

EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

PROBLEME 1: algèbre linéaire.

Etant donné un nombre entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathbf{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à $2n$.

A tout polynôme P de $\mathbf{R}_{2n}[X]$, on associe le polynôme Q défini par:

$$Q(X) = XP(X) - \frac{X^2 - 1}{2n} P'(X).$$

1°) Etude d'un endomorphisme.

- a) Prouver que l'application T associant au polynôme P le polynôme Q constitue un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_{2n}[X]$.
- b) Déterminer le(s) polynôme(s) P de $\mathbf{R}_{2n}[X]$ appartenant au noyau de T .
L'endomorphisme T est-il injectif? surjectif?
- c) Ecrire la matrice A de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.

2°) Etude des éléments propres de l'endomorphisme T .

- a) Déterminer l'image par T du polynôme $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{2n-k}$ où $0 \leq k \leq 2n$.
En déduire les valeurs propres de T et montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ forme une base de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.

On note U la matrice de passage de la base canonique à la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$.

- b) Déterminer la matrice $B = U^{-1}AU$.
- c) Expliciter la première et la dernière lignes et la première et la dernière colonnes de la matrice U .

3°) Etude de la matrice-inverse de U .

- a) Déterminer les composantes du polynôme X^{2n} dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ en calculant la somme $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k P_k(X)$.
- b) Déterminer les composantes du polynôme 1 dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ en calculant la somme $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k P_k(X)$.
- c) On note $X^j = v_{0,j}P_0 + v_{1,j}P_1 + \dots + v_{2n,j}P_{2n}$ pour $0 \leq j \leq 2n$. Calculer $v_{0,j}$ et $v_{2n,j}$.
- d) Expliciter la première et la dernière lignes et la première et la dernière colonnes de la matrice $V = U^{-1}$.

4°) Etude des limites des puissances de la matrice A .

- a) Expliciter les limites des deux suites matricielles (B^{2k}) et (B^{2k+1}) lorsque k tend vers $+\infty$.
- b) Expliciter les limites des deux suites matricielles (A^{2k}) et (A^{2k+1}) lorsque k tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2: analyse.

On considère une fonction f de trois variables réelles x, y, z , définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. On suppose de plus que cette fonction f ne dépend que de la distance à l'origine, autrement dit qu'il existe une fonction $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que:

$$f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

On suppose cette fonction F de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, de sorte que f est de classe C^2 sur l'espace $\mathbf{R}^3$ privé du point O , et l'on se propose d'étudier ici sur l'espace $\mathbf{R}^3$ privé du point O les solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - z \frac{\partial f}{\partial z} - 3f = 0.$$

1°) Expression de l'équation différentielle vérifiée par F .

a) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ de f en fonction des variables x, y, z et de $F'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ et $F''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

b) Prouver que f est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente sur l'espace $\mathbf{R}^3$ privé du point O si et seulement si F est solution de l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$:

$$(E): \quad rF''(r) + (2 - r^2)F'(r) - 3rF(r) = 0.$$

2°) Etude des solutions développables en série entière de (E).

a) On considère une suite de nombres réels (a_k) .

Montrer que la fonction $r \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $a_1 = 0$ et

$(k+2)a_{k+2} = a_k$ pour tout nombre entier naturel k .

b) On considère réciproquement une suite de nombres réels (a_k) vérifiant la relation précédente et l'on forme la série entière $F(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} r^{2k}$.

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, et en déduire que F est bien solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbf{R}$.

c) Déterminer le coefficient a_{2k} en fonction de $a_0, k!$ et 2^k .

Exprimer, lorsque $a_0 = 1$, la somme $S(r)$ de la série entière $\sum a_{2k} r^{2k}$ à l'aide des fonctions usuelles.

3°) Etude de l'ensemble des solutions de (E).

a) On considère la fonction définie pour $r > 0$ par:

$$\Pi(r) = \int_r^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Justifier l'intégrabilité de la fonction $x \rightarrow \exp(-x^2/2)$ sur tout intervalle $[r, +\infty[$ où $r > 0$. Par une intégration par parties, exprimer $\int_r^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{x^2}$ en fonction de r et $\Pi(r)$.

b) On pose alors dans l'équation différentielle (E): $F(r) = S(r)y(r)$.

Montrer que F est solution de (E) si et seulement si $ry''(r) + (r^2 + 2)y'(r) = 0$, puis exprimer les solutions de cette équation à l'aide de la fonction Π .

c) En déduire l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E).

Quelles solutions de l'équation aux dérivées partielles de départ en déduit-on?

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHÉMATIQUES

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction Gamma d'Euler, définie pour tout nombre réel strictement positif x par la formule intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{x-1} dt.$$

Les résultats d'une question peuvent être admis pour traiter les suivantes.

1°) Domaine de définition et équation fonctionnelle de la fonction Gamma.

a) Etablir que la fonction $t \rightarrow \exp(-t)t^{x-1}$ est intégrable (ou sommable) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si le nombre réel x est strictement positif.

Dans la suite du problème, le nombre réel x est toujours supposé strictement positif.

b) Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

c) Calculer $\Gamma(1)$, en déduire $\Gamma(2)$ et, de façon plus générale, $\Gamma(n)$ pour tout nombre entier $n \geq 1$.

2°) Etude de la continuité et des dérivées de la fonction Gamma.

a) On considère deux nombres réels a, b tels que $0 < a < b$.

- Prouver pour $a \leq x \leq b$ l'inégalité $0 \leq \exp(-t)t^{x-1} \leq \exp(-t)t^{b-1}$ pour $t \geq 1$.

Montrer que cette fonction $t \rightarrow \exp(-t)t^{b-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- Prouver pour $a \leq x \leq b$ l'inégalité $0 \leq \exp(-t)t^{x-1} \leq \exp(-t)t^{a-1}$ pour $0 < t \leq 1$.

Montrer que cette fonction $t \rightarrow \exp(-t)t^{a-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

- En déduire que la fonction Gamma est continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$.

(On citera clairement le théorème utilisé et on vérifiera avec soin ses hypothèses).

b) Calculer la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $(t, x) \rightarrow \exp(-t)t^{x-1}$.

En raisonnant de la même façon qu'à la question a), montrer que la fonction Gamma est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$, et donner l'expression de sa dérivée $\Gamma'(x)$.

(On citera clairement le théorème utilisé et on vérifiera avec soin ses hypothèses).

c) Donner sans justifications supplémentaires la dérivée seconde $\Gamma''(x)$.

3°) Etude graphique de la fonction Gamma.

a) En remarquant que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, prouver que la dérivée Γ' s'annule en un point c appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.

b) Déterminer, pour $x > 0$, le signe de $\Gamma''(x)$, en déduire le sens de variation de Γ' , puis le signe de $\Gamma'(x)$ en fonction de x .

c) Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction Gamma, puis donner l'allure de sa représentation graphique sur $]0, +\infty[$.

4°) Etude du nombre dérivé $\Gamma'(1)$.

a) On considère un nombre réel strictement positif t .

- Déterminer la limite simple lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite de fonctions (u_n) définie pour $t \geq 0$ par :

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leq t \leq n \text{ et } u_n(t) = 0 \text{ si } t \geq n.$$

- Etudier pour $t > 0$ donné les variations de la fonction U définie sur $]t, +\infty[$ par :

$$U(x) = x \ln\left(1 - \frac{t}{x}\right).$$

- Comparer alors $u_n(t)$ et $u_{n+1}(t)$ et en déduire que, pour tout nombre réel positif t :

$$u_n(t) \leq \exp(-t).$$

b) Citer précisément l'énoncé du théorème de convergence dominée, puis prouver à l'aide de celui-ci que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln(t) dt.$$

c) Etablir l'égalité suivante:

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt = \frac{n}{n+1} \left[\ln(n) + \int_0^1 (n+1)u^n \ln(1-u) du \right].$$

Préciser, en intégrant par parties (on prendra $u^{n+1} - 1$ comme primitive de $(n+1)u^n$) une expression sans signe intégral de cette dernière intégrale.

d) On rappelle que la constante d'Euler $\gamma = 0.5772156649\ldots$ est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Déduire des résultats précédents que $\Gamma'(1) = -\gamma$, préciser $\Gamma'(2)$ (on pourra dériver la relation 1.b) et, de façon plus générale, $\Gamma'(n)$ pour tout nombre entier $n \geq 1$.

EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

Ce problème a pour objectif l'étude de la transformation de Fourier discrète et son application à un algorithme rapide de multiplication des polynômes.

Dans toute la suite, on désigne par N un nombre entier naturel non nul et on convient de noter n le nombre entier 2^N et ω_n le nombre complexe $\exp(2i\pi/n) = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$.

On appellera :

- polynôme associé à un n -uplet $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ le polynôme A appartenant à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et défini par :

$$A(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

- transformation de Fourier discrète l'application linéaire F_n associant à tout n -uplet a de $\mathbb{C}^n$ le n -uplet de $\mathbb{C}^n$ défini à l'aide du polynôme A associé au n -uplet a par :

$$F_n(a) = (A(1), A(\omega_n), A(\omega_n^2), \dots, A(\omega_n^{n-1})).$$

L'espace $\mathbb{C}^n$ est muni de sa norme usuelle, défini pour un élément $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ par :

$$\|a\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} a_k.$$

1°) Etude du cas particulier $n = 4$.

- Expliciter l'image d'un quadruplet $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{C}^4$ par l'application F_4 .
- Expliciter la matrice M_4 de l'endomorphisme F_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$, définie par :
 $e_0 = (1, 0, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1).$
- Calculer le produit matriciel $M_4 \overline{M_4}$ où $\overline{M_4}$ désigne la matrice d'ordre 4 dont les éléments sont les conjugués de ceux de la matrice M_4 . En déduire que F_4 est inversible; préciser F_4^{-1} .
- Calculer enfin M_4^2 et M_4^4 .

2°) Etude du cas général.

- Etablir que l'application F_n est bijective de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.
- Expliciter la matrice M_n de l'endomorphisme F_n dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
- On désigne par i, j deux nombres entiers vérifiant l'inégalité $-n \leq i-j \leq n$.

En distinguant les cas $i-j = 0$ et $i-j \neq 0$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(i-j)k}$.

- Calculer le produit matriciel $M_n \overline{M_n}$ où $\overline{M_n}$ désigne la matrice d'ordre n dont les éléments sont les conjugués de ceux de la matrice M_n . Préciser alors l'automorphisme F_n^{-1} .
- Calculer M_n^2 et M_n^4 .

L'endomorphisme F_n est-il diagonalisable (cette question est réservée aux candidats MP, PC, PSI) ?

- Exprimer enfin $\|F_n(a)\|^2$ en fonction de $\|a\|^2$.

3°) Etude des éléments propres de F_n .

- Montrer que les valeurs propres de F_n appartiennent nécessairement à l'ensemble à quatre éléments $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$.
- On considère pour $N \geq 3$, donc $n \geq 8$, les deux vecteurs u et v de $\mathbb{C}^n$ définis par :

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} e_k \quad \text{et} \quad v = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} e_k.$$

- Calculer $F_n(e_1 + e_{n-1})$ en fonction de u et en déduire $F_n(u)$.
- Calculer $F_n(e_1 - e_{n-1})$ en fonction de v et en déduire $F_n(v)$.
- En déduire les images des quatre vecteurs suivants par F_n , puis conclure :

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) + u, \quad \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) - u, \quad \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) + v, \quad \frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) - v.$$

4°) Etude d'un algorithme récursif de calcul de $F_n(a)$.

A tout élément $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbf{C}^n$, on associe l'élément $b = (a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$ et l'élément $c = (a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbf{C}^{n/2}$. On considère alors les transformées de Fourier discrètes de ces deux derniers éléments b et c , notées :

$$F_{n/2}(b) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{n}{2}-1}), \quad F_{n/2}(c) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{n}{2}-1}).$$

a) On suppose connus $F_{n/2}(b)$ et $F_{n/2}(c)$ et l'on considère l'algorithme suivant :

```

E := 1
Pour p := 0 à (n/2)-1 faire :
    Début F :=  $\gamma_p E$  ;  $\alpha_p := \beta_p + F$  ;  $\alpha_{p+\frac{n}{2}} := \beta_p - F$  ;  $E := \omega_n E$  Fin
    
```

Comparer l'élément $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ ainsi obtenu à l'issue de cet algorithme à $F_n(a)$, transformée de Fourier discrète de l'élément a .

b) On convient d'appeler "opération complexe" l'une des quatre opérations $+$, $-$, $\times$, $/$ dans $\mathbf{C}$. On désigne alors par u_N le nombre des opérations complexes nécessaires au calcul de $F_n(a)$ par l'algorithme récursif décrit ci-dessous (sans tenir compte du calcul des nombres ω_n , qui sont supposés connus) :

- Si $N = 0$, on a $F_1(a) = (a)$ et il est donc clair que $u_0 = 0$.
- Sinon, on calcule récursivement $F_{n/2}(b)$ et $F_{n/2}(c)$, ce qui nécessite $2u_{N-1}$ opérations, et l'on obtient $F_n(a)$ par l'algorithme décrit ci-dessus à la question (a).

Exprimer u_N en fonction de u_{N-1} et N , et en déduire u_N en fonction de N , puis de n .

5°) Application au produit rapide de deux polynômes.

On considère ici deux polynômes P et Q à coefficients réels ou complexes dont la somme des degrés respectifs est strictement inférieure à n , et le polynôme $R = PQ$. On note :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i, \quad Q(X) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j, \quad R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k$$

(les coefficients des polynômes P, Q, R d'indices strictement supérieurs à leurs degrés respectifs sont nuls) et p, q et $p*q$ les trois éléments de $\mathbf{C}^n$ associés aux polynômes P, Q et $R = PQ$, soit : $p = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$, $q = (q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$, $p * q = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$.

Enfin, on note $pq = (p_0 q_0, p_1 q_1, \dots, p_{n-1} q_{n-1})$ le produit de deux éléments p et q de $\mathbf{C}^n$.

a) Etablir l'égalité $F_n(p*q) = F_n(p)F_n(q)$.

b) On calcule le produit $R = PQ$ en calculant successivement :

- les transformées de Fourier discrètes $F_n(p)$ et $F_n(q)$ par l'algorithme étudié au 4°.
- le produit $F_n(p)F_n(q)$, et donc $F_n(p*q)$.
- la transformée de Fourier discrète inverse $F_n^{-1}(F_n(p*q))$.

Déterminer le nombre d'opérations complexes nécessaires à la réalisation de chacune de ces trois étapes, et en déduire en fonction de n un équivalent du nombre d'opérations nécessaires au calcul du produit $R = PQ$ par cette méthode.

c) Comparer du point de vue du nombre d'opérations effectuées cette méthode à la méthode usuelle de calcul du produit $R = PQ$.

E.P.I.T.A.
Mathématiques (Option : durée 1h30)

On considère la fonction Zêta de Riemann, définie pour tout nombre réel $x > 1$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1°) On étudie quelques propriétés générales de la fonction Zêta.

- a) Prouver, pour tout réel $a > 1$, que la série définissant la fonction Zêta est normalement convergente sur $[a, +\infty[$, et en déduire la continuité de ζ sur $]1, +\infty[$.
- b) Déterminer (sans calcul de dérivée) le sens de variation de la fonction ζ .

2°) On calcule les nombres $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ et on considère à cet effet la fonction 2π -périodique f définie pour $-\pi \leq t \leq \pi$ par $f(t) = t^2$.

- a) Montrer sans calculs que cette fonction f est somme de sa série de Fourier, en citant clairement l'énoncé du théorème utilisé.
- b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n (coefficients de $\cos nt$ et $\sin nt$) de f .
On précisera la série de Fourier de f sous forme de série en $\cos nt$ et $\sin nt$, puis en $\exp(int)$.
- c) En déduire le nombre $\zeta(2)$ puis, à l'aide de l'égalité de Parseval, le nombre $\zeta(4)$.

3°) On étudie la fonction Zêta aux bornes de son intervalle de définition $]1, +\infty[$.

- a) En comparant $1/n^x$ à une intégrale, établir l'encadrement suivant de $\zeta(x)$ pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1.$$

- b) En déduire les limites et des équivalents de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1 et $+\infty$.

4°) On précise enfin le développement asymptotique de la fonction Zêta en 1.

A cet effet, on introduit la série de fonctions suivante, dont le terme général u_n est défini pour tout nombre entier $n \geq 1$ et tout nombre réel $x \geq 1$ par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

On rappelle par ailleurs que la constante d'Euler est le nombre réel γ défini par :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

- a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n(1)$ pour $n \geq 1$.
- b) Calculer la somme de la série de terme général $u_n(x)$ pour $n \geq 1$ et $x > 1$.
- c) Prouver, pour tout réel $a > 1$, que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[1, a]$, et en déduire la continuité de la série de fonctions $\sum u_n$ au point 1 à droite.
- d) En déduire enfin que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

E.P.I.T.A. 2000
Mathématiques (Obligatoire : durée 3h)

1°) Preliminaire : calcul d'une integrale

On considere dans cette question les deux fonctions G et H definies sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2} du \quad ; \quad H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2) du \right)^2.$$

a) Montrer que G et H sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (en precisant les resultats utilises) et preciser les derivees G' et H' . En deduire que la fonction $G+H$ est constante sur $\mathbb{R}$, egale a $\pi/4$.

b) Montrer l'inegalite suivante pour tout nombre reel x :

$$0 \leq G(x) = \exp(-x^2) \int_0^1 \frac{\exp(-x^2 u^2)}{1+u^2} du \leq \frac{\pi}{4} \exp(-x^2).$$

En deduire la limite de $G(x)$, puis de $H(x)$, quand x tend vers $+\infty$, puis determiner l'integrale I definie par :

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du.$$

Dans toute la suite du probleme, on designe par f une fonction a valeurs complexes continue et integrable sur $\mathbb{R}$ et on etudie la fonction F (dite transformee de Fourier de f) definie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x t} f(t) dt.$$

2°) Premieres proprietes de la transformee de Fourier F de f

- Montrer que F est definie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ (on citera le theoreme utilise).
- Montrer que F est bornee sur $\mathbb{R}$.

3°) Un premier exemple : la transformee de Fourier de la fonction $f: t \rightarrow 1/(1+t^2)$

On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $f(t) = 1/(1+t^2)$. Ainsi :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x t}}{1+t^2} dt.$$

a) Etablir a l'aide d'une integration par parties la relation suivante pour tout nombre reel x :

$$(1) \quad \pi x F(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-2\pi i x t}}{(1+t^2)^2} dt.$$

En deduire que $|F(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}$ pour tout nombre reel x et determiner la limite de F en $\pm\infty$.

b) Etablir que l'integrale figurant au membre de droite de l'egalite (1) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et preciser sa derivee (on citera le theoreme utilise et on verifiera ses hypotheses). En deduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et montrer par derivation de la relation (1) que :

$$(2) \quad F(x) - xF'(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i x t}}{(1+t^2)^2} dt \quad (\text{où } x \neq 0).$$

- Etablir a l'aide de la relation (2) que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$, puis former une equation differentielle lineaire du second ordre verifiee par F sur $\mathbb{R}^*$.
- Calculer $F(0)$ et, en tenant compte des limites de F en $\pm\infty$, en deduire l'expression de $F(x)$ (on pourra distinguer les deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$).

4°) Dérivée de la transformée de Fourier et transformée de Fourier de la dérivée

- a) On suppose dans cette sous-question que la fonction $t \rightarrow tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée (on citera le théorème utilisé).
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de F ?
- b) On suppose dans cette sous-question que f est de classe C^1 et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f tend vers 0 en $\pm\infty$ et déterminer la transformée de Fourier de f' .
Comment généraliser ce résultat aux dérivées successives de f ?

5°) Un deuxième exemple : la transformée de Fourier de la fonction $f: t \rightarrow \exp(-\pi t^2)$

On suppose dans cette question, *et dans cette question seulement*, que $f(t) = \exp(-\pi t^2)$. Ainsi :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} \exp(-\pi t^2) dt.$$

On se propose d'utiliser les résultats précédents pour obtenir la transformée de Fourier $F(x)$.

- a) En déterminant les transformées de Fourier des deux membres de la relation $f'(t) = -2\pi t f(t)$, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F .
- b) Calculer $F(0)$ à l'aide du résultat de la question 1°, puis en déduire l'expression de $F(x)$.

6°) Limites en $\pm\infty$ de la transformée de Fourier F de f

On établit dans cette question que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

- a) On considère une subdivision d'un segment $[-A, A]$ notée $-A = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = A$ et une fonction en escalier ϕ définie sur $[-A, A]$ par $\phi(t) = \phi_k$ si $a_{k-1} < t < a_k$ ($1 \leq k \leq p$).
Calculer alors l'intégrale suivante, puis déterminer sa limite quand x tend vers $\pm\infty$:

$$\int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi xt} \phi(t) dt.$$

- b) Etablir qu'il existe un nombre réel positif A tel qu'on ait pour tout nombre réel x :

$$|F(x) - \int_{-A}^{+A} e^{-2i\pi xt} f(t) dt| \leq \varepsilon.$$

- c) Justifier l'existence d'une fonction ϕ en escalier sur $[-A, A]$ telle qu'on ait pour $-A \leq x \leq A$:

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2A}.$$

- d) Déduire des résultats précédents que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

7°) Continuité de la transformation de Fourier

On munit l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ de la norme N_1 définie pour une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ par :

$$N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

On munit l'espace vectoriel $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ de la norme N_∞ définie pour une fonction f de $C_b(\mathbb{R})$ par :

$$N_\infty(f) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|.$$

- a) Montrer que la transformation de Fourier (qu'on notera T) réalise une application linéaire continue de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ muni de la norme N_1 dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ .
- b) Déterminer la norme subordonnée de cette application linéaire, égale par définition à :

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{N_\infty(Tf)}{N_1(f)} / f \in L^1(\mathbb{R}), f \neq 0 \right\}.$$

EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

On considère une fonction continue f , définie d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose alors :

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

On se propose dans la suite d'étudier la méthode des trapèzes, qui consiste pour approcher cette intégrale I à exploiter la suite (T_n) définie par :

$$T_n = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2} \right].$$

On notera, dans le cas $n = 1$, que la formule précédente s'écrit $T_1 = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Partie I : convergence de la suite (T_n) vers l'intégrale I

1°) Expression de T_{2n} en fonction de T_n

- a) Ecrire (en français ou dans un langage) un algorithme permettant de calculer T_n pour $n \geq 1$.
- b) Exprimer $2T_{2n} - T_n$ en fonction de $(b-a)/n$ et de valeurs prises par la fonction f .
- c) Ecrire un algorithme permettant de calculer $T_1, T_2, T_4, \dots, T_{2^n}$ lorsque $n \geq 1$ est donné et préciser le nombre d'évaluations de f nécessitées par cet algorithme.
- d) *Application : on suppose ici que $[a, b] = [0, 1]$ et que $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.*
- Donner la valeur exacte de l'intégrale I dans ce cas particulier.
 - Déterminer des valeurs approchées (avec 5 décimales) de T_1, T_2, T_4, T_8 , puis évaluer la précision des résultats numériques ainsi obtenus.

2°) Majoration de l'erreur commise dans la méthode des trapèzes

- a) On considère une fonction f de classe C^2 , définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Etablir que :
- $$\frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx = \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$
- b) En déduire la majoration suivante où M_2 désigne un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$:
- $$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12}.$$
- c) On pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

En remplaçant a et b par x_{k-1} et x_k dans l'inégalité ci-dessus et en sommant pour $1 \leq k \leq n$, quelle majoration de $|I - T_n|$ obtient-on en fonction de a, b, n et M_2 ?

Partie II : développement limité de T_n quand n tend vers $+\infty$

3°) Etude d'une suite de nombres rationnels

- a) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (b_n) telle que $b_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^n \frac{b_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

- b) Etablir que ces nombres b_n sont rationnels et donner b_1, b_2, b_3, b_4 sous forme irréductible.

4°) Etude des polynômes de Bernoulli

- a) On considère la suite de polynômes (B_n) définie par :

$$B_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad B_n(X) = \sum_{p=0}^n \frac{b_{n-p} X^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser $B_1(X), B_2(X), B_3(X), B_4(X)$.
- Montrer que $B_n'(X) = B_{n-1}(X)$ pour $n \geq 1$ et $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$.

- b) On considère une suite de polynômes (C_n) définie par :

$$C_0(X) = 1, \quad C_n'(X) = C_{n-1}(X) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad C_n(0) = C_n(1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $C_n^{(p)}(0) = C_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$C_n(X) = \sum_{p=0}^n \frac{C_{n-p}(0) X^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{C_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $C_n(X) = B_n(X)$ pour tout nombre entier naturel n .

- c) En déduire que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer alors que $b_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

5°) Développement limité de T_n quand n tend vers $+\infty$

- a) On désigne par g une fonction de classe C^{2p+1} pour $p \geq 1$ définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Etablir :

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{2} (g(0) + g(1)) - \sum_{j=1}^p b_{2j} (g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)) - \int_0^1 B_{2p+1}(t) g^{(2p+1)}(t) dt.$$

- b) On désigne par f une fonction de classe C^{2p+1} définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Qu'obtient-on en appliquant la formule précédente à la fonction $t \rightarrow g(t) = f(a + t(b-a))$?

- c) On désigne par M_{2p+1} et β_{2p+1} des majorants de $|f^{(2p+1)}|$ sur $[a, b]$ et de $|B_{2p+1}|$ sur $[0, 1]$. En déduire un majorant de l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^p b_{2j} (b-a)^{2j} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right|.$$

- d) On pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

En remplaçant a et b par x_{k-1} et x_k dans l'inégalité ci-dessus et en sommant pour $1 \leq k \leq n$, en déduire que :

$$T_n = \int_a^b f(x) dx + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

- e) Expliciter la formule obtenue lorsque $p = 2$.

E.P.I.T.A.*mathématiques 2 - 2001 (1 heure 30)*

On se propose d'étudier le mouvement vibratoire d'une corde, supposée infinie au I et finie au II.

Partie I : étude d'une corde vibrante infinie

On suppose ici la corde vibrante infinie. Lorsque la position d'équilibre d'une telle corde est assimilée à l'axe $x'Ox$, on démontre, pour tout nombre réel t et pour tout nombre réel x , que l'amplitude $u(x, t)$ à l'instant t du point d'abscisse x de la corde est solution de l'équation suivante (où v désigne une constante strictement positive) :

$$(CV) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

On se propose d'étudier les solutions de cette équation avec les conditions initiales suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x :

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

où f désigne une fonction donnée, supposée de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cette hypothèse signifie que la corde est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position initiale définie par la donnée de f).

1°) Montrer que l'application $\phi : (x, t) \rightarrow (X = x + vt, T = x - vt)$ réalise un C^2 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et préciser le difféomorphisme inverse ϕ^{-1} .

2°) Etude d'une équation aux dérivées partielles équivalente à (CV)

Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, supposée de classe C^2 , on pose $u = U \circ \phi$, c'est à dire :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u(x, t) = U(x + vt, x - vt).$$

a) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ en fonction de v et des dérivées partielles de la fonction U au point $(x + vt, x - vt)$.

b) En déduire que u satisfait l'équation des cordes vibrantes (CV) si et seulement si U satisfait l'équation aux dérivées partielles (E) suivante :

$$\forall (X, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X, T) = 0.$$

3°) Résolution d'une équation aux dérivées partielles équivalente à (CV)

a) Montrer qu'une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, supposée de classe C^2 , est solution de (E) si et seulement s'il existe deux fonctions A et B de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (X, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad U(X, T) = A(T) + B(X).$$

b) En déduire l'expression de $u = U \circ \phi$ en fonction de A et B .

c) Déterminer les fonctions A , B et u pour que u vérifie d'une part l'équation (CV) et d'autre part les conditions initiales données.

Partie II : étude d'une corde vibrante finie

On suppose ici la corde vibrante de longueur finie, supposée égale à π (ce qui est rendu possible par le choix d'une unité de longueur convenable). Lorsque la position d'équilibre d'une telle corde est assimilée au segment $[0, \pi]$ de l'axe $x'Ox$, on démontre, pour tout nombre réel t et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \pi]$, que l'amplitude $u(x, t)$ à l'instant t du point d'abscisse x de la corde est solution de l'équation suivante (où v désigne une constante strictement positive) :

Deuxième épreuve 2/2

$$(CV) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

On se propose d'étudier les solutions de cette équation avec :

- les conditions initiales suivantes, supposées réalisées pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \pi]$:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

où f désigne une fonction donnée, supposée de classe C^2 de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ (cette hypothèse signifie que la corde est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position initiale définie par la donnée de f).

- les conditions aux limites suivantes, réalisées pour tout nombre réel t :

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

(cette hypothèse signifie que la corde est fixée à ses extrémités ; pour $t = 0$, on a donc $f(0) = f(\pi) = 0$).

Dans toute la suite, on suppose donc que $f(0) = f(\pi) = 0$, mais aussi que $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Enfin, on prolonge f en une fonction impaire et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

4°) Existence d'une solution vérifiant les conditions données

a) Montrer que la fonction f prolongée comme indiqué ci-dessus est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) On considère la fonction u définie sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ par :

$$u(x, t) = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2}.$$

Montrer que u est de classe C^2 sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ et prouver qu'elle est solution de l'équation des cordes vibrantes (CV) avec les conditions initiales et les conditions aux limites définies plus haut.

5°) Unicité d'une solution par considération de l'énergie.

On considère deux solutions u_1 et u_2 de l'équation (CV) de classe C^2 sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$ et vérifiant toutes les deux les conditions initiales et les conditions aux limites définies plus haut.

On pose alors $u = u_1 - u_2$ et on introduit la fonction d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]^2 \right) dx.$$

a) Montrer que la fonction E est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (on citera le théorème utilisé), puis préciser sa dérivée sous forme d'une intégrale.

b) Déterminer la dérivée par rapport à la variable x de la fonction $x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.

En déduire qu'on a :

$$E'(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_0^\pi.$$

b) En déduire que E est une fonction constante, puis montrer qu'elle est nulle sur $[0, +\infty[$.

c) Etablir enfin que $u_1 = u_2$.



CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIERIE

Mathématiques

Mercredi 17 Avril 2002

Durée : 3 Heures

EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

Dans ce problème, on désigne par E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On dira qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$E = \text{Vect}(f^k(x_0) / k \in \mathbf{N}) \text{ ou encore } E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots).$$

Dans la partie I, on donne quelques exemples d'endomorphismes cycliques. Dans la partie II, on procède à une étude plus générale des endomorphismes cycliques.

PARTIE I

1°) Deux exemples d'endomorphismes cycliques en dimension $n = 3$

Dans cette question seulement, l'espace E est de dimension 3 et rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) .

a) On considère l'endomorphisme a dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exprimer $a(e_1)$ et $a^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que a est cyclique.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme a .

Pour chacune des trois valeurs propres possibles, déterminer un vecteur propre dont la troisième composante est égale à 1. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale qu'on explicitera.

b) On considère l'endomorphisme b dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exprimer $b(e_1)$ et $b^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que b est cyclique.

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme b .

Etudier si l'endomorphisme b est ou non diagonalisable.

2°) Un exemple d'endomorphisme cyclique en dimension n

Dans cette question, on note c un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs propres associés à ces n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on pose alors $x_0 = x_1 + \dots + x_n$.

a) Exprimer $c(x_1 + \dots + x_n), c^2(x_1 + \dots + x_n), \dots, c^{n-1}(x_1 + \dots + x_n)$ en fonction de $x_1, \dots, x_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, puis établir que la famille $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ est libre dans E .

b) En déduire que l'endomorphisme c est cyclique.

PARTIE II

Dans cette partie II, on note f un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E ($\dim E = n$), autrement dit un endomorphisme f pour lequel existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$E = \text{Vect}(f^k(x_0) / k \in \mathbb{N}) \text{ ou encore } E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots).$$

Si $Q(X) = q_m X^m + q_{m-1} X^{m-1} + \dots + q_1 X + q_0$ désigne un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, on pose :

$$Q(f) = q_m f^m + q_{m-1} f^{m-1} + \dots + q_1 f + q_0 \text{Id} \quad (\text{Id endomorphisme identité de } E).$$

3°) Une base adaptée de E

On désigne par m le plus grand nombre entier naturel tel que :

$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée.

a) Justifier l'existence d'un tel nombre entier naturel m , puis montrer par récurrence sur k que les vecteurs $f^{m+k}(x_0)$ appartiennent à $\text{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

b) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E , puis que $m = n$.

Dans toute la suite de ce problème, on convient de poser :

$$f^n(x_0) = p_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \dots + p_1 f(x_0) + p_0 x_0$$

et on désigne alors par P le polynôme de $\mathbf{K}[X]$ défini par $P(X) = X^n - p_{n-1} X^{n-1} - \dots - p_1 X - p_0$.

4°) Matrice et polynôme annulateur de f

a) Ecrire la matrice M de f dans la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

b) Montrer que les n endomorphismes $\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ sont indépendants, puis en déduire qu'il n'existe aucun polynôme Q non nul de degré strictement inférieur à n tel que $Q(f) = 0$.

c) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(f) = f^n - p_{n-1} f^{n-1} - \dots - p_1 f - p_0 \text{Id}$ des vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, puis en déduire que $P(f) = 0$.

5°) Caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables

- a) On considère une valeur propre λ de f et un vecteur propre associé x .
Calculer $f^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $P(\lambda) = 0$.
- b) On considère une valeur propre λ de f . Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}$ à l'aide de sa matrice, puis en déduire la dimension du sous-espace propre associé à λ .
- c) Etablir que l'endomorphisme cyclique f est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

6°) Etude du commutant de f lorsque f est cyclique

- a) Montrer que le commutant $C(f) = \{ g \in L(E) / g \circ f = f \circ g \}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $L(E)$.
- b) Soient deux endomorphismes u et v appartenant à $C(f)$.

Montrer, si $u(x_0) = v(x_0)$, que $u = v$.
- b) Soit g un endomorphisme pour lequel on pose $g(x_0) = a_{n-1}f^{n-1}(x_0) + \dots + a_1f(x_0) + a_0x_0$.

En déduire, si g appartient à $C(f)$, que $g = a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{Id}$.
- d) En déduire que le commutant $C(f)$ est de dimension n et démontrer qu'il admet pour base $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.



CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIERIE

Option Mathématiques

Mercredi 17 Avril 2002

Durée : 1 Heure 30

EPREUVE OPTIONNELLE de MATHEMATIQUES

L'objet du problème est l'étude du nombre u_n de façons de calculer, c'est à dire de parenthésier, une expression de la forme $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent n éléments ($n \in \mathbf{N}$) d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne a priori non associative notée $*$.

Notons qu'on ne sait calculer à la fois que le composé de *deux* éléments, et seuls sont donc pris en compte les parenthésages ramenant le calcul d'une expression de la forme $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ au calcul successif de composés de deux éléments ; par exemple, si $n = 4$, $(x_1 * x_2) * (x_3 * x_4)$ ou encore $((x_1 * x_2) * x_3) * x_4$ sont des parenthésages corrects, mais pas $(x_1 * x_2 * x_3) * x_4$ puisqu'il n'indique pas comment calculer $x_1 * x_2 * x_3$.

On posera $u_0 = 0$, et on a $u_1 = u_2 = 1$, tandis que $u_3 = 2$ puisqu'on peut calculer $x_1 * x_2 * x_3$ d'une part comme $(x_1 * x_2) * x_3$, d'autre part comme $x_1 * (x_2 * x_3)$.

