. Soit $M \in \mathcal{H}_n$. On suppose que le premier vecteur colonne de M est le vecteur

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit, pour i dans $[\![2, n]\!]$, $v_i = \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} e_j$, le i-ème vecteur colonne de M. Démontrer que le nombre de $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1.

6. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide. Démontrer que $\mathcal{H}_n$ contient une matrice M_0 dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Lorsque $\mathcal{H}_n$ est non vide, que peut-on en dire de la parité de n ?
8. On suppose $n > 2$ et $\mathcal{H}_n$ non vide. Soit M_0 une matrice dans $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1}.
   (b) Démontrer que n est un entier naturel multiple de 4.

Exercice 3

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: Si $k_1, ..., k_n$ sont les valeurs prises respectivement par les variables $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, ..., k_n\}$, pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note « $\{X_1, ..., X_n\} = S$ » la réunion des événements « $(X_1, ..., X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ » , pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, ..., k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et $\ell \geq 2$.
   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

Tournez la page S.V.P.

(b) Calculer $P(U_2 = 1)$ et $P(U_2 = 2)$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(U_2)$.

2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

   (a) Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
   On pourra utiliser la fonction : random.randint
   L'instruction random.randint(1,25) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.

   (b) Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement « $X_i \in S$ » en fonction de $|S|$?

5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $P(X_1 \neq a, \ldots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

6. En déduire $P(X_1 \neq X_n, \ldots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

7. Justifier

$$P(X_1 \neq X_n\,, \ldots\,, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, ..., X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right).$$

   où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n\,, \ldots\,, X_{n-1} \neq X_n))$$

9. Exprimer $\mathbf{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

10. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et n tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

11. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et ℓ tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

    Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

    (a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est-à-dire $\mathbf{E}(D_n)$.

    (b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$?

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie sur l'autre.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Partie I :

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ \qquad\qquad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1. Que dire des suites (a_n) et (b_n), si $a = b$?
2. Montrer que si $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$, on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
4. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).

On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :
$$M(b, a) \qquad \text{et} \qquad M(\lambda a, \lambda b).$$
6. Justifier que $M(a, b) = a f\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Partie II :

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \qquad \text{et} \qquad J(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}.$$

7. Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.
8. En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$, montrer que
$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b).$$
9. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(a_n, b_n) = I(a, b).$$
10. Justifier que
$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b).$$
On énoncera précisément le théorème utilisé.
11. Conclure que
$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}.$$

Partie III :

12. On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t.$$

13. Montrer que $I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$ est négligeable devant $2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$ quand x tend vers 0^+.
14. Dériver $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\mathrm{d}t$.
15. Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln x}.$$

16. Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln x}.$$

17. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
18. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?
19. Que dire de la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$?
20. Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0,+\infty[$.

Partie IV :

21. Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x}\, I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

22. On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \frac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.
    (a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.
    (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}.$$

    (c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}.$$

    Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Partie V :

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(t)}}\mathrm{d}t.$$

Tournez la page S.V.P.

23. Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

24. En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}\cdot$$

25. Montrer que si $x\in]0,1]$, on a

$$I(1,x)=K\left(\sqrt{1-x^2}\right)\cdot$$

26. On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad W_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}W_n.$$

(on pourra considérer la quantité W_n-W_{n+1})

(b) Démontrer que

$$W_n=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.$$

27. Rappeler la valeur du rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-t}}$, puis justifier l'expression du terme général de la suite de ses coefficients (α_n).

28. Démontrer que

$$\forall x\in]-1,1[,\ \forall t\in\mathbb{R},\qquad\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}(t).$$

29. Justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a

$$K(x)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^2}{16^n(n!)^4}x^{2n}.$$

30. En déduire une série numérique permettant d'obtenir la valeur de $M(3,5)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1137 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\,|\,\rangle$.

Soit $\mathscr{C} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geqslant 0$

(3) $\exists B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

2. Soient J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha+1)\,I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.

2.1. Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

3. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A.

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\,u_i$.

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{ij} < 0)$.

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2.**

4.1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille $(z_1, ..., z_{n-1})$ est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\, z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i = 0$.

4.1.2. En utilisant le produit scalaire $\left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i\,,\, z_n \right\rangle$, conclure.

4.2. Prouver enfin que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Exercice 2.

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est : $b_{ij} = \mathbb{P}([(X,Y) = (i,j)])$.

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathbf{tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathscr{M}_n$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n$.

$\mathscr{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n$, $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n$ et $\mathscr{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n$.

Question de cours : Donner sans démonstration les dimensions des espaces vectoriels $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2$ constitué de matrices diagonalisables.

2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ contenu dans $\mathscr{D}_2$.

Tournez la page S.V.P.

3. $\mathscr{D}_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$? Justifier.

On pourra utiliser des arguments de dimension.

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$.

5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

5.1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathscr{M}_2$ et F un fermé de $\mathscr{M}_2$.

5.2. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathscr{D}_2 \subset F$

5.3. $\mathscr{D}_2$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_2$? un ouvert de $\mathscr{M}_2$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

1. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ définies par :

- $a_{11} = a_{12} = 1, a_{22} = -1$ et $a_{ij} = 0$ sinon
- $b_{11} = -1, b_{12} = b_{22} = 1$ et $b_{ij} = 0$ sinon

1.1. Vérifier que A et B sont diagonalisables.

1.2. $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$? Justifier.

2. Soit $N \in \mathscr{M}_n$, antisymétrique.

Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.

(*On pourra calculer le produit matriciel* ${}^tXNX$ *pour un vecteur* X *de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

3. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ contenu dans $\mathscr{D}_n$. Déterminer $S \cap \mathscr{A}_n$.

En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S. On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.

4. Soit une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note f_P l'application linéaire qui à une matrice M de $\mathscr{M}_n$ associe la matrice $P^{-1}MP$.

4.1. Vérifier que f_P est un automorphisme de $\mathscr{M}_n$ et expliciter f_P^{-1}.

En déduire la dimension de $\mathscr{S}_P = f_P(\mathscr{S}_n)$.

4.2. Prouver que l'on a : $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$

4.3. Démontrer enfin que : $\mathscr{D}_n = \bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P$

5. On note $\left\{E_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n$ où E_{ij} est la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

5.1. Donner sans démonstration une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{S}_n$.

5.2. Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $i < j$, on pose $T_{ij} = 4E_{ji} + E_{ij}$.

Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1, ..., 1, 2, 1, ..., 1)$ où le 2 est à la j-ième position.

Décomposer la matrice $P^{-1}T_{ij}P$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_n$. On pourra utiliser l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à T_{ij}.

Justifier alors que la matrice T_{ij} est diagonalisable.

5.3. Soit $\mathscr{T} = \text{Vect}(T_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i<j)$. Prouver que $\mathscr{M}_n = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n$.

En déduire une base de $\mathscr{M}_n$ constituée de matrices toutes diagonalisables.

5.4. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$.

Exercice 4.

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Ecrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple, si `L=[0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Ecrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur

`M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0,M]\!]$, `T`$[i]$ est le nombre d'occurences dans la liste `L` de l'entier i.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4.

4.1. Soit `L` une liste d'entiers naturels. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que `n` soit indépendant de `M`.

Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers. On définit alors la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la liste A par récurrence comme suit

- $L_0 = A$.
- Si L_n est construite, alors :
  - on détermine $T_n =$ `nb_oc`(L_n).
  - on détermine $I_n =$ `ind`(T_n).
  - si $I_n = [i_1, ...i_r]$, alors $L_{n+1} = [T[i_r], i_r, \ldots, T[i_1], i_1]$

Par exemple, si $A = [4,4,1,2]$:

- $L_0 = [4,4,1,2]$
- $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)
- $L_2 = [1,4,2,2,3,1]$ (il y a un « 4 » , deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne `A = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]`. Déterminer L_3 et L_{2018}.

5.2. On donne `B = [2,4,1,1,1,2]`. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.3. On donne `C = [2,4,1,0]`. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en argument une liste `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément `L`$_n$ de la suite de Robinson associée à `A`.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 0074 – D'après documents fournis

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1, +\infty[$.

On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $\mathscr{E}_1 = \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

Lorsque V est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ ... \circ V}_{n}$

Soit a un ***réel strictement positif***.

Pour tout f de $\mathscr{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - a\,y + f = 0 \quad (E_a^f)$$

et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Partie 1

1. Etude de l'équation (E_a^f).

1.1. Soient $f \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{E}_1$.

Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in I,\, z(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(K - \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

1.2. Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

1.3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

1.4. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à toute fonction f de $\mathscr{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

2. Etude de quelques propriétés de U_a.

2.1. Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

2.2. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

2.3.

2.3.a. L'endomorphisme U_a est-il injectif ?

2.3.b. Montrer que pour tout f élément de $\mathscr{E}$, $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.

2.3.c. L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

2.4. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a = 1$.**

Montrer que le sous-espace de $\mathscr{E}$: $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathscr{B}$.

Ecrire la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathscr{F}$ dans cette base.

Prouver que $M = \lambda\,\Omega$ où λ est un réel positif et Ω une matrice de rotation dont on déterminera l'angle.

3. **On revient au cas général.**

3.1. Pour $r \in [0, +\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $x \mapsto \mathrm{e}^{-rx}$.

Déterminer $U_a(f_r)$.

3.2. Soit $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{a}\right]$. Le réel λ est-il valeur propre de l'endomorphisme U_a ?