1°) Etude de deux cas particuliers

Déterminer les deux nombres u_4 et u_5 en explicitant les différentes façons possibles de calculer, c'est à dire de parenthésier, les expressions $x_1 * x_2 * x_3 * x_4$ et $x_1 * x_2 * x_3 * x_4 * x_5$.

2°) Relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n)

a) Justifier pour tout nombre entier *supérieur ou égal* à 2 la relation (R) :

$$u_n = u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \dots + u_{n-2} u_2 + u_{n-1} u_1.$$

b) Ecrire un algorithme de calcul de u_n lorsque le nombre entier naturel $n \geq 2$ est donné.

Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles nécessaires au calcul de u_n ?

3°) Etude d'une équation différentielle auxiliaire

Dans cette question, on considère l'équation différentielle (E) :

$$(1 - 4x)y' + 2y = 1.$$

a) Déterminer l'unique solution f de (E) définie sur $] -1/4, 1/4[$ et s'annulant en 0.

b) On suppose qu'il existe une série entière de terme général $x \rightarrow a_n x^n$, de rayon de convergence strictement positif R , dont la somme g s'annule en 0 et est solution de (E) sur $] -R, R[$. Préciser a_0 et expliciter a_n pour $n \geq 1$ en fonction de n et du coefficient binomial C_{2n}^n .

En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $x \rightarrow a_n x^n$.

- c) Etablir à l'aide d'un théorème dont on citera l'énoncé que la somme g de la série entière précédente est égale à f sur $] -1/4, 1/4[$.

4°) Détermination de la suite (u_n)

- a) Prouver la relation $f^2(x) - f(x) + x = 0$ sur l'intervalle $] -1/4, 1/4[$.

En déduire, pour tout nombre entier *supérieur ou égal à 2*, la relation suivante :

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-2} a_2 + a_{n-1} a_1.$$

- b) En déduire, à l'aide des résultats obtenus, l'expression de u_n en fonction de n .

Dans ce problème, on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $[0, \pi/2]$ dans $\mathbf{R}$, et on considère sur $[0, \pi/2]$ l'équation différentielle $y'' + y = f$ où f est donnée dans E .

L'objectif est de déterminer les solutions y vérifiant les deux conditions aux limites $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

A cet effet, on introduit l'application T associant à toute fonction f appartenant à l'espace vectoriel E la fonction $F = Tf$ définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \sin(x) \int_x^{\pi/2} f(t) \cos(t) dt.$$

1°) On étudie quelques propriétés de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- a) Préciser l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
- b) Préciser celles qui vérifient les conditions aux limites $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est la fonction définie par $f(x) = 1$.

- a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x) + F(x)$.
- b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = 1$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est la fonction définie par $f(x) = x$.

- a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x) + F(x)$.
- b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = x$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est une fonction quelconque de E .

- a) Montrer que F est deux fois dérivable, puis expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$.
- b) Exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.
- c) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = f$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5°) On étudie l'application T , qui associe à toute fonction f de E la fonction $F = Tf$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

b) Etudier son injectivité.

(On pourra partir d'un élément f de $\text{Ker}T$ qui vérifie donc $F = Tf = 0$ et dériver deux fois).

c) Etudier sa surjectivité.

6°) On étudie les éléments propres de l'endomorphisme T .

a) On considère une valeur propre λ de T et une fonction propre associée $f \in E$.

Montrer que λ est non nul et que f vérifie les relations (R) :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f''(x) + (1 - \frac{1}{\lambda})f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

b) On suppose $\lambda = 1$. Déterminer les fonctions vérifiant (R).

c) On suppose $1 - \frac{1}{\lambda} = -\omega^2 < 0$ (avec $\omega > 0$). Déterminer les fonctions vérifiant (R).

d) On suppose $1 - \frac{1}{\lambda} = +\omega^2 > 0$ (avec $\omega > 0$).

Montrer, s'il existe une fonction non nulle $f \in E$ vérifiant (R), que $\omega = 2n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$.

En déduire que les valeurs propres de T sont nécessairement de la forme suivante :

$$\lambda_n = \frac{-1}{4n^2 - 1}, \quad \text{où } n \in \mathbf{N}^*.$$

Montrer inversement que ces nombres réels λ_n sont valeurs propres de T en indiquant quelles sont les fonctions propres correspondantes.

7°) On considère la fonction G (fonction de Green) définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]^2$ par :

$$G(x, y) = -\sin(x)\cos(y) \quad \text{si } x \leq y \quad \text{et} \quad G(x, y) = -\sin(y)\cos(x) \quad \text{si } y \leq x.$$

a) Montrer, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) f(t) dt = Tf(x).$$

En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) \sin(2nt) dt = \lambda_n \sin(2nx).$$

b) Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ impaire et π -périodique vérifient :

$$b_{2n}(g) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin(2nt) dt \quad \text{et} \quad b_{2n+1}(g) = 0.$$

Que dire de ses coefficients de Fourier $a_n(g)$?

c) On prolonge la fonction $g : y \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow G(x, y)$ en fonction impaire sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et π -périodique. En considérant la série de Fourier de g , justifier la formule suivante sur $[0, \frac{\pi}{2}]^2$:

$$G(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \sin(2ny).$$

d) En déduire l'expression suivante de Tf pour $f \in E$ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$Tf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n b_{2n}(f) \sin(2nx).$$

e) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, x) dx$, puis en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$.

f) Calculer l'intégrale $\iint_{[0, \frac{\pi}{2}]^2} G^2(x, y) dx dy$, puis en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$.

E.P.I.T.A.

Concours 2003 – Mathématiques, option (1 heure 30)

Dans ce problème, on étudie les intégrales $u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ où $n \in \mathbb{N}$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

1°) Dans cette question, on étudie la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2 .

b) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

c) En déduire que la suite $n \rightarrow (n+1)u_{n+1}u_n$ est constante, et préciser la valeur de cette constante.

d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) , puis en déduire que $nu_n^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

e) En déduire la limite et un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2°) Dans cette question, on étudie les intégrales des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{si } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n} \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

a) Etablir les égalités suivantes : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x) dx = \sqrt{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt$.

b) A l'aide de l'équivalent obtenu à la question 1, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$.

3°) Dans cette question, on étudie l'intégrale de la limite de la suite de fonctions (f_n) .

a) Déterminer pour tout nombre réel x la limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Justifier l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout nombre réel positif u .

En déduire l'inégalité $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout nombre réel x .

c) Etablir à l'aide du théorème de convergence dominée dont on rappellera l'énoncé que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

4°) Dans cette question, on étudie la série génératrice des nombres u_n , définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$, et en déduire le domaine de définition D de S .

c) Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in D$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t) dt}{1 - x \cos(t)}.$$

d) En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)}$ pour $|x| < 1$, puis pour $x = -1$.

e) Calculer $S(-1)$, puis $S(x)$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variables $u = \tan(\frac{t}{2})$.

Dans ce problème, on étudie les équations intégrales de Volterra, qui s'écrivent sous la forme suivante où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ et $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ désignent deux fonctions continues données, et où $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, inconnue ici, astreinte à vérifier pour $0 \leq x \leq 1$:

$$(1) \quad u(x) - \int_0^x k(x, t)u(t)dt = f(x).$$

Les trois premières questions sont consacrées à des cas particuliers de cette équation, tandis que la question 4 propose l'étude générale de l'existence et de l'unicité d'une solution u .

1°) On pose $u_0(x) = 1$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

- a) Calculer $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, puis par récurrence $u_n(x)$.
- b) Calculer la somme $U(x)$ de la série $u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$
- c) Calculer la somme $V(x)$ de la série $u_0(x) - u_1(x) + \dots + (-1)^n u_n(x) + \dots$
- d) Vérifier que U et V sont respectivement solutions des équations suivantes :

$$(2) \quad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1.$$

$$(3) \quad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = 1.$$

2°) On pose $u_0(x) = x$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

- a) Calculer la somme $U(x)$ de la série $u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$
- b) Calculer la somme $V(x)$ de la série $u_0(x) - u_1(x) + \dots + (-1)^n u_n(x) + \dots$
- c) Vérifier que U et V sont respectivement solutions des équations suivantes :

$$(4) \quad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = x.$$

$$(5) \quad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = x.$$

3°) On pose $u_0(x) = f(x)$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$ (où λ réel donné).

- a) Vérifier par récurrence l'égalité suivante pour une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$$

b) Etudier les dérivées de u_{n+1} et en déduire que :

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^{n+1} (x-t)^n}{n!} f(t) dt .$$

c) En déduire alors (avec les justifications nécessaires) la somme $U(x)$ de la série de fonctions $u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ en fonction de $f(x)$, $\exp(\lambda x)$ et $\int_0^x \exp(-\lambda t) f(t) dt$.

d) En déduire que U est solution de l'équation suivante :

$$(6) \quad u(x) - \lambda \int_0^x u(t) dt = f(x) .$$

e) Retrouver cette solution en résolvant une équation différentielle convenable.

4°) Dans cette question, on étudie l'équation générale (1) décrite dans le préambule :

$$(1) \quad u(x) - \int_0^x k(x, t) u(t) dt = f(x) .$$

On prouve d'abord l'existence d'une solution u (questions a-b-c), puis son unicité (questions d-e).

On pose à cet effet $u_0(x) = f(x)$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x k(x, t) u_n(t) dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

On admettra que toutes les fonctions u_n de cette suite sont continues sur $[0, 1]$, et on désignera par K et M les maxima des fonctions continues $|k|$ et $|f|$ sur $[0, 1]^2$ et $[0, 1]$ respectivement.

a) Montrer par récurrence l'inégalité suivante pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \geq 1$:

$$|u_n(x)| \leq M \frac{(Kx)^n}{n!}$$

b) En déduire (avec les justifications nécessaires) que :

- la série $u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ converge pour $0 \leq x \leq 1$.
- la somme $U(x)$ de cette série est continue sur $[0, 1]$.

c) Exprimer (avec les justifications nécessaires) l'intégrale $\int_0^x k(x, t) U(t) dt$ en fonction de U et f .

En déduire que U est une solution de (1).

d) Montrer, si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), que $d = u_1 - u_2$ est solution de :

$$d(x) = \int_0^x k(x, t) d(t) dt .$$

e) Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité suivante où D désigne le maximum de la fonction continue $|d|$ sur $[0, 1]$:

$$|d(x)| \leq D \frac{(Kx)^n}{n!} .$$

En déduire que d est la fonction nulle, puis que $u_1 = u_2$.

f) Résoudre par la méthode proposée dans cette question les équations intégrales :

$$(7) \quad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = x^2.$$

$$(8) \quad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = x^2.$$

(On exprimera les solutions u de ces deux équations à l'aide des fonctions usuelles).

5°) Dans cette question, on applique ce qui précède au problème de Cauchy suivant, dans lequel a , b , c désignent trois fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ et y_0, y'_0 deux réels donnés :

$$y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

a) Montrer, parmi les fonctions y de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifient $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, que y est solution du problème de Cauchy précédent si et seulement si y'' est la solution u de :

$$u(x) - \int_0^x [a(x) + (x-t)b(x)]u(t)dt = c(x) + y'_0 a(x) + (y_0 + xy'_0)b(x).$$

b) En déduire l'énoncé et la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz pour ce problème de Cauchy, puis retrouver ainsi les résultats des questions 1° et 2°.

c) Résoudre ainsi, compte tenu des résultats de (7) et (8), les problèmes de Cauchy suivants :

$$- \quad y'' = y + x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$- \quad y'' = -y + x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ÉPREUVE OPTIONNELLE de MATHÉMATIQUES

Dans ce problème, on note $D(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs à deux entiers naturels a, b où $(a, b) \neq (0, 0)$, et le plus grand élément de cet ensemble $D(a, b)$ est donc le PGCD de a et b . Le problème a pour but l'étude de la complexité du calcul du PGCD des entiers naturels a et b par l'algorithme d'Euclide décrit ci-dessous. On étudie à titre préliminaire la suite de Fibonacci, qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1 °)** Dans cette question, on étudie le calcul de la suite de Fibonacci (F_n) .
- a) Écrire un algorithme de calcul de F_n lorsque le nombre entier n est donné.
 - b) Préciser F_n pour $n \leq 12$.
- 2 °)** Dans cette question, on étudie les propriétés de la suite de Fibonacci (F_n) .
- a) Prouver que (F_n) est une suite de nombres entiers naturels, strictement croissante pour $n \geq 2$.
 - b) Déterminer les suites géométriques (u_n) vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
 - c) Déterminer l'expression du terme général F_n de la suite de Fibonacci en fonction de n .
 - d) En déduire l'encadrement suivant de F_n , puis un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - 1 \right) \leq F_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n + 1 \right).$$

- e) Déterminer le domaine de définition et la somme de la fonction génératrice :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

- 3°)** Dans cette question, on étudie quelques propriétés de l'ensemble $D(a, b)$.
- Quels sont les éléments de $D(a, 0)$ et le PGCD de a et de 0 pour $a \geq 1$?
 - Montrer, si $a = bq + r$, que $D(a, b) = D(b, r)$ et $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.
 - En remarquant que $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, en déduire le PGCD de F_{n+1} et de F_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On considère deux nombres entiers naturels a et b tels que $a > b > 0$. On rappelle qu'une égalité de la forme $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b si q et r sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leq r < b$, et que l'algorithme d'Euclide est la suite des divisions euclidiennes suivantes, poursuivies jusqu'à l'obtention d'un premier reste nul, et dans lesquelles $a_0 = a$ et $a_1 = b$:

$$\begin{array}{lll} a_0 = q_1 a_1 + a_2 & \text{avec} & 0 < a_2 < a_1 \\ a_1 = q_2 a_2 + a_3 & \text{avec} & 0 < a_3 < a_2 \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{n-1} = q_n a_n + a_{n+1} & \text{avec} & 0 < a_{n+1} < a_n \\ a_n = q_{n+1} a_{n+1} + a_{n+2} & \text{avec} & a_2 = 0 \end{array}$$

On dit alors, plus précisément, que l'algorithme d'Euclide pour a et b s'effectue en $n + 1$ divisions. L'ensemble de ces notations est désormais conservé jusqu'à la fin du problème.

- 4°) Dans cette question, on étudie un exemple d'application de l'algorithme d'Euclide.
- Écrire l'algorithme d'Euclide pour F_3 et F_2 , pour F_4 et F_3 , pour F_5 et F_4 .
 - Prouver que l'égalité $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ est la division euclidienne de F_{k+2} par F_{k+1} pour $k \geq 2$.
En déduire que l'algorithme d'Euclide pour F_{n+2} et F_{n+1} s'effectue en n divisions euclidiennes.

5 °) Dans cette question, on étudie enfin la complexité de l'algorithme d'Euclide (Théorème de Lamé).

- a) Prouver que le PGCD de a et b est égal au dernier reste non nul a_{n+1} .
- b) Prouver par récurrence les inégalités $q_k \geq 1$ pour $1 \leq k \leq n+1$ et $a_k \geq F_{n+2-k}$ pour $0 \leq k \leq n+2$.
- c) En déduire, si l'algorithme d'Euclide s'effectue en $n+1$ divisions, que $a \geq F_{n+2}$, $b \geq F_{n+1}$, et :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \leq b.$$

- d) En déduire, si l'écriture décimale de b compte p chiffres, autrement dit si $10^{p-1} \leq b < 10^p$, que le nombre $n+1$ de divisions de l'algorithme d'Euclide est majoré par $5p+2$.

6 °) Écrire un algorithme itératif ou récursif calculant le PGCD de deux nombres entiers donnés a et b par cette méthode.

E.P.I.T.A. - Concours 2005

durée 3h

On se propose dans ce problème d'étudier la série dont le terme général u_n est l'inverse du coefficient binomial noté $\binom{2n}{n}$ ou C_{2n}^n , c'est à dire $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, ou $\frac{1}{C_{2n}^n}$.

1°) *Convergence et algorithme de calcul approché de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*

Former le rapport u_{n+1}/u_n , et déduire de son expression :

- a) la nature de la série de terme général u_n .
- b) un algorithme de calcul de la somme partielle $U_N = \sum_{n=0}^N u_n$ où N est donné.

2°) *Une majoration de la somme de la série et de l'erreur $U - U_N$*

a) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.

b) Comparer, pour $1 \leq k \leq n$, les nombres $\binom{2n}{k-1}$ et $\binom{2n}{k}$.

c) En déduire l'inégalité $4^n \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$, puis l'inégalité $u_n \leq \frac{2n+1}{4^n}$.

d) Préciser les sommes des séries suivantes, où N est donné, pour $-1 < x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \quad ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \quad ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} n x^n .$$

e) En déduire un majorant de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, puis de la différence $U - U_N$.
Comment suffit-il de choisir N pour avoir $U - U_N < 10^{-3}$?

Afin de calculer la somme U de la série précédente, on introduit l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x-4)y' + (x+2)y = 2.$$

3°) *Recherche de solutions de (E) développables en série entière*

a) On suppose qu'il existe une solution de l'équation s'écrivant sous la forme suivante, avec un rayon de convergence $R > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

A quelle condition nécessaire et suffisante sur a_0 et la suite (a_n) cette fonction S est-elle solution de l'équation différentielle (E) sur $] -R, R[$?

b) On considère inversement la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(2n-1)a_n = na_{n-1}.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et en déduire que sa somme S est solution de l'équation différentielle (E) sur $] -R, R[$.

c) Exprimer a_n en fonction de u_n .

4°) *Résolution de l'équation différentielle (E) sur $]0, 4[$*

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{x+2}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}.$$

En déduire toutes les solutions de l'équation homogène $x(x-4)y' + (x+2)y = 0$.

b) On cherche les solutions de (E) sur $]0, 4[$ sous la forme suivante :

$$y = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \frac{k(x)}{x-4}.$$

Déterminer k' pour que y soit solution de E .

En déduire k en posant dans l'intégrale $t = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

c) En déduire que les solutions de (E) sur $]0, 4[$ s'expriment comme suit (avec $C \in \mathbb{R}$) :

$$y = \frac{4}{4-x} \left(1 + \sqrt{\frac{x}{4-x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{4-x}} + C \sqrt{\frac{x}{4-x}} \right).$$

(On rappelle la relation $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ valable pour tout réel $x > 0$).

5°) *Expression de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*

a) Préciser le développement en série entière de la fonction Arctan .

En déduire une suite (b_n) telle que soit réalisée l'égalité suivante pour $0 \leq x < 1$:

$$\sqrt{x} \operatorname{Arctan} \sqrt{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

En déduire que la fonction $x \rightarrow \sqrt{x} \operatorname{Arctan} \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

Préciser la valeur de sa dérivée en 0.

b) En déduire que la solution de (E) obtenue pour $C = 0$ est de classe C^∞ sur $[0, 4[$.

Préciser sa valeur en 0 et celle de sa dérivée.

c) Quelles solutions de (E) sur $]0, 4[$ se prolongent-elles en solutions sur $[0, 4[$?

d) En déduire la somme $S(x)$ sur $[0, 4[$ à l'aide des fonctions usuelles.

e) Déterminer alors la valeur de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6°) *Expression de la somme $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$*

a) Déterminer l'expression des solutions de (E) sur $] -4, 0[$.

b) Quelles solutions de (E) sur $] -4, 0[$ se prolongent-elles en solutions sur $] -4, 0]$?

c) Déterminer alors la valeur de la somme $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

E.P.I.T.A. - Concours 2005

Option - durée 2h

Dans ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère dans ce contexte :

- le cercle C centré en $\Omega(8, 0)$ et de rayon $R = 8$.
- la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$.
- une droite $\mathcal{D}_t$ passant par l'origine, d'équation $y = tx$ où t désigne un paramètre réel.

Dans la suite, on représentera sur une même figure les résultats obtenus au fil des questions. Cette figure fera apparaître seulement le demi-plan $x \geq 0$ et elle sera construite avec soin sur une feuille séparée en choisissant (approximativement) pour unité 1 cm.

1°) *Introduction*

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle C .

b) Préciser les coordonnées des points d'intersection de C et $\mathcal{D}$.

On notera A et B ces deux points en supposant que A est celui d'ordonnée positive.

Représenter sur la figure le cercle C , la droite $\mathcal{D}$ et les points A et B .

c) Déterminer les coordonnées de $P(t)$, point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}_t$.

Déterminer les coordonnées de $Q(t)$, point d'intersection (distinct de O) de C et de $\mathcal{D}_t$.

d) En déduire les coordonnées du milieu du segment $[P(t), Q(t)]$.

Déterminer les valeurs du paramètre t pour lesquelles ce milieu est égal à A ou B .

On se propose maintenant d'étudier la courbe paramétrée $\Gamma : t \rightarrow M(t)$ définie par :

$$x(t) = \frac{t^2 + 9}{t^2 + 1} \quad ; \quad y(t) = \frac{t(t^2 + 9)}{t^2 + 1}.$$

2°) *Etude des variations des fonctions x et y*

a) Comparer $x(-t)$ et $x(t)$, $y(-t)$ et $y(t)$.

Qu'en déduit-on géométriquement pour la courbe Γ ?

b) Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Qu'en déduit-on pour les branches infinies de la courbe Γ ?

c) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et étudier le signe de ces fonctions.

En déduire les coordonnées des points U et V où la tangente est horizontale.

On notera U et V ces deux points en supposant que U est celui d'ordonnée positive.

En déduire les coordonnées du point I où la tangente est verticale.

d) Dresser un tableau de variation commun aux fonctions x et y pour $t \geq 0$.

3°) *Construction de la courbe Γ*

a) Représenter les points I , U , V , leurs tangentes et la branche infinie de Γ sur la figure.

b) Tracer avec soin la courbe représentative de Γ sur la figure.

4°) *Condition d'alignement de points de la courbe Γ*

On considère trois points distincts de Γ , de paramètres t_1, t_2, t_3 .

a) En remarquant que trois tels points ne peuvent être alignés sur une droite verticale, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

- les trois points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés.
- il existe $(m, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall i = 1, 2, 3 : y(t_i) = m x(t_i) + h$.
- il existe $(m, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall i = 1, 2, 3 : t_i^3 - (m + h) t_i^2 + 9 t_i - (9 m + h) = 0$.

b) Etablir que cette dernière condition équivaut aussi à l'existence d'un couple (m, h) tel que :

$$(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3) = X^3 - (m + h) X^2 + 9 X - (9 m + h).$$

c) En déduire à quelle condition sur t_1, t_2, t_3 les points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés.

5°) *Calculs d'aires*

Pour tout point $M(x, y)$ du demi-plan $x > 0$, on pose $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer, lorsque $M = M(t)$, que $\tan(\theta) = t$ et qu'une équation polaire de Γ est

$$r = \frac{9 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

b) On désigne par $\mathcal{B}$ le domaine borné délimité par la courbe Γ et les deux droites OU et OV . Montrer que son aire $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{9 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \right)^2 d\theta.$$

En déduire la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{B}$.

c) Expliciter, sous la forme $r = f(\theta)$, une équation polaire de la droite asymptote de Γ .

d) En déduire que l'aire du domaine borné $\mathcal{B}(\alpha)$ compris entre la courbe Γ , son asymptote et les deux droites d'angles polaires $-\alpha$ et α (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) est égale à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(9 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2 - 1}{\cos^2(\theta)} d\theta.$$

Etudier si cette intégrale admet ou non une limite finie lorsque α tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer celle-ci si elle existe.

E.P.I.T.A. 2006

Epreuve de mathématiques 1 (3 heures)

Dans tout ce problème, l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On se propose de déterminer les groupes d'isométries laissant stables les quadriques de révolution engendrées par rotation d'une droite autour de Oz .

I. Préliminaires

1°) On sait qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est *orthogonal* s'il conserve la norme euclidienne :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

- a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal f est bijectif (et c'est donc un automorphisme).
- b) Montrer que les automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ forment un groupe, noté $O(\mathbb{R}^3)$.
- c) Etablir qu'un automorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(On pourra exprimer $\|f(x+y)\|^2$ en faisant intervenir le produit scalaire $\langle f(x), f(y) \rangle$).

- d) Etablir qu'un automorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(3) \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), z \rangle = \langle x, f^{-1}(z) \rangle.$$

II. Groupes d'automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ est orienté et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ (qui est la base orthonormale directe définie par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$). Pour tout nombre réel θ , on introduit alors le vecteur unitaire $u(\theta) = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$. On conviendra d'appeler *demi-tour d'axe D* toute rotation de mesure π autour d'une droite D .

2°) On considère pour $\theta \in \mathbb{R}$ les endomorphismes f_θ et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont :

$$F_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Vérifier que f_θ et g sont des automorphismes orthogonaux directs, donc des rotations.
Préciser l'axe et la mesure de f_θ et de g .
- b) Préciser la matrice, les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_\theta \circ g$.
Vérifier que $f_\theta \circ g$ est diagonalisable et que c'est un demi-tour dont on précisera l'axe.
- c) On pose $r_1 = -g$, $r_2 = -f_\pi \circ g$, $r_3 = -f_\pi$.
Préciser les matrices de r_1 , r_2 , r_3 , puis reconnaître leur nature géométrique.

3°) On convient de noter :

- G_+ l'ensemble constitué des automorphismes f_θ et $f_\theta \circ g$ où θ décrit $\mathbb{R}$,
- G_- l'ensemble constitué des automorphismes $-f_\theta$ et $-f_\theta \circ g$ où θ décrit $\mathbb{R}$:

$$G_+ = \{f_\theta, f_\theta \circ g \mid \theta \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad G_- = \{-f_\theta, -f_\theta \circ g \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

a) Reconnaître g^{-1} , $f_\alpha \circ f_\beta$ et $g \circ f_\alpha \circ g$ (on pourra d'abord expliciter leurs matrices).

En déduire le nombre réel θ tel que $g \circ f_\alpha = f_\theta \circ g$.

b) En déduire que G_+ est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^3)$, qui est constitué des rotations d'axe $\text{Vect}(e_3)$ et des demi-tours d'axe $u(\alpha)$ où α est un réel quelconque.

c) Démontrer que $G = G_+ \cup G_-$ est un groupe, et que celui-ci contient aussi r_1, r_2, r_3 .

III. Groupes d'isométries de quadriques de révolution

On considère deux réels a et m avec $a \geq 0$ et on note $\mathcal{Q}$ la surface engendrée par la rotation autour de $Oz = \text{Vect}(e_3)$ de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a, 0, 0)$ et dirigée par $v(0, m, 1)$.

4°) On désigne par $M(z)$ le point de cote z de la droite $\mathcal{D}$, et par $M(z, \theta)$ le point déduit de $M(z)$ par la rotation de mesure θ autour de l'axe Oz orienté par e_3 .

a) Déterminer les coordonnées du point $M(z)$, puis du point $M(z, \theta)$.

b) Etablir qu'une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points $M(z, \theta)$ pour $(z, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2 + a^2.$$

c) On suppose $a > 0$. Reconnaître et représenter en perspective $\mathcal{Q}$ pour $m = 0$ et $m \neq 0$.

d) On suppose $a = 0$. Reconnaître et représenter en perspective $\mathcal{Q}$ pour $m = 0$ et $m \neq 0$.

5°) On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux φ laissant stable $\mathcal{Q}$, c'est à dire :

$$\mathcal{G} = \{\varphi \in O(\mathbb{R}^3) \mid \varphi(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}\}.$$

a) Montrer que les images par g et $-g$ d'un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{Q}$ appartiennent à $\mathcal{Q}$.

Montrer que les images par f_θ et $-f_\theta$ d'un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{Q}$ appartiennent à $\mathcal{Q}$.

b) En déduire que $\mathcal{G}$ est stable par composition et qu'il contient $G = G_+ \cup G_-$.

6°) Dans cette question, on détermine le groupe $\mathcal{G}$ pour $a > 0$.

On désigne ici par $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon a et par φ un élément de $\mathcal{G}$.

a) Que dire de l'image de $\mathcal{S}$ par φ ?

b) Déterminer l'intersection $\mathcal{C}$ des ensembles $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, et montrer que $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon u(\theta + \frac{\pi}{2})$, où $\varepsilon = \pm 1$.

Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.

c) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = e_3$.

Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de φ , puis de $f_{-\theta} \circ \varphi$ en fonction de $\varepsilon = \pm 1$.

En déduire que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments qu'on précisera.

d) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = -e_3$.

En exploitant $\varphi \circ r_3$, établir que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments.

e) Déduire de l'ensemble des résultats précédents que $\mathcal{G} = G$.

7°) Dans cette question, on détermine le groupe $\mathcal{G}$ pour $a = 0$ et $m \neq 0$.

On désigne ici par $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{1+m^2}$ et par φ un élément de $\mathcal{G}$.

a) Déterminer l'intersection $\mathcal{I}$ des ensembles $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, et montrer que $\varphi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

En déduire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, qu'il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(mu(\theta) + e_3) = mu(\theta') \pm e_3$,

b) Vérifier que $\langle \varphi(mu(\theta) + e_3), e_3 \rangle^2 = 1$ et $\langle \varphi(mu(\theta) - e_3), e_3 \rangle^2 = 1$.

En déduire par différence que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \langle \varphi(e_3), e_3 \rangle \langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle = 0.$$

c) On suppose dans cette sous-question que $\langle \varphi(e_3), e_3 \rangle = 0$.

Etablir que $\langle e_3, \varphi^{-1}(e_3) \rangle = 0$, puis qu'il existe un réel α tel que $\varphi^{-1}(e_3) = u(\alpha)$.

Calculer $\langle \varphi(mu(\alpha + \frac{\pi}{2}) + e_3), e_3 \rangle$ et en déduire une contradiction.

d) Démontrer à l'aide des questions précédentes que $\langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle = 0$ pour tout réel θ .

En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon u(\theta + \frac{\pi}{2})$, où $\varepsilon = \pm 1$.

Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.

e) Conclure que $\mathcal{G} = G$.

E.P.I.T.A. 2006

Epreuve de mathématiques 2 (option : 2 heures)

Dans ce problème, on se propose de calculer les intégrales de Fresnel (1788-1827) :

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \quad ; \quad S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

Par commodité, on considérera aussi l'intégrale $E = C + iS$ définie par :

$$E = C + iS = \int_0^{+\infty} \exp(it^2) dt.$$

On rappelle enfin la valeur de l'intégrale suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$.

1°) Existence de l'intégrale de Fresnel

a) On considère l'application continue définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(x) = \frac{\exp(ix^2) - 1}{x^2}.$$

Etablir que f se prolonge par continuité en 0 par une valeur qu'on précisera.

b) Justifier l'existence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(it^2) - 1}{t^2} dt.$$

c) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer un nombre complexe λ tel qu'on ait :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{\exp(it^2) - 1}{t^2} dt = \frac{1 - \exp(ix^2)}{x} + \lambda \int_0^x \exp(it^2) dt.$$

d) En déduire l'existence de l'intégrale E , donc des intégrales C et S .

2°) Calcul de l'intégrale de Fresnel à l'aide d'une fonction auxiliaire

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}.$$

En déduire que la fonction suivante est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i} dt.$$

b) Etablir que F est continue sur $\mathbb{R}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

c) Etablir l'inégalité suivante pour tout $x > 0$, et en déduire les limites de F en $\pm\infty$:

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x}.$$

d) On considère un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$ ($0 < a < b < +\infty$).

Etablir que F est de classe C^1 sur $[a, b]$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser une expression de $F'(x)$.

e) En déduire une expression de $F'(x)$ sans symbole $\int$, puis prouver que :

$$\forall x > 0, \quad F(0) - F(x) = 2\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(it^2) dt.$$

Déterminer alors la valeur des trois intégrales de Fresnel E , C , S en admettant que $F(0)$, qui est l'intégrale d'une fonction rationnelle facile à calculer, est égale à :

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i} dt = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}.$$

3°) Calcul de l'intégrale de Fresnel à l'aide d'une intégrale curviligne

On considère dans le plan les trois points O , A , B d'affixes 0 , $R\sqrt{2}$, $(1+i)R$ où $R > 0$, et la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ définie sur le plan par :

$$\omega(x, y) = \exp[-(x + iy)^2] dx + i \exp[-(x + iy)^2] dy.$$

- a) Etablir que la forme différentielle ω est exacte.
- b) En déduire la valeur de l'intégrale curviligne de ω sur l'arc fermé formé du segment OA , de l'arc AB du cercle de centre O et de rayon OA , et du segment BO .
- c) Exprimer sous forme d'intégrales (qu'on ne cherchera pas à calculer) :
 - l'intégrale curviligne $I_1(R)$ de ω sur le segment OA .
On pourra paramétrer ce segment OA par $t \rightarrow t$ où t varie de 0 à $R\sqrt{2}$.
 - l'intégrale curviligne $I_2(R)$ de ω sur l'arc AB du cercle de centre O et de rayon OA .
On pourra paramétrer cet arc AB par $t \rightarrow R\sqrt{2}(\cos(t) + i \sin(t))$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.
 - l'intégrale curviligne $I_3(R)$ de ω sur le segment BO .
On pourra paramétrer ce segment BO par $t \rightarrow (1+i)t$ où t varie de R à 0 .
- d) Déterminer lorsque R vers $+\infty$:
 - la limite de l'intégrale $I_1(R)$.
 - la limite de l'intégrale $I_2(R)$ (on rappelle que $\cos(t) \geq 1 - 2t/\pi$ pour $0 \leq t \leq \pi/2$).
 - la limite de l'intégrale $I_3(R)$, qu'on exprimera à l'aide de $\bar{E}$ (conjuguée de l'intégrale E).
- e) En déduire à nouveau la valeur des intégrales de Fresnel E , C et S .

EPITA 2007 - mathématiques 1

(durée de l'épreuve : 3 heures)

On considère dans ce problème deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qu'on suppose de classe C^1 .

On étudie ici un algorithme d'approximation de la solution y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ qui vérifie la condition $y(0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{C}$.

Pour obtenir une approximation de $y(T)$ pour un réel donné $T \neq 0$, on introduit un entier $N \geq 1$ et la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ du segment $[0, T]$, où $t_k = \frac{kT}{N}$ ($0 \leq k \leq N$).

On définit alors une suite finie $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$ par les formules suivantes :

$$(1) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} (a(t_k)y_k + b(t_k)).$$

(On a obtenu celles-ci en remplaçant dans (E) $y'(t_k)$ par le taux d'accroissement $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$).

■ Partie I

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions a et b sont des constantes réelles.

On étudie donc la solution y du problème de Cauchy suivant (avec $y_0 \in \mathbb{R}$) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a y(t) + b \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$ est donnée par les formules suivantes :

$$(2) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} (a y_k + b).$$

1°) Etude de l'algorithme

- Ecrire l'algorithme permettant d'obtenir y_N quand a, b, y_0, T et l'entier N sont donnés.
- Préciser en fonction de N le nombre global d'opérations $+, -, \times$ et $/$ effectuées.

2°) Etude d'un cas particulier ($y'(t) = y(t)$)

On suppose que $a = 1$ et $b = 0$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = y(t)$.

- Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
- Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.
- Donner un équivalent de $y(T) - y_N$ quand N tend vers $+\infty$.

3°) Etude du cas général ($y'(t) = a y(t) + b$)

On suppose que $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = a y(t) + b$.

- Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
- Déterminer y_k pour $0 \leq k \leq N$ à l'aide de la suite auxiliaire $z_k = y_k + \frac{b}{a}$.
- Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.
- Donner un équivalent de $y(T) - y_N$ quand N tend vers $+\infty$.

■ Partie II

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions a et b sont des constantes *complexes*.

On étudie la solution y du problème de Cauchy suivant (avec $y_0 \in \mathbb{C}$) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a y(t) + b \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Les candidats veilleront dans cette partie à ne pas écrire de logarithme de nombres complexes.