3.3. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

3.4. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ sur I et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathscr{E}$:

$$\forall\, x \in I,\quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

5. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}\, x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.
Pour tout entier naturel p, on note $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, ..., g_p)$

5.1. Donner une base $\mathscr{B}_p$ de $\mathscr{F}_p$.

5.2. Vérifier que $\mathscr{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par U_a.

5.3. Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathscr{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathscr{E}$, $|\,U_a(f)\,| \leqslant U_a(\,|f|\,)$.

7. Soit f dans $\mathscr{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

8. Soit f dans $\mathscr{E}$ décroissante. Prouver que $a\,U_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9. On note :

- $\mathscr{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ de classe C^1 sur I et telles que f' est bornée sur I.
- D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{H}$.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

9.1. Montrer que l'on a : $U_a(f') - a\,U_a(f) + f = 0$.

9.2. En déduire que U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10. Soit $f \in \mathscr{E}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n\,!}\, \mathrm{e}^{-at}\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra procéder par intégration par parties.

11. Soit $f \in \mathscr{E}$. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a > 1$.

11.1. Soient $x \in I$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(t-x)^n}{n\,!}\, \mathrm{e}^{-at}\, f(t) \right)$.

11.2. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} U_a^n(f)$ est simplement convergente sur I. On notera S sa somme.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat valable pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\, \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n\,!$

11.3. Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2

On admettra que :

si u et v sont deux fonctions continues sur I à valeurs réelles telles que v est à valeurs positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$ converge

$$\text{si } u = \underset{+\infty}{o}(v), \text{ alors } \int_x^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

1. Soient f et g dans $\mathscr{E}$ avec g à valeurs positives et $f = \underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.

2. Soient f et g dans $\mathscr{E}$, g à valeurs positives telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Montrer que $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $U_a(f)$ admet aussi une limite finie en $+\infty$.
On pourra commencer par étudier le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. Pour tout réel strictement positif ω, on note pour toute la suite du problème, h_ω la fonction de $\mathscr{E}$ qui à $t \in I$ associe $\dfrac{1}{t^\omega}$ et $H_\omega = U_a(h_\omega)$.

4.1. Montrer que l'on a pour tout $x \in I$: $H_\omega(x) = \dfrac{h_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a}\,H_{\omega+1}(x)$

4.2. En déduire que : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{h_\omega(x)}{a}$.

5.

5.1. Montrer que pour tout $x \in I$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{a^k}{k\,.\,k\,!}\,(x^k - 1)$.

5.2. En déduire que l'on a : $H_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(-\ln x - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{a^k}{k\,.\,k\,!}\,(x^k-1) + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$

Partie 3

On reprend les fonctions f_r définies à la question **3.1.** de la partie **1** avec maintenant $\underline{r > 0}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour les fonctions h_ω definies à la question **4.** de la partie **2**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

3. Soit $f \in \mathscr{E}$, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $\varphi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $F = U_a(f)$ et $\Phi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

3.1. Vérifier que l'on a pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) - a\,\Phi(x) + \varphi(x) - F(1) = 0$.

3.2. Prouver que $\varphi \in \mathscr{E}$.

3.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$ intégrable sur I.
Montrer que $U_a(f)$ est aussi intégrable sur I.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1147 – D'après documents fournis

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n.

Soit $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, 1, ..., 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Enoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n. Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.

9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.

10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n.

Soit M une matrice de taille (n, n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

12. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M. Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

13. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n\, x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n}\, x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

Tournez la page S.V.P.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Etablir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \to \ln(1-x))$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T - S$ et L.

10. Soit y dans $]0,1[$

    (a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

    $$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u + S(y) = 0$$

    On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

    (b) Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

    $$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}$$

    (c) Justifier que

    $$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance et $\mathbf{V}(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel ≥ 2. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du i-ème tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, ..., X_k) \text{ et } V_k = \max(X_1, ..., X_k).$$

3. Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de N.

4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.

   (a) Ecrire une fonction `simulX` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, ..., X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : random.randint
   L'instruction random.randint(1,10) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.

   (b) En déduire une fonction `REALIV` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, ..., V_{100}$.

Tournez la page S.V.P.

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.

   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :

   $$P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

   (b) On appelle plusieurs fois la fonction `REALIV` de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.

   (c) Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, ..., Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

   (b) En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).

   (a) Exprimer $U_2 + V_2$ et U_2V_2 en fonction de X_1 et X_2.

   (b) En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2V_2)$ en fonction de N.

   On peut déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathbf{Cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :

   $$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

   (d) On note $\rho_2(N)$ le coefficient de corrélation de U_2 et V_2. Exprimer $\rho_2(N)$ en fonction de N.

   (e) Que peut on dire de la suite $(\rho_2(N))_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}}$ lorsque N tend vers $+\infty$?

8. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que $\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N} (2i-1)P(X \geq i)$.

   (b) Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \qquad (E_a)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

1. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.
   (a) Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.
   (b) Montrer que si $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (\mathrm{R})$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. Soit φ une solution de (R). Montrer que :

$$\varphi(0) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \varphi(x) = 0.$$

3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n .$$

(c) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m .$$

(d) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}} .$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

(f) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x .$$

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}.$$

1.(a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

(b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n^{'}(x) = P_{n-1}(x+1).$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

1.(a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}$.

Tournez la page S.V.P.

(b) Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum_{n\geq 0} P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leq \dfrac{1}{e}$.

2. Dans cette question on se fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n.$$

(a) Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.

(c) En utilisant les résultats de la partie III., montrer que F_a est solution de (R) et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x .$$

(d) Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a^{'}(x) = aF_a(x+1).$$

(e) En calculant $F_a^{'}(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

3. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

(a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et monotone sur $[0, \frac{1}{e}]$.

(b) Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.

(c) Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. Soit C un réel tel que $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1142 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1.

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n\,!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n\,!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice identité de E_n sera notée I_n.

Soit $A \in E_n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de la matrice A.

Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes B_j sont :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad B_j = S - A_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} A_k \quad \text{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1. Dans cette question $n = 2$ et E_2 est muni de la base : $\mathscr{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$

où $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.

1.2 Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.

1.3 Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général et on admettra que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a :

$$\det(u(A)) = (-1)^{n-1}\,(n-1)\,\det(A)$$

4.

4.1 Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de l'endomorphisme u.

4.2 En déduire les éléments propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

5. Soient J_n la matrice de E_n dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

5.1 Déterminer les colonnes du produit matriciel AU_n à l'aide de celles de A.

5.2 Retrouver alors le résultat de la question **4.1.**

Exercice 3.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathscr{P})$ suivant :

$$(f \text{ est continue sur } \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)\,f(x-t)\,\mathrm{d}t \quad : \ (E_1)\right)$$

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1.1 Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.2 Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_1) \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) + x\,f(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

3. En déduire que f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

$$(\mathscr{P}_2) \quad \begin{cases} F \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad F''(x) + x\,F'(x) + 2\,F(x) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\quad H''(x) + x\,H'(x) + 2\,H(x) = 0 \\ H'(0) = 1 \ \text{ et } \ H(0) = 0 \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

4.1 Prouver que l'on a : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.

4.2 En déduire une expression de $H(x)$ pour tout x réel à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathscr{P})$.

Exercice 4.

Question de cours : Soit E un espace euclidien. Redonner sans démonstration la dimension de $E^{\perp}$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P|Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$

On note $\mathscr{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E.

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u\,(P)$ défini par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ u\,(P)\,(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n\ P\,(t)\ \mathrm{d}t.$

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

2.

2.1 Prouver que pour tous p et q dans $[\![0, n]\!]$, on a : $< u(X^p)|X^q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$

2.2 En déduire que u est un endomorphisme symétrique.

3. On sait qu'il existe alors une base **orthonormale** $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

Montrer que : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, P_j\,(x)\ P_j\,(y)\,.$

Pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

4. Déterminer alors $\mathbf{tr}(u)$ (trace de l'endomorphisme u).

5.

5.1 Pour tout y réel, montrer que l'on a : $u(Q_y)(y) = \dfrac{1}{2n+1}\ \left[(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right]$.

5.2 Déterminer $\mathbf{tr}(u^2)$. On pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 u(Q_y)(y)\,\mathrm{d}y$.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1110 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 2 MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Partie I

1. Rappel des propriétés de la trace d'une matrice, notée **tr**.

1.1 Montrer que **tr** est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Prouver que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$.

1.3 En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2. Dans toute la suite du problème, A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, ..., \lambda_n$

2.1 Justifer l'existence d'une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

2.2 Vérifier alors que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Partie II

Soit Q un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$: $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

On note $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines complexes, distinctes ou non et on a donc : $Q(X) = b_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $T_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$ et $T_0 = n$.

L'objectif de cette partie est de calculer les termes de la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir des coefficients du polynôme Q.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$, on a : $X^m - a^m = (X-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k}\right)$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note Q_i le polynôme défini par : $Q_i(X) = \dfrac{Q(X)}{X - \alpha_i}$.

Montrer que Q' est une combinaison linéaire des Q_i que l'on déterminera.

3. En remarquant que $Q_i(X) = \dfrac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X - \alpha_i}$, montrer que l'on a :

$$Q_i(X) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r} \right) X^{r-1}$$

4. Déduire des questions **2** et **3** que l'on a : $\forall r \in [\![1, n]\!]$, $r\, b_r = \sum_{j=0}^{n-r} b_{r+j}\, T_j$.

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer T_k en fonction de $T_0, ..., T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.

6. Soit $k \geqslant n$.

6.1 Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j \, T_{k-n+j} = 0$.