4°) *Etude d'un cas particulier* ($y'(t) = i y(t)$)

On suppose que $a = i$ et $b = 0$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = i y(t)$.

a) Préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).

b) Préciser le module r_N du complexe $1 + i \frac{T}{N}$, puis déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} (r_N)^N$.

Montrer que le complexe $1 + i \frac{T}{N}$ admet un argument θ_N compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Vérifier que $\theta_N = \text{Arctan}\left(\frac{T}{N}\right)$, puis déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \theta_N$.

c) Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.

5°) *Un résultat préliminaire*

a) Etablir que $\frac{1}{N^k} \binom{N}{k} \leq \frac{1}{k!}$ si k et N sont deux entiers naturels tels que $k \leq N$.

En déduire l'inégalité suivante pour tout nombre complexe z donné :

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \leq \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{N^k} \binom{N}{k} \right) |z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}.$$

b) Etablir que $\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{N}\right)^N$, et que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z$.

6°) *Etude du cas général* ($y'(t) = a y(t) + b$)

On suppose que $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, et que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = a y(t) + b$.

a) Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).

(On remarquera que l'équation est équivalente à $(e^{-at} y(t))' = b e^{-at}$, et on intégrera).

b) Préciser l'expression de y_N à l'aide des formules (2) et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.

■ Partie III

On revient au cas général et on étudie donc la solution y du problème de Cauchy suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a(t) y(t) + b(t) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$ est donnée par les formules précédentes (1).

7°) *Etude du cas où a est la fonction nulle* ($y'(t) = b(t)$)

On suppose que l'équation différentielle se réduit à $y'(t) = b(t)$.

a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).

b) Montrer à l'aide des formules (1) que y_N est donné par la relation suivante :

$$y_N = y_0 + \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b\left(\frac{kT}{N}\right).$$

En reconnaissant une somme de Riemann, en déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.

8°) *Etude du cas où b est la fonction nulle* ($y'(t) = a(t) y(t)$)

On suppose que l'équation différentielle se réduit à $y'(t) = a(t) y(t)$, avec a à valeurs réelles.

a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).

b) On considère la suite (p_N) définie pour $N \geq 1$ par :

$$p_N = \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right) \right).$$

- Etablir, lorsque N est assez grand, qu'on a : $\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \left| \frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$.
 - Etablir l'inégalité $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre réel $x \geq -\frac{1}{2}$.
 - En déduire un encadrement de $\ln(p_N)$ et les limites de $\ln(p_N)$ et p_N quand N tend vers $+\infty$.
- c) Préciser l'expression de y_N à l'aide des formules (1) et montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$.

9°) *Une majoration préliminaire*

On considère des réels strictement positifs α et β , et une suite réelle (e_k) vérifiant $e_0 = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e_{k+1} \leq (1 + \alpha) e_k + \beta.$$

On lui associe la suite réelle (u_k) définie par $u_0 = 0$, puis par $u_{k+1} = (1 + \alpha) u_k + \beta$.

a) Déterminer la limite éventuelle L de la suite (u_k) , puis préciser l'expression de u_k .

b) Etablir l'inégalité $e_k \leq u_k$ pour tout entier naturel k , et en déduire qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$e_k \leq \frac{\beta}{\alpha} ((1 + \alpha)^k - 1) \leq \frac{\beta}{\alpha} (e^{k\alpha} - 1).$$

10°) *Convergence de la méthode d'Euler*

On étudie le cas général de l'équation différentielle $y'(t) = a(t) y(t) + b(t)$.

a) Montrer que la solution y vérifiant $y(0) = y_0$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) Etablir que la solution y vérifie la relation suivante pour $0 \leq k < N$:

$$y(t_{k+1}) = \left(1 + \frac{T}{N} a(t_k) \right) y(t_k) + \frac{T}{N} b(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) y''(t) dt.$$

c) Etablir à l'aide de la relation (1) qu'on a alors pour $0 \leq k < N$:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = \left(1 + \frac{T}{N} a(t_k) \right) (y(t_k) - y_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) y''(t) dt.$$

On pose $A = \max_{|t| \leq |T|} |a(t)|$ et $M_2 = \max_{|t| \leq |T|} |y''(t)|$.

En notant $e_k = |y(t_k) - y_k|$, en déduire l'inégalité suivante pour $0 \leq k < N$:

$$e_{k+1} \leq \left(1 + \frac{A|T|}{N} \right) e_k + \frac{M_2 T^2}{2 N^2}.$$

d) Déduire des résultats précédents une majoration de $e_N = |y(T) - y_N|$, puis conclure.

EPITA 2007 - mathématiques 2

(durée de l'épreuve : 1 heure 30)

Dans toute la suite du problème, on considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^4)^n}.$$

1°) *Etude de la suite (u_n)*

- a) Justifier l'existence de l'intégrale u_n pour tout entier $n \geq 1$.
- b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
- c) Déterminer la limite de la suite (u_n) en précisant avec soin le théorème utilisé.

2°) *Etude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$*

- a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4n-3}{4n} u_n.$$

- b) En formant $u_n - u_{n+1}$, déterminer la nature et la somme de la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

On donne à cet effet la valeur $u_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3°) *Etude des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$*

- a) Justifier l'existence de l'intégrale suivante, notée $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{4}} e^{-u} du.$$

- b) Déterminer, pour $u \geq 0$, la limite de la suite $n \rightarrow \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
- c) Justifier, pour $u \geq 0$, l'inégalité $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u$.
- d) Effectuer le changement de variables $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$ dans l'intégrale u_n .

Déduire des résultats précédents un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

- e) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de la série $\sum (-1)^n u_n$?

4°) *Etude de la série entière $\sum u_n x^n$*

- a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n x^n$.

On note désormais S la somme de cette série entière sur l'intervalle $] -R, R[$.

- b) Calculer l'expression $4x(1-x)S'(x) + (3x-4)S(x)$.
 - c) Résoudre l'équation $4x(1-x)y' + (3x-4)y = 0$ sur $]0, 1[$ et $] -1, 0[$.
 - d) Ces solutions se prolongent-elles en solutions de classe C^1 sur $] -1, 1[$?
 - e) En déduire l'expression de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ pour $|x| < R$.
-

EPITA 2008 - mathématiques 1

(durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans tout le problème, on désigne par $\mathbb{K}$ un corps (qu'on pourra supposer égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$) et par p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On convient de plus que :

- ◇ Les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ sont des p -uplets x d'éléments de $\mathbb{K}$ qu'on identifie ici à la matrice-colonne de leurs composantes dans la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$ définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On notera ${}^t e_1, \dots, {}^t e_p$ les p matrices-lignes transposées des matrices-colonnes précédentes.

- ◇ L'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est rapporté à sa base canonique $(E_{ij} / 1 \leq i, j \leq p)$, E_{ij} désignant la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont les éléments sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , qui vaut 1. Dans ce contexte, une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix}.$$

Un résultat préliminaire

- a) On considère quatre entiers i, h, k, j compris entre 1 et p .

Vérifier que $E_{ik} E_{kj} = E_{ij}$ et que $E_{ih} E_{kj} = 0$ si $h \neq k$.

- b) Etant donné une matrice $A = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$ et des entiers x et y compris entre 1 et p , expliciter les produits $E_{xy} A$ et $A E_{xy}$.

- c) *Application* : on désigne par $C_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad A M = M A.$$

Déduire des résultats précédents l'égalité $C_p(\mathbb{K}) = \{ \lambda I_p / \lambda \in \mathbb{K} \}$.

■ Partie I

On considère dans cette partie une matrice A de l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et on étudie l'application d_A associant à toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice $d_A(M)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$d_A(M) = A M - M A.$$

1°) *Propriétés générales de d_A*

- a) Montrer que d_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
b) L'endomorphisme d_A est-il injectif? surjectif? Dans quel cas est-il nul?
c) Montrer que l'endomorphisme d_A vérifie la propriété suivante :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d_A(MN) = d_A(M)N + M d_A(N).$$

2°) *Etude de d_A lorsque A est diagonalisable*

On suppose dans cette question la matrice A diagonalisable.

- a) Montrer que la matrice ${}^t A$ transposée de A est aussi diagonalisable.
b) Montrer que A et ${}^t A$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.

On désigne alors par $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes ou non de A et ${}^t A$ et par :

- $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_p)$ une base de vecteurs propres de A associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
- $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_p)$ une base de vecteurs propres de ${}^t A$ associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

- c) Calculer $d_A(V_i {}^t W_j)$ en fonction de $V_i {}^t W_j$ pour $1 \leq i, j \leq p$.

On note P et Q les matrices de passage de la base $(e_1, \dots, e_p)$ à ces bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, et on considère l'application φ définie de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans lui-même par $\varphi(M) = P M {}^t Q$.

- d) Préciser les produits $P e_i$ et $Q e_j$ pour $1 \leq i, j \leq p$.

Comparer les matrices E_{ij} et $e_i {}^t e_j$, et en déduire $\varphi(E_{ij})$.

- e) Montrer que l'application φ réalise un automorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

En déduire que la famille $(V_i {}^t W_j \mid 1 \leq i, j \leq p)$ est une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

- f) En déduire que d_A est diagonalisable, et préciser ses valeurs et vecteurs propres.

■ Partie II

On appelle *dérivation* dans une algèbre $\mathcal{A}$ tout endomorphisme d de $\mathcal{A}$ vérifiant de plus :

$$\forall M, N \in \mathcal{A}, \quad d(MN) = d(M)N + M d(N).$$

La dérivation usuelle des polynômes est donc une dérivation au sens précédent dans $\mathbb{K}[X]$.

L'application d_A de la partie I est une dérivation de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ puisqu'on a établi en I.1° que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d_A(MN) = d_A(M)N + M d_A(N).$$

On se propose de déterminer dans cette partie II toutes les dérivations d de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1°) *Trace d'une matrice carrée*

On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux, définie par $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^p m_{ii}$.

- a) Etablir que l'application $M \longrightarrow \text{Tr}(M)$ est linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
b) Etablir, si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'égalité $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
c) En déduire, si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'égalité $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.

Ainsi, deux matrices semblables ont la même trace.

2°) *Trace d'une matrice de projection*

Soit une matrice de projection M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, autrement dit une matrice M telle que $M^2 = M$. On identifie M à l'endomorphisme canoniquement associé $x \in \mathbb{K}^p \longrightarrow Mx \in \mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$.

- a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de M sont 0 et 1.
- b) En exploitant l'égalité $x = Mx + (x - Mx)$ valable pour tout vecteur x de $\mathbb{K}^p$, établir que :

$$\mathbb{K}^p = \text{Ker}(M - I_p) \oplus \text{Ker}(M).$$

- c) En déduire que M est diagonalisable et qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1} M P = D$$

où D est diagonale avec r éléments diagonaux égaux à 1, les autres égaux à 0 ($0 \leq r \leq p$).

- d) Vérifier que cet entier r est la valeur commune de la trace et du rang de D , et donc de M .

Ainsi, pour une matrice de projection M , le rang de M est égal à la trace de M .

Dans la suite du problème, on désigne désormais par d une dérivation de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et on lui associe l'application suivante F , définie de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad F(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & d(M) \\ \hline O_p & M \end{array} \right).$$

($F(M)$ est définie à l'aide des 4 blocs d'ordre p ci-dessus où O_p est la matrice nulle d'ordre p).

3°) *Propriétés de l'image par F de la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$*

- a) Déterminer $d(I_p)$, où I_p désigne la matrice-identité d'ordre p .
- b) Etablir que F est un morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans l'algèbre $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$, c'est à dire qu'on a pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et tout couple (M, N) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$F(M + N) = F(M) + F(N), \quad F(\lambda M) = \lambda F(M), \quad F(MN) = F(M)F(N), \quad F(I_p) = I_{2p}.$$

On rappelle que les matrices E_{ij} , où $1 \leq i, j \leq p$, ont été définies au début de ce problème, et qu'on a établi les relations suivantes : $E_{ik} E_{kj} = E_{ij}$ et que $E_{ih} E_{kj} = 0$ si $h \neq k$.

On rappelle également l'inégalité $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$ pour $A, B \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{K})$.

- c) Etablir, pour $1 \leq i, j \leq p$, la relation $F(E_{ii}) = F(E_{ij})F(E_{jj})F(E_{ji})$.
En déduire que $\text{rg}(F(E_{ii})) \leq \text{rg}(F(E_{jj}))$, puis que $\text{rg}(F(E_{ii})) = \text{rg}(F(E_{jj}))$.
- d) Etablir, pour $1 \leq i \leq p$, que les p matrices $F(E_{ii})$ sont des matrices de projection.
- e) Etablir que $F(E_{11}) + F(E_{22}) + \dots + F(E_{pp}) = I_{2p}$.

En déduire, à l'aide du résultat obtenu en II.2°, la valeur commune du rang et de la trace de ces p matrices de projection $F(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq p$.

4°) *Une base adaptée de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{2p}$*

- a) Justifier l'existence de deux vecteurs u, v de $\mathbb{K}^{2p}$ formant une base de l'image de $F(E_{11})$ (l'image de la matrice $F(E_{11})$ s'identifiant à l'image de l'endomorphisme associé de $\mathbb{K}^{2p}$).

Etablir que $F(E_{11})u = u$ et $F(E_{11})v = v$.

- b) Calculer les produits $F(E_{1k})F(E_{j1})u$ et $F(E_{1k})F(E_{j1})v$ selon les valeurs de j et k .

En déduire que la famille des $2p$ vecteurs suivants forme une base de $\mathbb{K}^{2p}$:

$$\mathcal{B} = (F(E_{11})u, F(E_{21})u, \dots, F(E_{n1})u, F(E_{11})v, F(E_{21})v, \dots, F(E_{n1})v).$$

- c) Etant donnée une matrice $M = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, exprimer dans la base $\mathcal{B}$:
- le produit $F(M) F(E_{k1}) u$ pour $1 \leq k \leq p$.
 - le produit $F(M) F(E_{k1}) v$ pour $1 \leq k \leq p$.
- d) En déduire, si P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$ à la base $\mathcal{B}$:

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad P^{-1} F(M) P = \left(\begin{array}{c|c} M & O_p \\ \hline O_p & M \end{array} \right).$$

5°) *Conclusion*

On conserve les notations précédentes et on note, avec des blocs A, B, C, D d'ordre p :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right).$$

- a) Déduire de la question II.4.d) les égalités suivantes pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$M C = C M \quad ; \quad M D = D M \quad ; \quad d(M) C = A M - M A \quad ; \quad d(M) D = B M - M B.$$

- b) Déduire de la question préliminaire qu'il existe des scalaires γ et δ tels que :

$$C = \gamma I_p \quad ; \quad D = \delta I_p.$$

- c) Montrer que si γ et δ sont tous les deux nuls, alors la matrice P n'est pas inversible.

En déduire qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle qu'on ait :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d(M) = X M - M X.$$

Ainsi, les seules dérivations de l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont celles étudiées à la partie I.

EPITA 2008 - mathématiques 2

(durée de l'épreuve : 2 heures)

On considère dans ce problème un entier $p \geq 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

1°) *Evaluation du polynôme P en un réel x*

On introduit les polynômes $Q_0, Q_1, \dots, Q_p$ définis par $Q_0(X) = 1$ et pour $1 \leq n \leq p$ par :

$$Q_n(X) = X Q_{n-1}(X) + a_{p-n}.$$

a) Calculer $Q_1(X), Q_2(X)$ et déterminer par récurrence l'expression de $Q_n(X)$ pour $n \leq p$.

Vérifier que $Q_n(X)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(X)$ par X^{p-n} .

b) Préciser la valeur de $Q_p(x)$ pour tout nombre réel x .

Ecrire un algorithme permettant d'obtenir $P(x)$ par la méthode précédente.

Combien cet algorithme nécessite-t-il d'opérations $+$ et $\times$?

2°) *Recherche d'une racine réelle x du polynôme P*

On considère deux nombres réels a et b ($a < b$) tels que $P(a)P(b) \leq 0$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a, b_0 = b$, puis par :

• $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ si $P(a_n)P(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) \leq 0$.

• $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$ si $P(a_n)P(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) > 0$.

a) Etablir que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

b) Etablir, pour tout entier naturel n , qu'on a $P(a_n)P(b_n) \leq 0$.

En déduire que la limite commune x des suites (a_n) et (b_n) est racine de P .

c) Ecrire un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de x d'amplitude $h \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Combien cet algorithme nécessite-t-il d'opérations $+$ et $\times$?

On se propose maintenant de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P , afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles racines de ce polynôme P .

On désigne à cet effet par $M = M(P)$ le nombre réel positif suivant :

$$M = \max_{0 \leq k \leq p-1} (|a_k|) = \max(|a_{p-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|).$$

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(r) = r^{p+1} - (M+1)r^p + M.$$

a) Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de sa dérivée.

Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\frac{1}{p}$.

b) On suppose $M \leq \frac{1}{p}$. Dresser un tableau de variation de f pour $r \geq 0$.

En déduire le signe de $f(r)$ pour $r > 1$.

c) On suppose $M > \frac{1}{p}$. Dresser un tableau de variation de f pour $r \geq 0$.

En déduire le signe de $f(r)$ pour $r \geq M + 1$.

4°) Localisation des racines du polynôme P

a) Démontrer que toute racine réelle ou complexe $z \neq 1$ du polynôme P vérifie l'inégalité :

$$|z|^p \leq M \frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}.$$

En supposant $|z| > 1$, montrer qu'on a l'inégalité $f(|z|) = |z|^{p+1} - (M+1)|z|^p + M \leq 0$.

b) Etablir, si $M \leq \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

c) Etablir, si $M > \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module strictement inférieur à $M + 1$.

5°) Etude de deux exemples

5.1. On suppose dans cette sous-question que P est le polynôme défini comme suit :

$$P(X) = X^p - \frac{1}{p} (X^{p-1} + \dots + X + 1) = X^p - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

- Montrer que ses racines réelles ou complexes sont de module inférieur ou égal à 1.
- Montrer que 1 est une racine simple de P . Qu'en déduit-on par rapport à 4°b ?

5.2. On suppose dans cette sous-question que P est le polynôme défini comme suit :

$$P(X) = X^p - (X^{p-1} + \dots + X + 1) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

- a) Montrer que ses racines réelles ou complexes sont de module strictement inférieur à 2.
- b) Etablir, si z est racine de P , que z est racine du polynôme $X^{p+1} - 2X^p + 1$.
- c) En étudiant pour $r \geq 0$ la fonction définie par $g(r) = r^{p+1} - 2r^p + 1$, établir que :
 - le polynôme P a une racine réelle x_p telle que : $\frac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$.
 - la suite $p \rightarrow x_p$ converge vers 2. Qu'en déduit-on par rapport à 4°c ?
- d) On pose maintenant $x_p = 2 - \varepsilon_p$ et on étudie ε_p lorsque p tend vers $+\infty$.
- Etablir que x_p vérifie la relation $(2 - x_p)x_p^p = 1$, puis que $\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p}$.

En déduire que la suite $p \rightarrow p \varepsilon_p$ converge vers 0.

- Etablir qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque p tend vers $+\infty$:

$$x_p = 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right).$$

e) Etablir enfin que z est racine de P si et seulement si $z' = 1/z$ est racine de :

$$Q(X) = X^p + X^{p-1} + \dots + X - 1 = \sum_{k=1}^p X^k - 1.$$

En déduire que toutes les racines de P sont de module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Ce problème propose l'étude d'un algorithme d'approximation d'une solution de l'équation de la chaleur. On considère à cet effet un entier $N \geq 1$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ qu'on munit de sa norme euclidienne usuelle. On identifie tout vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ à la matrice-colonne de ses N composantes $x_1, x_2, \dots, x_N$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et on désignera par A_N et I_N les matrices réelles d'ordre N définies par :

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Si $N = 1$, A_1 et I_1 sont les matrices $(1, 1)$ dont le seul élément est respectivement 0 et 1). Pour tout réel strictement positif donné r , on note M_N la matrice $M_N = (1 - 2r) I_N + r A_N$ et on étudie alors les suites vectorielles $j \rightarrow X_j$ de $\mathbb{R}^N$ définies par la donnée de $X_0 \in \mathbb{R}^N$ et de la relation $X_{j+1} = M_N X_j$ pour $j \in \mathbb{N}$.

■ Partie I : Etude de la suite (X_j) dans le cas $N = 3$

1°) *Diagonalisation des matrices A_3 et M_3*

a) Expliciter la matrice A_3 et déterminer ses trois valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

Donner des vecteurs propres unitaires V_1, V_2, V_3 associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

b) Préciser une matrice inversible P d'ordre 3 telle que $D_3 = P^{-1} A_3 P$ soit diagonale.

Expliciter $P^{-1} M_3 P$ où $M_3 = (1 - 2r) I_3 + r A_3$ et en déduire les valeurs propres de M_3 .

Préciser pour quelles valeurs de r celles-ci appartiennent à l'intervalle $] -1, 1[$.

2°) *Etude de la suite vectorielle $j \rightarrow X_j$*

On considère un vecteur $X_0 = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$ de $\mathbb{R}^3$.

A partir de ce vecteur X_0 , on définit ensuite la suite $j \rightarrow X_j$ par la relation $X_{j+1} = M_3 X_j$.

a) Préciser, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'expression du vecteur X_j dans la base (V_1, V_2, V_3) .

b) Préciser les valeurs du réel $r > 0$ pour lesquelles la suite vectorielle $j \rightarrow X_j$ converge vers le vecteur nul pour tout choix du vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

■ Partie II : Etude de la suite (X_j) dans le cas général

3°) *Diagonalisation des matrices A_N et M_N*

a) Citer un théorème prouvant :

- que les N valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ de la matrice A_N sont réelles.
- qu'il existe une matrice orthogonale P d'ordre N telle que $D_N = P^{-1} A_N P$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans cet ordre, les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

- b) Soient une valeur propre λ de A_N et un vecteur propre associé X , dont les composantes sont notées $x_1, x_2, \dots, x_N$, et soit m un indice tel que $|x_m| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|)$.
Montrer qu'on a $\lambda x_m = x_{m-1} + x_{m+1}$ pour $2 \leq m \leq N-1$, et montrer que cette formule reste valable pour $m=1$ en posant $x_0 = 0$, et pour $m=N$ en posant $x_{N+1} = 0$.
En déduire que $|\lambda| |x_m| \leq 2 |x_m|$, puis que $|\lambda| \leq 2$.
- c) On suppose que X est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $A_N X = 2 X$.
Exprimer $x_2, x_3, \dots, x_N$ en fonction de x_1 et en déduire que X est le vecteur nul.
Etablir un résultat analogue si X est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $A_N X = -2 X$.
En déduire que les valeurs propres de A_N appartiennent à l'intervalle $]-2, 2[$, et que pour chacune d'entre elles existe un unique réel $\theta \in]0, \pi[$ tel qu'on ait $\lambda = -2 \cos(\theta)$.
- d) Calculer $P^{-1} M_N P$ où $M_N = (1 - 2r) I_N + r A_N$ et en déduire les valeurs propres de M_N en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ de A_N .
Etablir, si $0 < r \leq \frac{1}{2}$, que les valeurs propres de M_N appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.

4°) Détermination des valeurs propres de la matrice A_N

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$, on considère le déterminant d'ordre N défini par :

$$D_N(\theta) = \det(A_N + 2 \cos(\theta) I_N).$$

Par convention, on posera $D_0(\theta) = 1$ et $D_1(\theta) = 2 \cos(\theta)$.

- a) Etablir la relation $D_{N+1}(\theta) - 2 \cos(\theta) D_N(\theta) + D_{N-1}(\theta) = 0$ pour $N \geq 1$.
b) Démontrer la formule suivante pour tout entier naturel N :

$$D_N(\theta) = \frac{\sin((N+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- c) En déduire les N réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ appartenant à $]0, \pi[$ tels qu'on ait :
 $\lambda_1 = -2 \cos(\theta_1) < \lambda_2 = -2 \cos(\theta_2) < \dots < \lambda_N = -2 \cos(\theta_N)$.

5°) Etude de la suite vectorielle $j \rightarrow X_j$

Dans cette question, on donne une base orthonormale $(V_1, V_2, \dots, V_N)$ de vecteurs propres de A_N associés à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ et un vecteur $X_0 = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_N V_N$ de $\mathbb{R}^N$.

A partir de ce vecteur X_0 , on définit ensuite la suite $j \rightarrow X_j$ par la relation $X_{j+1} = M_N X_j$.

- a) Préciser, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'expression du vecteur X_j dans la base $(V_1, V_2, \dots, V_N)$.

En déduire l'expression de la norme euclidienne $\|X_j\|$ du vecteur X_j .

- b) On suppose $0 < r \leq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $j \rightarrow X_j$ converge vers le vecteur nul.
c) On suppose $r > \frac{1}{2}$ et on choisit ici $X_0 = V_1$.

Etablir que la suite réelle $j \rightarrow \|X_j\|$ diverge vers $+\infty$ si N est choisi assez grand.

- d) On suppose $r > \frac{1}{2}$ et on choisit ici $X_0 = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_N V_N$ avec $x_1 \neq 0$.

Etablir que la suite réelle $j \rightarrow \|X_j\|$ diverge vers $+\infty$ si N est choisi assez grand.

■ Partie III : Etude d'une discrétisation de l'équation de la chaleur

6°) Déterminer les limites suivantes lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

On étudie la température $u(x, t)$ d'une barre de longueur L au point d'abscisse x ($0 \leq x \leq L$) et à l'instant t ($t \geq 0$). On démontre que u doit être une fonction continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$, qui admet des dérivées partielles continues d'ordre 1 en t et d'ordre 2 en x sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation de la chaleur (C), où $\omega > 0$ désigne une constante physique :

$$\forall (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+^* : \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

On suppose de plus que :

- ◇ la température initiale de la barre à l'instant 0 est connue : $\forall x \in [0, L], u(x, 0) = \varphi(x)$ où $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 s'annulant en 0 et L : $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.
- ◇ les extrémités de la barre restent à une température nulle : $\forall t \geq 0, u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Le but est ici d'obtenir des approximations de cette solution u aux différents points (x_i, t_j) d'un maillage du domaine $[0, L] \times \mathbb{R}_+$, où les réels x_i et t_j sont définis comme suit :

- pour $0 \leq i \leq N + 1$, on a $x_i = i \Delta x = \frac{iL}{N+1}$ où $\Delta x = \frac{L}{N+1}$ est le pas de longueur.
- pour $j \in \mathbb{N}$, on a $t_j = j \Delta t$ où $\Delta t > 0$ est le pas de temps.

Les résultats de la question 6° incitent maintenant à remplacer l'équation de la chaleur (C) aux points du maillage par les relations approchées suivantes, où $0 \leq i \leq N + 1$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \approx \omega^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{(\Delta x)^2}.$$

On recherche donc des approximations $u_{i,j}$ de $u(x_i, t_j)$ définies par les relations exactes :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \omega^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

et on pose compte tenu des conditions initiales et des conditions aux limites du problème :

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) \text{ pour } 0 \leq i \leq N + 1 \quad ; \quad u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

7°) Etude des approximations $u_{i,j}$ de la solution u

Soit U_j le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les composantes sont les approximations $u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}$ à l'instant t_j de la solution u aux points d'abscisses $x_1, x_2, \dots, x_N$.

a) Expliciter U_0 et vérifier que U_{j+1} s'obtient à partir de U_j par une relation matricielle de la forme $U_{j+1} = M_N U_j$, où on explicitera le réel r définissant $M_N = (1 - 2r) I_N + r A_N$.

b) On peut montrer que la solution unique u du problème posé reste bornée sur $[0, L] \times \mathbb{R}_+$, ce qui est naturel d'après son interprétation physique.

- Montrer, si $2\omega^2 \Delta t \leq (\Delta x)^2$, que la suite $j \rightarrow U_j$ des approximations reste aussi bornée.
- Montrer, si $2\omega^2 \Delta t > (\Delta x)^2$, que la suite $j \rightarrow U_j$ n'est pas bornée en général.

Dans ce dernier cas, les $u_{i,j}$ ne peuvent donc être de bonnes approximations des $u(x_i, t_j)$.

c) Ecrire un algorithme de calcul des approximations $u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j}$ à l'instant $t_j = j \Delta t$ lorsque les autres données du problème sont connues.

E.P.I.T.A.

Epreuve optionnelle de mathématiques (2 h)

Notations

Dans tout ce problème, les séries sont indexées par l'ensemble $\mathbb{Z}$, et non par l'ensemble $\mathbb{N}$: étant donnée une suite $n \in \mathbb{Z} \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on posera (sous réserve d'existence) :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=-p}^{n=+p} u_n.$$

On vérifie facilement, ce que l'on admettra dans ce problème, que :

- ◇ les propriétés établies pour les séries réelles et complexes indexées par $\mathbb{N}$ s'étendent aux séries indexées par $\mathbb{Z}$.
- ◇ les propriétés établies pour les séries de fonctions à valeurs réelles et complexes indexées par $\mathbb{N}$ s'étendent aux séries de fonctions indexées par $\mathbb{Z}$.

On considère dans la suite une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes, qu'on suppose de classe C^2 , et on fait l'hypothèse que les trois fonctions f, f', f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, autrement dit que les trois intégrales suivantes existent :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad ; \quad I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt \quad ; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)| dt.$$

1°) Convergence de la série $\sum f(x + 2\pi n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$

a) Etablir la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2\pi f(x + 2\pi n) = \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x+t) dt - \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} (2\pi(n+1) - t) f'(x+t) dt.$$

b) En déduire l'inégalité suivante :

$$2\pi |f(x + 2\pi n)| \leq \int_{x+2\pi n}^{x+2\pi(n+1)} |f(u)| du + 2\pi \int_{x+2\pi n}^{x+2\pi(n+1)} |f'(u)| du.$$

c) Etablir, pour tout réel x , la convergence absolue de la série $\sum f(x + 2\pi n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

On peut donc poser pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$F_p(x) = \sum_{n=-p}^{n=+p} f(x + 2\pi n) \quad ; \quad F(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} F_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(x + 2\pi n).$$

2°) Propriétés de la fonction F

a) Montrer que la fonction F est 2π -périodique.

b) Etablir l'inégalité suivante pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$2\pi \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x + 2\pi n)| \leq \int_{2\pi n}^{2\pi(n+2)} |f(u)| du + 2\pi \int_{2\pi n}^{2\pi(n+2)} |f'(u)| du.$$

c) En déduire la convergence normale sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ de :

- la série de fonctions $\sum f(x + 2\pi n)$ de la variable réelle x où $n \in \mathbb{Z}$.
- la série de fonctions $\sum f'(x + 2\pi n)$ de la variable réelle x où $n \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire, en citant précisément les théorèmes utilisés :

- la continuité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
- la classe C^1 de la fonction F sur $\mathbb{R}$ (et on précisera l'expression de $F'(x)$).

3°) *Série de Fourier de la fonction F*

a) Montrer que l'intégrale suivante (transformée de Fourier de f) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt.$$

b) On désigne, pour $p \in \mathbb{Z}$, par c_p le coefficient de Fourier exponentiel de la fonction F .

Etablir l'égalité $2\pi c_p = \hat{f}(p)$.

c) Montrer, en citant le théorème utilisé, que la série de Fourier de F converge vers F et en déduire la relation suivante (*formule de Poisson*) pour tout réel x :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \hat{f}(p) e^{ipx}.$$

4°) *Un exemple d'application*

On suppose ici la fonction f définie par $f(x) = e^{-\lambda^2 x^2}$ (où $\lambda > 0$) et on pose donc :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-\lambda^2 t^2} dt.$$

a) Vérifier que f est de classe C^2 et que f, f', f'' sont bien intégrables sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et préciser l'expression de sa dérivée.

En déduire que $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $2\lambda^2 y' + xy = 0$.

c) Donner la valeur de $\hat{f}(0)$, sachant qu'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

En déduire l'expression (sans symbole intégral) de $\hat{f}(x)$.

d) Etablir la formule suivante pour tout réel $t > 0$

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{t} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{t^2}} \right).$$

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier naturel k , on pose $\Delta^k = \text{Id}$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois) si $k \geq 1$.
Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme Δ

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

1°) *La famille (P_n) forme une base de $\mathbb{R}[X]$*

- Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
- Etablir, pour tout entier naturel k , que $P_n(k)$ et que $P_n(-k)$ sont des entiers.
- En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, que les coefficients de P dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des nombres entiers si et seulement si on a : $\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}$.

2°) *Etude de l'endomorphisme Δ*

- Etablir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Calculer ΔP_0 , puis ΔP_{n+1} en fonction de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- On considère un polynôme non nul P de degré d .
Préciser le degré du polynôme ΔP et donner $\Delta^{d+1} P$.
- Préciser le noyau de Δ , puis étudier s'il est injectif et s'il est surjectif.

3°) *Expression d'un polynôme dans la base (P_n) de $\mathbb{R}[X]$*

- Calculer $\Delta^k P_n$ et en déduire que $\Delta^k P_n(0) = \delta_{k,n}$ où $\delta_{k,n} = 1$ si $k = n$, $\delta_{k,n} = 0$ si $k \neq n$.
- En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule suivante :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) P_n(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n P(0)}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1).$$

4°) *Etude de l'endomorphisme Δ_d induit par Δ sur $\mathbb{R}_d[X]$*

On désigne par $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq d$ (où $d \geq 1$) et on désigne par Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$ induit par Δ , c'est à dire par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad \Delta_d P(X) = P(X+1) - P(X).$$

- a) Ecrire les matrices de Δ_d dans les bases $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ et $(1, X, \dots, X^d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$.
 b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ_d .

L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable? Que dire de l'endomorphisme Δ_d^{d+1} ?

■ Partie II : Approximation de dérivées $n^{\text{èmes}}$ par différences finies

5°) *Puissances de l'endomorphisme Δ*

Etablir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n P(X) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

6°) *Application au calcul de différentes sommes*

- a) Préciser le coefficient dominant du polynôme X^n dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$.

En déduire la valeur de $\Delta^n X^n$, puis établir la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!$$

- b) Démontrer la formule suivante pour $0 \leq k < n$:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0.$$

7°) *Approximation d'une dérivée $n^{\text{ème}}$ par différences finies*

On considère une fonction f de classe C^m définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, puis un point $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel n compris entre 1 et m ($1 \leq n \leq m$), et on pose alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh).$$

- a) Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n en a .
 Quelles formules en déduit-on pour $f(a+jh)$, où $0 \leq j \leq n$, en changeant h en jh ?
 b) En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j ($0 \leq j < n$) et de h^n dans celui-ci.
 Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

■ Partie III : Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers

8°) *Etude de séries télescopiques*

- a) Etablir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta Q$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^p R(k) = Q(p+1) - Q(0).$$

- b) Exprimer les polynômes X , X^2 et X^3 dans la base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En déduire des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels qu'on ait $\Delta Q_1(X) = X$, $\Delta Q_2 = X^2$, $\Delta Q_3 = X^3$.

- c) Donner alors l'expression *factorisée* des sommes $\sum_{k=0}^{p-1} k$, $\sum_{k=0}^{p-1} k^2$, $\sum_{k=0}^{p-1} k^3$ où $p \in \mathbb{N}$.

9°) Recherche d'une suite de polynômes (B_n) tels que $\Delta B_{n+1} = X^n$

Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ tels qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta B_{n+1} = X^n$.

a) Montrer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la formule $(\Delta P)' = \Delta(P')$.

b) Etablir, si une telle suite de polynômes (B_n) existe, qu'on a :

- $\forall n \geq 1, B_{n+1}' - n B_n \in \text{Ker}(\Delta)$.
- $\forall n \geq 1, B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$.
- le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

c) Inversement, établir par récurrence qu'une suite (B_n) satisfaisant ces 3 conditions vérifie

$$\Delta B_{n+1} = X^n, \text{ et qu'on a alors } \sum_{k=0}^{k=p} k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0) \text{ pour tout entier naturel } p.$$

On recherche en particulier une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall n \geq 1, B_{n+1}' = n B_n$.
2. $\forall n \geq 1, B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$.
3. le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

10°) Existence, unicité et construction de la suite (B_n)

a) Vérifier que les conditions 1, 2, 3 sont équivalentes aux conditions suivantes :

1. $\forall n \geq 1, B_{n+1}' = n B_n$.
2. $\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$.

3. le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

b) Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et retrouver ainsi $\sum_{k=0}^{k=p} k, \sum_{k=0}^{k=p} k^2, \sum_{k=0}^{k=p} k^3$.

c) Etablir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie les trois conditions 1, 2, 3 définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall n \geq 1, B_n \in \mathbb{Q}[X]$.

d) En déduire un algorithme d'obtention des polynômes B_k pour $1 \leq k \leq n$, où n est donné.

E.P.I.T.A.

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni de sa norme euclidienne usuelle $\| \cdot \|$, on rappelle que :

- la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est : $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$.
- la boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est : $B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| \leq r\}$.

On considère un nuage K constitué de n points $m_1, \dots, m_n$ ($n \geq 2$) de ce plan euclidien $\mathbb{R}^2$, et on se propose d'établir l'existence et l'unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant ce nuage K , puis de déterminer un algorithme permettant de l'obtenir pratiquement.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on convient de poser : $r(x) = \max \{ \|m_k - x\| \mid 1 \leq k \leq n \}$.

Ainsi, $B_f(x, r(x))$ est la plus petite boule fermée de centre x contenant le nuage de points K .

1°) Question préliminaire

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère un réel $R > 0$, un nombre réel θ tel que $0 \leq \theta < \pi/2$, les points A d'abscisse $R e^{i\theta}$ et B d'abscisse $R e^{-i\theta}$, et le point $\Omega(t)$ de coordonnées $(t, 0)$ où $t > 0$.

- Calculer la longueur $R(t) = \|\overrightarrow{\Omega(t)A}\| = \|\overrightarrow{\Omega(t)B}\|$ et montrer que $R(t) < R$ pour t assez petit.
- En déduire que si le réel t est choisi strictement positif et assez petit, alors la boule fermée $B_f(\Omega(t), R(t))$ de centre $\Omega(t)$ et de rayon $R(t)$ vérifie les trois propriétés suivantes :
 - son rayon $R(t)$ est strictement inférieur à R .
 - tous les points d'abscisse $R e^{i\alpha}$ avec $-\theta \leq \alpha \leq \theta$ sont dans la boule $B_f(\Omega(t), R(t))$.
 - il existe un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < R$ tel que tous les points situés dans la boule fermée de centre O et de rayon $R - \varepsilon$ sont dans la boule $B_f(\Omega(t), R(t))$.

2°) Etude de la fonction $x \longrightarrow r(x) = \max \{ \|m_k - x\| \mid 1 \leq k \leq n \}$

- Etablir l'implication suivante pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall m \in \mathbb{R}^2, \quad \|m - x\| \leq r(x) \implies \|m - y\| \leq r(x) + \|x - y\|.$$

En déduire l'inclusion : $B_f(x, r(x)) \subset B_f(y, r(x) + \|x - y\|)$.

- En déduire que : $r(y) \leq r(x) + \|y - x\|$, puis que $x \longrightarrow r(x)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

3°) Existence d'une boule fermée de rayon minimal contenant K

- Etablir l'inégalité $\|x\| \leq \|m_k\| + \|x - m_k\|$ pour $1 \leq k \leq n$ et pour tout élément $x \in \mathbb{R}^2$.

En déduire que $\|x\| \leq r(0_{\mathbb{R}^2}) + r(x)$ pour tout élément $x \in \mathbb{R}^2$.

- Etablir que $r(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, et qu'il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| > R \implies r(x) > r(0_{\mathbb{R}^2}).$$

- Etablir que la restriction de la fonction $x \longrightarrow r(x)$ à la boule fermée $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, R)$ admet un minimum absolu $r_K = r(\omega_K)$, atteint en un point ω_K de cette boule.

- d) En déduire que $r_K = r(\omega_K)$ est en fait le minimum de la fonction $x \rightarrow r(x)$ sur $\mathbb{R}^2$, et que $B_f(\omega_K, r_K)$ est une boule fermée de rayon minimal contenant le nuage de points K .

4°) *Unicité d'une boule fermée de rayon minimal contenant K*

- a) Etablir l'égalité suivante, où x, y désignent deux éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall k \in [1, n], \quad \left\| m_k - \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|m_k - x\|^2 + \frac{1}{2} \|m_k - y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2.$$

- b) En déduire, si la fonction $x \rightarrow r(x)$ atteint son minimum r_K en deux points distincts x et y (en lesquels on a donc $r(x) = r(y) = r_K$), qu'on a l'inégalité suivante :

$$r^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq r_K^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2.$$

- c) En déduire une contradiction et montrer que la plus petite boule fermée $B_f(\omega_K, r_K)$ qui contient le nuage de points K est unique.

5°) *Intersection du nuage de points K et du cercle de rayon minimal contenant K*

On désigne désormais par C_K le cercle de centre ω_K et de rayon r_K .

- a) Montrer que l'un au moins des points $m_1, \dots, m_n$ appartient au cercle C_K .
b) On note $m_1, \dots, m_p$, avec $1 \leq p \leq n$, les points du nuage appartenant à C_K et on pose :

$$\max \{ \|m_i - \omega_K\| \mid p+1 \leq i \leq n \} = r_K - \varepsilon < r_K.$$

On suppose que $m_1, \dots, m_p$ sont sur un même demi-cercle de C_K privé de ses extrémités.

En exploitant la question préliminaire, montrer qu'il existe une boule fermée contenant K dont le rayon est strictement inférieur à r_K . En déduire que tout demi-cercle du cercle C_K qui contient ses extrémités contient au moins un point du nuage K .

- c) On note $\mathcal{I}$ l'intersection du cercle C_K de centre ω_K et de rayon r_K et du nuage de points K . Etablir que $\mathcal{I}$ compte au moins deux points, et montrer que si ces deux points ne sont pas diamétralement opposés sur le cercle C_K , alors $\mathcal{I}$ contient au moins trois points.

6°) *Algorithme de recherche du cercle C_K*

On note (x_k, y_k) les coordonnées du point m_k du plan euclidien, pour $1 \leq k \leq n$.

- a) Montrer que le cercle C_K admet pour diamètre deux points m_i et m_j du nuage, ou encore qu'il est le cercle circonscrit à trois points m_i, m_j, m_k du nuage.

- b) Préciser les coordonnées du milieu x_{ij} du segment $[m_i, m_j]$.

Déterminer les équations de deux des médiatrices du triangle $m_i m_j m_k$ ($1 \leq i < j < k \leq n$) et en déduire les coordonnées du centre ω_{ijk} du cercle circonscrit à ce triangle.

- c) Ecrire un algorithme déterminant $r(x)$ lorsque x est donné dans $\mathbb{R}^2$.

- d) Ecrire un algorithme déterminant le plus petit réel $r(x_{ij})$ ($1 \leq i < j \leq n$).

Ecrire un algorithme déterminant le plus petit réel $r(\omega_{ijk})$ ($1 \leq i < j < k \leq n$).

En déduire un algorithme permettant d'obtenir ω_K et r_K en $O(n^4)$ opérations.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on considère un segment $I = [a, b]$, où les réels a et b vérifient $a < b$, et on étudie l'interpolation d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par des polynômes.

La partie I conduit à un algorithme de calcul de ces polynômes d'interpolation, tandis que la partie II étudie l'erreur d'interpolation commise en remplaçant f par ces polynômes.

■ Partie I : Algorithme de calcul des polynômes d'interpolation de f

Dans cette partie, on associe à toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points supposés deux à deux distincts de $I = [a, b]$ une suite (P_n) de polynômes d'interpolation de f qu'on étudie ci-dessous.

1°) *Définition des polynômes d'interpolation (P_n)*

Pour tout entier naturel n , on considère l'application ϕ_n définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \phi_n(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

- a) Montrer que l'application ϕ_n est linéaire et injective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
- b) En déduire que ϕ_n réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
- c) Etablir qu'il existe un et seul polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, qu'on notera P_n , tel que :

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n(x_1) = f(x_1), \quad \dots, \quad P_n(x_n) = f(x_n).$$

2°) *Construction des polynômes P_0, P_1, P_2*

- a) Montrer que $P_0(X) = \Delta_0(x_0)$, où l'on a posé $\Delta_0(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

- b) Montrer qu'il existe un réel λ_1 tel que $P_1(X) - P_0(X) = \lambda_1(X - x_0)$.

Exprimer $\lambda_1 = \Delta_1(x_0, x_1)$ en fonction de $x_0, x_1, \Delta_0(x_0) = f(x_0)$ et $\Delta_0(x_1) = f(x_1)$.

Vérifier les égalités suivantes :

$$P_1(X) = \Delta_1(x_0, x_1)(X - x_0) + \Delta_0(x_0) = \Delta_1(x_0, x_1)(X - x_1) + \Delta_0(x_1).$$

- c) Montrer qu'il existe un réel λ_2 tel que $P_2(X) - P_1(X) = \lambda_2(X - x_0)(X - x_1)$.

Etablir que $\lambda_2 = \Delta_2(x_0, x_1, x_2)$ dépend de x_0, x_1, x_2 et s'exprime comme suit :

$$\Delta_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta_1(x_1, x_2) - \Delta_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

En déduire l'expression de P_2 dans la base $(1, X - x_0, (X - x_0)(X - x_1))$.

- d) On suppose, dans cette question seulement, que $x_0 = -1, x_1 = +1, x_2 = 0$ et que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Déterminer par la méthode précédente les polynômes d'interpolation P_0, P_1, P_2 .

3°) Expression du polynôme d'interpolation P_n dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$

On considère la famille de polynômes définie par $N_0(X) = 1$ et, pour $k \geq 1$, par :

$$N_k(X) = (X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - x_i).$$

- a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe un réel λ_n tel que $P_n(X) - P_{n-1}(X) = \lambda_n N_n(X)$.
 c) On suppose, pour un entier $n \geq 1$, qu'il existe des fonctions $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$, où Δ_k est fonction de $x_0, x_1, \dots, x_k$ pour $k < n$, telles qu'on ait pour tout entier naturel $k < n$:

$$P_k(X) = \Delta_0(x_0) N_0(X) + \Delta_1(x_0, x_1) N_1(X) + \dots + \Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k) N_k(X).$$

Montrer qu'il existe une fonction Δ_n des variables $x_0, x_1, \dots, x_n$ telle qu'on ait :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_0) N_0(X) + \Delta_1(x_0, x_1) N_1(X) + \dots + \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n) N_n(X).$$

Enoncer le résultat ainsi démontré.

4°) Relations de récurrence entre les coefficients $\Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$

- a) En exploitant les résultats de la question précédente, montrer sans nouveaux calculs que :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_1) + \Delta_1(x_1, x_2)(X - x_1) + \dots + \Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_0) \prod_{i=1}^n (X - x_i).$$

- b) En comparant les deux expressions précédentes de P_n , démontrer les relations suivantes (on observera les coefficients de X^n et X^{n-1} dans P_n) :

$$\diamond \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_0).$$

$$\diamond \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

5°) Algorithme de calcul des coefficients $\Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$ et de $P_n(x)$

On constitue le tableau de nombres réels suivant, dont la première colonne est connue puisqu'on a pour tout réel $x \in I$ l'égalité $\Delta_0(x) = f(x)$:

Δ_0				
Δ_1	$\Delta_1(x_0, x_1)$			
Δ_2	$\Delta_1(x_1, x_2)$	$\Delta_2(x_0, x_1, x_2)$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
Δ_n	$\Delta_1(x_{n-1}, x_n)$	$\Delta_2(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	$\dots$	$\Delta_n(x_0, \dots, x_{n-1},$

- a) Ecrire un algorithme donnant les éléments $\Delta_1(x_{k-1}, x_k)$ de la seconde colonne ($k \leq n$).
 b) Ecrire plus généralement un algorithme donnant tous les éléments du tableau ci-dessus.
 Quel est le nombre d'opérations nécessaires au calcul des éléments de ce tableau?
 c) Pour tout réel x , on définit une suite de fonctions par $u_0(x) = \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$, puis :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u_k(x) = \Delta_{n-k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-k}) + (x - x_{n-k}) u_{k-1}(x).$$

Déterminer $u_n(x)$ en fonction de $P_n(x)$.

Quel est le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $P_n(x)$?

■ Partie II : Etude de l'erreur d'interpolation

Dans cette partie, on suppose de plus que la fonction f est de classe C^∞ sur $I = [a, b]$, et pour tout entier naturel n , on note $M_n = \sup \{|f^{(n)}(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

On se propose pour $n \geq 1$ de majorer $|f(x) - P_{n-1}(x)|$, puis son maximum lorsque x décrit I .

6°) Une majoration de l'erreur d'interpolation $|f(x) - P_{n-1}(x)|$

A tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in I \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, on associe la fonction suivante :

$$\forall t \in I, \quad \varphi_x(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - K_x \prod_{k=0}^{n-1} (t - x_k)$$

où K_x désigne la constante (dont on vérifiera l'existence et l'unicité) telle que $\varphi_x(x) = 0$.

a) Déterminer les valeurs $\varphi_x(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

En remarquant que $\varphi_x(x) = 0$, en déduire que φ_x' s'annule en n points au moins de I .

b) Etudier par récurrence sur k ($1 \leq k \leq n$) le nombre minimal de points de I en lesquels la dérivée $\varphi_x^{(k)}$ s'annule, et en déduire l'existence d'un réel $c_x \in I$ tel que $\varphi_x^{(n)}(c_x) = 0$.

c) En déduire qu'on a $f^{(n)}(c_x) - K_x n! = 0$.

d) En déduire la majoration suivante pour tout nombre réel x appartenant à $I = [a, b]$:

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k|.$$

On déduit de cette dernière inégalité la majoration suivante de l'erreur d'interpolation :

$$\max \{|f(x) - P_{n-1}(x)| \mid a \leq x \leq b\} \leq \frac{M_n}{n!} \max \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k| \mid a \leq x \leq b \right\}.$$

On s'intéresse désormais à un choix de $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ minimisant ce dernier maximum, et on désignera dans la suite par P un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $n \geq 1$ (on rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1).

7°) Une propriété des polynômes unitaires de degré n sur $[-1, 1]$

a) A l'aide de la relation trigonométrique $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta)$, montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme T_n tel qu'on ait, pour tout réel θ , la relation $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

On précisera $T_1(X)$, $T_2(X)$, $T_3(X)$, et on donnera $T_{n+1}(X)$ à l'aide de $T_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$.

b) Préciser le degré de T_n et son coefficient dominant.

Donner sous la forme $x = \cos(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$.

En déduire la factorisation de T_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Dans toute la suite, on désigne par t_n le polynôme défini par $t_n(X) = 2^{1-n} T_n(X)$ ($n \geq 1$).

Déterminer $\max \{|t_n(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\}$ et expliciter pour $n \geq 1$ les points $a_k = \cos(\alpha_k)$ avec $0 \leq \alpha_k \leq \pi$ et $0 \leq k \leq n$ en lesquels on a l'égalité $|t_n(a_k)| = 2^{1-n}$.

d) On suppose que le polynôme unitaire P , dont le degré est n , est distinct du polynôme t_n .

On se propose de montrer par l'absurde que $\max \{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{1-n}$ pour $n \geq 1$.

A cet effet, on suppose que $\max \{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} < 2^{1-n}$.

Examiner le signe de la différence $t_n(a_k) - P(a_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis en déduire que le polynôme $t_n - P$ admet au moins n racines réelles appartenant à $[-1, 1]$.

Etablir que le degré de $t_n - P$ est strictement inférieur à n et en déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad \max \{|P(x)| / -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{1-n}.$$

8°) *Un choix optimal des points d'interpolation pour P_{n-1}*

On désigne toujours par P un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

a) Etablir que $\max \{|P(x)| / a \leq x \leq b\} = \max \left\{ \left| P\left(\frac{a+b}{2} + s \frac{b-a}{2}\right) \right| / -1 \leq s \leq 1 \right\}$.

b) Etablir que le polynôme $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X \frac{b-a}{2}\right)$ est unitaire et en déduire que :

$$\max \{|P(x)| / a \leq x \leq b\} \geq 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Vérifier qu'il y a égalité lorsque $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X \frac{b-a}{2}\right) = t_n(X)$.

c) En revenant aux notations de la question 6°, montrer que :

$$\max \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k| / a \leq x \leq b \right\} \geq 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

d) Déduire de la question 7° la factorisation du polynôme t_n dans $\mathbb{R}[X]$.

On choisit pour $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ les points $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n} \pi\right)$ où $0 \leq k \leq n-1$.

A l'aide de la question 6°, vérifier qu'on a alors :

$$\max \{|f(x) - P_{n-1}(x)| / a \leq x \leq b\} \leq \frac{2 M_n}{n!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Montrer que cette dernière majoration est alors optimale pour une fonction f donnée.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

■ Partie I : Etude d'une suite de nombres réels

On étudie dans cette partie la suite réelle définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n} \quad \left(\text{et donc } u_1 = \frac{1}{2} \right).$$

1°) *Un algorithme de calcul de u_n*

- Simplifier le rapport u_{n+1} / u_n pour $n \geq 1$, puis préciser le sens de variation de $n \rightarrow u_n$.
- En déduire un algorithme de calcul des réels $u_1, u_2, \dots, u_N$ lorsque l'entier N est donné.
- On suppose donné un algorithme PGCD(a, b) renvoyant le PGCD de deux entiers a et b .
Comment modifier l'algorithme précédent afin d'obtenir $u_1, u_2, \dots, u_N$ sous la forme de fractions irréductibles?

2°) *Recherche d'un équivalent de u_n*

On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^{3/2} u_n$.

- Donner une expression simplifiée de $\varepsilon_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ pour $n \geq 1$.
En déduire un équivalent de ε_n quand n tend vers $+\infty$.
- Etablir que la série $\sum \varepsilon_n$ est convergente (on notera sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$).
En déduire que la suite $n \rightarrow \ln(v_n)$ converge vers un réel qu'on exprimera à l'aide de S , puis donner un équivalent de u_n en fonction de S et de n .

3°) *Recherche d'un encadrement de u_n*

On rappelle que l'intégrale de Wallis W_n est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer W_n en fonction de W_{n-2} pour $n \geq 2$.
(On pourra à cet effet écrire $\cos^n(t) = \cos(t) \cos^{n-1}(t)$).
- En déduire que la suite $n \rightarrow n W_n W_{n-1}$ est constante (on précisera cette constante), puis, en déterminant le sens de variation de la suite $n \rightarrow W_n$, en déduire que :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}.$$

- A l'aide de la relation exprimant W_{2n} en fonction de W_{2n-2} pour $n \geq 1$, déterminer l'expression de W_{2n} en fonction de n , puis en fonction de $(n+1) u_{n+1}$.
- En déduire un encadrement simple de u_n pour $n \geq 2$, puis donner un équivalent de u_n .
Quelle est la valeur de la constante S introduite à la question 2.b?

■ Partie II : Une extension du théorème de Weierstrass

On désigne ici par ϕ la solution définie sur $] -1, 1[$ du problème de Cauchy suivant :

$$2(1-x)y' + y = 1 \quad \text{et} \quad y(0) = 0.$$

4°) *Expression analytique de la solution ϕ*

- Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $2(1-x)y' + y = 1$ sur $] -1, 1[$.
- En déduire l'expression de l'unique solution ϕ du problème de Cauchy précédent.

5°) *Expression de ϕ sous forme d'une série entière*

- On considère la somme de la série entière suivante, de rayon de convergence $R > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n.$$

Etablir que S vérifie l'équation $2(1-x)y' + y = 1$ sur $] -R, R[$ avec la condition $S(0) = 0$ si et seulement si la suite des coefficients s_n vérifie les relations $s_0 = 0$, puis $s_n = \rho_n s_{n-1}$ pour $n \geq 1$, où ρ_n désigne un nombre rationnel qu'on exprimera en fonction de n .

- Inversement, on suppose la suite des coefficients s_n définie par les relations précédentes.
 - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum s_n x^n$.
 - Montrer que $s_n = u_n$, puis en déduire l'égalité suivante pour $-1 < x < 1$:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n.$$

- Montrer que cette série entière définissant ϕ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.
En déduire que l'égalité précédente reste valable sur $[-1, 1]$ et préciser $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

6°) *Une extension du théorème de Weierstrass*

On note alors $C([0, 1], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, qu'on munit dans la suite de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par : $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| / 0 \leq x \leq 1\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par e_k la fonction-polynôme définie sur $[0, 1]$ par $e_k(x) = x^k$.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x appartenant à $[0, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^n u_j (1 - x^2)^j.$$

Déterminer, pour $0 \leq x \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2k} f_n(x)$ où $k \in \mathbb{N}$.

- Etablir pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x appartenant à $[0, 1]$, la majoration suivante :

$$|x^{2k+1} - x^{2k} f_n(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_{2k+1} - e_{2k} f_n\|_\infty = 0$ et vérifier que $e_{2k} f_n \in \text{Vect}(e_{2k} / k \in \mathbb{N})$.

- On rappelle l'énoncé du *Théorème de Weierstrass* : le sous-espace $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_k / k \in \mathbb{N})$ des fonctions-polynômes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ est dense dans $C([0, 1], \mathbb{C})$ pour $\| \cdot \|_\infty$.
Déduire des résultats précédents la généralisation suivante du théorème de Weierstrass : le sous-espace $\mathcal{Q} = \text{Vect}(e_{2k} / k \in \mathbb{N})$ est dense dans $C([0, 1], \mathbb{C})$ pour $\| \cdot \|_\infty$.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on étudie un algorithme de calcul de la plus grande des valeurs propres de certaines matrices symétriques réelles et on teste celui-ci sur l'exemple des matrices M_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont l'élément situé en ligne i et colonne j est égal à $m_{ij} = \min(i, j)$.

Dans la suite, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et on convient d'identifier tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (c'est à dire tout n -uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) à la matrice-colonne de ses composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

On munit enfin $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et défini par $\langle x, y \rangle = {}^t x y$ (donc par $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$), et de la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$.

■ Partie I : Un algorithme de calcul de la plus grande valeur propre

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base canonique est symétrique réelle, et on suppose de plus qu'elle vérifie la propriété suivante $\mathcal{P}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad {}^t x M x > 0.$$

1°) *Quelques propriétés de l'endomorphisme f*

a) Pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'on a $\langle x, f(y) \rangle = {}^t x M y$.

En déduire la relation $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

b) On considère deux vecteurs propres x et y de f associés à deux valeurs propres λ et μ .

Etablir, si $\lambda \neq \mu$, que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

c) Justifier, à l'aide d'un théorème qu'on énoncera précisément, que la matrice M , et donc l'endomorphisme f , sont diagonalisables et en déduire que les sous-espaces propres de f sont supplémentaires et deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer enfin que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.

Dans la suite, on note $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres *distinctes* de f et on a donc :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id}).$$

On considère un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$, et on note $v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$ la décomposition de ce vecteur v sur ces sous-espaces propres supplémentaires et deux à deux orthogonaux.

2°) *Etude d'une suite de nombres réels $k \rightarrow \rho^{(k)}$*

a) Démontrer la formule suivante :

$$\|f(v)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \|v_i\|^2.$$

En déduire l'inégalité : $\lambda_1 \|v\| \leq \|f(v)\| \leq \lambda_p \|v\|$.

- b) Justifier la double inégalité suivante : $0 < \|f(v)\|^2 \leq \|v\| \|f^2(v)\|$.
- c) On définit une suite de vecteurs $k \rightarrow v^{(k)}$ et une suite de réels $k \rightarrow \rho^{(k)}$ par $v^{(0)} = \frac{v}{\|v\|}$, puis, pour tout entier naturel k par :

$$\rho^{(k)} = \|f(v^{(k)})\| \quad ; \quad v^{(k+1)} = \frac{f(v^{(k)})}{\|f(v^{(k)})\|}.$$

Montrer que la suite $k \rightarrow \rho^{(k)}$ est croissante et majorée par λ_p , puis qu'elle converge.

- d) On se place dans le cas particulier où $v \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$, où $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Exprimer $v^{(k)}$ en fonction de v , et en déduire dans ce cas $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho^{(k)}$.

- e) On se place dans le cas général où $v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$ est tel que $v_p \neq 0$.

Exprimer $v^{(k)}$ en fonction de k , de $v_1, v_2, \dots, v_p$ et de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho^{(k)}$.

3°) Mise en œuvre de l'algorithme précédent

- a) Ecrire un algorithme permettant le calcul des N premiers termes de la suite $k \rightarrow \rho^{(k)}$ lorsque la matrice M et le vecteur v sont donnés.
- b) On considère la matrice M_4 d'ordre 4 définie par :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer à l'aide de l'algorithme précédent des valeurs approchées des réels $\rho^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq 5$ dans les 4 cas suivants :

$$v = e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v = e_2 = (0, 1, 0, 0), \quad v = e_3 = (0, 0, 1, 0), \quad v = e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Qu'en conclure?

■ Partie II : Valeurs propres des matrices $M_n = (\min(i, j))$

Comme on l'a indiqué plus haut, la matrice M_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'élément m_{ij} est égal à $\min(i, j)$, plus petit des entiers i et j , et donc égale à :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

1°) Etude d'une matrice auxiliaire A_n

On considère l'endomorphisme a de $\mathbb{R}^n$ défini par les relations suivantes :

$$a(e_1) = e_1, \quad \dots, \quad a(e_k) = e_1 + e_2 + \dots + e_k, \quad \dots, \quad a(e_n) = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

- a) Ecrire la matrice A_n de l'endomorphisme a dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Vérifier que celle-ci est inversible.

- b) Exprimer $a^{-1}(e_1)$, et en formant $a(e_k) - a(e_{k-1})$ pour $2 \leq k \leq n$, exprimer $a^{-1}(e_k)$.

Ecrire la matrice A_n^{-1} de l'endomorphisme a^{-1} dans la base canonique $\mathcal{B}$.

2°) Inversibilité de la matrice M_n a) Calculer le produit $M_n A_n^{-1}$, puis exprimer M_n en fonction de A_n .b) Montrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, qu'on a ${}^t x M_n x = \|A_n x\|^2$.En déduire que la matrice symétrique réelle M_n vérifie l'hypothèse $\mathcal{P}$.c) Montrer que M_n est inversible, et exprimer M_n^{-1} en fonction de A_n^{-1} .

En déduire que :

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°) Valeurs propres de la matrice M_n^{-1} a) On considère un réel λ tel que $|2 - \lambda| > 2$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(M_n^{-1} - \lambda I_n)x = 0$.On suppose que i est un indice tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.En examinant la $i^{\text{ème}}$ ligne du système $(M_n^{-1} - \lambda I_n)x = 0$, parvenir à une contradiction.En déduire qu'on a $x = 0$ et que λ n'est pas valeur propre de M_n^{-1} .b) Justifier le caractère réel des valeurs propres de la matrice M_n^{-1} et à l'aide de la question précédente, établir que les valeurs propres de M_n^{-1} appartiennent au segment $[0, 4]$.c) Justifier, si λ est valeur propre de M_n^{-1} , qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 - 2 \cos(\theta)$.Montrer que $\lambda = 2 - 2 \cos(\theta)$ est valeur propre de M_n^{-1} si et seulement si le déterminant d'ordre n suivant est nul :

$$\Delta_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2 \cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 \cos(\theta) & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 \cos(\theta) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos(\theta) - 1 \end{vmatrix}.$$

d) Etablir la relation suivante pour tout entier $n \geq 3$:

$$\Delta_n(\theta) = 2 \cos(\theta) \Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta).$$

Exprimer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$ et montrer qu'en posant $\Delta_0(\theta) = 1$, la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 2$.e) On suppose $\theta = \pi$, de sorte qu'on a la relation : $\Delta_n(\pi) + 2 \Delta_{n-1}(\pi) + \Delta_{n-2}(\pi) = 0$.Calculer $\Delta_n(\pi)$ et en déduire que $\lambda = 4$ n'est pas valeur propre de M_n^{-1} .f) On suppose donc $0 \leq \theta < \pi$, de sorte que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ n'est pas nul. Montrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n(\theta) = \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

g) En déduire que les valeurs propres de M_n^{-1} sont les n nombres réels suivants :

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right) \quad \text{avec } 1 \leq k \leq n.$$

4°) *Valeurs propres de la matrice M_n*

- a) Etablir qu'il existe une matrice orthogonale P_n telle que $P_n^{-1} M_n^{-1} P_n = D_n$ où D_n est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
 - b) En déduire l'expression de $P_n^{-1} M_n P_n$ et les valeurs propres de la matrice M_n .
 - c) Quelle est la plus grande valeur propre de la matrice M_4 ?
Préciser sa valeur numérique et confronter celle-ci au résultat obtenu en I.3.b.
-

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

Dans la partie I de ce problème, on étudie l'intégrale de Wallis généralisée, définie par :

$$\forall x > -1, \quad W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt.$$

Dans la partie II, on relie cette fonction W à la fonction Gamma d'Euler.

■ Partie I : étude de la fonction W

1°) *Premières propriétés de la fonction W*

- a) Montrer que l'intégrale $W(x)$ est définie pour tout réel positif x .
- b) Préciser un équivalent simple de la fonction $t \rightarrow \sin^x(t)$ quand t tend vers 0.
En déduire pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $W(x)$ est définie.
- c) Déterminer le sens de variation de la fonction W sur $] -1, +\infty[$.
- d) Etablir que la fonction W est continue sur $\mathbb{R}_+$ (on citera précisément le théorème utilisé).

2°) *Première équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

- a) En écrivant $\sin^{x+2}(t) = \sin(t) \sin^{x+1}(t)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\forall x > -1, \quad (x+2) W(x+2) = (x+1) W(x).$$
- b) En déduire que la fonction W est également continue sur $] -1, +\infty[$.
- c) En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers -1 .

3°) *Deuxième équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

- a) Etablir que la fonction φ définie sur $] -1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (x+1) W(x+1) W(x)$ vérifie :

$$\forall x > -1, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- b) Etablir l'encadrement suivant pour tout réel $x \in]0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+2} \leq \frac{\varphi(n+x)}{n+1+x} \leq \frac{\varphi(n)}{n+1}.$$

En déduire un encadrement de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \in]0, 1]$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que la fonction φ est constante, et préciser φ .

- c) En déduire l'encadrement suivant pour $x > 0$:

$$\frac{\pi}{2(x+1)} \leq W^2(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4°) Application au calcul de l'intégrale de Gauss

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n}, \quad f_n(x) = 0 \quad \text{si } x \geq \sqrt{n}.$$

- a) En exploitant la concavité de la fonction $\ln$, montrer qu'on a $f_n(x) \leq e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$.
- b) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- c) Justifier l'égalité suivante (on citera précisément le théorème utilisé) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

- d) Exprimer l'intégrale de f_n sur $[0, +\infty[$ en fonction de n et de $W(2n+1)$.

Déduire de ces résultats la valeur de l'intégrale de la fonction $x \rightarrow e^{-x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

■ Partie II : Relation entre les fonctions W et Γ

La fonction Γ d'Euler est définie pour $t > 0$ par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

1°) Propriétés de la fonction Γ

- a) Etablir que l'intégrale $\Gamma(t)$ est définie pour $t > 0$.
- b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que $\Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$ pour $t > 0$.
- c) Pour tout entier naturel n , exprimer $\Gamma(n+1)$ en fonction de n .

2°) Relation entre les fonctions W et Γ

On considère deux réels strictement positifs t et R , et les parties du plan définies par :

$$\mathcal{P}(R) = \{(x, y) / 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\} ; \quad C(R) = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

- a) Etablir l'égalité suivante :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2} y^t dx dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

- b) Effectuer un passage en coordonnées polaires dans l'intégrale double ci-dessous, puis en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2} y^t dx dy = \frac{t}{4} \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) W(t).$$

- c) Comparer au sens de l'inclusion les parties $C(R)$, $\mathcal{P}(R)$, $C(R\sqrt{2})$, et en déduire que :

$$\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2} y^t dx dy \leq \iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2} y^t dx dy \leq \iint_{C(R\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2} y^t dx dy.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, déterminer une expression de $W(t)$ à l'aide de la fonction Γ .

3°) Une application à la fonction Γ

Etablir qu'on a, lorsque t tend vers $+\infty$, l'équivalence suivante : $\Gamma\left(t + \frac{1}{2}\right) \sim \sqrt{t} \Gamma(t)$.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) - a y(t) = f(t)$$

où a désigne un complexe non nul et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On se propose d'étudier certaines propriétés de ses solutions y (qui sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) en fonction des propriétés de a et f . Dans toute la suite, on convient de poser :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^{at} \int_0^t e^{-au} f(u) du.$$

1°) *Forme générale des solutions de (E)*

a) Montrer que l'équation (E) équivaut à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} (e^{-at} y(t)) = e^{-at} f(t).$$

b) En déduire alors :

- les solutions y de l'équation homogène (E_0) : $y'(t) - a y(t) = 0$.
- les solutions y de l'équation complète (E) : $y'(t) - a y(t) = f(t)$ à l'aide de la fonction F .

c) Etant donné un complexe y_0 , en déduire qu'il existe une et une seule solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$ et préciser celle-ci en fonction de y_0 et de F .

■ Partie I : Etude des solutions périodiques

2°) *Etude de deux exemples*

a) Montrer que si l'équation (E) a une solution 2π -périodique y , alors y' est 2π -périodique. En déduire que f est nécessairement 2π -périodique.

b) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - a y(t) = \cos(t)$ où a est réel. Vérifier qu'on a alors :

$$F(t) = \frac{a e^{at}}{1 + a^2} + \frac{\sin(t) - a \cos(t)}{1 + a^2}.$$

En déduire toutes les solutions de (E).

Parmi ces solutions, lesquelles sont 2π -périodiques?

c) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - i y(t) = \cos(t)$.

Vérifier qu'on a alors :

$$F(t) = \frac{1}{2} t e^{it} + \frac{1}{2} \sin(t).$$

En déduire toutes les solutions de (E).

Parmi ces solutions, lesquelles sont 2π -périodiques?

Dans la suite de cette partie I, on suppose la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique et le nombre complexe a n'appartenant pas à l'ensemble $i\mathbb{Z} = \{i k / k \in \mathbb{Z}\}$.

3°) *Etude des solutions périodiques de (E) lorsque f est périodique*

- a) Montrer que si $t \rightarrow y(t)$ est solution de l'équation (E), alors $t \rightarrow y(t + 2\pi)$ l'est aussi.
En déduire que la solution y est 2π -périodique si et seulement si $y(0) = y(2\pi)$.
- b) Montrer qu'on a $e^{2a\pi} = 1$ si et seulement si $a \in i\mathbb{Z}$ (on pourra poser $a = a_1 + ia_2$).
- c) En déduire finalement que l'équation (E) a une et une seule solution 2π -périodique y , qu'on exprimera à l'aide de la fonction F . Que permet de préciser la question 2.c)?

4°) *Développement en série de Fourier de la solution périodique de (E)*

- a) Pour toute fonction continue 2π -périodique $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inu} g(u) du.$$

Si g est de classe C^1 , exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g')$ en fonction de $c_n(g)$.