6.2 Exprimer alors T_k à l'aide de $T_{k-n}, T_{k-n+1}, ..., T_{k-1}$ et des coefficients du polynôme Q.

7. Conclure.

Partie III

On rappelle que A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et on pose :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \, X^k$$

et pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

On considère alors le système linéaire (Σ) dont les inconnues sont $u_1, ..., u_n$ et défini par les n équations suivantes :

$$S_1 + u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall, k \in [\![2, n]\!], \; S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + ... + u_{k-1} S_1 + k \, u_k = 0$$

1. Démontrer que le système (Σ) possède une unique solution dans $\mathbb{R}^n$.

2. Vérifier que $u_1 = a_{n-1}$ et que $u_2 = a_{n-2}$. On pourra utiliser les relations coefficients racines d'un polynôme.

3. En utilisant la partie **II**, montrer que $(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0)$ est solution du système (Σ).

4. En déduire que l'on a : $\forall \, k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

Partie IV

1. Justifier que $P(A) = O_n$.

2. Prouver l'équivalence : A inversible $\iff a_0 \neq 0$.

3. Montrer que la matrice A^{-1}, si elle existe, s'écrit comme un polynôme en A.

4. On considère la suite $(B_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la suite $(d_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ de réels définies par :

$$\begin{cases} d_1 = -\,\mathbf{tr}(A), \; B_1 = A + d_1 \, I_n \\ \forall \, k \in [\![2, n]\!], \; d_k = -\dfrac{1}{k}\,\mathbf{tr}(B_{k-1}A) \;\text{ et }\; B_k = B_{k-1}A + d_k \, I_n \end{cases}$$

4.1 Etablir que l' on a :

$$\forall \, k \in [\![1, n]\!], \quad B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i \, A^{k-i}$$

Tournez la page S.V.P.

4.2 Montrer que l'on a aussi :

$$\forall k \in [\![2,n]\!],\quad d_k = -\frac{1}{k}\left(\mathbf{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i\,\mathbf{tr}(A^{k-i})\right)$$

4.3

4.3a Prouver alors que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_k = a_{n-k}$

4.3b Déterminer B_{n-1}.

4.3c Déterminer B_n. Le résultat était-il prévisible ?

5. Application : On prend $n = 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Utiliser la méthode étudiée au-dessus pour déterminer le polynôme caratéristique de A et la matrice A^{-1}.

On pourra utiliser que : $B_2A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Le listing ci-dessous fournit 5 fonctions écrites en langage Python. Les matrices seront notées comme des listes de listes.

```
1  def fonction1 (A,B) :
2      n=len(A)
3      C=[]
4      for i in range(n):
5          L=[]
6          for j in range(n):
7              s=0
8              for k in range(n):
9                  s+=A[i][k]*B[k][j]
10             L.append(s)
11         C.append(L)
12     return C
13
14 def fonction2(x,n):
15     A=[]
16     for i in range(n):
17         L=[0]*n
18         L[i]=x
19         A.append(L)
20     return A
21
22 def fonction3(A):
23     n=len(A)
24     S=0
25     for i in range(n):
26         S+=A[i][i]
27     return S
28
29 def fonction4(A,x):
30     n=len(A)
31     B=[]
32     for i in range(n):
33         L=[]
34         for j in range(n):
35             L.append(A[i][j]*x)
36         B.append(L)
37     return B
38
39 def fonction5(A,B):
40     n=len(A)
41     C=[]
42     for i in range(n):
43         L=[]
44         for j in range(n):
45             L.append(A[i][j]+B[i][j])
46         C.append(L)
47     return C
```

6.1 Déterminer les types d'arguments pris par chaque fonction et le résultat qu'elles retournent.

6.2 Compléter le programme ci-dessous permettant d'afficher les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A .

```
1 d=[1]
2 A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
3 n=len(A)
4 #
5 # Compléter le programme
6 #
7 #
8 print("Les coefficents du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissant des
      puissances sont :",d)
```

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1111 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynômiales.

On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'.

Montrer que la réciproque est fausse.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, ..., X^n)$ sa base canonique.

5.1. Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.

5.2. Ecrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

5.3. L'endomorphisme U_n est-il bijectif ? diagonalisable ?

6. Justifier que si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

(ii) f est périodique de période 1.

7. A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

10.1. Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2. Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

10.3. Montrer alors que tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.

Exercice 2.

Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \dfrac{X_1(\omega)}{2} \text{ si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = ((E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2})$ sa base canonique.

On rappelle que $\forall\,(r,t,u,v) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n \text{ lorsque } t \neq u \\ E_{r,v} \text{ lorsque } t = u \end{cases}$

Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $\mathbf{tr}(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M.

On dira qu'une matrice M de E_n est **nilpotente** s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathscr{B}$ est nilpotente.

On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices (A, B) de E_n associe $(A|B) = \mathbf{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur E_n.

On dira qu'un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est **stable pour une matrice** A de E_n si : $\forall\, X \in V$, $AX \in V$.

* * *

Soit H un hyperplan de E_n. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

1. Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Justifier que l'on a : $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$.

2. Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique $\mathscr{B}$.

3. Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.

4. On note $U = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Démontrer que U est inversible.

5. On suppose alors que H ne contient pas de matrice inversible.

Soit N une matrice nilpotente de E_n.

5.1. Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire α tels que : $N = A + \alpha\, I_n$.

Tournez la page S.V.P.

5.2. Justifier que 0 est valeur propre de A et prouver que $N \in H$.

6. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que H est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que :

$$\forall\,(A,B) \in H^2, \quad AB \in H$$

7. On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication des matrices.

8. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

8.1. On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

Prouver que l'on a : $\forall\,(M,N) \in E_n^2,\ p(MN) = p(M)p(N)$.

8.2. Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Longrightarrow M \in H$.

8.3. Prouver alors que : $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ E_{i,j} \in H$.

8.4. Conclure.

On se propose maintenant de démontrer que $n = 2$, c'est-à-dire de démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication pour $n \geqslant 3$

9. Soit A un élément non nul de l'orthogonal de H pour le produit scalaire $(.|.)$.

9.1. Justifier que pour tout $B \in H$, $B\,A^T$ est colinéaire à A^T.

9.2. Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

9.3. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par : $W = \text{Im}(A^T)$, .

Montrer que W est stable pour tous les éléments de H, c'est-à-dire que pour toute matrice $B \in H$, W est stable pour B.

9.4. Soient :

- p le rang de la matrice A^T,
- $(e_1, ..., e_p)$ une base de $\text{Im}(A^T)$, complétée en une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$,
- P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}_1$.

Montrer que l'application $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$ est un automorphisme de E_n.

9.5. En déduire que l'on a : $\dim(H) \leqslant n^2 - p\,(n-p)$.

10. Conclure.

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

2.1. Prouver que l'on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$

2.2. En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

2.3. En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4. On pose pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

4.1. Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

4.2. Prouver que la suite (s_n) est bornée.

4.3. Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1120 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Questions de cours

1. Citer le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel.

2. On rappelle que j est le nombre complexe : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

2.1 Déterminer le module et un argument de j.

2.2 Déterminer la valeur de $s_k = 1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.3 Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ du système : $\left\{ \begin{array}{lll} a + b & + c & = 1 \\ a + \mathrm{j}\, b & + \mathrm{j}^2\, c & = 0 \\ a + \mathrm{j}^2\, b & + \mathrm{j}\, c & = 0 \end{array} \right.$ où a, b et c sont les inconnues.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Donner sans démonstration l'expression du déterminant de Vandermonde de la matrice

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Le résultat et l'expression obtenus dans la question 3. ne devront plus être utilisés dans la suite du problème

Partie 1

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3, $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Montrer que s'il existe un couple $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors $\det(V_\gamma) = 0$.

2. On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice ${}^t V_\gamma$.

Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, C_j = 0$.

En utilisant le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, X^{j-1}$, montrer que : $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\det(V_\gamma)$? **On ne calculera pas det**(V_γ).

3. On suppose toujours que les γ_k sont distincts deux à deux.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma_k x}$

3.1 Soient $(m_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ des scalaires et $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k\, \psi_k$.

Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

3.2 En déduire que la famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$

Partie 2

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

1.1 Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction $g = f + f' + f''$.

1.2 Résoudre l'équation (E_2).

1.3 En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients contants $X' = A\,X$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.1 La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

2.2 Résoudre le système (S).

2.3 Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)\,!}$.

3.1 Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)\,!}$.

3.2 Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.3 Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.4 En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles.**

3.5 Déterminer une expression de $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)\,!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles.**

3.6 Déterminer une expression de $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)\,!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles.**

Partie 3

Dans la suite du problème

- toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- n est un entier naturel supérieur ou égal à 3,
- $\alpha = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Tournez la page S.V.P.

En outre, lorsque $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on note $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}^n)$

Soient :

- (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)}$,
- $\mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{(k)} \right\}$

1.

1.1 Ecrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.

1.2 Montrer que si $y \in \mathscr{S}_\alpha$, alors $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

1.3 Prouver que $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

1.4 Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1,0,...,0)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. Ecrire l'équation (E_α) dans ce cas.

3. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$.

4. Donner une base de $\mathscr{S}_\alpha$. (On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie **1**)

5. Soit d l'application qui à $y \in \mathscr{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.

5.1 Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathscr{S}_\alpha$.

5.2 d est-il bijectif ?

5.3 d est-il diagonalisable ?

Partie 4

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\left(\text{ et donc } \mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{(k)} \right\} \right)$, $n = 2p$ et on considère l'équation différentielle : $y^{(2p)} = y$.

On note S_1 (resp. S_2) l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y^{(p)} = y$ (resp. $y^{(p)} = -y$).

Pour f et g dans $\mathscr{S}_\alpha$, on note $(f|g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3|\,t|} \left[f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t) \right] \mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette expression a un sens pour tous f et g de $\mathscr{S}_\alpha$.

On admettra que pour tout f de $\mathscr{S}_\alpha$, on a au voisinage de $+\infty$: $f(t) = O(\mathrm{e}^t)$ et au voisinage de $-\infty$, $f(t) = O(\mathrm{e}^{-t})$.

2. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{S}_\alpha$.

3. Montrer que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{S}_\alpha$.

4. *Exemple* : $n = 4$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)\,!}$.

On admet que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4.1 Déterminer α de sorte que $f \in \mathscr{S}_\alpha$.

4.2 Expliciter les projetés orthogonaux de f sur S_1 et sur S_2.

4.3 En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles réelles.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1121 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1.

1. Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

2.1. On pose pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $s_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+p}$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+p}>1$.

On note alors $a_n=n+p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n=\dfrac{a_n}{n}$.

On a donc : $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+...+\dfrac{1}{a_n}>1$.

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

4. Prouver pour $n\geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}<1 \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{3n-2}>1$$

5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell\in[2,3]$.

6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+...+\dfrac{1}{a_n}\leqslant 1+\dfrac{1}{a_n}$.

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1-\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{n+1}+...+\dfrac{1}{a_n}\leqslant\displaystyle\int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{n}+...+\frac{1}{a_n-1}\leqslant 1$.

8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $E=\mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(1,X,X^2,...,X^{2n})$ et a un réel.

On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall\, P\in E,\quad \Phi_a(P)=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)P'+a\,X\,P$$

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.

Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.

2. Soit $\lambda\in[\![-n,n]\!]$.

Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P=\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^\alpha\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P)=\lambda P$.

3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.

On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a, un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 9, ..., 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n$.

1. Soit Φ l'application qui à tout élément u de $\mathcal{E}$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Prouver que Φ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$.

1.2. En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

2. On note alors pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.1. Justifier que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2.2. Déterminer explicitement les suites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

3. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathcal{E}^2$, on pose : $(u|v) = \sum_{i=0}^{2} u_i\, v_i$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. On notera $\|\ \|$ sa norme associée.

4. Vérifier que la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $\mathcal{E}$.

5. On définit l'application d sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall\, u \in \mathcal{E},\quad d(u) = w \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{n+1}$$

5.1. Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5.2. Ecrire la matrice de l'endomorphisme d dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathcal{E}$.

5.3. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

5.4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par d.

5.5. Prouver que d est une isométrie de $\mathcal{E}$. Déterminer d^3.

5.6. Soit H l'orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par d.

5.7. Reconnaître la nature géométrique de la restriction de d à H et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 4.

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration le développement en série entière de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et donner son rayon de convergence.

Tournez la page S.V.P.

2. **Question de cours 2** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}\, A^{2n+1} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}\, A^{2n+1}$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \dfrac{1}{2\,i}\,[\exp(iz) - \exp(-iz)\,]$ et $c(z) = \dfrac{1}{2}\,[\exp(iz) + \exp(-iz)\,]$ où i vérifie $i^{\,2} = -1$.

3.1. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}\, z^{2n+1}$.

3.2. Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Si $A = \gamma\, I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.

5. **On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.**

5.1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\, A\, P$.

5.2. Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.

6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**

6.1. Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que : $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}\, A\, Q$.

6.2. Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.3. En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.

7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

8. Existe-t-il une matrice X de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1115 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Question préliminaire

Soit a un réel non nul.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout x réel associe le nombre complexe $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}\,a}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif

Pour tout réel α et tout réel $\lambda>0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t\mapsto t^\alpha\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$.

1.

1.1 Déterminer l'ensemble A des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\lim\limits_{t\to 0,t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.

1.2 Déterminer l'ensemble B des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que pour tout x réel, les fonctions $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]\,0,+\infty[$.

On définit alors les deux fonctions U et V sur $\mathbb{R}$ par : $U(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $V(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

3. Etudier les parités des fonctions U et V.

4. A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Pour tout réel x, on pose $W(x)=U(x)+\mathrm{i}\,V(x)$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

5.1 Montrer que la fonction W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5.2 Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)

5.3 En déduire que U et V sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.4 Prouver que l'on a pour tout réel x : $\begin{cases} U'(x)=-\dfrac{V(x)+x\,U(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x)=\dfrac{U(x)-x\,V(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}$

6. Pour tout réel t, on note $g(t)=f_{-1/2,\lambda}(t)\,\sin(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\sin(t)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-1)^n\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$.

7.1 Prouver que pour tout entier naturel n, $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$

7.2 Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.3 Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

8. **8.1** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\,a_k$ converge. On note S sa somme.

8.2 Montrer que $S > 0$.

8.3 En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\, a_k$, montrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\, a_k$

9. A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

10. Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$ et $T(x) = \arctan\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$

10.1 Prouver que les fonctions R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

10.2 Montrer que les fonctions R et T sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.3 Démontrer alors que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.

10.4 Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

10.5 En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et de T à l'aide de fonctions usuelles.

11. Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

12. Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question **5.2**.

13. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $U_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos^n(xt)\,\mathrm{d}t$ et $V_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin^n(xt)\,\mathrm{d}t$.

13.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.

13.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in]\,0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 2.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$,

où $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

1. Montrer que pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.1. Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.

3.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.

4.

4.1. Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.
On pourra utiliser un changement de variables.

4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 3.

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines.
Donner sans démonstration les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.

2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.
On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

* * * * * *

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ S(x) = z,\ \text{ avec }\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$
$$\text{et}$$
$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ T(x) = y,\ \text{ avec }\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

6. Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. Étude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.

7.2. L'endomorphisme T est-il injectif ?

7.3. Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

8. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
Soit N l'application qui à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

8.1. Vérifier que pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.

8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.

8.3. Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?

8.4. Prouver que dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

8.5. Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$,

$$< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. On prend dans cette question $n = 2$.
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. On revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

4.1. Déterminer le degré de L.

4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)\,t^x\,\mathrm{d}t$.

4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun son ordre de multiplicité. On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

4.2.3. En déduire une expression de φ, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 5.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[\,0, 1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \forall\, t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,\ f_n(t) = w_k \ \text{ et } \ f_n(1) = w_n.$$

1. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Prouver que l'on a pour tout $t \in [\,0, 1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

3. En déduire pour tout $t \in [\,0, 1]$, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

4. Prouver alors que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k = \ell$.

* * * * * *

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1155 – D'après documents fournis

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [\,1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2. Exprimer l'évènement $[X_1 = X_2]$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}$.

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

4.2. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement dans cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.

1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

1.3. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t$.

3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout x réel associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

5.4.1. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **4.**

5.4.2. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4.

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

* * * * * *

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1168 – D'après documents fournis

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

3. Limite de f en l'infini

3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

3.2. Déterminer la valeur de ℓ.

3.3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

3.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

3.2. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

3.3. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n\, x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

3.4. En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [\,0, 1[$, $\ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [\,0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1. On note $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.

Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.

Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

1.4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant : $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.

En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 5.

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q > = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

4.1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

4.2. Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

* * * * * *

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1161 – D'après documents fournis

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0, 1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \longmapsto \begin{cases} x^{-x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall\, x \in I,\ f_0(x) = 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\,(x\,\ln(x))^n \text{ sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0, 1]$ par $\varphi(t) = t\,\ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n + 1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$ et la norme $\|\,\|$.
On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Citer le **théorème spectral**.

1.2. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1,\ \lambda_0 = 0 \text{ et } 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

1.4. Montrer que $\mathrm{id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple (i, j) de $[\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \, p_j$.

1.7. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} \, p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé

2.1. Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.
En déduire que : $\forall\, (x, y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big)$.

2.2. Soit y un vecteur de E.
Montrer que l'on a : $\forall\, x \in E, \ \Big(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big)$.

3. Application à un exemple

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

3.3. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

3.4. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2\,M_1 + 4\,M_2$.

3.5. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

3.6. Démontrer que : $\forall\, x \in E$, $p_2(x) = (x|v_2)\, v_2$.

3.7. Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2 - t}$,
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2 - t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.

2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.

3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.

5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.

6. Calculs d'espérances et de variances

6.1. Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.

6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

6.5. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \Big(1, X-1, X(X-1), ..., X^{n-1}(X-1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ

2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.

3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.
Démontrer que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1159 – D'après documents fournis

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall\, x \in J,\ \ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

1.1. Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

1.2. Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.

1.3. En déduire la dimension de E.

2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\ \ g(x) = (1+x)\, f'(x).$$

2.1. Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

2.2. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2.3. Déterminer le noyau et l'image de u.

2.4. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

2.5. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

2.6. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2.7. L'endomorphisme u^2 est-il diagonalisable ?

3. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) $\ f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.

4.1. On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en zéro.
Expliciter h_3.

4.2. En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, h_k la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
Expliciter h_k.

5. Étude de la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$

5.1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} h_k$ converge simplement sur J et calculer sa somme H.

5.2. La fonction H est-elle dans E ?

5.3. En utilisant la question **5.1**, vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.

Exercice 2

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de y_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

$$(1)\ \ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}\,; \qquad (2)\ \ y_n = \frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}\,; \qquad (3)\ \ y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}.$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :
• X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
• pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

3.1. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Démontrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ X_n = y_{n-1}\,X_0 + y_n\,X_1$.

3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$

3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp\left(-t^n\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

4. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

6. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

6.1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

6.2. On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

Donner l'ensemble de définition de f.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.