Dans la suite de cette question, on note toujours y l'unique solution 2π -périodique de (E).

- b) En remarquant qu'on a $c_n(y' - ay) = c_n(f)$, exprimer $c_n(y)$ en fonction de $c_n(f)$.
- c) Etablir à l'aide du théorème de Dirichlet (on en donnera l'énoncé) que la série de Fourier de y converge normalement vers y , puis exprimer y comme somme de sa série de Fourier (qu'on explicitera en fonction de a et des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de la fonction f).
- d) Retrouver alors le résultat de la question 2.b) en donnant la solution 2π -périodique y de l'équation $y'(t) - ay(t) = \cos(t)$ où a est réel.

■ Partie II : Etude des solutions exponentielles-polynômes

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est exponentielle-polynôme s'il existe un complexe b et un polynôme P (supposé non nul) tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = P(t) e^{bt}$.

5°) *Etude de deux exemples*

- a) On suppose que (E) a une solution exponentielle-polynôme définie par $y(t) = P(t) e^{bt}$.
Montrer que f est alors exponentielle-polynôme de la même forme.
- b) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2 e^{-t}$.
Calculer $F(t)$ et préciser les éventuelles solutions exponentielles-polynômes de (E).
- c) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2 e^t$.
Calculer $F(t)$ et préciser les éventuelles solutions exponentielles-polynômes de (E).

6°) *Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_q[X]$*

On désigne par c un complexe, par q un entier naturel, par $\mathbb{C}_q[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q , par Id (identité) et D (dérivation) les deux endomorphismes de $\mathbb{C}_q[X]$ qui associent à un polynôme $P \in \mathbb{C}_q[X]$ les polynômes $\text{Id}(P) = P$ et $D(P) = P'$.

- a) Expliciter, selon les valeurs de c , le noyau de l'endomorphisme $\varphi = D + c \text{Id}$.
En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme φ est bijectif.
- b) Préciser le plus petit entier n tel que $D^n = 0$, c'est à dire : $\forall P \in \mathbb{C}_q[X], D^n(P) = 0$.

En supposant le complexe c non nul, expliciter les produits de composition suivants :

$$(D + c \text{Id}) \circ \left(\sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k \circ (D + c \text{Id}).$$

Qu'en déduit-on?

- c) Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}_q[X]$, on considère l'équation $P' + cP = Q$ avec $c \neq 0$.
Montrer qu'une éventuelle solution polynôme P de cette équation appartient à $\mathbb{C}_q[X]$, et expliciter celle-ci en fonction de Q et de ses dérivés.

7°) *Etude des solutions exponentielles-polynômes de (E)*

On suppose dans cette question que la fonction f est exponentielle-polynôme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{bt} Q(t)$$

où b désigne un nombre complexe et Q un polynôme complexe de degré q .

- a) On suppose $a \neq b$ et on pose $y(t) = e^{bt} P(t)$ où P est un polynôme complexe.
- Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{C}_q[X]$ tel que y soit solution de (E).
- Préciser ce polynôme P en fonction du polynôme Q et de ses dérivés successifs.
b) On suppose $a = b$ et on pose $y(t) = e^{at} P(t)$ où P est un polynôme complexe.
Que peut-on dire des polynômes P tels que la fonction y soit solution de (E)?
c) Retrouver ainsi les résultats des questions 5.b) et 5.c).

■ **Partie III : Etude des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$**

8°) *Comportement des solutions sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $a < 0$*

On suppose dans cette question $a < 0$ et la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.

On notera alors $\|f\|_+ = \sup \{|f(t)| / t \geq 0\}$.

- a) Montrer que la fonction F est bornée par $\frac{1}{|a|} \|f\|_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- b) On suppose que la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Etablir, pour tout réel $\varepsilon > 0$, qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad |F(t)| \leq e^{at} \int_0^A e^{-au} |f(u)| du + \varepsilon |a| e^{-at} \int_A^t e^{-au} du.$$

Montrer que chacun des deux termes de cette somme peut être rendu inférieur à ε pour t assez grand, et en déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

En déduire la limite de toutes les solutions de (E) quand t tend vers $+\infty$.

- c) On suppose que la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tend vers L en $+\infty$.

En écrivant que $f(t) = L + (f(t) - L)$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

En déduire la limite de toutes les solutions de (E) quand t tend vers $+\infty$.

9°) *Comportement des solutions sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $a > 0$*

On suppose dans cette question $a > 0$ et la fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- a) Justifier l'existence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-au} du.$$

- b) On peut alors définir une fonction G par la formule suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = -e^{at} \int_t^{+\infty} f(u) e^{-au} du.$$

Vérifier que G est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E).

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

Dans ce problème, on considère un entier naturel n , qu'on suppose supérieur ou égal à 2, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées M d'ordre n à coefficients complexes $m_{i,j}$, et le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué par les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on rappelle que la *classe de similitude* de A désigne l'ensemble $C(A)$ des matrices semblables à la matrice A , c'est à dire :

$$C(A) = \{P^{-1} A P \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

■ Partie I : Généralités sur les classes de similitude

1°) *Premières propriétés de $C(A)$*

a) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifier que si $C(M) = C(A)$, alors M appartient à $C(A)$.

Démontrer inversement que si M appartient à $C(A)$, alors $C(M) = C(A)$.

b) Déterminer toutes les matrices de $C(A)$ lorsque $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

c) On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1. Etablir que si $C(A) = \{A\}$, alors A commute avec toutes les matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, en particulier avec les matrices de la forme $I_n + E_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, et donc avec les matrices $E_{i,j}$.

Qu'en déduit-on pour la matrice A ?

2°) *Quelques propriétés communes aux matrices de la classe de similitude $C(A)$*

On désigne par $\text{Tr}(M)$ et $\text{Det}(M)$ la trace et le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Démontrer l'égalité $\text{Tr}(A B) = \text{Tr}(B A)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En déduire, pour toute matrice $M \in C(A)$, qu'on a $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(A)$.

b) A l'aide des propriétés usuelles du déterminant, démontrer, pour toute matrice $M \in C(A)$, qu'on a $\text{Det}(M) = \text{Det}(A)$, et plus généralement $\text{Det}(M - z I_n) = \text{Det}(A - z I_n)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
En déduire, pour toute matrice $M \in C(A)$, que M a les mêmes valeurs propres que A avec les mêmes ordres de multiplicité.

3°) *Matrices triangulaires ou diagonales de la classe de similitude $C(A)$*

On désigne désormais par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes ou non de A .

a) En s'appuyant sur un théorème de cours dont on précisera l'énoncé, établir qu'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ayant la forme suivante, telle que $C(A) = C(T)$:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) Etablir que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice diagonale D , dont on précisera la forme, telle que $C(A) = C(D)$.

- c) Dans cette question, on donne deux nombres complexes *distincts* a et b avec $b \neq 0$.
 Etudier l'existence, et expliciter éventuellement, des matrices diagonales D_i dans $C(A_i)$ dans les trois cas suivants (où $i = 1, 2$ ou 3) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

■ Partie II : Condition pour que la classe $C(A)$ soit bornée

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme usuelle définie pour $M = (m_{i,j})$ par :

$$\|M\|_\infty = \max \{|m_{i,j}| / 1 \leq i, j \leq n\}.$$

On étudie le caractère borné de la classe de similitude $C(A) = C(T)$ (où T désigne la matrice triangulaire introduite dans la question 3°), ce qui revient à étudier s'il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\forall M \in C(A), \quad \|M\|_\infty \leq \rho.$$

4°) Une condition pour que $C(A)$ soit bornée lorsque $n = 2$

On suppose dans toute cette question que l'entier n est égal à 2 et on pose :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On désigne dans la suite par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

- a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, écrire la matrice de passage P_k de la base (e_1, e_2) à la base $(\frac{1}{k} e_1, e_2)$.

Expliciter la matrice inverse P_k^{-1} et le produit $P_k^{-1} T P_k$.

- b) En déduire, si $C(A)$ est bornée, que le coefficient t est nécessairement nul.

- c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, écrire la matrice de passage Q_k de la base (e_1, e_2) à la base $(e_1 + e_2, \frac{1}{k} e_2)$.

Expliciter la matrice inverse Q_k^{-1} et le produit $Q_k^{-1} T Q_k$ lorsque $t = 0$.

- d) En déduire à quelle condition sur T la classe de similitude $C(A)$ est bornée.

Expliciter alors A .

5°) Une condition pour que $C(A)$ soit bornée dans le cas général

On revient au cas général, et T est la matrice triangulaire introduite dans la question 3°.

On désigne dans la suite par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

- a) On considère un entier i entre 1 et n et un entier quelconque $k \in \mathbb{N}^*$.

Ecrire la matrice de passage P_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ dont les vecteurs sont définis par $e_i' = \frac{1}{k} e_i$ et $e_p' = e_p$ pour $p \neq i$.

Expliciter la matrice inverse P_k^{-1} et le produit $P_k^{-1} T P_k$.

- b) En déduire, si $C(A)$ est bornée, que la matrice T est nécessairement diagonale.

- c) On considère deux entiers distincts i et j entre 1 et n et un entier quelconque $k \in \mathbb{N}^*$.

Ecrire la matrice de passage Q_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ dont les vecteurs sont définis par $e_i' = e_i + e_j$, $e_j' = \frac{1}{k} e_j$ et $e_p' = e_p$ pour $p \neq i, p \neq j$.

Expliciter la matrice inverse Q_k^{-1} et le produit $Q_k^{-1} T Q_k$ lorsque T est diagonale.

- d) En déduire à quelle condition sur T la classe de similitude $C(A)$ est bornée.

En déduire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

- e) Préciser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est compacte.

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

L'objet de ce problème est d'obtenir quelques résultats à propos de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(g(x)).$$

La fonction g , qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est ici donnée et on cherche l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation précédente.

Dans la partie I, on traite le cas où $g(x) = g_{a,b}(x) = ax + b$ avec a, b réels. Dans la partie II, on démontre, sous certaines hypothèses, que $\mathcal{E}(g)$ peut se réduire aux fonctions constantes. Enfin, dans la partie III, on traite les cas où $g(x) = x^2$ et où $g(x) = e^x$.

■ Partie I : Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax + b)$

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ distinct de $(1, 0)$, on pose ici : $\forall x \in \mathbb{R}, g_{a,b}(x) = ax + b$.

On se propose alors de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(g_{a,b}(x))$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b)$.

1°) *Etude du cas particulier $|a| = 1$*

a) On suppose que $a = 1$ et $b \neq 0$.

- A quelle condition sur le réel ω les fonctions $c : x \rightarrow \cos(\omega x)$ et $s : x \rightarrow \sin(\omega x)$ appartiennent-elles à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{1,b})$?
- Quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{1,b})$?

b) On suppose que $a = -1$.

- Préciser quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{-1,0})$?
- Etablir l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x + b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right).$$

- En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{-1,b})$.

2°) *Etude du cas $|a| < 1$*

On considère ici la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel quelconque donné, et définie ensuite par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$ où le réel a vérifie $|a| < 1$.

a) Montrer que si la suite (x_n) converge vers un nombre réel L , alors on a $L = b/(1 - a)$.

b) Pour tout entier naturel n , exprimer $x_{n+1} - L$ en fonction de $x_n - L$, puis en déduire :

- l'expression de x_n en fonction de a^n , x et L .
- la convergence et la limite de la suite (x_n) .

c) Vérifier, si f appartient à $\mathcal{E}(g_{a,b})$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(L)$.

d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| < 1$.

3°) *Etude du cas $|a| > 1$*

a) Etablir (si $a \neq 0$) l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax + b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

b) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ lorsque $|a| > 1$.

■ Partie II : Deux cas où les solutions de $f(x) = f(g(x))$ sont constantes

4°) *Etude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$*

On suppose ici que la fonction g est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H})$: il existe un nombre réel positif $K < 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \leq K$.

a) Etablir, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, qu'on a pour tout réel x :

$$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$

b) En déduire les limites de la fonction $x \rightarrow g(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

c) Etudier enfin le sens de variation de la fonction $x \rightarrow g(x) - x$ et en déduire qu'il existe un unique point fixe de g , c'est à dire un unique nombre réel L tel que $g(L) = L$.

5°) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$*

On garde les hypothèses et les notations de la question précédente (on a donc $g(L) = L$), et on considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où $x \in \mathbb{R}$, et définie ensuite par $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n , l'inégalité $|x_{n+1} - L| \leq K|x_n - L|$.

En déduire que la suite (x_n) converge vers L .

b) Etablir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire, si $f \in \mathcal{E}(g)$, qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(L)$.

c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$.

6°) *Recherche de fonctions vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H})$*

Pour obtenir des fonctions g de classe C^1 qui vérifient l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on recherche ici les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 dont la dérivée g' est la restriction à l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une fonction S développable en série entière sur $\mathbb{C}$ (de rayon de convergence $R = +\infty$), avec $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$, et bornée sur $\mathbb{C}$ par un réel $K < 1$ ($\forall z \in \mathbb{C}, |S(z)| \leq K$).

a) Pour tout entier naturel n et tout nombre réel positif r , montrer la convergence normale de la série de fonctions suivante lorsque sa variable réelle t décrit le segment $[0, 2\pi]$:

$$S(re^{it})e^{-int} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{(k-n)it}.$$

b) Pour tout couple $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{(k-n)it} dt$ en distinguant le cas où $k = n$.

c) Montrer alors, en citant précisément le théorème utilisé et en vérifiant ses hypothèses, qu'on a pour tout entier naturel n et tout nombre réel positif r :

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} S(re^{it}) dt = 2\pi a_n r^n.$$

d) En déduire, si $|S|$ est bornée par $K < 1$, qu'on a $|a_n| \leq \frac{K}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$,

puis en faisant tendre r vers $+\infty$, montrer que S est constante, égale à a_0 avec $|a_0| < 1$.

Montrer qu'on retrouve ainsi les fonctions $g_{a,b}$ avec $|a| < 1$ étudiées à la question I.2°.

7°) Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq K > 1$

On suppose ici que la fonction g est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}')$: il existe un nombre réel $K > 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| \geq K$.

a) Montrer que g' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, et qu'on a nécessairement :

- soit $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq +K$, et g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de $-\infty$ à $+\infty$.
- soit $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \leq -K$, et g est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ de $+\infty$ à $-\infty$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} , définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exprimer $(g^{-1})'(x)$, et montrer que $|(g^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{K}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}(g^{-1})$, et en déduire $\mathcal{E}(g)$ à l'aide de 5°.

■ Partie III : Les fonctions continues vérifiant $f(x) = f(x^2)$ et $f(x) = f(e^x)$

8°) Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$

On suppose dans cette question que $g(x) = x^2$, de sorte que $\mathcal{E}(g)$ désigne donc l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$.

On considère la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel strictement positif donné, et définie ensuite par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

a) Pour tout entier naturel n , vérifier que $x_n = x^{1/2^n}$.

En déduire la convergence de la suite (x_n) , et préciser alors sa limite.

b) Etablir, si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $g(x) = x^2$.

Montrer qu'on a ainsi le même résultat qu'aux questions 5 et 7 sans que les hypothèses $(\mathcal{H})$ ou $(\mathcal{H}')$ ne soient vérifiées : celles-ci sont donc suffisantes, mais pas nécessaires.

9°) Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$

Dans cette dernière partie, on cherche des fonctions non constantes f appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$, qui est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(e^x)$.

a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, vérifier que $f(0) = f(1)$.

b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$ et si $x < 0$, vérifier que $f(x) = f(e^x)$ où $e^x \in]0, 1]$.

c) On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$, puis $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Etablir que $x_{n+1} \geq x_n + 1$, puis montrer que (x_n) croît strictement vers $+\infty$.
- Etablir que la fonction logarithme induit une bijection de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ sur $]x_n, x_{n+1}]$.
- Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, en déduire que : $\forall x \in]x_{n+1}, x_{n+2}], f(x) = f(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]x_n, x_{n+1}]$.

d) Etant donnée une fonction continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition $\varphi(0) = \varphi(1)$, montrer qu'il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0, 1]$.
En déduire l'ensemble $\mathcal{E}(\exp)$.

E.P.I.T.A.

Epreuve optionnelle de mathématiques (2 h)

L'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et il est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, qui est alors orthonormale directe. On conviendra d'identifier tout vecteur $v = x e_1 + y e_2 + z e_3$ de $\mathbb{R}^3$ à la matrice-colonne de ses composantes x, y, z dans la base $\mathcal{B}$, et on donne pour toute la suite :

- un vecteur unitaire $u = p e_1 + q e_2 + r e_3$, de sorte que $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = p^2 + q^2 + r^2 = 1$.
- un nombre réel ω .

On désigne enfin par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice-identité d'ordre 3.

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme $f : v \longrightarrow \omega u \wedge v$

On étudie dans cette partie l'endomorphisme f associant à tout vecteur $v = x e_1 + y e_2 + z e_3$ de $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel $f(v) = \omega u \wedge v$.

1°) *Matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$*

- Donner en fonction de ω, p, q, r et x, y, z les composantes du vecteur $f(v) = \omega u \wedge v$.
- En déduire que la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega r & \omega q \\ \omega r & 0 & -\omega p \\ -\omega q & \omega p & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le polynôme caractéristique de f .
- Expliciter, si $\omega \neq 0$, la valeur propre réelle de f et le sous-espace propre associé.

2°) *Etude de l'endomorphisme f^2*

On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout vecteur v par : $p(v) = v - \langle u, v \rangle u$.

- Calculer $p \circ p(v)$, puis déterminer $p(u)$ et $p(v)$ dans le cas où v est orthogonal à u .
En déduire la nature géométrique de l'endomorphisme p .
- Ecrire la matrice P de l'endomorphisme p dans la base canonique $\mathcal{B}$.
- Démontrer que $M^2 = -\omega^2 P$, puis exprimer $f^2(v)$ en fonction de $p(v)$.
Expliquer comment on obtient géométriquement $f^2(v)$ à partir du vecteur v .

3°) *Calcul des puissances de l'endomorphisme f*

- Montrer que $M^3 = -\omega^2 M$, puis exprimer M^4 en fonction de M^2 .
- En déduire M^{2n+1} en fonction de M pour $n \geq 0$ et M^{2n} en fonction de M^2 pour $n \geq 1$.

4°) *Calcul de l'exponentielle $\exp(f)$ de l'endomorphisme f*

- Donner la somme et le rayon de convergence des séries entières suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

b) En déduire la somme des séries entières suivantes pour $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

c) En déduire des réels $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ dépendant de ω tels qu'on ait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha(\omega) M \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \beta(\omega) M^2.$$

On définit l'exponentielle de l'endomorphisme f et l'exponentielle de sa matrice carrée M (et $\exp(M)$ est alors la matrice de $\exp(f)$ dans la base $\mathcal{B}$) par les formules suivantes :

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} \quad ; \quad \exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

d) Déduire des résultats précédents l'expression de $\exp(M)$ en fonction de ω , I_3 , M et M^2 (on pourra vérifier, lorsque $\omega = 0$, qu'on obtient $M = 0$ et $\exp(M) = I_3$), puis en déduire l'expression de $\exp(f)$ en fonction de ω , Id , f et f^2 .

■ Partie II : Etude de l'endomorphisme $\exp(f)$

Dans cette partie II, on considère l'endomorphisme g défini par la formule suivante, où f est l'endomorphisme introduit dans la partie I :

$$g = \text{Id} + \frac{\sin(\omega)}{\omega} f + \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2} f^2.$$

5°) Nature géométrique de l'endomorphisme g

Puisque le vecteur u est unitaire, il est possible de déterminer des vecteurs u_1 et u_2 tels que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u)$ forme une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

a) Préciser alors $f(u_1)$ et $f(u_2)$, $f^2(u_1)$ et $f^2(u_2)$, $g(u_1)$, $g(u_2)$ et $g(u)$.

b) Ecrire alors la matrice G de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{U}$.

En déduire la nature géométrique de l'endomorphisme g en fonction de ω et u .

c) Inversement, pour toute rotation r de $\mathbb{R}^3$, démontrer qu'il existe un vecteur unitaire u et un nombre réel ω tel que $r = \exp(f)$ où f est l'endomorphisme défini par $f(v) = \omega u \wedge v$.

6°) Une généralisation à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

a) Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow {}^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et continue.

b) On considère une matrice antisymétrique M , donc une matrice telle que ${}^t M = -M$.

Montrer successivement les deux relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad {}^t \left(\sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-M)^k}{k!} \quad ; \quad {}^t (\exp(M)) = \exp(-M).$$

c) On rappelle la propriété suivante : pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A B = B A \quad \implies \quad \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

En déduire, si la matrice M est antisymétrique, que $\exp(M)$ est orthogonale directe.

En quoi ce résultat généralise-t-il celui obtenu à la question 5.b?

E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2, par $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on fait les conventions suivantes :

- on identifie tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et la matrice-colonne de ses composantes $x_1, \dots, x_n$, et on définit la norme de ce vecteur x par :

$$\|x\|_\infty = \max(|x_i| / 1 \leq i \leq n).$$

En particulier, on note v_1 le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

- on identifie tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée dans la base canonique, et on définit la norme de cette matrice $A = (a_{ij})$ par :

$$\|A\|_\infty = \max(|a_{ij}| / 1 \leq i, j \leq n).$$

On notera qu'une suite $k \rightarrow A_k = (a_{ij}^{(k)})$ de matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge donc vers une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $k \rightarrow \|A_k - A\|_\infty$ tend vers 0, donc si et seulement si les n^2 suites $k \rightarrow a_{ij}^{(k)}$ des coefficients des matrices A_k convergent respectivement vers les n^2 coefficients a_{ij} de la matrice A .

Enfin, on désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices dites *stochastiques* d'ordre n , c'est à dire l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- 1) les n^2 coefficients m_{ij} de la matrice M sont des nombres réels positifs.
- 2) la somme des éléments de chacune des n lignes de la matrice M vaut 1 :

$$\forall i \in [1, n], \quad m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{in} = 1.$$

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important, en particulier en calcul des probabilités comme le montre l'exemple traité dans la partie I. Dans la partie II, qui est indépendante, on étudie plus généralement la suite des puissances d'une matrice stochastique $M \in \mathcal{S}_n$.

■ Partie I : une intervention des matrices stochastiques en probabilités

On considère un combat entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsqu'un tireur est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- AB_n : "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés".
- A_n : "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul A n'est pas encore éliminé".
- B_n : "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul B n'est pas encore éliminé".
- $\emptyset_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, les deux tireurs sont éliminés".

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n la matrice-ligne à 4 colonnes dont les éléments successifs sont les probabilités des 4 événements AB_n, A_n, B_n, Φ_n :

$$E_n = (\mathbb{P}(AB_n), \mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(\Phi_n)).$$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on convient donc de poser :

$$E_0 = (\mathbb{P}(AB_0), \mathbb{P}(A_0), \mathbb{P}(B_0), \mathbb{P}(\Phi_0)) = (1, 0, 0, 0).$$

1°) *Calculs de probabilités conditionnelles*

- Vérifier que $\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1}) = \frac{2}{9}$ (on justifiera cette réponse).
- Déterminer (en le justifiant) $\mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{AB_n}(\Phi_{n+1})$.
- Rappeler la formule des probabilités totales, puis en l'appliquant à un système complet d'événements correctement choisi, expliciter une matrice carrée M d'ordre 4 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = E_n M.$$

Vérifier que la matrice M ainsi obtenue est stochastique d'ordre 4, et que $E_n = E_0 M^n$.

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

- Préciser les valeurs propres de la matrice M avec leurs ordres de multiplicité.
- Etablir que la matrice M est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de M .
- On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x, y, z pour que les vecteurs-colonnes de P soient des vecteurs propres de M .

- Vérifier que P est inversible, préciser la matrice $D = P^{-1} M P$ et expliciter P^{-1} .

3°) *Probabilités pour que A ou B remportent le combat*

- Expliciter la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \rightarrow D^n$.
Exprimer M^n en fonction de D^n , et expliciter la limite de la suite matricielle $n \rightarrow M^n$.
- En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \rightarrow E_n$, puis préciser les probabilités pour que A ou B remportent le combat.

4°) *Durée moyenne du combat*

Soit T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat.

- Calculer la probabilité $\mathbb{P}(T = 1)$.
- Pour tout entier naturel n , comparer les événements $AB_1 \cap AB_2 \cap \dots \cap AB_n$ et $T > n$.
En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T > n)$, puis vérifier que $\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$.
- Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$ et l'espérance de la variable aléatoire T .

■ Partie II : étude des puissances des matrices stochastiques

Dans toute cette partie, on désigne par M une matrice stochastique d'ordre n et on se propose d'étudier la convergence de la suite géométrique $k \rightarrow M^k$, et plus généralement de la suite

de ses moyennes de Cesàro $k \rightarrow C_k$, définies par $C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \dots + M^k}{k+1}$.

5°) Premiers résultats de convergence

- a) Etablir que l'ensemble S_n des matrices stochastiques est stable par produit.
- b) Etablir que la limite éventuelle d'une suite de matrices stochastiques est stochastique.
- c) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L , que L est une matrice de projection.

(On pourra à cet effet déterminer de deux manières la limite de la suite (M^{2^k})).

- d) Démontrer, si la suite (M^k) converge vers L , que la suite (C_k) converge aussi vers L .

6°) L'espace $\mathbb{C}^n$ est somme directe de $\text{Ker}(M - I_n)$ et de $\text{Im}(M - I_n)$

- a) Déterminer Mv_1 et en déduire que 1 est valeur propre de M .

- b) Etablir l'inégalité $\|Mx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$.

En déduire que toute valeur propre λ de M est de module inférieur ou égal à 1.

Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?

Celles-ci peuvent-elles être réalisées ?

- c) On considère un vecteur $y = Mx - x$ appartenant à $\text{Im}(M - I_n)$.

Etablir, si de plus $y \in \text{Ker}(M - I_n)$, que $M^k x = ky + x$, puis que : $\forall k \in \mathbb{N}, \|y\|_\infty \leq \frac{2}{k} \|x\|_\infty$.

- d) En déduire que y est nul, puis que : $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(M - I_n) \oplus \text{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite du problème, on convient de désigner par P la matrice du projecteur sur le sous-espace $\text{Ker}(M - I_n)$ dans la direction de son supplémentaire $\text{Im}(M - I_n)$.

7°) Etude de la convergence de la suite $k \rightarrow C_k$

- a) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe $\mathbb{C}^n = \text{Ker}(M - I_n) \oplus \text{Im}(M - I_n)$ en posant $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = Px \in \text{Ker}(M - I_n)$ et $x_2 = Mz - z \in \text{Im}(M - I_n)$.

Donner l'expression de $C_k x$ et montrer que $\|C_k x - Px\|_\infty \leq \frac{2\|z\|_\infty}{k+1}$.

- b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} C_k x = Px$, puis que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} C_k = P$.

- c) En déduire la limite de la suite (M^k) lorsque celle-ci est convergente.

8°) Etude de la convergence de la suite $k \rightarrow M^k$

On suppose la matrice M diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : pour $2 \leq i \leq p$, on a $|\lambda_i| < 1$.

- a) Etablir, si x est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ distincte de 1, qu'on a l'égalité : $(\lambda - 1)x = (M - I_n)x$.

En déduire, si λ est une valeur propre distincte de 1, que : $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Im}(M - I_n)$.

- b) Etablir l'inclusion : $\text{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_n) \subset \text{Im}(M - I_n)$, et montrer qu'on a l'égalité : $\text{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_n) = \text{Im}(M - I_n)$.

- c) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe des sous-espaces propres de M en posant $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ avec $x_i \in \text{Ker}(M - \lambda_i I_n)$ pour $1 \leq i \leq p$.

Montrer que $x_1 = Px$, exprimer $M^k x - Px$ à l'aide de k , de $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, de $x_2, \dots, x_p$, puis en déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k x = Px$, puis que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = P$.

- d) Donner enfin l'exemple d'une matrice stochastique M telle que la suite $k \rightarrow M^k$ diverge.

E.P.I.T.A. 2015

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction u_n sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On se propose dans ce problème d'étudier quelques propriétés de la somme de la série de fonctions définie (lorsqu'elle converge) par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right).$$

PARTIE I : préliminaires sur les séries de Riemann

1°) *Etude de la série de Riemann pour $x = 1$*

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

b) En posant $H_p = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}$ pour tout entier $p \geq 1$, en déduire que :

$$H_p - 1 \leq \int_1^p \frac{dt}{t} \leq H_p - \frac{1}{p}.$$

c) Etablir l'encadrement $\ln(p) \leq H_p \leq \ln(p) + 1$, puis montrer que la suite $p \rightarrow H_p - \ln(p)$ admet une limite finie γ (c'est la constante d'Euler, approximativement égale à 0,577...).

Ainsi donc, on a l'égalité $H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = \ln(p) + \gamma + o(1)$ lorsque l'entier p tend vers $+\infty$.

2°) *Etude de la série de Riemann pour $x > 1$*

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 1$:

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge pour tout réel $x > 1$,

Dans la suite, on conviendra donc de poser : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour tout réel $x > 1$.

c) Etablir que $0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$ pour $x > 1$, et en déduire que $1 \leq \zeta(x) \leq 2$ pour $x \geq 2$.

PARTIE II : Etude de la fonction F

3°) *Convergence de la série définissant F*

a) Montrer que la série définissant F converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$.

b) Etudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction u_n sur $I =]-1, +\infty[$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, 0]$ où $-1 < a \leq 0$, sur $[0, b]$ où $b \geq 0$, et plus généralement sur tout segment $[a, b]$ où $-1 < a \leq 0 \leq b$.

d) Etablir que F est continue sur $I =]-1, +\infty[$.

4°) *Equation fonctionnelle vérifiée par F*

a) Démontrer qu'on a pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in I =]-1, +\infty[$:

$$\sum_{n=1}^p u_n(x+1) - \sum_{n=1}^p u_n(x) = \ln(x+1) + H_p - \ln(x+p+1).$$

b) En déduire qu'on a : $F(x+1) - F(x) = \ln(1+x) + \gamma$ pour tout réel $x \in I =]-1, +\infty[$.

c) En déduire la limite et un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers -1 .

d) Pour tout entier naturel m , vérifier que $F(m) = \ln(m!) + m\gamma$.

5°) *Convergence de la série-dérivée de F*

a) Montrer que la série-dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'$ converge simplement sur $I =]-1, +\infty[$.

b) Montrer qu'elle converge normalement sur tout segment $[a, b]$ où $-1 < a \leq 0 \leq b$.

c) Etablir que F est de classe C^1 sur I et préciser $F'(x)$ sous forme d'une série.

d) Préciser $F'(0)$ et vérifier que $F'(1) = 1$.

6°) *Etude de F au voisinage de $+\infty$*

a) Vérifier que $F(x) \geq x - \ln(1+x)$ pour tout réel $x \in I =]-1, +\infty[$.

En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Pour tout réel $x > 0$, étudier l'existence et la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x \, dt}{t(t+x)}$.

c) Justifier l'encadrement suivant pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$:

$$\frac{x}{(n+1)(n+1+x)} \leq \int_n^{n+1} \frac{x \, dt}{t(t+x)} \leq \frac{x}{n(n+x)},$$

puis déterminer un encadrement et un équivalent de $F'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d) En déduire par intégration que $F(x) \sim x \ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

7°) *La fonction F est de classe C^∞ sur I*

a) Démontrer par récurrence sur $k \geq 2$ que F est de classe C^k sur I et qu'on a :

$$\forall x > -1, \quad F^{(k)}(x) = (-1)^k (k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

b) Préciser $F(0)$ et $F'(0)$, puis exprimer $F^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k)$ pour $k \geq 2$.

c) A l'aide des résultats précédents, donner l'allure de la fonction F sur $I =]-1, +\infty[$.

8°) *Convergence de la série de Taylor de F vers F*

a) Expliciter alors la série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de la fonction F .

Etablir, pour tout entier $k \geq 2$ et tout réel x , l'inégalité $\frac{1}{k} |x|^k \leq \left| \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{2}{k} |x|^k$.

En déduire le rayon de convergence R de la série de Taylor de F .

b) Donner les développements en série entière et les rayons de convergence des fonctions :

$$u(x) = \ln(1+x) \quad ; \quad v(x) = x - \ln(1+x).$$

c) En déduire l'égalité suivante pour $-1 < x < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k.$$

(On citera précisément le théorème utilisé et on vérifiera avec soin ses hypothèses).



CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 3 Heures

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 1, et on considère, sous réserve d'existence, la suite des intégrales I_n définies par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt.$$

A cet effet, on calcule dans la partie I une intégrale auxiliaire, ce qui permet d'obtenir dans la partie II un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Enfin, dans la partie III (qui est indépendante des précédentes), on propose une méthode de calcul de l'intégrale I_2 .

■ PARTIE I : Etude d'une intégrale auxiliaire

On considère dans cette partie la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du.$$

1°) *Etude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \frac{1 - \cos(u)}{u^2}.$$

- a) Etablir que f est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f(u) \leq 2/u^2$ pour $u > 0$.
- b) Etablir que f admet une limite l (dont on précisera la valeur) lorsque u tend vers 0.
On posera $f(0) = l$, et on notera encore f ce prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$.
- c) En déduire que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$ est convergente.
- d) En déduire que l'intégrale $L(x)$ est convergente pour tout réel positif x .

2°) *Propriétés de la fonction L*

- a) A l'aide d'un théorème dont on rappellera précisément l'énoncé, établir que la fonction L est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Vérifier l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$, et en déduire que : $\forall u \geq 0, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$.
En déduire que : $\forall x > 0, 0 \leq L(x) \leq \frac{1}{2x}$, et préciser la limite de L en $+\infty$.
- c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier les majorations suivantes pour tout $x \geq \varepsilon$ et tout $u > 0$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (f(u) e^{-xu}) \right| \leq \frac{1}{2} u e^{-\varepsilon u} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(u) e^{-xu}) \right| \leq \frac{1}{2} u^2 e^{-\varepsilon u}.$$

- d) A l'aide d'un théorème dont on rappellera précisément l'énoncé, établir que la fonction L est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser $L''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3°) Expression de $L(x)$ sans symbole intégral

a) Calculer pour $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du$, et en déduire $\int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-xu} du$.

En déduire l'expression sans symbole intégral de $L''(x)$ pour $x > 0$.

b) En déduire qu'il existe des réels C et D tels qu'on ait pour tout $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \operatorname{Arctan}(x) + Cx + D.$$

c) En exploitant la limite de $L(x)$ quand x tend vers $+\infty$, déterminer les constantes C et D .
En déduire enfin la valeur de l'intégrale $L(0)$.

■ PARTIE II : Etude asymptotique de la suite (I_n)

4°) Etude de l'intégrale I_1

a) Calculer, pour tout réel positif x , l'intégrale suivante $\int_0^x \sin(t) dt$.

b) Qu'en déduit-on pour l'intégrale I_1 ?

5°) Etude d'une fonction auxiliaire f_n

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \frac{1 - \cos(t^n)}{t^n}.$$

a) Etablir que f_n est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f_n(t) \leq 2/t^n$ pour $t > 0$.

b) Déterminer la limite l_n de $f_n(t)$ lorsque t tend vers 0.

On posera $f_n(0) = l_n$, et on notera encore f_n ce prolongement par continuité de f_n à $\mathbb{R}_+$.

c) Etablir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

6°) Etude de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir l'égalité suivante pour $x > \varepsilon > 0$:

$$\int_{\varepsilon}^x \sin(t^n) dt = \frac{x f_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n} \int_{\varepsilon}^x f_n(t) dt.$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$.

Exprimer celle-ci en fonction de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

c) A l'aide du changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, établir que :

$$I_n = \frac{n-1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{2-1/n}} du.$$

7°) Equivalent de l'intégrale I_n

a) Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée.

b) A l'aide de ce théorème et du résultat de la partie I, vérifier l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{2-1/n}} du = \frac{\pi}{2}.$$

c) En déduire que $I_n \sim \frac{\pi}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ Partie III : Calcul de l'intégrale I_2

On se propose dans cette partie de calculer l'intégrale I_2 , premier terme de la suite (I_n) .

8°) *Intégrale d'une fonction rationnelle auxiliaire*

a) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$, donner les parties réelle et imaginaire du complexe $\frac{1}{t - e^{i\theta}}$.

b) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel qu'on ait :

$$\int \frac{dt}{t - e^{i\theta}} = \frac{1}{2} \ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C.$$

c) Factoriser le polynôme $X^2 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$, et montrer que :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \left(\frac{1}{X - e^{i\pi/4}} - \frac{1}{X - e^{5i\pi/4}} \right).$$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - i}$.

9°) *Valeur de l'intégrale I_2*

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i} dt.$$

a) Démontrer l'inégalité suivante pour tout réel x , puis justifier l'existence de $F(x)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\exp(-x^2(t^2 - i))}{t^2 - i} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}.$$

b) Etablir que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

c) Etablir que F est de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et préciser $F'(x)$.

En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, exprimer $F'(x)$ sans symbole intégral.

d) Compte tenu de la valeur de $F(0)$ calculée au 8°, en déduire que $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.



CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIEUR
OPTION : MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 2 Heures

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Dans ce problème, on considère une suite de jets indépendants d'une même pièce, pouvant donner Face avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements :

- F_n : "le $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce a donné Face".
- P_n : "le $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce a donné Pile".

Dans la partie I, on s'intéresse au numéro du jet de la pièce où, pour la première fois, on a deux Faces consécutifs, et plus généralement, on étudie dans la partie II le numéro du jet de la pièce où, pour la première fois, on obtient r Faces consécutifs avec $r \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE I : Première obtention de deux Faces consécutifs

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement suivant E_n , dont notera la probabilité p_n :

E_n : "une suite de 2 Faces consécutifs est obtenue pour la 1^{ère} fois à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet".

Par exemple, si les résultats des jets 1, 2, 3, 4, 5 ... sont "Face, Pile, Face, Face, Face, ...", l'événement E_4 est réalisé puisque c'est au 4^{ème} jet de la pièce qu'on obtient deux Faces consécutifs pour la première fois depuis le début du jeu.

1°) Relations entre les probabilités p_n

- a) Expliciter les événements E_1, E_2, E_3 et calculer leurs probabilités p_1, p_2, p_3 .
- b) Justifier l'égalité : $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.
- c) Justifier l'égalité : $E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \dots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$.
- d) En déduire la relation suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^n p_k \right).$$

- e) A l'aide de la relation précédente, établir enfin la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+3} = p_{n+2} - p^2 q p_n.$$

2°) Expression des probabilités p_n

On considère dans cette question le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + p^2 q$.

- a) Vérifier que p est racine de P , et que P admet deux autres racines réelles r_1 et r_2 .

Préciser $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ et donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

- b) On note T l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ associant à toute suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{S}$ la suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$ de $\mathcal{S}$, et Id l'endomorphisme-identité de $\mathcal{S}$.

- Déterminer pour tout réel λ les suites de $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id})$.
- Déterminer à l'aide du théorème des noyaux les suites de $\text{Ker}(T^3 - T^2 + p^2 q \text{Id})$.
- En déduire les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q u_n$.

- c) Démontrer l'égalité suivante pour $n = 1, n = 2, n = 3$, puis pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = p^2 \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}.$$

- d) Préciser r_1, r_2 et l'expression de p_n lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).

3°) *Temps d'attente moyen de la première suite de deux Faces consécutifs*

a) A l'aide des résultats précédents, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

On définit alors une variable aléatoire X_2 en convenant de poser pour tout entier $n \geq 1$ $X_2 = n$ lorsque l'événement E_n est réalisé, c'est à dire quand le premier double Face est réalisé à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce, et on a donc : $\mathbb{P}(X_2 = n) = p_n$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X_2)$ en fonction du seul réel p (on ne fera apparaître ni r_1 ni r_2 dans le résultat final).

c) Préciser numériquement $\mathbb{E}(X_2)$ lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).

PARTIE II : Première obtention de r Faces consécutifs ($r \in \mathbb{N}^*$)

Dans cette partie, on reprend et généralise les notations de la partie I de la façon suivante.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement suivant E_n , dont notera la probabilité p_n :

E_n : "une suite de r Faces consécutifs est obtenue pour la 1^{ère} fois à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet".

On conviendra par ailleurs de poser $p_0 = 0$, de sorte que la suite (p_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$.

4°) *Fonction génératrice de la suite (p_n)*

a) Etablir que la série $\sum p_n$ est convergente, et que sa somme est inférieure ou égale à 1.

b) En déduire que la fonction suivante est définie pour tout réel x vérifiant $|x| \leq 1$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n.$$

c) Démontrer que la fonction G est continue sur le segment $[-1, 1]$.

5°) *Temps d'attente moyen de la première suite de r Faces consécutifs*

a) En reprenant le raisonnement effectué dans la question 1° dans le cas $r = 2$, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+r+1} = p^r q \left(1 - \sum_{k=0}^n p_k \right).$$

b) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k \right) x^n$ en fonction de x et $G(x)$ pour $|x| < 1$.

c) En multipliant la relation 5.a) par x^{n+r+1} et en sommant, démontrer qu'on a pour $|x| < 1$:

$$G(x) = \frac{p^r x^r (1 - p x)}{1 - x + p^r q x^{r+1}}.$$

d) En faisant tendre x vers 1, en déduire la somme $G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

On définit alors une variable aléatoire X_r en convenant de poser pour tout entier $n \geq 1$ $X_r = n$ lorsque l'événement E_n est réalisé, c'est à dire quand la première suite de r Faces consécutifs est réalisée à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce, et on a donc : $\mathbb{P}(X_r = n) = p_n$.

Déterminer $G'(1)$ et en déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_r)$ en fonction de p et r .

Retrouver le résultat de la partie I lorsque $r = 2$.

e) Préciser $\mathbb{E}(X_r)$ en fonction de r lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).



CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

EPREUVE : MATHEMATIQUES

MP / PC / PSI

Samedi 15 Avril 2017

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f . Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule l'intégrale $f(1)$.

■ PARTIE I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1°) *Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

- a) Donner un équivalent de la fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.
- b) En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2°) *Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

- a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
- b) Vérifier que la fonction $t \rightarrow |\sin(t)|$ est π -périodique, et en déduire, pour tout entier k , la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$.
- c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

- d) Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3°) *Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

- a) Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.
- b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geq \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ pour $\alpha > 0$.

d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4°) *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

■ PARTIE II : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

5°) *Limite de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$*

a) Justifier l'inégalité $0 \leq \sin(t) \leq t$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

6°) *Limite de l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$*

a) A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt.$$

b) Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}}$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, quand α tend vers 0.

c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

■ Partie III : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7°) *Une autre expression de la fonction f*

a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

b) A l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

8°) Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.

a) Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0?

On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0, \pi]$, et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Etablir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2 - \alpha}.$$

d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

■ Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9°) Calcul d'intégrales auxiliaires

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

b) Préciser la valeur de I_0 , et prouver qu'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale I_n .

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.

Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0?

On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

10°) Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1

On considère une fonction g de classe C^1 du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier naturel n , on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t) dt.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En admettant, ce que l'on ne demande pas de vérifier ici, que la fonction continue ψ introduite à la question 9.c) est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.



CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

EPREUVE : MATHEMATIQUES

PT / TSI

Samedi 15 Avril 2017

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

Dans la partie I, on étudie la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, puis la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2. Dans la partie II (qui est indépendante de la partie I), on calcule ensuite la valeur de $f(\alpha)$ pour $\alpha = 1$.

■ Partie I : Etude de la fonction f

1°) Etude de l'intégrale $f(\alpha)$ pour $\alpha = 0$

- a) Calculer l'intégrale $\int_0^x \sin(t) dt$. Celle-ci a-t-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?
- b) En déduire pour $\alpha = 0$ la nature de l'intégrale $f(\alpha)$.

2°) Etude de l'intégrale $f(\alpha)$ pour $\alpha \geq 2$

- a) Donner un équivalent de la fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.
- b) En déduire pour $\alpha \geq 2$ la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, puis de l'intégrale $f(\alpha)$.

3°) Etude d'une intégrale auxiliaire pour $0 < \alpha < 2$

- a) Donner un équivalent lorsque t tend vers 0 de la fonction φ_α définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ pour $\alpha < 2$.

- b) Etudier la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$, puis $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$, pour $\alpha > 0$.
- c) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ pour $0 < \alpha < 2$.

4°) Convergence de l'intégrale $f(\alpha)$ pour $0 < \alpha < 2$

- a) Démontrer l'égalité suivante dans laquelle a et b désignent deux réels tels que $b > a > 0$:

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} \right]_a^b + \alpha \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

- b) Déterminer un équivalent et la limite en 0 de la fonction $t \rightarrow \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 2$.
- c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $t \rightarrow \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 2$.

d) En déduire que l'intégrale $f(\alpha)$ converge pour $0 < \alpha < 2$, et qu'on a l'égalité :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

5°) *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2*

On considère la fonction auxiliaire φ_1 définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi_1(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$.

a) Quelle est la limite L de $\varphi_1(t)$ lorsque t tend vers 0?

On posera désormais $\varphi_1(0) = L$, de sorte que φ_1 est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction φ_1 reste strictement positive sur $[0, \pi]$, et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Justifier les inégalités et l'égalité suivantes :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_0^\pi \frac{\varphi_1(t)}{t^{\alpha-1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

■ Partie II : Calcul de l'intégrale $f(1)$

6°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

b) Préciser la valeur de I_0 , et prouver qu'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

En déduire la valeur de l'intégrale I_n .

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.

Donner un équivalent lorsque t tend vers 0 des fonctions $t \rightarrow t - \sin(t)$ et $t \rightarrow \psi(t)$.

En déduire la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0.

On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

7°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1*

On considère une fonction g de classe C^1 du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier naturel n , on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t) dt.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

8°) *Calcul de l'intégrale $f(1)$*

On reprend la fonction continue $\psi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ introduite dans la question 6°.

a) Calculer la dérivée $\psi'(t)$ pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Donner un équivalent lorsque t tend vers 0 de la fonction $t \rightarrow \sin^2(t) - t^2 \cos(t)$.

En déduire la limite L' de $\psi'(t)$ lorsque t tend vers 0.

En déduire enfin que ψ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et préciser $\psi'(0)$.

c) En appliquant le résultat de la question 7°, en déduire la valeur de l'intégrale $f(1)$.



CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

OPTION : MATHEMATIQUES

MP / PC / PSI / PT / TSI

Samedi 15 Avril 2017

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Dans tout ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle alors qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est *nilpotent* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$, et dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* p de f le plus petit entier k tel que $f^k = 0$. Ainsi, f est nilpotent d'indice p si et seulement si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

On peut définir de façon analogue les matrices nilpotentes dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on notera $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices nilpotentes.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ et des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

PARTIE I : Exemples de matrices nilpotentes

1°) On considère dans cette question les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont les éléments sont tous nuls, à l'exception d'un seul qui est égal à 1) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les puissances des matrices A et B . Ces matrices sont-elles nilpotentes?

b) Calculer les puissances $(A+B)^q$ en distinguant les cas $q = 2k$ et $q = 2k+1$.

La matrice $A+B$ est-elle nilpotente?

c) Expliciter les matrices AB et BA .

Calculer les puissances des matrices AB et BA . Ces matrices sont-elles nilpotentes?

d) L'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

PARTIE II : Une forme réduite des matrices nilpotentes

2°) *Une propriété de l'indice de nilpotence*

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'il existe un vecteur non nul e_1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(e_1) \neq 0$ et que $f^p = 0$.

a) Montrer que la famille $(f^{p-1}(e_1), \dots, f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est libre, puis que $p \leq n$.

(On composera une combinaison linéaire nulle de cette famille par $f, f^2, \dots, f^{p-1}$).

b) En déduire qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent si et seulement si $g^n = 0$.

3°) *Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas où $n = 3$*

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent non nul f d'indice p de $\mathbb{R}^3$. D'après la question 2, l'indice de nilpotence p de f est alors égal à 2 ou 3.

a) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 3$, et on note e_1 un vecteur tel que $f^2(e_1) \neq 0$.

- Montrer que la famille $(f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

- Ecrire la matrice de f dans cette base.

- b) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 2$, et on note e_1 un vecteur tel que $f(e_1) \neq 0$.
- Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, donc que $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$.
 - A l'aide du théorème du rang, en déduire que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.
 - Justifier l'existence d'un vecteur e_3 complétant $f(e_1)$ en base de $\text{Ker}(f)$, puis démontrer que la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Ecrire la matrice de f dans cette base.

4°) Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas général

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, et on note e_1 un vecteur tel que $f^{p-1}(e_1) \neq 0$.

- a) Pour $1 \leq k \leq p$, prouver l'inclusion $\text{Ker}(f^{k-1}) \subset \text{Ker}(f^k)$.

Montrer que cette inclusion est stricte en considérant le vecteur $f^{p-k}(e_1)$.

- b) Montrer que l'image par f du sous-espace $\text{Ker}(f^k)$ est incluse dans $\text{Ker}(f^{k-1})$.
- c) On considère une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(f)$. Justifier l'existence d'une famille $\mathcal{B}_2$ complétant $\mathcal{B}_1$ en base de $\text{Ker}(f^2)$, puis plus généralement, pour tout entier naturel k tel que $2 \leq k \leq p$, justifier l'existence d'une famille $\mathcal{B}_k$ complétant une base $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{k-1}$ de $\text{Ker}(f^{k-1})$ en base de $\text{Ker}(f^k)$. Ainsi, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ forme une base de $\text{Ker}(f^p) = \mathbb{R}^n$.
- d) Ecrire par blocs la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^n$ (on précisera avec soin les blocs qui sont nuls, sans chercher à expliciter les autres).
Quelle est la forme de la matrice obtenue, et que valent ses éléments diagonaux?

5°) Etude de la réciproque du résultat précédent

On considère une matrice triangulaire $T = (t_{ij})$ telle que $t_{ij} = 0$ pour $1 \leq j < i \leq n$.

- a) Quel est le polynôme caractéristique de la matrice T ?
- b) En déduire T^n sans aucun calcul à l'aide d'un théorème qu'on énoncera précisément.

PARTIE III : Dimension maximale d'un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6°) Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes

- a) Soit une matrice M appartenant au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles.
- Justifier l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} M P = D$ soit diagonale.
 - En déduire que si de plus M est nilpotente, alors M est nulle.
- b) Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes.

Montrer que la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{N}$ est directe, et en déduire que $\dim(\mathcal{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

- c) Exhiber un sous-espace $\mathcal{N}$ de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

PARTIE IV : Caractérisation de $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$ à l'aide de la trace

7°) Trace d'une matrice nilpotente

On rappelle que la trace d'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le réel $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

- a) Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En déduire la dimension du noyau $\text{Ker}(\text{Tr})$ de l'application trace.
- b) En exploitant le résultat obtenu à la question 4, démontrer l'inclusion $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker}(\text{Tr})$, puis l'inclusion $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \text{Ker}(\text{Tr})$.

8°) *Etude de l'inclusion réciproque : cas où $n = 2$*

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Lesquelles de ces trois matrices sont-elles nilpotentes?

b) On considère une matrice $(2, 2)$ de trace nulle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Montrer que M est combinaison linéaire des trois matrices N, E_{12}, E_{21} .

c) En déduire dans le cas $n = 2$ l'égalité : $\text{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R})) = \text{Ker}(\text{Tr})$.

9°) *Etude de l'inclusion réciproque : cas général*

Pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, on désigne par E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui en position (i, j) qui est égal à 1.

Pour $2 \leq i \leq n$, on désigne par N_i la matrice définie par $N_i = E_{11} - E_{1i} + E_{i1} - E_{ii}$.

a) Calculer E_{ij}^2 pour $i \neq j$ et N_i^2 pour $2 \leq i \leq n$.

b) On considère la famille $\mathcal{F}_n$ composée des $n^2 - n$ matrices E_{ij} pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$ et des $n - 1$ matrices $N_i = E_{11} - E_{1i} + E_{i1} - E_{ii}$ pour $2 \leq i \leq n$.

- Montrer que la famille $\mathcal{F}_n$ est libre.

- En déduire une minoration de la dimension de $\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})))$.

c) Justifier l'égalité $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \text{Ker}(\text{Tr})$.

d) Démontrer que $\mathcal{F}_n$ est une base du sous-espace $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \text{Ker}(\text{Tr})$, et étant donnée une matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle, exprimer M comme combinaison linéaire des matrices nilpotentes de la famille $\mathcal{F}_n$ en explicitant tous les coefficients.



Samedi 7 Avril 2018

EPREUVE : MATHÉMATIQUE

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt.$$

Dans la partie III, on revient par d'autres méthodes sur le calcul de certaines de ces intégrales.

■ PARTIE I : Etude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1°) Etude d'un cas particulier

Dans cette question, on donne deux réels p et q et on suppose que la fonction f est définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{p t^2 + q}{t^2 + 1}.$$

a) Etablir, pour $x > 0$, qu'il existe des réels a_x et b_x , qu'on exprimera en fonction de x , tels que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p - q) \left(\frac{a_x t}{x^2 t^2 + 1} - \frac{b_x t}{t^2 + 1} \right).$$

b) En posant $u = t^2$, calculer pour tout réel $A \geq 0$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt$ et en déduire $F(x)$.

c) Exprimer $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q , puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2°) Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$

On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_{\varepsilon x}^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^A \frac{f(u)}{u} du = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u} du.$$

b) En effectuant un changement de variables dans ces deux dernières intégrales, en déduire que :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

c) Etablir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

d) A l'aide du théorème de convergence dominée, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses, déterminer la limite de $\int_1^x \frac{f(At)}{t} dt$ lorsque A tend vers $+\infty$ et de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$ lorsque ε tend vers 0.

e) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

Comparer le résultat ainsi obtenu au résultat particulier obtenu à la question 1°.

3°) Application aux cas où $f(t) = \operatorname{Arctan}(t)$ et $f(t) = e^{-t}$

a) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \operatorname{Arctan}(t)$.

Que vaut l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(at) - \operatorname{Arctan}(bt)}{t} dt$ où a et b sont strictement positifs?

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$.

■ PARTIE II : Etude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

4°) Etude du cas particulier où l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge

On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- A l'aide d'un changement de variables, déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t} dt$.
- En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

5°) Application au cas où $f(t) = \sin(t)$

- Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_{\varepsilon}^A + \int_{\varepsilon}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

- Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0, puis vers $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ lorsque t tend vers 0, puis justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$, et enfin la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = \sin(t)$.

6°) Etude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

- En raisonnant comme à la question 2°, démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt.$$

- Déterminer la limite de $\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du$ lorsque A tend vers $+\infty$.
- Déterminer comme à la question 2° la limite de $\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$ lorsque ε tend vers 0.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x .

7°) Application aux cas où $f(t) = e^{it}$ et $f(t) = \cos(t)$

- Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it} \right]_1^A - i \int_1^A \frac{e^{it}}{t^2} dt.$$

- En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$.
- En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ lorsque $f(t) = e^{it}$, puis lorsque $f(t) = \cos(t)$.

■ PARTIE III : Une autre méthode de calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

Dans cette partie, on considère les deux intégrales suivantes pour $x > 0$:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt \quad ; \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

On a démontré leur existence et déterminé leurs valeurs par une première méthode dans I et II.

On se propose de retrouver ces résultats *par une autre méthode, indépendante des précédentes*.

A cet effet, on introduit pour tout réel $x > 0$ et tout réel $R \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$U(x, R) = \int_0^R \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt \quad ; \quad V(x, R) = \int_0^R \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

8°) *Etude des fonctions U et V*

a) Déterminer les limites des fonctions $t \rightarrow \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ et $t \rightarrow \frac{e^{itx} - e^{it}}{t}$ quand t tend vers 0.

On prolonge alors ces fonctions en 0 par ces limites, de sorte qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, l'existence des intégrales $U(x, R)$ et $V(x, R)$, puis préciser les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial R}(x, R)$ et $\frac{\partial V}{\partial R}(x, R)$.

9°) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $u(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la fonction u est de classe C^1 sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) En remarquant la valeur de $u(1)$, en déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.

10°) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$*

Pour tout $x > 0$ et tout $R \geq 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xR} e^{-it} dt.$$

a) Montrer que la fonction $R \rightarrow \varphi(x, R)$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Donner l'expression de sa dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R)$ sous forme intégrale pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$,

puis calculer cette dernière intégrale en primitivant la fonction sous le signe intégral.

b) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = i \frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - i \frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R).$$

En déduire l'égalité suivante pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$U(x, R) - V(x, R) = i \varphi(x, R) - i \varphi(1, R).$$

c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x, R)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.

Retrouver ainsi les résultats obtenus dans les parties I et II lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$.



Samedi 7 Avril 2018

EPREUVE : MATHÉMATIQUE

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PROBLÈME I : La série harmonique

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1°) Question préliminaire

Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.

En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2°) Première méthode

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

b) En déduire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3°) Deuxième méthode

a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c) Etablir la divergence de $(H_n)_{n \geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

d) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.

Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.

En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$ et la formule :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

■ PROBLÈME II : Etude d'intégrales

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera dans la suite.

A] Cas où la fonction f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2+1}$ avec P polynômiale

a) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variables défini par $u = t^2$.
- Déterminer deux réels a et b tels qu'on ait pour tout réel $u \geq 0$:

$$\frac{3}{2(u+1)(4u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1}.$$

- En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

b) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

- Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(2t)}{t} dt$ et préciser leurs valeurs.
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

c) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

- En posant $u = t^2$, calculer les intégrales $\int_0^A \frac{f(t)}{t} dt$ et $\int_0^A \frac{f(2t)}{t} dt$ pour tout réel positif A .
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

d) On suppose ici que $P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, donc que $f(t) = \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2+1}$.

En exploitant les résultats précédents, justifier la convergence et donner la valeur de $I(f)$.

e) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, et étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Que dire de l'intégrale $I(f)$ si l'on suppose que $P(t) = t^n$, donc $f(t) = \frac{t^n}{t^2+1}$, avec $n \geq 3$?

B] Cas où la fonction f est définie par $f(t) = e^{-t}$

1°) Convergence de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$

a) En exploitant le développement limité de l'exponentielle, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(2t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}.$$

En déduire qu'on peut prolonger par continuité la fonction $t \rightarrow \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ en $t = 0$.

b) Etablir qu'on a lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

c) En déduire la convergence de l'intégrale $I(f)$.

2°) Calcul de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$

a) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir l'égalité suivante (en justifiant l'existence des intégrales) :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

En déduire que :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}.$$

b) On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(u) = \frac{e^{-u}-1}{u}$ si $u \neq 0$, et $h(0) = -1$.

Etablir que h est continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle admet une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout réel $\varepsilon > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2).$$

c) En déduire enfin la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3°) *Application au calcul d'une autre intégrale*

En posant $t = -\ln(u)$ dans l'intégrale $I(f)$ étudiée dans la partie B, déterminer la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du.$$



Samedi 7 Avril 2018

OPTION : MATHÉMATIQUE

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Dans la partie I, on étudie une famille sommable et une série associées à la fonction de Möbius. Dans la partie II, largement indépendante de I, on exploite ces résultats pour obtenir la probabilité pour qu'un entier $d \geq 1$ soit sans facteur carré, c'est-à-dire non divisible par un entier m^2 où $m \geq 2$.

■ PARTIE I : La fonction arithmétique de Möbius

Etant donné un entier $n \geq 2$, on introduit sa factorisation en nombres premiers $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ où $p_1, p_2, \dots, p_q$ sont premiers et distincts et $r_1, r_2, \dots, r_q$ des entiers supérieurs ou égaux à 1.

On définit la *fonction de Möbius* $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\mu(1) = 1$, puis, si $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q} \geq 2$, par :

- si l'un des entiers $r_1, r_2, \dots, r_q$ est supérieur ou égal à 2, alors $\mu(n) = \mu(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}) = 0$.
- si $r_1 = r_2 = \dots = r_q = 1$, alors $\mu(n) = \mu(p_1 p_2 \dots p_q) = (-1)^q$.

On vérifiera donc que : $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, etc.

1°) *Une propriété de la fonction de Möbius*

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des entiers naturels qui divisent n .

a) Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_1$, puis les ensembles $\mathcal{D}_n$ pour $2 \leq n \leq 10$.

En déduire la somme $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n = 1$, puis pour $2 \leq n \leq 10$. Que peut-on conjecturer?

b) En étudiant la forme des diviseurs d de $n = p_1^{r_1} \dots p_q^{r_q}$, établir que les seuls diviseurs d de n pour lesquels on a $\mu(d) \neq 0$ sont $d = 1$ et les entiers d du type $d = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$ où $1 \leq k \leq q$ et où $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est une partie à k éléments de $\llbracket 1, q \rrbracket$, puis en déduire que :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = 1 + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k.$$

c) En déduire la valeur numérique de la somme $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ pour $n \geq 2$.

2°) *La famille sommable $(\mu(d) / (m^2 d^2))$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$*

a) Justifier la convergence absolue de la série de terme général $\mu(d) / d^2$ où $d \geq 1$.

b) Justifier la sommabilité de la famille $(\mu(d) / (m^2 d^2))$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

c) On calcule de deux façons la somme de la famille $(\mu(d) / (m^2 d^2))$ pour $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- Etablir l'égalité suivante (on rappelle que la somme de la série $\sum \frac{1}{m^2}$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$) :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

- En exploitant la partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ formée par les parties $P_n = \{(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / m d = n\}$ où $n \geq 1$, établir les égalités suivantes :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) \right) = 1.$$

d) En déduire la somme de la série de terme général $\mu(d) / d^2$ pour $d \geq 1$.

■ PARTIE II : Les entiers naturels sans facteur carré

Etant donné un entier $n \geq 2$, on note désormais $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ l'ensemble des nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à n . Il en résulte que tout entier d appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut donc s'écrire $d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ avec des exposants $r_1, r_2, \dots, r_q$ éventuellement nuls.

3°) Une formule préliminaire

Dans toute la suite, on désigne comme d'habitude par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x .

a) Etablir l'égalité des deux sommes suivantes, en montrant que tous les termes de la 1^{ère} somme figurent dans la 2^{ème} et que les termes de la 2^{ème} somme ne figurant pas dans la 1^{ère} sont nuls :

$$\sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_q) \in \mathbb{N}^q} \mu(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor.$$

b) En examinant quels sont les termes pour lesquels $\mu(p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}) \neq 0$, en déduire que :

$$\sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^q (-1)^k \left(\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \llbracket 1, q \rrbracket} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2 p_{i_2}^2 \dots p_{i_k}^2} \right\rfloor \right)$$

où la dernière sommation est faite sur toutes les parties $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ à k éléments de $\llbracket 1, q \rrbracket$.

4°) Nombre des entiers sans facteur carré appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$

On dit qu'un entier $d \in \mathbb{N}^*$ a un facteur carré s'il existe $m \geq 2$ tel que m^2 divise d , et on désigne dans la suite par C_n l'ensemble des entiers d appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et ayant un facteur carré.

a) Montrer que $d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ a un facteur carré si et seulement si : $\exists i \in \llbracket 1, q \rrbracket, r_i \geq 2$.

b) En déduire que $C_n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_q$ où $P_i = \{d \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid p_i^2 \text{ divise } d\}$ pour $1 \leq i \leq q$.

c) Montrer que les entiers appartenant à P_i sont ceux s'écrivant $k p_i^2$ avec $1 \leq k \leq n/p_i^2$.

En déduire le cardinal $|P_i|$ de l'ensemble P_i pour $1 \leq i \leq q$.

Etablir de même que $|P_i \cap P_j| = \left\lfloor \frac{n}{p_i^2 p_j^2} \right\rfloor$ pour $1 \leq i < j \leq q$.

Que vaut $|P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_k}|$ où $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ désigne une partie à k éléments de $\llbracket 1, q \rrbracket$?

d) On admet la formule du crible, qui donne le cardinal d'une réunion $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_q$:

$$|P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_q| = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \llbracket 1, q \rrbracket} |P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \dots \cap P_{i_k}| \right).$$

En déduire que le cardinal $|\overline{C_n}|$ du complémentaire $\overline{C_n}$ de C_n dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est égal à :

$$|\overline{C_n}| = \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor.$$

5°) Probabilité p_n pour qu'un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ soit sans facteur carré

a) On munit l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ de l'équiprobabilité. Quelle est la probabilité p_n de la partie $\overline{C_n}$?

b) En évaluant la partie entière $\lfloor n/d^2 \rfloor$ pour tout entier $d > \sqrt{n}$, établir les égalités :

$$\left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| = \left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) En exploitant le résultat final de la partie I, en déduire la limite de la suite (p_n) .



Samedi 13 Avril 2019

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP/ PC/ PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Pour tout réel *strictement positif* α , on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \dots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α . Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2 . Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction S_1*

a) Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum e^{-x n^\alpha}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2 e^{-x n^\alpha}$.

En déduire la nature de la série $\sum e^{-x n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-x n^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.

En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α .

En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

c) A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^N e^{-x n^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N , que $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.

Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0?

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \dots$$

4°) Recherche d'un équivalent de S_2 en 0

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2} dt \leq e^{-x n^2}.$$

b) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

c) Retrouver alors $\lim_{x \rightarrow 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5°) Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n^2}.$$

b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ en $+\infty$.

En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

6°) Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$ pour $x > 0$

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2} dt.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) Comparaison de deux intégrales

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt.$$

a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\int_0^1 e^{-u} u^{\alpha-1} du$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ convergent-elles?

En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n .

c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = x t^\alpha$.

Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

8°) Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq 1.$$

b) Retrouver $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

9°) Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$)

a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

b) Etablir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)

a) Etablir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.



Samedi 13 Avril 2019

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction S de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \dots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les principales propriétés de la fonction S . On en détermine en particulier des équivalents aux bornes de son intervalle de définition en exploitant une intégrale dont on étudie la convergence et la valeur dans la partie II.

■ PARTIE I : Etude de la fonction S

On exploite ici la série entière de la variable réelle t définie sous réserve de convergence par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \dots$$

1°) *Etude du domaine de définition des fonctions F et S*

- Examiner pour $|t| \geq 1$ la nature de la série $\sum t^{n^2}$.
- Pour tout réel t de $] -1, 1[$ et tout entier naturel n , justifier l'inégalité : $|t|^{n^2} \leq |t|^n$.
Etudier la convergence et expliciter la somme de la série $\sum |t|^n$ pour $n \geq 0$ et $|t| < 1$.
En déduire la nature des séries $\sum |t|^{n^2}$ et $\sum t^{n^2}$ pour $|t| < 1$.
- Préciser le domaine de définition de la fonction F .
- Déduire de ces résultats que la série $\sum e^{-x n^2}$ converge si et seulement si $x > 0$, puis exprimer alors sa somme $S(x)$ en fonction de $F(e^{-x})$.

2°) *Premières propriétés des fonctions F et S*

- Justifier que la fonction F est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- Déterminer le sens de variation de F sur $[0, 1[$.
En déduire que la fonction F admet une limite finie ou infinie en 1.
- En exploitant l'inégalité $F(t) \geq \sum_{n=0}^N t^{n^2}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel t de $[0, 1[$, établir, pour tout entier naturel N , que $\lim_{t \rightarrow 1} F(t) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque t tend vers 1?
- Déduire des résultats précédents que la fonction S est de classe C^∞ sur $] 0, +\infty[$, et donner son sens de variation et les limites de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

3°) Recherche d'un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n}.$$

b) En explicitant cette dernière somme, démontrer que $S(x) - 1 - e^{-x} = o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

4°) Recherche d'un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2} dt \leq e^{-x n^2}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $x > 0$:

$$S(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt \leq S(x).$$

c) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer l'intégrale ci-dessus en posant $u = t \sqrt{x}$.
Retrouver alors $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$, puis donner un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

5°) Recherche d'une valeur approchée de $S(x)$

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2} dt.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.
d) Préciser une valeur approchée de $S(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE II : Calcul de l'intégrale de Gauss

On se propose ici de justifier l'existence et de calculer l'intégrale de Gauss, qu'on a exploitée précédemment à la question 4, et qui est définie par :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

6°) Convergence de l'intégrale de Gauss I

a) Pour tout réel $t \geq 1$, établir l'inégalité suivante : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Justifier l'existence et préciser la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

c) En déduire l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$, puis de l'intégrale de Gauss I .

7°) *Etude des intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale de Wallis W_n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

a) Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

b) A l'aide d'une intégration par parties du produit $\cos^{n+1}(t) = \cos(t) \cos^n(t)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1}).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer W_{n+1} en fonction de W_{n-1} , puis justifier l'égalité suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad (n+1) W_{n+1} W_n = n W_n W_{n-1}.$$

En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 1$: $n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$.

En déduire l'équivalence $W_{n-1} \sim W_n$.

d) Déduire des résultats précédents l'équivalence : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8°) *Calcul de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $x > -1$, établir l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, les inégalités suivantes :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}.$$

b) A l'aide de ces inégalités, établir la double inégalité suivante pour $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin(u)$ dans la première de ces intégrales, et $t = \sqrt{n} \tan(u)$ dans la dernière de celles-ci, établir qu'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

d) A l'aide de l'équivalent de W_n obtenu au 7°, déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss I .



Samedi 13 Avril 2019

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les n valeurs propres a priori complexes sont supposées *réelles* et on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ses p valeurs propres *distinctes*. Enfin, on note comme d'habitude I_n la matrice-identité d'ordre n .

■ Partie I : Série entière matricielle et polynôme d'interpolation matriciel

1°) *Polynôme minimal de la matrice A*

a) Etablir que les $n^2 + 1$ matrices $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi l'ensemble des entiers $k \geq 1$ tels que les matrices $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^k$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forme une partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$. Celle-ci admet donc un plus petit élément $d \geq 1$, de sorte qu'il existe des réels $m_0, m_1, \dots, m_d$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^d m_i A^i = 0$.

b) Justifier que m_d est non nul, et en déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire M de degré d (appelé *polynôme minimal de A*) tel que $M(A) = 0$. On posera dans la suite :

$$M(X) = X^d + \mu_{d-1} X^{d-1} + \dots + \mu_1 X + \mu_0.$$

c) On désigne par v_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i de A ($1 \leq i \leq p$).

Préciser $Av_i, A^2 v_i, \dots, A^d v_i$ en fonction de λ_i et v_i , puis montrer que $M(A) v_i = M(\lambda_i) v_i$.

En déduire que $M(\lambda_i) = 0$, et que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont racines du polynôme minimal M .

d) On suppose qu'il existe une racine réelle ou complexe μ de M qui n'est pas valeur propre de A .

Il existe donc un polynôme N à coefficients réels ou complexes tel que $M(X) = (X - \mu) N(X)$, et on a par conséquent $M(A) = (A - \mu I_n) N(A) = 0$.

Etablir que la matrice $A - \mu I_n$ est inversible, que $N(A) = 0$, puis en déduire une contradiction.