On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$ où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.

Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k\, p_j \ \ (*).$$

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.

On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

2.1. Vérifier que l'on a : $\forall\, P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

2.2. Montrer que u est diagonalisable.
On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

2.3. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{k=1,k\neq j}^{m} \frac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.

2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

2.3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

2.4. Prouver que l'on a : $\forall\, j \in [\![1, m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

2.5. Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1172 – D'après documents fournis

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

6. En déduire $\text{Ker}(L)$.

7.

7.1. Calculer $L(e_0)$.

7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$.

7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

8. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.

9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0 \quad (*)$.

9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+\text{Id}$.

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0, b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

(1) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M\,V_n$.

4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

5. Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad M^n = a_n\, I_2 + b_n\, M$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k\,!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M.

7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, ..., P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P|Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire (|).

3.3. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

3.5. Déterminer $\sum_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

4.2. Déterminer $H^{\perp}$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^{\perp}$.

5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1165 – D'après documents fournis

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

1.2. Démontrer que pour tout réel x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

1.3. On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

2.1. Justifier l'existence de I_n.

2.2. En utilisant la question **1.** calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

3.1. Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

3.2. Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.2.** par une autre méthode.

4.1. Démontrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

4.3. Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.2**.

EXERCICE 2

1. Questions de cours

1.1. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1.2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

1.3. Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * * *

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a : $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j).$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

EXERCICE 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\,\|$.

1. Questions de cours

1.1. Soient x et y deux vecteurs de E. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.
On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \|x + t\,y\|^2$.

1.2. Démontrer qu'on a l'égalité $|(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$ **si, et seulement si,** les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.3. On considère $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $(X|Y) = X^T Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

* * * * * *

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(X) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i\, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M.

4. Montrer en utilisant la question **1.** que $M = n - 1$.

5. Déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X|Y) = X^T Y$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \left(x_i y_j + x_j y_i\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ.

7. Écrire la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi\left(e_i, e_j\right)$.

8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi(X, Y) = Y^T AX = X^T AY$.

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

10.1. Déterminer les valeurs propres de la matrice J.

10.2. En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.

11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.

12. Retrouver alors le résultat établi à la question **4.**

EXERCICE 4

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

3. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

4. On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, X^{k-1}$.

4.1. Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

4.2. Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P(\omega^k) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$.

4.3. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \omega^k\right) = n$.

******

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On note F et A les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = P(F)$$

où P est le polynôme défini à la question **4**.

5. Réduction de la matrice F

5.1. Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, F^{n-1} puis F^n.
On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.

5.2. On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(F^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que G_F est de dimension n. En donner une base.

5.3. Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F.

5.4. Justifier que F est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F.

6. Réduction de la matrice A

6.1. Expliciter la matrice A.

6.2. Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A.

6.3. Déterminer le degré du polynôme minimal de A.
En déduire que $\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Calculer le déterminant de A. Justifier que la matrice A est inversible.

8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.

9. Montrer que $G_A = G_F$.

10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A\ (F - I_n)^2 = n\ (F - I_n)$.

11. Déterminer enfin une expression de A^{-1} à l'aide des puissances de la matrice F.

FIN

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+3)}\,.$$

2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\,\alpha\,.$$

3. Espérance et variance de X

3.1. Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*

3.2. Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

3.3. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.

2. Soit p un entier non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

3. Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall\, x \neq 1,\ \ Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.

6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
Déterminer A et A^{-1}.

7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.

8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme Q de E_n.
À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ *et* $\alpha \neq 1$.

10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.

11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

EXERCICE 3

1. Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$.

* * * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0\,. \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n+1} et a_{n-1}.

2.2. Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.

2.3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \;\mapsto\; F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(2x\cos(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F

3.1. Étudier la parité de la fonction F.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

3.2. Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp\left(2x\cos(t)\right)$.

3.2.1. Justifier que h est C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.2. Prouver que pour k non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi],\ 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant M_k\,.$$

3.2.4. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

3.3. Démontrer que F vérifie la relation $(**)$.

4. Développement en série entière de F

4.1. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

4.2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\, x^n$$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4.3. Calculer J_0 et J_1.

4.4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

4.5. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

4.6. Comparer alors les fonctions F et g.

EXERCICE 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
O_n et I_n sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note enfin $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Question de cours

Démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * * *

Partie 1

2. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.
On considère les matrices par blocs de taille $2n$:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer UV et VU.

2.2. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice M^TM est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^TM = R^T\, MM^T\, R$.

Partie 2

On note Δ_n l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice Q dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T M Q = M^T$. Une telle matrice M sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n .$$

5. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est inclus dans Δ_n .

6. Démontrer que : $\forall\, A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall\, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe une matrice $T \in O_n(\mathbb{R})$, une matrice D diagonale et une matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}.$$

8. Cas $n = 2$: on démontre que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*

8.1. Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

8.2. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Déterminer alors une matrice W orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

8.3. En utilisant la question **7**, démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

9. On revient au cas général et on suppose à présent que n est impair
Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$.

9.1. Montrer que si $M \in \Delta_n$, alors $[M^T, M]$ est semblable à son opposée.

9.2. En déduire que si $M \in \Delta_n$, alors $\det\left([M^T, M]\right) = 0$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées 1, 2, ... , n, ...
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs 1, 2, ... , n.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est : $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

5. Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.

6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.

7. Déterminer la loi de X.

8. Vérifier **par le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.

9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

1.1. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

1.2. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

1.3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. Calcul de la somme de cette série

2.1. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

2.2. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)} \mathrm{d}t$.

2.3. Intégration terme à terme ?

2.3.1. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

2.3.2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2.3.3. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall\, j \in [\![2, n]\!],\ f(e_j) = e_1 + e_j\right) \quad \text{et} \quad \left(g = f - \mathrm{id}_{E_n}\right).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\mathrm{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1} G P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, .., 0)$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1}.

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1} F P$ est diagonale.

4. Résoudre, pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = F X(t) + t U$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Continuité de f

1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

1.3. En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Régularité de f

2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

2.1.1. Montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

2.1.2. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant t\,\mathrm{e}^{-at}$.

2.1.3. Montrer que : $\forall\, t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$.

2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

3.1. Montrer que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, x > 0,\ \left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$.

3.2. En déduire que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \left| \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\theta - x)\,t} \right| = 0.$

3.3. Démontrer alors que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}$.

4. Une autre expression de f

4.1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4.2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

4.3. Calculer la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(t) = t\ln\left(t^2+4\right) - 2t + 4\arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, ..., (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

*****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : \mathrm{e}^{b\,\ln(a)} \qquad (B) : \mathrm{e}^{a\,\ln(b)} \qquad (C) : \mathrm{e}^{\ln(a)\,\ln(b)}.$$

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

*****

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\mathrm{d}t$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

5.2. Déterminer le sens de variation de F.

5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

5.5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!}$.

6.1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}.$$

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0.$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0$. $\quad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ *par x lorsque x est non nul.*

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.
Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

1.1. Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.

1.2. Donner les spectres possibles de W.

1.3. Comparer $\mathbf{rg}(W)$ et $\mathbf{tr}(W)$.

1.4. Calculer $\mathbf{det}(W)$.

*****

On considère la famille $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathbf{tr}(M)$.

2.1. Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.

2.2. Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathbf{rg}(M)$.

4. On note D la variable aléatoire $\mathbf{det}(M)$.

4.1. Déterminer $D(\Omega)$.

4.2. Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension ».

5.1. On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.

5.2. On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.

5.3. On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = \left(a_{ij}(\omega)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

6.1. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.

6.2. Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.

6.3. Montrer que $\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

6.4. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.

6.5. Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.

6.6. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, ..., (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

*****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : \mathrm{e}^{b\,\ln(a)} \qquad (B) : \mathrm{e}^{a\,\ln(b)} \qquad (C) : \mathrm{e}^{\ln(a)\,\ln(b)}.$$

2. Soit x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

*****

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\mathrm{d}t$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

5.2. Déterminer le sens de variation de F.

5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

5.5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!}$.

6.1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}.$$

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0.$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soit $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0$. $\quad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ *par x lorsque x est non nul.*

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.
Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Question de cours

1. Rappeler la définition d'un évènement négligeable et d'un évènement presque sûr.

*****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

2.2. Démontrer que $\ell \in [0, 1[$.

2.3. Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

2.4. Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

2.5. Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :
- X_0 est constante et égale à 1,
- X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
- pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 0 \text{ et } \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = u_{n+1}.$$

3.1. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n.$$

3.2. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

3.3. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose que $\ell = 0$

4.1. Soit deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Montrer que la probabilité de l'évènement $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]$ est nulle.

4.2. Quelle est la probabilité de l'évènement $\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]$?

4.3. En déduire que la probabilité de l'évènement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X_n = 1]$ est nulle.

4.4. On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} \text{Max}\,\{n \in \mathbb{N} \,/\, X_n(\omega) = 1\} \text{ s'il existe} \\ -1 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ Z(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) \quad \text{si la série converge} \\ +\infty \ \text{ sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que $\mathbb{P}([Y \neq Z]) = 0$.
Que peut-on en conclure pour l'évènement $[Y = Z]$?

FIN

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2,\ p_{ij} = \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la valeur du réel α.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

5. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=i]).$$

Calculer les b_{ij}.

6. Déterminer $\mathbf{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(B)$.

7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathscr{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.

8. Démontrer que $B^2 = \mathbf{tr}\,(B)\,B$.

9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$.