Ainsi, les seules racines de M sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et on posera en introduisant les ordres de multiplicité $r_1, r_2, \dots, r_p$ des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ du polynôme M :

$$M(X) = X^d + \mu_{d-1} X^{d-1} + \dots + \mu_1 X + \mu_0 = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

Le degré de ce polynôme M est donc $d = r_1 + r_2 + \dots + r_p$, et on garde ces notations dans la suite.

2°) *Polynôme d'interpolation aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, r_2, \dots, r_p$*

Soit l'application φ associant à tout polynôme P de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $d - 1$ le d -uplet $\varphi(P)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ dont :

- les r_1 premiers éléments sont $P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \dots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1)$,

- les r_2 éléments suivants sont $P(\lambda_2), P'(\lambda_2), \dots, P^{(r_2-1)}(\lambda_2)$,

.....

- les r_p derniers éléments sont $P(\lambda_p), P'(\lambda_p), \dots, P^{(r_p-1)}(\lambda_p)$.

a) Vérifier brièvement que l'application φ est linéaire, puis montrer qu'elle est injective de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^d$, et établir enfin que φ réalise un isomorphisme entre ces espaces vectoriels.

b) Etant donnée une fonction indéfiniment dérivable f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, déduire de ce résultat qu'il existe un et un seul polynôme L de degré inférieur ou égal à $d - 1$ tel que :

$$\forall i \in [1, p], \quad L(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad L'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \quad \dots, \quad L^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i).$$

On dit que L est le polynôme d'interpolation de f aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, \dots, r_p$.

- c) On note ici $(L_{1,0}, L_{1,1}, \dots, L_{1,r_1-1}, L_{2,0}, L_{2,1}, \dots, L_{2,r_2-1}, \dots, L_{p,0}, L_{p,1}, \dots, L_{p,r_p-1})$ la base de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ obtenue par image réciproque par φ de la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$.
 Expliciter $\varphi(L_{1,0})$, $\varphi(L_{1,1})$ et $\varphi(L_{1,j})$ pour $0 \leq j \leq r_1 - 1$, puis vérifier que $\varphi(L_{1,r_1-1}) = e_{r_1}$.
 Expliciter $\varphi(L_{2,0})$, $\varphi(L_{2,1})$ et $\varphi(L_{2,j})$ pour $0 \leq j \leq r_2 - 1$, puis vérifier que $\varphi(L_{2,r_2-1}) = e_{r_1+r_2}$.
 Expliciter généralement le d -uplet $\varphi(L_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq r_i - 1$, puis en déduire que :

$$L(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) L_{i,j}(X).$$

- d) Exprimer en fonction de L les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ (sans condition de degré sur P) tels que :
 $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\lambda_i) = f(\lambda_i), P'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \dots, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i).$

3°) *Série entière en la matrice A et polynôme d'interpolation en la matrice A*

On considère une série entière réelle $\sum a_l x^l$, de rayon de convergence $R = +\infty$.

On introduit alors la somme et les sommes partielles de la série entière précédente pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l x^l \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = \sum_{l=0}^k a_l x^l.$$

- a) On effectue la division euclidienne du polynôme f_k par le polynôme minimal M :

$$f_k(X) = Q_k(X) M(X) + L_k(X) \quad \text{avec} \quad d^\circ(L_k) < d^\circ(M) = d.$$

Comparer $f_k(\lambda_i)$ et $L_k(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, puis $f_k^{(j)}(\lambda_i)$ et $L_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq r_i - 1$.
 En déduire que L_k est le polynôme d'interpolation de f_k aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, \dots, r_p$, puis justifier l'égalité suivante :

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{r_i-1} f_k^{(j)}(\lambda_i) L_{i,j}(X).$$

- b) Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq r_i - 1$.

En déduire la limite de $L_k(A)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

- c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est à dire d'une norme telle que $\|A B\| \leq \|A\| \|B\|$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir que la série $\sum a_l A^l$ converge absolument.

- d) On peut donc introduire la matrice $f(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l A^l$, somme de la série convergente précédente.

Comparer $f_k(A)$ et $L_k(A)$, puis démontrer que $f(A) = L(A)$.

■ Partie II : Deux exemples d'applications

4°) *Un premier exemple*

On considère deux réels a et b avec $b \neq 0$ et on choisit dans cette question pour matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

- a) Justifier que cette matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 b) Montrer que $\lambda_1 = a - b$ est valeur propre de A . Préciser le sous-espace propre associé.
 Montrer que $\lambda_2 = a + 2b$ est valeur propre de A . Préciser le sous-espace propre associé.
 c) Calculer A^2 et l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3 .

En déduire le polynôme minimal M de cette matrice A , c'est à dire le polynôme de coefficient dominant égal à 1 et de plus bas degré annulant la matrice A , et factoriser ce polynôme M .

d) De nouveau, f est ici une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière de rayon $R = +\infty$.

Expliciter le polynôme L de degré 1 tel que $L(a - b) = f(a - b)$ et $L(a + 2b) = f(a + 2b)$.

Préciser alors $f(A)$ comme combinaison linéaire de A et I_3 .

5°) *Un second exemple*

On revient au cas général où la matrice A est celle introduite dans le préambule, et on pose :

$$\cos(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{A^{2l}}{(2l)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{A^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

et on note L_c et L_s les polynômes d'interpolation des fonctions $\cos$ et $\sin$ aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, \dots, r_p$.

a) Comparer $L_c(A)$ et $\cos(A)$ d'une part, $L_s(A)$ et $\sin(A)$ d'autre part.

b) Evaluer le polynôme $L_c^2 + L_s^2 - 1$ aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ainsi que ses dérivées successives

$(L_c^2 + L_s^2 - 1)^{(j)}(\lambda_i) = (L_c^2)^{(j)}(\lambda_i) + (L_s^2)^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r_i - 1$ (on peut à cet effet exploiter la formule de Leibniz). Qu'en déduit-on pour le polynôme $L_c^2 + L_s^2 - 1$?

c) En déduire que $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n$.



Samedi 04 Avril 2020

ÉPREUVES: MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI

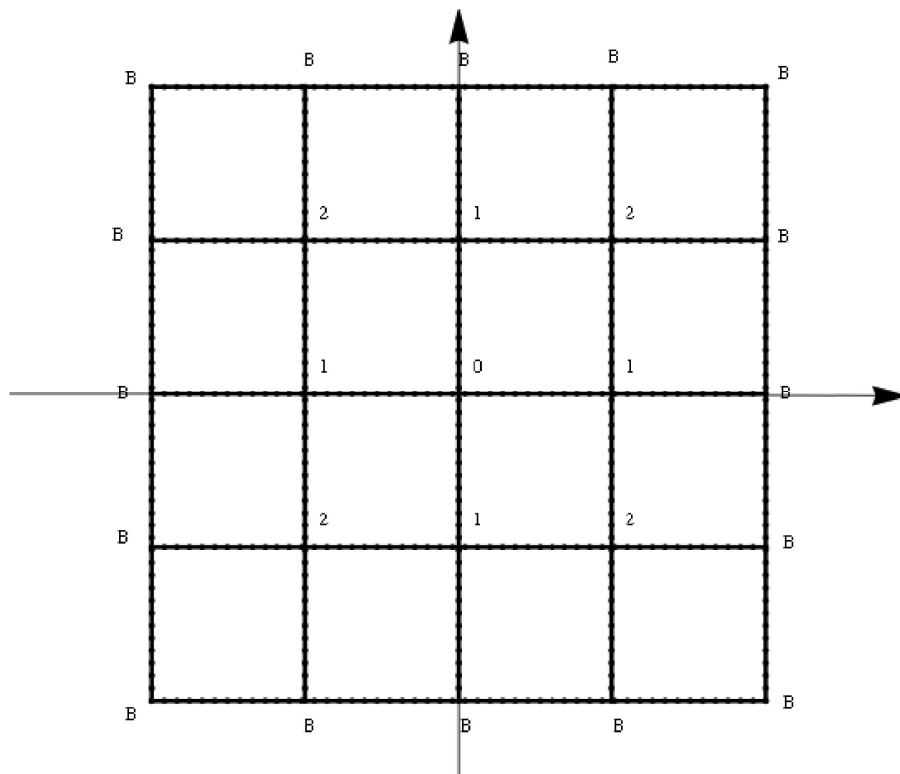
■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie I

On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$ avec :

- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , et B les points du bord du carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C , il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à se trouver à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M .
- 3) à tout instant n , si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1°) Etude d'une suite de variables aléatoires (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

- Expliquer brièvement pourquoi on a : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$.
- Expliciter de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.
- Exprimer chacun des 4 réels $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = B)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.
- Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

2°) Diagonalisation de la matrice M

- Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 .

On demande de déterminer les quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur U_1 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 1$ dont la dernière composante est égale à 1.
- le vecteur U_2 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_3 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_4 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 0$ dont la dernière composante est égale à 1.

- On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4 .

On note D la matrice diagonale $D = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1} .

3°) Lois des variables aléatoires X_n

Pour tout entier naturel n , on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

- Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n , qu'on a : $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.
- Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 .

Déterminer X tel que $P X = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

- En déduire $P^{-1} V_0$, puis $D^n P^{-1} V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.
- Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$, et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

4°) Temps d'attente pour atteindre le bord du carré

On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, pour la première fois, l'individu atteint le bord du carré C , c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé pour la première fois.

a) Montrer, pour tout entier naturel n , que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$, puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.

b) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2n)$ à l'aide des événements $(X_{2n} = B)$ et $(X_{2n-1} = 1)$.

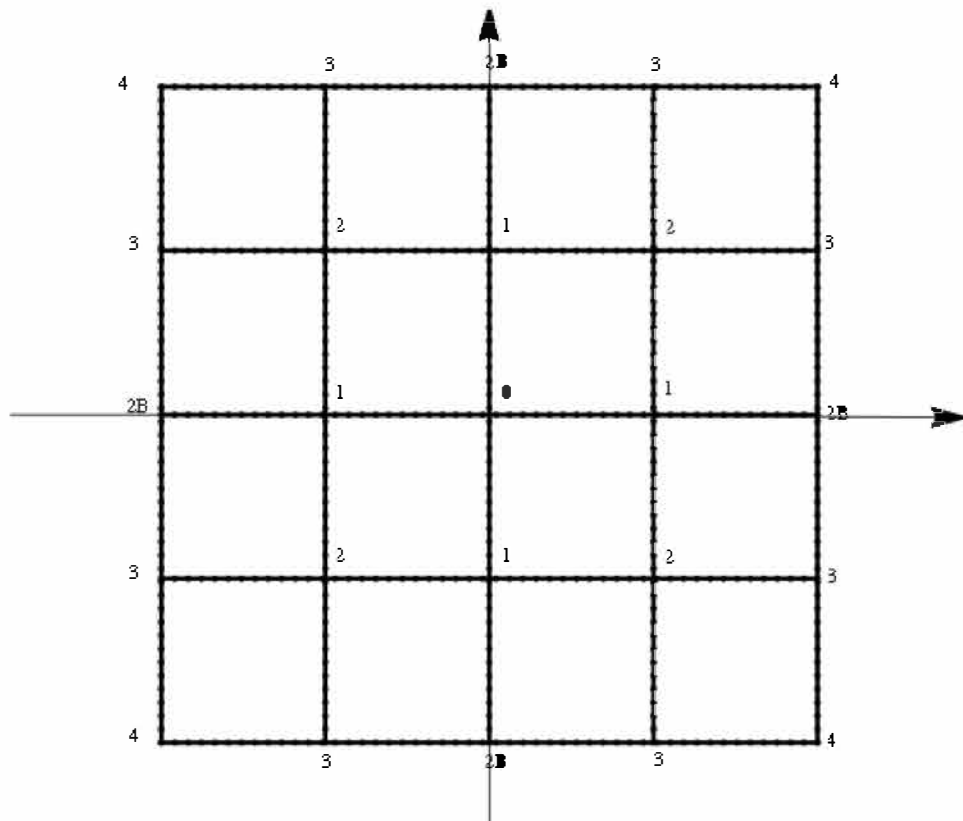
En déduire $\mathbb{P}(T = 2n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) Déterminer alors l'espérance de la variable aléatoire T .

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie II

On note maintenant les 25 points de la grille comme suit : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , 2B les points à 2 arêtes de 0 et appartenant au bord de C , 3 les points à 3 arêtes de 0, et 4 les points à 4 arêtes de 0.



Dans cette partie II, on ne suppose plus que l'individu arrête sa marche lorsqu'il atteint le bord de C et ses déplacements sur les 25 points de la grille se font désormais suivant les 2 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en $O(0, 0)$.
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à être à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des points M' de la grille distants d'une arête du point M .

On prendra garde au fait que selon les points M choisis parmi les 25 points de la grille, le nombre des points M' situés à une arête de M sur cette grille peut être égal à 2, 3 ou 4.

5°) Etude d'une suite de variables aléatoires (Y_n)

Pour tout entier naturel n , on note Y_n la variable aléatoire indiquant la position de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 2B, 3, 4\}$.

a) Expliciter $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 4)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.

b) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_n = 3) \\ \mathbb{P}(Y_n = 4) \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^6$ dont les composantes sont, de haut en bas, les réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.
Préciser V_0 , V_1 , V_2 , V_3 , puis $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \leq n \leq 3$, et vérifier enfin que $\mathbb{P}(Y_4 = 0) = \frac{7}{48}$.

6°) *Calcul des probabilités $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ de passage à l'origine*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres de M sont $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.

Etudier si la matrice M est diagonalisable.

b) Dans la suite, on désigne par P une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.

Expliciter la matrice $D = P^{-1} M P$, et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir que $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.

Déduire de cette formule l'existence de 4 nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma \left(\frac{\sqrt{11}}{6} \right)^n + \delta \left(-\frac{\sqrt{11}}{6} \right)^n.$$

c) En exploitant les valeurs de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \leq n \leq 4$ obtenues en 5°), calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(Y_{2n-1} = 0) = 0$ et que $\mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \frac{1}{10} + \frac{27}{55} \left(\frac{11}{36} \right)^n$.

7°) *Nombre moyen de passages en 0 entre les instants 1 et 2n*

Pour tout entier $k \geq 0$, on note O_{2k} la variable aléatoire valant 1 si l'individu est en 0 à l'instant $2k$ et 0 sinon, et pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_{2n} = O_2 + O_4 + \dots + O_{2n} = \sum_{k=1}^n O_{2k}$.

a) Qu'indique concrètement la valeur prise par la variable aléatoire S_{2n} ?

b) Calculer l'espérance de S_{2n} , et préciser deux réels a, b tels que $\mathbb{E}(S_{2n}) = an + b + o(1)$.

8°) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque n tend vers $+\infty$*

a) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = 1$ dont la 1ère composante est 1.

b) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = -1$ dont la 1ère composante est 1.

Dans la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M , on choisit pour 1ère et 2ème colonnes les vecteurs propres ainsi obtenus en 8.a) et 8.b).

(On ne précisera pas les 4 colonnes suivantes de P associées aux 4 autres valeurs propres de M).

c) On admettra qu'en résolvant le système d'équations $PX = V_0$, les deux premières composantes du vecteur solution $X = P^{-1} V_0$ sont égales à $\frac{1}{20}$.

Déduire des résultats précédents les limites des vecteurs V_{2n} et V_{2n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.

Expliciter les limites des probabilités des positions occupées par l'individu à l'instant $2n$ lorsque n tend vers $+\infty$, et à l'instant $2n+1$ lorsque n tend vers $+\infty$.



Samedi 04 Avril 2020

ÉPREUVES: MATHÉMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

Epreuve de mathématiques PT-TSI

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

■ PARTIE I : ETUDE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On considère une variable aléatoire X , à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n , dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = 2n) = \mathbb{P}(X = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

1°) *Résultats préliminaires*

a) Préciser le rayon de convergence et expliciter la somme des trois séries entières suivantes lorsqu'elles convergent (où l'on notera que la sommation démarre à $n = 1$) :

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, puis vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$, puis vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = 24$.

2°) *Calcul direct de l'espérance et de la variance de X*

a) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}}$.

b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .

c) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$.

d) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X^2)$ de X^2 , puis la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X .

3°) *Calcul de l'espérance de X à l'aide d'une fonction auxiliaire*

On considère, sous réserve de convergence, la fonction définie par $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$.

b) En déduire que G est définie pour $|x| < \sqrt{2}$, et qu'on a alors l'égalité :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n = \frac{x^2 + x^3}{2(2 - x^2)}.$$

c) Comparer $G'(1)$ et $\mathbb{E}(X)$, calculer $G'(x)$ et retrouver le résultat de la question 2.b).

d) Comparer $G''(1)$ et $\mathbb{E}(X(X-1))$, et sachant que $G''(1) = 24$, retrouver $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.

■ PARTIE II : ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

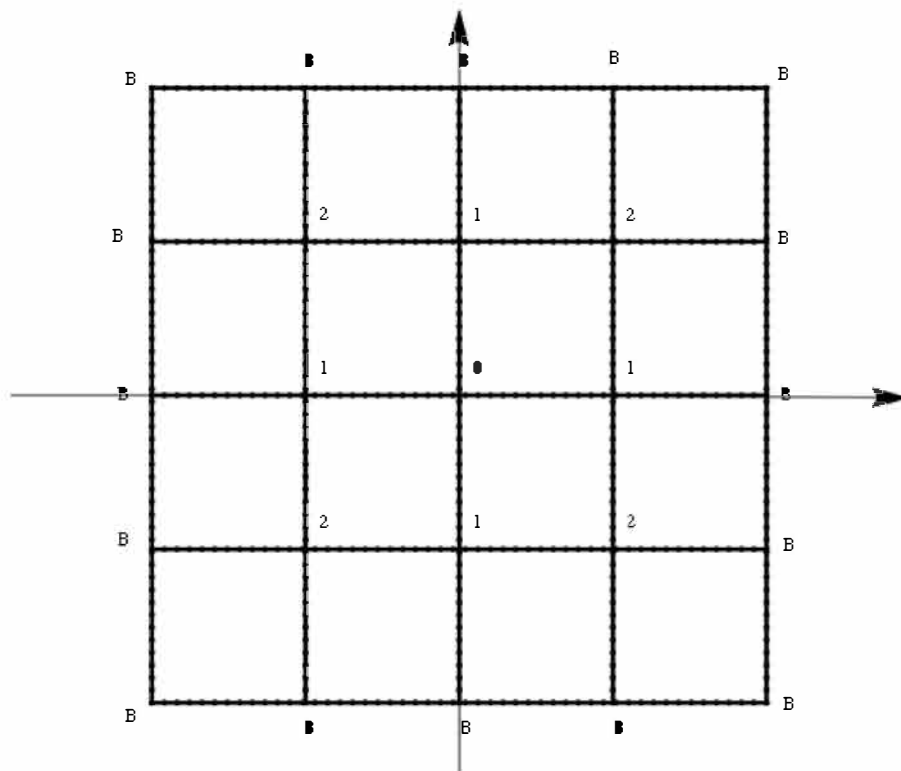
On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$ avec :

- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , et B les points du bord du carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C , il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à se trouver à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M .
- 3) à tout instant n , si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

4°) Etude d'une suite de variables aléatoires (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

a) Justifier brièvement les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) = 0, \quad \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 1.$$

En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2)$.

En déduire $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

c) En procédant de même :

- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

d) Déduire de ces résultats une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

5°) Diagonalisation de la matrice M

Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 .

a) Déterminer toutes les composantes des quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur propre U_1 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x, y, z, 1)$ associé à $\lambda = 1$.
(La dernière composante de U_1 est égale à 1).
- le vecteur propre U_2 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x, y, -6 + 4\sqrt{2}, 1)$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Les 2 dernières composantes de U_2 sont respectivement $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1).

- le vecteur propre U_3 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x, y, -6 - 4\sqrt{2}, 1)$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Les 2 dernières composantes de U_3 sont respectivement $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1).

- le vecteur propre U_4 de $\mathbb{R}^4$ de composantes $(x, y, z, 1)$ associé à $\lambda = 0$.
(La dernière composante de U_4 est égale à 1).

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4 .

On note D la matrice diagonale $D = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1} .

6°) Lois des variables aléatoires X_n

Pour tout entier naturel n , on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

a) Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n , qu'on a : $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.

b) Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 .

Déterminer X tel que $PX = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

c) En déduire $P^{-1}V_0$, puis $D^n P^{-1}V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = B)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

7°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, *pour la première fois*, l'individu atteint le bord du carré C , c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé *pour la première fois*.

a) Montrer, pour tout entier naturel n , que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Pour tout entier naturel n , en déduire $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T = k)$, puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.

c) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2n)$ à l'aide des événements $(X_{2n} = B)$ et $(X_{2n-1} = 1)$.

En déduire $\mathbb{P}(T = 2n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

e) Déduire des résultats de la partie I l'espérance et la variance de la variable aléatoire T .

Fin de l'épreuve



Samedi 04 Avril 2020

OPTION: MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

Epreuve de mathématiques

Ce sujet a pour objet l'étude de propriétés des solutions y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + e^t y = 0.$$

Le problème s'organise en trois parties relativement indépendantes : on étudie dans la partie I une solution particulière de l'équation (E), puis ensuite l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ (ces dernières sont en fait les restrictions à $\mathbb{R}_-$ des solutions sur $\mathbb{R}$). Dans la partie II on étudie le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de (E), et enfin dans la partie III, on étudie les zéros positifs des solutions de (E).

■ PARTIE I : Etude sur $\mathbb{R}_-$ des solutions de l'équation (E)

1°) Etude d'une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$

Dans cette question, on considère la somme de la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

- Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- On considère alors la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = S(e^t)$.
Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser sous forme d'une série $f''(t)$.
Expliciter alors sans signe $\sum$ l'expression $f''(t) + e^t f(t)$ et conclure.
- Déterminer la limite éventuelle de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
- En regroupant deux par deux les termes de la série définissant $f(t)$, démontrer que $f(t) > 0$ pour tout réel $t \leq 0$. En procédant par exemple de façon analogue, déterminer le signe de f' pour tout réel $t \leq 0$ et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_-$.

2°) Etude d'une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}_-$

Le résultat précédent établissant que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_-$ autorise à poser :

$$\forall t \leq 0, \quad g(t) = f(t) \int_t^0 \frac{d\tau}{f^2(\tau)}.$$

- Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ et en déduire $g''(t) + e^t g(t)$ pour $t \leq 0$.
- Préciser le signe de $g(t)$ pour $t \leq 0$ et démontrer l'équivalence $g(t) \sim -t$ quand t tend vers $-\infty$.

3°) Etude des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$

- Justifier l'indépendance linéaire de la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ et de g .
Expliciter la forme générale des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_-$.
- Préciser quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui ont une limite finie en $-\infty$, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui sont bornées, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui tendent vers $\pm\infty$ en $-\infty$.

■ PARTIE II : Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation (E)

4°) *Limite en $+\infty$ des solutions de (E)*

A toute solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E), on associe la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t) e^{t/5}$.

a) Exprimer y , y' , y'' en fonction des dérivées z , z' , z'' , puis en tenant compte du fait que y est solution de (E), exprimer z en fonction de z' et z'' .

b) En déduire l'égalité suivante pour tout $t \geq 0$:

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5} \int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}} d\tau - \int_0^t \frac{2 z'(\tau) z''(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}} d\tau.$$

c) A l'aide d'une intégration par parties de la dernière intégrale, en déduire pour tout $t \geq 0$:

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{25}{26} z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5} \int_0^t \frac{\left(e^\tau - \frac{4}{25}\right)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2} z'^2(\tau) d\tau.$$

d) En déduire que z est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on a pour tout $t \geq 0$:

$$|y(t)| \leq e^{-t/5} \sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26} z'^2(0)}.$$

Préciser alors la limite de toute solution y de (E) en $+\infty$.

■ PARTIE III : Etude des zéros sur $\mathbb{R}_+$ des solutions de l'équation (E)

5°) *Premières propriétés des zéros des solutions non nulles de (E)*

a) Rappeler l'énoncé précis du théorème de Cauchy-Lipschitz concernant l'équation linéaire (E).

b) Etant donné un réel t_0 , en déduire les solutions y de (E) vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.

En déduire que si une solution non nulle y de (E) s'annule en t_0 , elle change de signe en t_0 .

c) On suppose qu'il existe un segment $[a, b]$ ($a < b$) dans lequel une solution *non nulle* y de (E) s'annule une infinité de fois, de sorte qu'on peut construire une suite (t_n) de zéros deux à deux distincts de cette solution y appartenant à $[a, b]$.

- Justifier l'existence d'une suite $(t_{\varphi(n)})$ extraite de (t_n) qui converge vers un réel t de $[a, b]$.

- Justifier, pour tout entier naturel n , que y' s'annule au moins une fois en un réel $c_{\varphi(n)}$ dans l'intervalle ouvert $]t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}[$ ou $]t_{\varphi(n+1)}, t_{\varphi(n)}[$ selon l'ordre des réels $t_{\varphi(n)}$ et $t_{\varphi(n+1)}$.

- Montrer qu'on a $y(t) = y'(t) = 0$, puis en déduire que y est la solution nulle.

- Qu'en déduit-on?

6°) *Existence d'un zéro strictement positif d'une solution non nulle*

Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t y = 0$.

On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin(t)$ de l'équation $z'' + z = 0$.

a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t) z'(t) - y'(t) z(t)$ en fonction de y et z .

b) On suppose que y ne s'annule pas sur $]0, \pi]$ et garde un signe strictement positif par exemple (ce qu'il est possible de supposer, quitte à changer y en $-y$).

Préciser le signe de W' sur $]0, \pi[$, les valeurs de $W(0)$ et $W(\pi)$.

Conclure à une contradiction et en déduire que y s'annule au moins une fois dans $]0, \pi]$.

c) Compte tenu de l'ensemble des résultats précédents, justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement positif de y qu'on note désormais t_1 et qui appartient à $]0, \pi]$.

7°) *Existence d'une suite croissante de zéros d'une solution non nulle dans $\mathbb{R}_+$*

Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t y = 0$, et on désigne toujours par t_1 le plus petit zéro strictement positif de y .

On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{t_1}{2}}(t - t_1)\right)$ de l'équation $z'' + e^{t_1} z = 0$.

- a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$ en fonction de y et z .
- b) On suppose que y ne s'annule pas sur $]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi]$ et garde un signe qu'on peut toujours supposer strictement positif par exemple, quitte à changer y en $-y$.

Préciser le signe de W' sur $]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi[$ et les valeurs de $W(t_1)$ et $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi\right)$.

En déduire de même que y s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi]$.

- c) Justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement supérieur à t_1 de y qu'on note désormais t_2 et qui appartient à $]t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}}\pi]$.

- d) En déduire que les zéros strictement positifs de y peuvent être classés en une suite réelle (t_n) strictement croissante telle qu'on ait pour tout entier $n \geq 1$: $t_{n+1} - t_n \leq \pi e^{-\frac{t_n}{2}}$.

- e) On suppose la suite croissante (t_n) majorée, de sorte qu'elle converge vers une limite finie L .

Montrer que L est un zéro de y , et établir que y admet au moins un zéro dans $]L, L + e^{-\frac{L}{2}}\pi]$.

En déduire une contradiction, et montrer que $\lim t_n = +\infty$, puis que $\lim(t_{n+1} - t_n) = 0$.

- f) Donner l'allure de la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie I.



Samedi 17 Avril 2021

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2021

Epreuve de Mathématiques MP - PC - PSI

Dans ce problème, on considère un espace vectoriel réel E supposé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, et on se propose d'étudier les sommes de projecteurs de E qui commutent deux à deux. Dans la partie I, on traite un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans la partie II, on examine le cas général d'une somme de deux projecteurs qui commutent. Enfin, dans la partie III, on généralise l'étude au cas d'une somme de n projecteurs qui commutent deux à deux. Ces trois parties sont largement indépendantes.

■ PRÉLIMINAIRES

1°) On rappelle qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $f^2 = f$ et on convient de noter Id l'application Identité de E .

a) Etablir qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\text{Id} - p$ est un projecteur. Dans toute la suite de cette question, on suppose que p est un projecteur de E .

b) Montrer que $\text{Ker}(\text{Id} - p) = \text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Im}(\text{Id} - p)$.

c) A l'aide de l'égalité : $\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$, montrer que : $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

d) Ecrire la matrice de p dans une base de E obtenue par réunion de bases de $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$. En déduire que p est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicité en fonction de son rang.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3) , on considère les endomorphismes p et q dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Calculer les matrices P^2 et Q^2 .

b) Déterminer des bases de l'image et du noyau de chacun des deux endomorphismes p et q .

En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques des endomorphismes p et q .

c) Calculer enfin les produits PQ et QP .

3°) *Etude de l'endomorphisme $p + q$*

a) Ecrire la matrice $P + Q$ et déterminer son polynôme caractéristique.

b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $p + q$. Celui-ci est-il diagonalisable?

c) Préciser des vecteurs propres v_0, v_1, v_2 associés aux valeurs propres 0, 1, 2 de $p + q$.

On choisira ces vecteurs propres v_0, v_1, v_2 avec une première composante égale à 1.

d) En déduire une matrice inversible R telle que $R^{-1}(P + Q)R = D$ soit diagonale, et préciser D .

Déterminer les images des vecteurs v_0, v_1, v_2 par p et par q , et en déduire $R^{-1}PR$ et $R^{-1}QR$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans cette partie, on considère à nouveau un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, on note Id l'endomorphisme identité de E , et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

4°) *Etude des valeurs propres de $f = p + q$*

a) Exprimer f^2 et f^3 en fonction de p , de q , et de $p \circ q = q \circ p$.

En déduire des réels β et γ tels que : $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$.

b) Soit x un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à une valeur propre λ .

Préciser $f^2(x)$ et $f^3(x)$ en fonction de λ et x , puis montrer que : $\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \gamma \lambda = 0$.

c) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

5°) *Etude des sous-espaces propres de $f = p + q$*

a) Démontrer l'égalité : $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

En déduire l'égalité : $\text{Ker}(p + q - 2 \text{Id}) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

b) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\text{Ker}(p)$, $\text{Ker}(q)$, $\text{Im}(p)$, $\text{Im}(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?

Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.

c) Montrer l'inclusion : $\text{Im}(2f - f^2) \subset \text{Ker}(\text{Id} - f)$.

En vérifiant l'égalité : $x = (\text{Id} - f)^2(x) + (2f - f^2)(x)$, montrer que $\text{Ker}(\text{Id} - f) \subset \text{Im}(2f - f^2)$.

En déduire l'égalité $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im}(2f - f^2) = \text{Im}(p + q - 2p \circ q)$.

d) Calculer $(\text{Id} - 2p)^2$ et $(\text{Id} - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q)$.

En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme $f = p + q$*

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$.

Exprimer $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction de x_0 , x_1 , x_2 .

En déduire x_0 , x_1 , x_2 en fonction de x , $f(x)$, $f^2(x)$.

b) Etablir alors que : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$.

c) Etablir que l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0 , π_1 , π_2 associant à un vecteur x ses projections sur les sous-espaces $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(f - \text{Id})$, $\text{Ker}(f - 2 \text{Id})$ dans la direction de la somme des deux autres.

■ PARTIE III : SOMME DE n PROJECTEURS QUI COMMUTENT

On considère toujours un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 1$, et on étudie l'endomorphisme $f_n = \sum_{k=1}^n p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont n projecteurs de E commutant deux à deux, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$.

7°) *Co-diagonalisation de $p_1, p_2, \dots, p_n$*

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :

"Si n projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie commutent deux à deux, alors il existe une base de cet espace dans laquelle leurs n matrices sont diagonales."

a) Etablir que $\text{Im}(p_n)$ et $\text{Ker}(p_n)$ sont stables par p_k pour $1 \leq k \leq n$.

- b) En supposant l'hypothèse $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie pour un entier $n \geq 2$, établir qu'il existe :
- une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Im}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \dots, p_{n-1}$ sur $\text{Im}(p_n)$ sont diagonales.
 - une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(p_n)$ dans laquelle les matrices des endomorphismes induit par $p_1, \dots, p_{n-1}$ sur $\text{Ker}(p_n)$ sont diagonales.
- c) Décrire la forme des matrices de $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ et la matrice de p_n dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de E .
En déduire que l'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

8°) *Etude des valeurs propres de $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$*

- a) Décrire la forme de la matrice F_n de $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de E .
- b) En déduire que f_n est diagonalisable, préciser ses valeurs propres possibles, puis justifier l'égalité suivante : $E = \text{Ker}(f_n) \oplus \text{Ker}(f_n - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f_n - 2 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f_n - n \text{Id})$.
- c) Calculer le produit $f_n \circ (f_n - \text{Id}) \circ (f_n - 2 \text{Id}) \circ \dots \circ (f_n - n \text{Id})$.

9°) *Etude de certains sous-espaces propres de $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$*

- a) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour toute partie à k éléments $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer le produit $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k} \circ (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k})$ en fonction de $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k}$.
- b) On considère un vecteur $x \in \text{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)(x) = 0$.
Qu'obtient-on en composant cette égalité à gauche par $p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$?
- c) On considère un vecteur $x \in \text{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)(x) = 0$.
On suppose qu'il existe un entier $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que, pour toute partie $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant k éléments distincts, on ait : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_k}(x) = 0$.
Établir alors que, pour toute partie $\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant $k-1$ éléments distincts, on a :
$$p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \dots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0.$$

En déduire qu'on a : $p_1(x) = p_2(x) = \dots = p_n(x) = 0$.
- d) Établir l'égalité : $\text{Ker}(p_1 + p_2 + \dots + p_n) = \text{Ker}(p_1) \cap \text{Ker}(p_2) \cap \dots \cap \text{Ker}(p_n)$.
En déduire que : $\text{Ker}(p_1 + p_2 + \dots + p_n - n \text{Id}) = \text{Im}(p_1) \cap \text{Im}(p_2) \cap \dots \cap \text{Im}(p_n)$.
- e) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\text{Ker}(p_1), \dots, \text{Ker}(p_n)$ et $\text{Im}(p_1), \dots, \text{Im}(p_n)$ chacun des réels 0 et n est-il valeur propre de f_n ? Quels sont les sous-espaces propres associés?

10°) *Etude des projecteurs sur les sous-espaces propres de $f_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$*

A tout polynôme $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{R}[X]$, on associe l'endomorphisme $P(f_n)$ de E obtenu en substituant f_n à X dans P , et donc défini par : $P(f_n) = a_p f_n^p + \dots + a_1 f_n + a_0 \text{Id}$.

Si P et Q désignent deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on vérifie que :

$$(P + Q)(f_n) = P(f_n) + Q(f_n) \quad \text{et} \quad PQ(f_n) = P(f_n) \circ Q(f_n).$$

- a) Pour $0 \leq k \leq n$, démontrer qu'il existe un et un seul polynôme L_k de degré n vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\} : L_k(i) = 0 \quad \text{et} \quad L_k(k) = 1.$$

- b) Montrer que $L_0 + L_1 + \dots + L_n = 1$.

En déduire, pour tout $x \in E$, l'égalité (1) : $L_0(f_n)(x) + L_1(f_n)(x) + \dots + L_n(f_n)(x) = x$.

- c) En exploitant 8.c), établir, pour $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in E$, que : $L_k(f_n)(x) \in \text{Ker}(f_n - k \text{Id})$.
- d) En déduire que l'égalité (1) obtenue ci-dessus donne l'unique décomposition d'un vecteur $x \in E$ sur la somme directe des sous-espaces propres de f_n .
En déduire, si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est valeur propre de f_n , que $L_k(f_n)$ est le projecteur sur $\text{Ker}(f_n - k \text{Id})$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres de f_n . ■



Samedi 17 Avril 2021

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2021

Epreuve de Mathématiques PT - TSI

Les deux problèmes proposés ci-dessous sont indépendants.