2. Donner, sans justification, la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

*****

3. Étude d'une suite

3.1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

4. Étude de la série de terme général $u_n - \ell$

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose $g_p(t) = (1-t)\,t^{p(n+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

4.2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 g_p(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

4.3. En utilisant la série de fonctions définie au **4.1**, démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)\,((n+1)p+1)}.$$

4.4. Pour tout p entier naturel non nul, on pose $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)\,((t+1)p+1)}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

4.5. En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 3

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et on rappelle que :

$$\forall\,(M,N) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2,\ \ (MN)^\top = N^\top M^\top.$$

L'espace $E = \mathbb{R}^p$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\forall\,(X,Y) \in E^2\,,\ \ (X|Y) = X^\top Y$$

et pour tout vecteur X de E , sa norme est notée

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$

Soit n un **entier relatif** supérieur ou égal à -1.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est de type n lorsque $A^\top = A^n$.

1. Quelques exemples

1.1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0.

1.2. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1.

1.3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type -1.

En donner un exemple différent de la matrice identité lorsque $p = 4$.

On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 2.

2. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $p = 3$ et pour tout réel θ, on note :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2.1. Démontrer que l'on a : $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\,\theta)$.

2.2. Déterminer alors l'ensemble des réels θ tels que $A(\theta)$ soit une matrice de type n.

On revient au cas général avec $p \geqslant 3$.

3. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de type n.

3.1. Établir l'égalité : $A^{n^2} = A$.

3.2. On note $B = A^{n+1}$.

3.2.1. Montrer que $B^n = B$.

3.2.2. Démontrer que B est une matrice symétrique.

3.2.3. Prouver que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.
On pourra examiner $X^\top BX$ où X est un vecteur bien choisi de E.

3.2.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice B, lorsque B n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité.

3.2.5. Prouver que B est une matrice de projection orthogonale.
On précisera ses éléments caractéristiques.

3.3. Prouver que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.

3.4. Démontrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

3.5. Prouver que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3.6. Démontrer que l'on a : $\forall\, X \in \mathrm{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.

3.7. Prouver que si A est de plus inversible, alors A est aussi de type -1.

4. Prouver enfin que si A est à la fois de type n et de type $n+1$, alors A est une matrice de projecteur orthogonal.

EXERCICE 4

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

3.1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge.

3.2. Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

3.3. Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

3.4. Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\,(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que si φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{i}\,\varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x)}$.

5.1. Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

5.2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$F'(x) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

6. Convergence d'intégrales

6.1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

6.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

6.4. Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}v^2}\,\mathrm{d}v$ converge.
On pourra effectuer un changement de variable.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

7.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

7.2. On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variable affine $t = u - n\pi$.

7.3. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.4. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.
On pourra utiliser les questions de cours.

7.5. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

8. Montrer que pour tout x réel positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2.$$

9. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
On pourra utiliser la question **6**.

FIN

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3. On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

3.1. Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

3.2. Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

3.3. Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

3.4. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

4. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.1. Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. *On fera apparaître les calculs sur la copie*.

5.2. Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question **3.**

5.3. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

5.4. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit α un réel non nul.
Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$.
En déduire un équivalent de $1 - (1-x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0.

2. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A)\ \mathrm{e}^{b\ln(a)} \qquad (B)\ \mathrm{e}^{a\ln(b)} \qquad (C)\ \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(b)}.$$

*****

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = a_{k-1} - a_k$.

3.1. Montrer que la série de terme général u_k est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.
On notera S_n sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que $\forall\, k \geqslant 1$, $u_k > 0$.

4.2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$, on considère la variable aléatoire X_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda\, u_k$, où λ est un réel. Déterminer λ.

4.3. Montrer que X_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(X_n) = S_n$.

5. Pour tout t réel, on pose $f_0(t) = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

5.1. Pour tout entier naturel p, montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Calculer $I_{p+1} - I_p$ pour tout entier naturel p.

5.3. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$.

6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

6.2. En déduire que : $\ln(n) \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, t \geqslant 0$, $g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^t}\right)^{n-1}$.

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \int_0^m g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit β un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^{\beta} g_n(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta \ln(2)} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u.$$

9. Démontrer que : $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.

10. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x \,|\, y >$ et $||x||$ représente la norme du vecteur x.
Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E,\ \ \varphi_u(x) = 2\,\frac{< x \,|\, u >}{< u \,|\, u >}\,u - x.$$

1. Étude de l'application φ_u

1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer φ_u^{-1}.

1.3. Soit x appartenant à E, calculer $\langle\, \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(x) \,\rangle$.

1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \langle\, \varphi_u(x) \,|\, \varphi_u(y) \,\rangle = < x \,|\, y > .$$

1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^{\perp}$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^{\perp}$.

2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^{\perp}$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^{\perp}$.
Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall\, x \in \Delta,\ \ \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \Delta^{\perp},\ \ \psi(x) = -x.$$

3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n \cos(tx)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, $I_n'(x) = -\dfrac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k, que la fonction I_n est, pour tout entier naturel n, de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

Soit n un entier naturel fixé.

5. Calcul de $I_n(0)$

5.1. Déterminer, pour tout entier naturel p, une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

5.2. En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k\,!\,(n-k)\,!}$.
Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.
Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction I_n ?

FIN

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif k vérifiant :

$$k \leqslant x < k+1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Le but de l'exercice est de déterminer la loi de Y, la variable aléatoire définie par :

$$Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor.$$

1. Représenter dans un repère orthonormal la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ sur l'intervalle $[-2,2]$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
   Écrire l'événement $(Y=k)$ à l'aide d'événements $(X=j)$ où j est un entier naturel non nul.
4. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 2

1. **Question préliminaire**
   En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geqslant 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R.
   On note alors, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.
5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} x^n$ où i désigne le nombre complexe usuel tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.

7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\, x^n$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Démontrer que la matrice $B = 3A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.

2. Montrer que les valeurs propres de B sont réelles, positives ou nulles.
On pourra étudier le signe de $Y^\top BY$ pour un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.

4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice A.

5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.

6. Factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

7. La matrice A est-elle inversible ?

8. Établir que la matrice A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.

9. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé.
Montrer que V est aussi vecteur propre de $A^\top$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P.
On appelle $\mathscr{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,4]\!]^2,\quad L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

10.1. Déterminer L_1 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

10.2. Vérifier que $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, . Déterminer les coordonnées du polynôme R dans la base $\mathscr{L}$.

11. Étude des puissances de A

11.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

11.1.1. Exprimer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme P dans la base $\mathscr{L}$.

11.1.2. En déduire une expression de A^k.

11.2. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.
Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice A et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

EXERCICE 4

Questions préliminaires

1. Démontrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un segment J est lipschitzienne sur J.

2. Démontrer qu'une fonction $k-$lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur cet intervalle.

*****

Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall\, g \in F$, $\|g\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\forall\, f \in E$, $\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ définissent des normes respectivement sur les espaces F et E.

Soient $g \in F$ et $f \in E$.

3. Montrer que la fonction :

$$x \longmapsto (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f \star g = g \star f$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5.1. Représenter la fonction f_1 dans un repère orthonormal.

5.2. La fonction f_1 est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

6. Étude de $\mathbf{f_1 \star g}$

6.1. Montrer que $f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2. Si g est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, prouver que la fonction $f_1 \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

6.3. Démontrer que pour tout x réel :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

6.4. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, prouver que $f_1 \star g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7. Étude de $\mathbf{f_1 \star f_1}$

7.1. Justifier que $f_1 \star f_1$ existe.

7.2. Déterminer l'expression de $(f_1 \star f_1)(x)$ suivant les valeurs du réel x.

7.3. Représenter la fonction $f_1 \star f_1$ dans un repère orthonormal.

7.4. La fonction $f_1 \star f_1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8. Soit α un réel strictement positif.

On note h_α la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} f_1\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

8.1. Représenter graphiquement la fonction h_2 dans un repère orthonormal.

8.2. Vérifier que l'on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

8.3. Soit x_0 un point en lequel la fonction g est continue.

Montrer que : $\lim\limits_{\alpha \to 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)$.

9. Étude d'une norme subordonnée

9.1. Montrer que pour tout h dans E : $\|h \star g\|_\infty \leqslant \|g\|_1\, \|h\|_\infty$.

9.2. Montrer que l'endomorphisme Φ de $(E, \|.\|_\infty)$ qui à tout h associe $h \star g$ est continu.

9.3. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ (norme subordonnée de Φ).

10. On suppose dans cette question que g est une fonction bornée, continue par morceaux et que f vérifie la propriété :

$$\exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, x \ \text{vérifiant}\ |x| \geqslant A,\ f(x) = 0$$

Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

FIN DU SUJET

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}}|f|$.

Questions de cours

1. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3. Justifier que arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.

4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.
On rappelle que la dérivée de la composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ *sur un intervalle correctement choisi.*

5. Déterminer une expression simple de la fonction : $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.

*****

6. Soit f une fonction de E.

6.1. Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3. Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8. Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

9. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h.

9.1. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. Montrer que h appartient à E.

10. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

10.2. Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

10.3. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

10.4. Une autre expression de g′

10.4.1. On fixe x, réel de $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \dfrac{1}{(1+x^2\,T)(1+T)}$.

10.4.2. Montrer que sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

10.4.3. Donner alors l'expression de g' sur $]0,+\infty[$.

10.5. Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0.

EXERCICE 2

Notations pour l'exercice :

- i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Pour tout entier naturel non nul n, on notera $E_n = \mathbb{C}_n[X]$, le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f = g + \mathrm{i}h$.
Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U},\ P(z) = 0$.
Justifier que P est le polynôme nul.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. Soient $P = 1 + \mathrm{i}X$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$.

5. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}\,Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

6.1. Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0,n]\!]$. Évaluer $\varphi(X^k, X^\ell)$.

6.2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP+Q,R) = \overline{a}\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
- $\varphi(P,aQ+R) = a\,\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$
- $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$.

6.3. Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P,P)$ est un réel positif ou nul.

6.4. Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P,P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

6.5. Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup_{z\in\mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. Calculer $\varphi(Q_0, Q_0)$ à l'aide des coefficients de Q_0.
*On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1**.*

6.5.2. Démontrer que $M \geqslant 1$.

6.5.3. Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit $(u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

1.2. Préciser le comportement de u à l'infini.

*****

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.
Chaque boule a la probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

5. Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k.$$

7.1. Montrer que $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$.

7.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x\, G_n(x).$$

7.3. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1.$$

7.4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

7.5. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$ème case est pleine, 0 sinon.

EXERCICE 4

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{ij} = a_{ik}a_{kj}.$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.

3. Montrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4. On suppose que A est équitable, montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ii} = a_{jj}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, calculer a_{kk}.

6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

7. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \neq 0$.

8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer a_{ij} à l'aide de a_{i1} et a_{j1}.

9. Quelques résultats remarquables

9.1. Montrer que A est de rang 1.

9.2. Calculer A^2.

9.3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

9.4. Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

12. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

FIN DU SUJET

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. **Calcul d'une somme**

   1.1. Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

   1.2. En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.

   1.3. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
3. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.
   On utilisera la question **1.3** pour simplifier le résultat.
4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

EXERCICE 2

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x,t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.
2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

*****

3. **Cas particuliers**

   3.1. Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

   3.2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t$.

   3.3. Soit x un réel de $[0,1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

4.1. Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.

4.2. Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3. Démontrer alors que F est de classe C^2 sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \left\{G \in C^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\right\}$.

7.1. Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.

7.2. Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

7.3. Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

8. Recherche des éléments propres de T

8.1. Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question* ***4.***

8.2. Déterminer les valeurs propres de T. *On pourra aussi utiliser la question* ***4.***

8.3. Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On identifie dans tout l'exercice $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.
On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est : $(X_1|X_2) = X_1^\top X_2$ et que $\|X_1\|^2 = X_1^\top X_1$.
Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs **linéairement indépendants** de $\mathbb{R}^n$.
On définit la matrice $M = \left(m_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha\, x_i\, x_j + \beta\, y_i\, y_j$, où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On note $U_X = X X^\top$.

2.1. Justifier que $U_X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2.2. Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.

2.3. Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.4. Prouver que $\mathrm{Ker}\,(U_X)$ et $\mathrm{Im}\,(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2.5. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.

2.6. On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question **2.4.**

3. Dans le cas particulier où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M.
En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.

4. On revient au cas général et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et de β.

4.1. On note $F = \mathrm{Vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

4.1.1. Déterminer MX.

4.1.2. En déduire que F est stable par f.

4.2. Justifier que $F^\perp$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$.

4.3. On note $G = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\,\|X\|^2 & \alpha\,(X|Y) \\ \beta\,(X|Y) & 1 + \beta\,\|Y\|^2 \end{pmatrix}$.

4.3.1. Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit sur F par f dans la base (X, Y).

4.3.2. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

4.3.3. Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.

4.3.4. Déterminer les valeurs propres de G.

4.4. Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{1/n}}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Soit α un réel strictement positif.

1.1.1. Rappeler un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$.

1.1.2. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \mapsto 1 - t^\alpha$.

1.2. Soit β un réel.
Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

1.3. Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geqslant 2$.

2. Démonstration d'un encadrement

2.1. Démontrer que l'on a :

- pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$,
- pour tout réel t négatif : $\mathrm{e}^t \leqslant 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$.

2.2. On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k\,!}$.

Soit p un entier naturel non nul.

On suppose que : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p-1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$.

2.2.1. Démontrer que : $\forall u \leqslant 0,\ U_{2p+1} \leqslant \mathrm{e}^u$.

2.2.2. Démontrer également que : $\forall u \leqslant 0,\ \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p+2}$.

2.3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e^u lorsque u est un réel négatif ou nul.

3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0, 1[$, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \geqslant 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k.$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$ existe.

On rappelle que $\ln(t)$ *est équivalent à* $t - 1$ *au voisinage de* 1.

5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+1/n}}\,\mathrm{d}t\right)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

7. Prouver alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

8. Prouver que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,t^p\,\mathrm{d}t$ existe.

9. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel p : $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,t^p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2}$.

11. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On admettra le résultat : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul.
On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on note $e_k = X^k$ et $\mathscr{B} = (e_0, ..., e_{2n})$ la base canonique de E.

Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E^2, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
Soit L l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \ L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire sur E.

2. Déterminer $L(e_k)$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(L)$.

4. Prouver qu'il existe une base $\mathscr{U}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter, de $\mathrm{Ker}(L)$, dont le premier vecteur est e_1.

5. Montrer que :
i) $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux,
ii) $E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit λ un réel. On considère l'application T_λ définie sur E par :

$$\forall\, P \in E,\ \ T_\lambda(P) = P + \lambda\, L(P)\, X.$$

6.1. Vérifier que T_λ est un endomorphisme de E.

6.2. Soit $P \in E$. Calculer $(L \circ T_\lambda)(P)$.

6.3. Déterminer la matrice de T_λ dans une base de E adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**

6.4. Déterminer les valeurs propres de T_λ.

6.5. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

6.6. Justifier que T_λ est un automorphisme de E.

6.7. Pour tous réels α et β, préciser $T_\alpha \circ T_\beta$.

6.8. Déterminer T_λ^{-1}.

EXERCICE 2

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Questions de cours

1.1. Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.

1.2. Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

2.1. Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

2.2. En déduire la loi de Y et son espérance.
On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

On pose $T = XZ$.

3.1. Préciser $T(\Omega)$.

3.2. Soit k un entier naturel.
En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.

3.3. Déterminer la loi de T.

3.4. Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh**, et **ch**.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit x un réel positif. Comparer x et x^2.

*****

Soit $\alpha \in]0, 1[$.
On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. On pose pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

2.1. Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

2.2. Justifier que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer φ'.

2.3. Montrer que l'on a : $\forall t \in [1, +\infty[,\ |\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1 + \alpha\, t^\alpha}{t^2}$.

2.4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t - n|.$$

3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que l'on a : $\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

4.1. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4.2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. En déduire que la série de terme général u_n converge.

7. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

9. ***On suppose*** **que la série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ **est convergente.**

9.1. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On pourra utiliser la question de cours.

9.2. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On procédera comme à la question **4.2**.

9.3. On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2\,n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

On pourra utiliser la formule de duplication : $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

EXERCICE 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E.

On note : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\, P(n)\, Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

2.1. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.2. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Quelques calculs de sommes

3.1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.2. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.3. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.4. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.5. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0, S_1 et S_2.

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question **2**.

4.1. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X.

4.2. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.3. En déduire la distance recherchée.

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall\, X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 2\right\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

2. Déterminer les solutions du problème posé.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g, déterminer les extrema possibles de f restreinte à H.

4. Retrouver les solutions du problème posé.

Troisième méthode

Soit $F = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0\right\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.

6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F.

7. Calculer la distance $\mathrm{d}(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F.

8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.

9. En déduire la structure de l'ensemble H.

10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On note $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1}.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P, associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q)\, X^q$$

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_{n-1}.
Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \dfrac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m, la somme : $\sigma_m = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \omega^{m(r-1)}$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base $\mathscr{B}$ de E_{n-1}.

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

3. Démontrer que, pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{k,\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique ? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable ?

5. Calculer $A_\omega \times A_{\overline{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in [\![0,n-1]\!]$, $L_q(X) = \dfrac{X^n-1}{X-\omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω.

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω.

11. En déduire que : $\forall q \in [\![0,n-1]\!]$, $L_q \in E_{n-1}$.

On pose $H_0 = \mathrm{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω.

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0).

14. En déduire :

— un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi_\omega - \mathrm{Id}_{E_{n-1}})$,

— un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi_\omega + \mathrm{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω.

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω.

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On suppose à présent $n \geqslant 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω.

19. Déterminer le spectre de φ_ω.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

*****

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\,!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

5. Prouver que pour tout réel positif x, $f'(x) \leq \mathrm{e}^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{e}^z\,|x - y|$.

7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t\,[f(t)]^2}\,\mathrm{d}t$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X)^2}$.

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1047 – D'après documents fournis

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit $f : m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} e^{x_j} \in \mathbb{R}$.

1. Étudier l'existence d'extrema locaux de f.

2. La fonction f est-elle majorée ?

3. Démontrer que f admet une borne inférieure que l'on déterminera.

Soit g la fonction qui à $m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe $g(m) = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

On note $H = g^{-1}(\{0\}) = \left\{ m = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\}$

4. Déterminer le seul extremum possible de la restriction de f à H.

5. Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^t \geqslant 1 + t$.

6. En déduire que f admet, sous la contrainte H, un minimum global que l'on déterminera.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note dans tout l'exercice :
- $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$,
- A et B les deux polynômes : $A = X^n - 1$ et $B = X^n - X$.

Questions préliminaires

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
*On pourra **poser** la division euclidienne de A par B.*

3. Déterminer le PGCD des polynômes A et B.

4. Décomposer les deux polynômes A et B en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Les n racines distinctes de B seront notées : $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et z_n avec $z_n = 0$.

* * * * * *

On considère l'application f qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne du produit AP par B.

5. Prouver que f est un endomorphisme de E.

6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. En posant la division euclidienne, déterminer $f\left(X^k\right)$.

7. De la même façon, déterminer $f\left(X^{n-1}\right)$.

8. En déduire la matrice M de f dans la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ de E.

9. Calculer la trace de M.

Étude du noyau et de l'image de f

10. Justifier que le rang de M est égal à $n-1$.

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

12. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

13. Justifier que $\mathrm{Im}(f) = \left\{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\right\}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Éléments propres de f

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On note P_j le polynôme de E défini par $P_j = \dfrac{B}{X - z_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (X - z_k)$ et $R_j = f(P_j)$.

15. Vérifier que $P_j(z_j) \neq 0$.

16. Montrer que les racines de P_j sont racines de R_j.

17. En déduire qu'il existe un scalaire λ_j tel que $R_j = \lambda_j P_j$. Que peut-on alors dire du polynôme P_j ?

18. Montrer que l'on a : $A(z_j) = \lambda_j$.

19. En déduire l'expression de λ_j à l'aide de z_j. On précisera la valeur de λ_n.

20. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

21. Retrouver la valeur de la trace de l'endomorphisme f.

22. Déterminer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f sous forme développée.

23. En déduire le déterminant de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.

EXERCICE 3

Questions préliminaires

1. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ et donner son domaine de validité.

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, t^n$.

3. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} b_n t^n$ deux séries entières définies sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$).

On note $\sum_{n \geqslant 0} c_n\, t^n$ le produit de Cauchy de ces deux séries entières.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisir sans justification l'expression correcte de c_n :

$$(a)\, c_n = \sum_{p-q=n} a_p\, b_q \qquad (b)\, c_n = \sum_{p-q \leqslant n} a_p\, b_q \qquad (c)\, c_n = \sum_{p+q \leqslant n} a_p\, b_q \qquad (d)\, c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$$

4. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

Rappeler sans démonstration la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

*****

On rappelle que si t est un réel, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t et que l'on a : $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$ ou encore $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note E_x l'ensemble : $E_x = \left\{ m = (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \sqrt{a^2+b^2} \leqslant x \right\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières positives du disque fermé de centre O et de rayon x.

On pose enfin $G(x) = \mathrm{Card}(E_x)$.

5. Représenter graphiquement E_2 et déterminer $G(2)$.

6. En utilisant le changement de variable $t = \sin(u)$, calculer l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t$.

7. Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ G(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + 1 \right)$.

On pourra s'aider d'un dessin.

8. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$. Démontrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \frac{\pi}{4}$.

10. En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque l'entier n tend vers plus l'infini.

11. Déterminer alors un équivalent de la fonction G au voisinage de plus l'infini.

12. On définit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ où a_n vaut 1 si n est le carré d'un entier et 0 sinon.

Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. On notera h la somme de cette série.

13. On pose, pour $t \in I =]-1, 1[$, $g(t) = \dfrac{h(t)^2}{1-t}$. Prouver que : $\forall\, t \in I,\ g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} G\left(\sqrt{n}\right) t^n$.

Un équivalent de g

14. Montrer que l'on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^\star,\ \text{tel que}\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \left| G\left(\sqrt{n}\right) - \frac{\pi}{4}(n+1) \right| \leqslant \varepsilon\,(n+1)$$

15. En majorant la quantité $\left| g(t) - \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, t^n \right|$, montrer que $g(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4}\,(1-t)^{-2}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1077 – D'après documents fournis

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est décroissante sur I si :

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

On note alors, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer, sans calculer sa dérivée, que la fonction f est décroissante sur D.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

4. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. Soit $J = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'intégrale J converge et prouver que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

EXERCICE 2

Question de cours

1. Soit u une fonction réelle de la variable réelle, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas.

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

*****

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k(X) = X^k$ et on rappelle que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E_n.

On considère l'application f qui à tout polynôme $P \in E_n$, associe le polynôme : $P''(X) - 4XP'(X)$, c'est-à-dire que :

$$f(P) = P'' - 4XP'$$

2. Étude de f

2.1. Justifier que f est un endomorphisme de E_n.

2.2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ de E_n. Expliciter cette matrice dans le cas $n = 3$.

2.3. Prouver que f est diagonalisable et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

2.4. Soit P un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrer que $\lambda = -4\deg(P)$.

2.5. En déduire que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p, de degré p et tel que :

$$f(H_p) = -4pH_p$$

On rappelle qu'un polynôme est unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

3. Étude de H_p pour $p \in [\![0, n]\!]$

3.1. Démontrer que l'on a :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!],\ \ f(H_p') = -4(p-1)\, H_p'$$

3.2. En déduire que :

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!],\ \ H_p' = p\, H_{p-1}$$

et que :

$$\forall\, p \in [\![2, n]\!],\ \ H_p - X\, H_{p-1} + \frac{p-1}{4}\, H_{p-2} = 0$$

3.3. Déterminer H_j pour tout $j \in [\![0, 3]\!]$.

4. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

Soit alors G la fonction définie sur U par :

$$\forall\, m = (x, y, z) \in U,\ G(m) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|$$

4.1. Établir que $m_0 = (a, b, c)$ est un point critique de G si, et seulement si, (a, b, c) est solution du système :

$$(S)\ \begin{cases} 2a(a-c)(a-b) = 2a - b - c & (L_1) \\ 2b(b-a)(b-c) = 2b - a - c & (L_2) \\ 2c(c-a)(c-b) = 2c - a - b & (L_3) \end{cases}$$

On ne cherchera pas à résoudre le système (S).

4.2. On note $Q = (X-a)(X-b)(X-c)$.

4.2.1. Déterminer les coefficients du polynôme Q.

4.2.2. Montrer que (L_1) équivaut au fait que a est racine de $f(Q)$.

On admettra dans la suite que :

« (a, b, c) est solution du système (S) » **équivaut à** « $f(Q)$ admet pour racines a, b et c ».

4.3. Prouver que si $m_0 = (a, b, c)$ est un point critique de G, alors $f(Q) = -12\, Q$.

4.4. Déterminer alors le polynôme Q.

4.5. En déduire les points critiques de G.

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel non nul, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.

2. En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel ℓ, l'expression de J^ℓ.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

5. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres de la matrice J.

7. Déterminer une matrice diagonale D semblable à J.

8. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

9. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement deux réels α_k et β_k tels que $(M_r)^k = \alpha_k I_n + \beta_k J$.
On exprimera le résultat sans le symbole $\sum$.

11. Montrer que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

13. Dans cette question, on prend $n = 3$**.**

13.1. Déterminer une matrice P inversible telle que :

$$\Delta_r = P^{-1} M_r P, \text{ où } \Delta_r = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ avec } \lambda_1 = \lambda_2.$$

13.2. Résoudre le système différentiel : $Y' = \Delta_r Y$.

13.3. En déduire les solutions du système différentiel : $Z' = M_r Z$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1061 – D'après documents fournis

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Question préliminaire

Soit φ la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = 2t^3 - t^2 + 1$$

1. Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et en donner la représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

*****

Soit $f : M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^2 \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f.

3. En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon 2 : $D = \left\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

4.1. Justifier que f admet dans D des extrema globaux.

4.2. Justifier que ces extrema sont atteints sur le cercle de centre O et de rayon 2.

4.3. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 2 : il existe donc $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $M = (2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha))$. Démontrer que : $f(M) = 4\,\varphi(\cos(\alpha))$.

4.4. En déduire les extrema globaux de f sur D.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2\, y''(x) + x\, y'(x) - (x^2 + x + 1)\, y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

2. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall\, x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

2.1. Montrer que l'on a : $\begin{cases} \forall\, n \geqslant 2,\ \ (n^2 - 1)\, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

2.2. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall\, n \geqslant 1,\ \ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}$.

2.3. Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = x\, y(x)\ \mathrm{e}^x$.

3.1. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

3.2. Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x\,u'(x) - (2x+1)\,u(x) = 0 \quad (F)$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Une équation différentielle

3.3.1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right) u = 0$$

3.3.2. Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

3.4. Démontrer que, pour tout réel c, la fonction $x \mapsto cx\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.5. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = a(2x-1)\ \mathrm{e}^{2x} + a$$

3.6. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A.
On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $(X \mid Y) = X^\top Y$.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

3. Prouver que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice J et une matrice diagonale D semblable à J.

5. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

6. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

7. Vérifier que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

8. Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X, Y) = X^\top M_r\, Y$.

8.1. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

8.2. Montrer que : $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f_r(X, Y) = f_r(Y, X)$.

8.3. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f_r(X, Y) = (X')^\top \Delta_r Y'$$

où l'on a posé $X' = PX$ et $Y' = PY$.
On ne déterminera pas la matrice P.

8.4. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles l'application f_r définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 4

Questions de cours

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Rappeler la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

*****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$ avec $q = 1 - p$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

4. Étude de la variable aléatoire $X + Y$

4.1. Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?

4.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

4.3. Soient n et k deux entiers naturels.

4.3.1. Lorsque $k > n$, calculer $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k)$.

4.3.2. On prend $k \leqslant n$. Démontrer qu'il existe un scalaire r_n tel que : $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = r_n$.

5. On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$ où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.

5.1. Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?

5.2. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbb{P}(M \geqslant k)$.

5.3. En déduire la loi de la variable aléatoire M.

5.4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'évènement $(M = k) \cap (V = r)$.
On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.

5.5. En déduire la loi de V.

5.6. Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1054 – D'après documents fournis