■ PROBLÈME I : ETUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES

On considère dans le plan une droite $\mathcal{D}$ et un point F , situé à une distance $p > 0$ de la droite $\mathcal{D}$. On choisit désormais un repère orthonormé Oxy dans lequel la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{p}{2}$ et le point F a pour coordonnées $\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Dans la suite, la lettre t désigne toujours un réel quelconque.

1°) *Etude d'une parabole*

- a) Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère, pour tout réel t , les deux points suivants :
- le point $P(t)$, de coordonnées $(t, f(t))$.
 - le point $H(t)$, de coordonnées $\left(t, -\frac{p}{2}\right)$.

Pour tout réel t , établir que le point $P(t)$ est équidistant de la droite $\mathcal{D}$ et du point F si et seulement si l'on a : $f(t) = \frac{t^2}{2p}$.

Dans la suite de ce problème, la fonction f est désormais fixée par l'expression précédente.

- b) Tracer la courbe représentative $\mathcal{P}$ de l'application associant à tout réel t le point $P(t)$.
- c) Expliciter une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.
- d) Montrer que le triangle de sommets $P(t)$, F , $H(t)$ est isocèle en $P(t)$.
Préciser les coordonnées du point $I(t)$, milieu du côté $FH(t)$ de ce triangle.
Quelle est la courbe décrite par le point $I(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
- e) Vérifier que la droite $P(t)I(t)$ est la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.
En déduire que la tangente à la courbe $\mathcal{P}$ en $P(t)$ est, dans le triangle de sommets $P(t)$, F , $H(t)$, la hauteur issue du sommet $P(t)$ ainsi que la médiatrice du côté $FH(t)$.
- f) Ecrire l'équation de la normale passant par O à la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.
En déduire les coordonnées de la projection $M(t)$ de l'origine O sur la tangente $\mathcal{T}(t)$ à $\mathcal{P}$ en $P(t)$.

2°) *Etude de la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à son sommet O .*

On considère l'application associant à tout réel t le point $M(t)$ dont les coordonnées sont :

$$x(t) = \frac{t^3}{2(t^2 + p^2)} \quad ; \quad y(t) = \frac{-p t^2}{2(t^2 + p^2)}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette application associant au réel t le point $M(t)$.

- a) Déterminer pour tout réel t les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.
- b) Dresser un tableau de variation des fonctions x et y sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer la pente de la droite $M(0)M(t)$ et sa limite lorsque t tend vers 0.
En déduire quelle est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(0)$.
- c) Construire sur une même figure rapportée au repère Oxy les deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ dans le cas où la distance p est choisie égale à 2.

■ PROBLÈME II : SOMME DE DEUX PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans ce problème, on considère un espace vectoriel réel E supposé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, et on se propose d'étudier la somme de deux projecteurs de E qui commutent. Dans la partie I, on traite un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$, avant d'examiner le cas général dans la partie II.

■ PRÉLIMINAIRES

1°) On rappelle qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $f^2 = f$ et on convient de noter Id l'application Identité de E .

a) Etablir qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\text{Id} - p$ est un projecteur. Dans toute la suite de cette question, on suppose que p est un projecteur de E .

b) Montrer que $\text{Ker}(\text{Id} - p) = \text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Im}(\text{Id} - p)$.

c) A l'aide de l'égalité : $\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$, montrer que : $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

d) Ecrire la matrice de p dans une base de E obtenue par réunion de bases de $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$. En déduire que p est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicité en fonction de son rang.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3) , on considère les endomorphismes p et q dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Calculer les matrices P^2 et Q^2 .

b) Déterminer des bases de l'image et du noyau de chacun des deux endomorphismes p et q .

En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques des endomorphismes p et q .

c) Calculer enfin les produits PQ et QP .

3°) *Etude de l'endomorphisme $p + q$*

a) Ecrire la matrice $P + Q$ et déterminer son polynôme caractéristique.

b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $p + q$. Celui-ci est-il diagonalisable?

c) Préciser des vecteurs propres v_0, v_1, v_2 associés aux valeurs propres 0, 1, 2 de $p + q$.

On choisira ces vecteurs propres v_0, v_1, v_2 avec une première composante égale à 1.

d) En déduire une matrice inversible R telle que $R^{-1}(P + Q)R = D$ soit diagonale, et préciser D .

Déterminer les images des vecteurs v_0, v_1, v_2 par p et par q , et en déduire $R^{-1}PR$ et $R^{-1}QR$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans cette partie, on considère à nouveau un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, on note Id l'endomorphisme identité de E , et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

4°) Etude des valeurs propres de $f = p + q$

a) Exprimer f^2 et f^3 en fonction de p , de q , et de $p \circ q = q \circ p$.

En déduire des réels β et γ tels que : $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$.

b) Soit x un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à une valeur propre λ .

Préciser $f^2(x)$ et $f^3(x)$ en fonction de λ et x , puis montrer que : $\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \gamma \lambda = 0$.

c) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

5°) Etude des sous-espaces propres de $f = p + q$

a) Démontrer l'égalité : $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

En déduire l'égalité : $\text{Ker}(p + q - 2 \text{Id}) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

b) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\text{Ker}(p)$, $\text{Ker}(q)$, $\text{Im}(p)$, $\text{Im}(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?

Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.

c) Montrer l'inclusion : $\text{Im}(2f - f^2) \subset \text{Ker}(\text{Id} - f)$.

En vérifiant l'égalité : $x = (\text{Id} - f)^2(x) + (2f - f^2)(x)$, montrer que $\text{Ker}(\text{Id} - f) \subset \text{Im}(2f - f^2)$.

En déduire l'égalité $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im}(2f - f^2) = \text{Im}(p + q - 2p \circ q)$.

d) Calculer $(\text{Id} - 2p)^2$ et $(\text{Id} - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q)$.

En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $p \neq q$.

6°) Réduction de l'endomorphisme $f = p + q$

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$.

Exprimer $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction de x_0 , x_1 , x_2 .

En déduire x_0 , x_1 , x_2 en fonction de x , $f(x)$, $f^2(x)$.

b) Etablir alors que : $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$.

c) Etablir que l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0 , π_1 , π_2 associant à un vecteur x ses projections sur les sous-espaces $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(f - \text{Id})$, $\text{Ker}(f - 2 \text{Id})$ dans la direction de la somme des deux autres.



Samedi 17 Avril 2021

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2021

Option Mathématiques

On rappelle qu'un nombre réel est dit *rationnel* s'il appartient à $\mathbb{Q}$, et qu'il est dit *irrationnel* sinon. Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la fraction p/q est dite *irréductible* si les entiers p et q sont premiers entre eux, c'est à dire si leur PGCD est égal à 1.

Dans ce problème, on étudie le caractère rationnel ou irrationnel des réels du type $\cos(k\pi/(n+1))$ où k et n appartiennent à $\mathbb{N}$. On examine le cas particulier des réels $\cos(k\pi/5)$ dans la partie I, puis le cas général dans la partie II en exploitant une suite de polynômes (U_n) .

■ PARTIE I : Irrationalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour $\frac{k}{5}$ irréductible

1°) Recherche d'un polynôme à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine

a) Exprimer les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exprimer de même $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

b) Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

Calculer leur somme, puis en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$, puis expliciter à l'aide du réel $\sqrt{5}$ des expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

2°) Irrationalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ lorsque $\frac{k}{5}$ est irréductible

a) Démontrer que le réel $\sqrt{5}$ est irrationnel, puis que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.

b) Etablir, si $k \in \mathbb{N}$ et si $\frac{k}{5}$ est irréductible, que les réels $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ sont irrationnels.

■ PARTIE II : Irrationalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $\frac{k}{n+1}$ irréductible et $n > 2$

On considère la suite de polynômes à coefficients réels définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0(X) = 1, \quad U_1(X) = 2X \quad \text{puis :} \quad \forall n \geq 2, \quad U_n(X) = 2X U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X).$$

3°) Premières propriétés des polynômes U_n

a) Expliciter les expressions de $U_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, préciser la valeur de $U_n(0)$ en fonction de n .

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, vérifier que les coefficients de U_n sont entiers.

e) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, vérifier que U_n est pair si n est pair, et impair si n est impair.

4°) Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes U_n

a) Pour tout entier naturel n et tout réel θ non multiple de π , démontrer la relation suivante :

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

b) Préciser les valeurs de $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ en fonction de n .

c) En déduire que le polynôme U_n admet n racines réelles distinctes qu'on précisera, puis donner l'expression factorisée de $U_n(X)$.

5°) Racines rationnelles des polynômes U_n

On convient d'introduire la suite des polynômes (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n(X) = U_n\left(\frac{X}{2}\right)$.

Comme le degré de V_n est celui de U_n , on posera dans cette question : $V_n(X) = \sum_{j=0}^n \mu_j^{(n)} X^j$.

a) Expliciter les expressions de $V_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$.

b) Pour tout entier naturel n , établir que les coefficients du polynôme V_n appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Préciser en particulier le coefficient dominant $\mu_n^{(n)}$ de V_n .

Etablir pour $0 \leq j \leq n$ que le coefficient de X^j dans U_n est un entier multiple de 2^j .

c) On considère une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) racine du polynôme V_n .

En exploitant l'égalité $q^n V_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ dans $\mathbb{Z}$, démontrer que $q = 1$.

En déduire qu'une racine rationnelle de V_n appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

d) Démontrer que les seules racines rationnelles possibles de U_n appartiennent à $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

6°) Etude de l'irrationalité des réels $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $\frac{k}{n+1}$ irréductible

a) Déduire des résultats précédents que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$. Que dire si $0 \leq n \leq 2$?

b) Etablir plus généralement que $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$, $1 \leq k \leq n$, et $\frac{k}{n+1}$ irréductible.

c) Etablir enfin que $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$, $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{k}{n+1}$ irréductible.

7°) Coefficients dans la base canonique des polynômes U_n

a) En exploitant la relation obtenue à la question 4.a), démontrer que U_n est solution de l'équation différentielle suivante sur $] -1, 1[$, puis sur $\mathbb{R}$:

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

b) On convient de poser $U_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$.

Exprimer λ_{k+2} en fonction de λ_k et montrer qu'on a pour tout entier j tel que $0 \leq 2j \leq n$:

$$\lambda_{n-2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \binom{n-j}{j} \lambda_n.$$

c) En déduire l'expression de U_n dans la base canonique.



Samedi 9 avril 2022

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2022

Épreuve de Mathématiques MP - PC - PSI

Dans la partie I de ce problème, on étudie des intégrales dépendant d'un paramètre. Dans les parties II et III, on exploite le calcul intégral afin d'obtenir des relations entre différentes sommes de séries. Dans la partie IV, on applique les résultats ainsi obtenus à l'étude aux bornes d'une série entière. Les parties sont assez largement indépendantes à condition d'admettre certains résultats établis.

■ PARTIE I : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

On désigne par a un réel strictement positif et on se propose d'étudier pour tout réel x les intégrales :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i \pi x t} dt \quad ; \quad K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} \cos(\pi x t) dt.$$

1°) *Calcul de l'intégrale $J(0)$*

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Pour tout réel strictement positif a , en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

- a) Justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$ pour tout réel x .
- b) Etablir que la fonction J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner une expression intégrale de $J'(x)$.
- c) Etablir que la fonction J est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\pi x}{2a} y = 0$.
- d) En déduire la valeur de $J(x)$ pour tout réel x , puis montrer la convergence de $K(x)$ et l'égalité :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

■ PARTIE II : ÉTUDE DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

On désigne par g une application de classe C^2 définie de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{C}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(g) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x) \cos(2 \pi n x) dx.$$

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire*

Pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, on pose : $h(x) = \frac{g(x)-g(0)}{\sin(\pi x)}$.

a) Déterminer la limite L de $h(x)$ lorsque x tend vers 0.

On supposera désormais h prolongée par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en posant : $h(0) = L$.

b) Exprimer $h'(x)$ pour x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ et préciser sa limite L' lorsque x tend vers 0.

c) En déduire que h est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et préciser $h'(0)$.

4°) Calcul d'une somme trigonométrique

a) Vérifier par récurrence sur l'entier $p \geq 1$ qu'on a pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^p \cos(2\pi n x) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Cette égalité se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

b) En déduire la relation suivante pour tout entier naturel p : $\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx = 1$.

5°) Convergence et somme de la série $\sum a_n(g)$

a) Etablir la relation suivante pour tout entier $p \geq 1$:

$$a_0(g) + 2 \sum_{n=1}^p a_n(g) = g(0) + \int_{-1/2}^{+1/2} (g(x) - g(0)) \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx.$$

b) En exploitant les résultats de la question 3 et une intégration par parties, en déduire que :

$$a_0(g) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) = g(0).$$

■ PARTIE III : FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Dans toute cette partie, on désigne par a un réel strictement positif et on pose pour tout réel x :

$$f_a(x) = e^{-\pi a x^2} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k) + f_a(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$$

où $g_a(x)$ est défini sous réserve de convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$.

Et dans ce cas, on conviendra de noter plus simplement : $g_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_a(x+k)$.

6°) Propriétés de la fonction g_a

a) Etablir la convergence des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g_a est 1-périodique.

c) Justifier la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} e^{2k a \pi A}$ pour tout réel strictement positif A .

En déduire la convergence normale sur $[-A, A]$ des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$, puis la continuité de la fonction g_a sur $\mathbb{R}$.

d) Etablir que la fonction g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On établit de même, et on l'admettra, que la fonction g_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

7°) La formule sommatoire de Poisson et application

a) Justifier l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x) \cos(2\pi n x) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f_a(x+k) \cos(2\pi n x) dx.$$

b) En effectuant le changement de variables $t = x + k$, en déduire l'égalité suivante :

$$a_n(g_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) \cos(2\pi n t) dt.$$

A l'aide des résultats de la partie I, en déduire la valeur (sans signe intégral) de $a_n(g_a)$.

c) Déduire alors des résultats de la partie II que :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

d) En vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ que : $e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leq e^{-\frac{\pi n}{a}}$, en déduire qu'on a lorsque a tend vers 0 :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + o(1).$$

■ PARTIE IV : APPLICATION    L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

8  ) On considère la série entière de la variable réelle x définie par :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots$$

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière? Sur quel intervalle réel est-elle définie?

b) En posant $t = 1 - x$ avec $x \in]0, 1[$, démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \right) = 0$.

A l'aide des résultats de la partie III, établir qu'on a alors quand x tend vers 1 :

$$S(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{1-x}} + o(1).$$

c) En déduire un réel C tel qu'on a quand x tend vers 1 : $S(x^4) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} + o(1)$.

d) Exprimer, pour $|x| < 1$, la somme $S(x) + S(-x)$ en fonction de $S(x^4)$.

En déduire enfin que :

$$\lim_{x \rightarrow -1} S(x) = 0.$$



Samedi 9 avril 2022

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT - TSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2022

Épreuve de Mathématiques PT - TSI

■ EXERCICE I : CALCUL D'INTÉGRALES

On se propose d'étudier pour tout réel x l'intégrale suivante :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t} dt.$$

1°) *Calcul de l'intégrale $J(0)$*

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Justifier alors la convergence et préciser la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2°) *Une inégalité préliminaire*

a) Etablir pour tout réel $u \geq 0$ la double inégalité : $-u \leq \sin(u) \leq u$.

En déduire qu'on a : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$.

b) Pour tout réel u , établir que : $|e^{iu} - 1| = 2 \left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|$, puis en déduire que : $|e^{iu} - 1| \leq |u|$.

c) Pour tout réel x , calculer l'intégrale : $i \int_0^x (e^{iu} - 1) du$.

d) En déduire qu'on a pour tout réel x l'inégalité suivante (on commencera par le cas $x \geq 0$) :

$$|e^{ix} - 1 - ix| \leq \frac{x^2}{2}.$$

3°) *Dérivabilité de la fonction J*

a) Pour tout réel x , justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$.

b) En exploitant la question 2, établir l'inégalité suivante pour tous réels x, t, h :

$$\left| J(x+h) - J(x) - i\pi h \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t} dt \right| \leq \frac{\pi^2 h^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\pi t^2} dt.$$

c) En déduire que la fonction J est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a :

$$J'(x) = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{i\pi x t} dt.$$

4°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

a) A l'aide d'une intégration par parties de $J'(x)$, établir la relation suivante pour tout réel x :

$$J'(x) + \frac{\pi x}{2} J(x) = 0.$$

b) En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{\frac{\pi x^2}{4}} J(x)$, puis expliciter $J(x)$ sans symbole intégral.

c) Pour tout réel x , étudier enfin l'existence et la valeur de l'intégrale :

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(\pi x t) dt.$$

EXERCICE II : ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

On étudie (sous réserve de convergence) la série entière suivante de la variable réelle x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

où $\binom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial " n parmi $2n$ ".

1°) *Algorithme de calcul des coefficients $\binom{2n}{n}$ de la série entière définissant f*

a) Déterminer explicitement les coefficients $\binom{2n}{n}$ pour $0 \leq n \leq 5$ et préciser $\sum_{n=0}^{n=5} \binom{2n}{n} x^n$.

b) Déterminer pour tout entier naturel n le nombre rationnel r_n défini par l'égalité suivante :

$$\binom{2n+2}{n+1} = r_n \binom{2n}{n}.$$

c) En exploitant la relation ainsi obtenue, écrire un algorithme (en langage Python) permettant le calcul successif des coefficients $c_n = \binom{2n}{n}$ pour $0 \leq n \leq N$ où N est donné dans $\mathbb{N}$.

Que dire du nombre d'opérations effectuées pour obtenir ces coefficients?

2°) *Domaine de convergence de la série entière*

a) La série entière étudiée est-elle convergente pour $x = 1$? pour $x = -1$? Que vaut $f(0)$?

b) Vérifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 4$.

c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière étudiée.

3°) *Sommation de la série entière définissant la fonction f*

a) La fonction f est-elle dérivable sur $] -R, R[$?

Expliciter alors $f'(x)$ sous forme d'une série entière.

b) Exprimer $(1 - 4x) f'(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in] -R, R[$.

c) En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - 4x} f(x)$, puis expliciter $f(x)$ sans symbole Σ .

d) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1 - 4x}$ pour $x \in] -R, R[$.

4°) *Estimation des coefficients $\binom{2n}{n}$ de la série entière*

Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$ et : $v_n = \frac{\sqrt{n+1}}{4^n} \binom{2n}{n}$.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

b) Calculer u_1 et en déduire qu'on a pour $n \geq 1$: $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

c) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) .

Calculer v_0 , puis, pour tout entier $n \geq 1$, comparer v_n et v_0 .

Quelle inégalité en déduit-on pour $\binom{2n}{n}$?

d) En déduire l'encadrement suivant pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

Quelle est la nature de la série entière pour la valeur $x = 1/4$?



Samedi 9 avril 2022

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP- PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2022

Option Mathématiques

On considère un entier naturel $n \geq 3$ et, dans le plan complexe muni de sa structure euclidienne, n points distincts non alignés $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ d'affixes notés $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

On se propose d'étudier la fonction f associant à tout point M d'affixe z de ce plan complexe le réel :

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M_k M} \right\| \quad \text{ou de façon équivalente :} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|.$$

0°) *Preliminaire : l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité*

a) Démontrer, pour tous complexes z, z' , qu'on a l'inégalité : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

b) Démontrer qu'on a l'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si : $z = 0$ ou $\exists \mu \geq 0, z' = \mu z$.

1°) *Existence d'un minimum absolu de la fonction f sur le plan*

a) Vérifier pour tout complexe z l'inégalité suivante :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k| \geq n|z| - f(0).$$

En déduire qu'on a $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$, et qu'en particulier : $f(z) > f(0)$ pour $|z| > 2f(0)/n$.

b) Justifier l'existence d'un minimum m de f sur la boule fermée de centre 0 et de rayon $2f(0)/n$.

Montrer que ce minimum m est un minimum absolu de f sur le plan complexe, et que $m > 0$.

2°) *Unicité du point Ω où la fonction f réalise son minimum*

a) On désigne par f_k la fonction associant à tout complexe z le nombre réel $f_k(z) = |z - z_k|$.

Démontrer, pour tous complexes distincts z, z' et tout réel $\lambda \in]0, 1[$, l'inégalité suivante :

$$f_k(\lambda z + (1 - \lambda) z') \leq \lambda f_k(z) + (1 - \lambda) f_k(z').$$

Etablir que s'il y a égalité dans l'inégalité, les points M_k, M, M' d'affixes z_k, z, z' sont alignés.

b) En déduire, pour tous complexes distincts z, z' et tout réel $\lambda \in]0, 1[$, l'inégalité stricte suivante :

$$f(\lambda z + (1 - \lambda) z') < \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(z').$$

c) On suppose que f atteint son minimum absolu m en deux points distincts d'affixes ω et ω' .

Etablir, pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, l'inégalité : $f(\lambda \omega + (1 - \lambda) \omega') < m$.

En déduire que f atteint son minimum absolu m en un unique point Ω d'affixe noté ω .

d) On suppose successivement que l'ensemble $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ est stable par :

1. la symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ .

A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω appartient la droite Δ .

On pourra à cet effet raisonner par l'absurde en supposant que le point Ω n'est pas sur Δ , puis introduire le symétrique Ω' de Ω par rapport à Δ , et montrer que $f(\Omega') = f(\Omega)$.

2. la symétrie centrale par rapport à un point I .

A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω est le point I .

Si $n = 4$, déterminer ainsi le minimum de f lorsque $M_0 M_1 M_2 M_3$ forme un parallélogramme.

3. la rotation de centre I et de mesure $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$.

A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω est le point I .

Déterminer ainsi le minimum de la fonction f lorsqu'on a : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z_k = \exp\left(\frac{2k i \pi}{n}\right)$.

3°) Expression du gradient de la fonction f

Lorsque $z = x + iy$ avec x, y réels, on conviendra d'écrire indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$, et de même $f_k(z)$ ou $f_k(x, y)$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On a ainsi, en posant $z_k = x_k + iy_k$:

$$f_k(z) = |z - z_k| \quad \text{ou} \quad f_k(x, y) = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

- Etablir que le plan privé des points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ d'affixes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ est un ouvert U .
- Préciser les dérivées partielles de f_k sur U par rapport à ses deux variables x et y .
Etablir que les fonctions f_k sont de classe C^1 sur U .
Préciser l'affixe du gradient de f_k sur U en fonction du complexe $z - z_k$.
- Justifier que f est de classe C^1 sur l'ouvert U , puis préciser l'affixe de son gradient en fonction des complexes $z - z_0, z - z_1, \dots, z - z_{n-1}$.

4°) Recherche de l'unique point Ω où la fonction f admet son minimum

- Etablir que le minimum m de la fonction f peut être atteint soit en l'un des points M_k d'affixe z_k , soit (s'il existe) en un point d'affixe $z \notin \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ vérifiant la relation : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z - z_k}{|z - z_k|} = 0$.
- On suppose qu'il existe un tel point C d'affixe $c \notin \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c - z_k}{|c - z_k|} = 0$.
Etablir l'égalité suivante pour tout complexe z : $\sum_{k=0}^{n-1} |c - z_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z - z_k} \frac{c - z_k}{|c - z_k|}$.
En déduire que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(c) \leq f(z)$.
En conclure que C est alors l'unique point Ω en lequel f réalise son minimum absolu.
- Etablir qu'il existe au plus un tel complexe $c \notin \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c - z_k}{|c - z_k|} = 0$.
Ainsi, f atteint son minimum en ce point C s'il existe, et sinon en l'un des points $M_0, \dots, M_{n-1}$.

5°) Localisation du point Ω dans le cas d'un polygone convexe

- On considère une droite Δ du plan, un point M situé d'un côté de Δ (mais n'appartenant pas à Δ), un point A situé de l'autre côté de Δ , et le point M' symétrique de M par rapport à Δ .
Représenter ces éléments sur une même figure, ainsi que le point I d'intersection de AM et Δ .
En exploitant l'inégalité triangulaire, justifier l'inégalité : $AM' \leq AM$.
- On suppose que les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$, pris dans cet ordre, forment un polygone convexe.
En posant $M_n = M_0$, on montre que, pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ sont toujours dans un même demi-plan fermé F_i délimité par la droite $M_i M_{i+1}$, et l'intersection de ces n demi-plans fermés $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ est le polygone $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ (intérieur et côtés).
Déduire de 5.a) que le point Ω appartient à l'intérieur ou aux côtés du polygone $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$.

6°) Etude d'un exemple

On considère dans cette question un réel $x > 0$ et les trois points A, B, C d'affixes $i, x, -x$.

- Montrer que le point Ω appartient au segment OA où le point O désigne l'origine.
- Calculer $f(M_t)$ en fonction de t et x , où M_t est le point d'affixe it , avec $0 \leq t \leq 1$.
Pour quelle valeur de $t \in [0, 1]$ l'expression $f(M_t)$ est-elle minimale?
En déduire en fonction de x le point Ω minimisant la fonction f dans le cas de ce triangle ABC .
- Démontrer enfin qu'on a $\Omega = A$ si et seulement si l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$.



Samedi 8 avril 2023

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2023

Épreuve de Mathématiques MP – MPI – PC – PSI

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^{n,pm}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}_{2\pi}^n$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$, on définit sa **régularisée** $\tilde{f}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$;
- on pourra dire qu'une fonction est **normalisée** lorsqu'elle sera confondue avec sa régularisée ;
- l'ensemble des fonctions normalisées de $\mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$ sera noté $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{n,pm}$.

1 Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ pour f et g dans $\mathcal{C}^{0,pm}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est-il un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$? Justifier votre réponse.
3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$.

On muni $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}, \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ suivantes : $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$.

On pose $F_n = \text{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est orthogonale.
5. Déterminer la norme de c_n pour $n \in \mathbb{N}$ puis celle de s_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire une base orthonormée de F_n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $p_n(f)$, la projection orthogonale de f sur F_n .

2 Coefficients et série de Fourier

Soit f de $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, on définit $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ les **coefficients de Fourier** de f par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{cases}$$

On définit également $S(f)$ la **série de Fourier** de f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx))$$

et $S_n(f)$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, montrer que :

- si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$;
- si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$.

8. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et x un réel strictement positif. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$.
Que peut-on en déduire concernant $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$?

3 Intégrale de Dirichlet

On définit les intégrales suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.

9. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.
10. Montrer que $t \mapsto \frac{t - \sin t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et préciser le prolongement.
11. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - J_n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.
12. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

4 Théorème de Dirichlet

On fixe dans cette partie $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$.

13. Soit u un réel qui n'est pas un multiple de 2π . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.
14. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})(x-u)\right)}{2 \sin\left(\frac{x-u}{2}\right)} f(u) du$.
15. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(u+x) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du$.
16. Conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(u+x) + f(x-u)) du$.
17. On considère la fonction h définie par :

$$\forall u \in]0, \pi], h(u) = \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \left(\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \tilde{f}(x) \right)$$

Montrer que h est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

On pourra noter $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$.

On admet, pour la question 18 uniquement, le **lemme de Riemann-Lebesgue** :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,pm}([a, b]), \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$$

18. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du$ puis que $S(f)(x) = \tilde{f}(x)$.

5 Étude d'une fonction auxiliaire

On définit à présent $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$, $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$ et $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.

19. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
20. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{2}{x}G(x)$.
21. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = F(x) - H(x)$.
22. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $H'(x) = -G(x)$.
23. En déduire que F est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F''(x) = F(x)$.
24. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

6 Un développement en série de Fourier

Soient $a > 0$ et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{(x + 2n\pi)^2 + 4a^2}$.

25. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) + f_{-n}(x))$ et $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f'_n(x) + f'_{-n}(x))$ convergent normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.
26. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.
27. Montrer que f est paire, 2π -périodique et dans $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$.
28. Déterminer $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2nat)}{1+t^2} dt$.
29. En déduire une expression simple de $a_n(f)$ puis le développement en série de Fourier de f .
30. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(f)(x) = \tilde{f}(x)$ et en déduire que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)}\pi$.

Fin du sujet



Samedi 8 avril 2023

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT - TSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2023

Épreuve de Mathématiques PT – TSI

On note $\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ ceux de degré au plus n .

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par $\text{cd}(P)$ son coefficient dominant et par $\deg(P)$ son degré.

Problème – Polynômes de Tchebychev

1 Première partie – Quelques propriétés

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}i$. En déduire celles de $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}i$.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\frac{17}{8}$.
4. Montrer simultanément et par une récurrence double que $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ et $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que la fonction polynomiale associée à T_n a même parité que n .

On s'intéresse pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, aux polynômes P vérifiant la relation $(\star_n)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation $(\star_n)$.
9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de puissances de $\cos \theta$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$. On pourra dériver la relation $(\star_n)$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
12. En déduire l'ensemble des racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Seconde partie – Famille orthogonale

On considère l'application $\langle ., . \rangle$ définie par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

13. Montrer que $I_0 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente et vaut π .
14. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.
15. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire et définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_2 = \sqrt{\langle P, P \rangle}$.

16. Soit $I_n = \int_{-1}^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$ pour tout entier naturel n .

Justifier que les intégrales I_n existent puis montrer que $I_1 = I_3 = 0$ et que $I_2 = \frac{\pi}{2}$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos u$. On admettra par la suite que $I_4 = \frac{3\pi}{8}$.

17. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

18. Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et déterminer la norme de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.

3 Troisième partie – Courbes paramétrées

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal et on considère les courbes paramétrées (Γ_n) définies

pour $n \in \mathbb{N}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_n(t) = T_n(t) \\ y_n(t) = T_{n+1}(t) \end{cases}$.

19. Montrer que (Γ_n) passe par le point $(1, 1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

20. Montrer que les courbes (Γ_n) admettent un axe de symétrie que l'on précisera selon la parité de $n \in \mathbb{N}$.

21. Étudier les variations de x_3 et y_3 sur $\mathbb{R}^+$.

22. Donner l'allure de la courbe (Γ_3) . On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

4 Quatrième partie – Limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

On considère la série $R = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ et la suite de ses sommes partielles définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

23. Justifier que R converge vers une limite ℓ .

24. Déterminer des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.

25. En déduire que $\ell \leq 2$.

On considère à présent la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.

26. Exprimer R_{2n} en fonction de R_n et S_n .

En déduire que (S_n) converge vers une limite ℓ' puis exprimer ℓ' en fonction de ℓ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère à présent $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ les n racines de T_n avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

27. Montrer que T_n peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

En déduire que $\frac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - x_k}$.

28. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$.

29. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\sin \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$.

30. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \sin x \leq x \leq \tan x$.

31. En déduire un encadrement de S_n puis les valeurs des limites ℓ et ℓ' .

Fin du sujet



Samedi 8 avril 2023

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP- MPI - PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2023

Option Mathématiques

Pour tout nombre entier $N \geq 2$, on désigne par $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre N et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et par I_N la matrice-identité d'ordre N . La topologie de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.

L'objet de ce problème est l'étude, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, de la convergence et de la limite éventuelle de la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ associant à tout entier naturel k la matrice M^k .

■ PARTIE I : Exemples de suites géométriques matricielles

1°) *Cas où la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$*

- a) Etant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, établir que la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$ si et seulement si M est une matrice de projection.
- b) En déduire que toute matrice de projection M est limite d'une suite géométrique matricielle.

2°) *Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est orthogonale*

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *orthogonale* appartenant à $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- b) On suppose que la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L .

Montrer que L est inversible et, en considérant la suite $(M^{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, que $ML = LM = L$.

En déduire les matrices M et L .

- c) Quelles sont les suites géométriques matricielles $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergentes lorsque $M \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$?

3°) *Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est antisymétrique*

On note $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ les sous-espaces des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *antisymétrique* appartenant à $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- b) Etudier, selon la parité de l'entier naturel k , l'appartenance de M^k à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.
- c) On suppose que la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L . Déterminer L .

4°) *Etude de la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est symétrique*

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *symétrique* appartenant à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

- a) Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$ et de réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ tels que :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

- b) En déduire à quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les valeurs propres de M la suite matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente (et on notera alors L sa limite).

Préciser dans ce cas sa limite L sous la forme PDP^{-1} en explicitant D à l'aide de l'entier r égal à l'ordre de multiplicité de 1 si 1 est valeur propre de M , et à 0 si 1 n'est pas valeur propre de M . Indiquer enfin la nature géométrique de L .

5°) Etude de la suite $((\lambda I_N + U)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice U est nilpotente et $|\lambda| < 1$.

Dans cette question, on suppose que U est une matrice nilpotente appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont on note p l'indice de nilpotence (donc $U^{p-1} \neq 0$ et $U^p = 0$) et λ un complexe tel que $|\lambda| < 1$.

a) Montrer, si $\| \cdot \|$ désigne une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, qu'on a :

$$\forall k \geq p, \quad \|(\lambda I_N + U)^k\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \|U^i\|.$$

b) En déduire la limite de la suite matricielle $((\lambda I_N + U)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

■ PARTIE II : Convergence et limite d'une suite géométrique matricielle

6°) Recherche de la limite éventuelle d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice quelconque appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, et que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

a) Examiner la limite de la suite $(M^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et en déduire que $L^2 = L$. Qu'en conclut-on?

b) On considère un vecteur $y \in \text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N)$.

- Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^N$ tels que $y = Mx - x$ et montrer qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M^k y = M^k x - x.$$

- En déduire, si $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est muni d'une norme $\| \cdot \|$ subordonnée à une norme $\| \cdot \|$ de $\mathbb{K}^N$, que :

$$k \|y\| \leq \|M^k\| \|x\| + \|x\|.$$

- En déduire que $y = 0$, puis que : $\text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N) = \{0\}$.

- Etablir enfin l'égalité suivante :

$$\mathbb{K}^N = \text{Ker}(M - I_N) \oplus \text{Im}(M - I_N).$$

c) Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^N$, justifier l'existence de vecteurs $x_1 \in \text{Ker}(M - I_N)$ et $x_2 \in \mathbb{K}^N$ tels que $x = x_1 + Mx_2 - x_2$, puis montrer qu'on a pour tout entier naturel k :

$$M^k x = x_1 + M^{k+1} x_2 - M^k x_2.$$

En déduire qu'on a $Lx = Px$ où P est la matrice de la projection sur le sous-espace $\text{Ker}(M - I_N)$ dans la direction du sous-espace $\text{Im}(M - I_N)$.

Qu'en déduit-on sur la limite L ? Que dire de plus si 1 n'est pas valeur propre de M ?

7°) Conditions nécessaires de convergence d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice quelconque appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, et que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

a) Soit λ une valeur propre de la matrice M et $x \in \mathbb{C}^N$ un vecteur propre associé.

Etablir, pour tout entier naturel k , qu'on a : $M^k x = \lambda^k x$, et en déduire que la suite (λ^k) converge.

En déduire quelles sont les valeurs possibles des valeurs propres de la matrice M .

b) On suppose que 1 est valeur propre de M et on désigne par r son ordre de multiplicité (où $r \geq 1$).

- On considère un vecteur x appartenant à $\text{Ker}(M - I_N)^2$.

Montrer que $y = Mx - x$ appartient à $\text{Ker}(M - I_N) \cap \text{Im}(M - I_N)$, et que $y = 0$.

En déduire que $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^2$, puis que $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^k$ pour $k \geq 1$.

- En déduire l'égalité des sous-espaces propre et caractéristique de M associés à la valeur propre 1, autrement dit l'égalité $\text{Ker}(M - I_N) = \text{Ker}(M - I_N)^r$, puis l'égalité $\dim(\text{Ker}(M - I_N)) = r$.

8°) Conditions suffisantes de convergence d'une suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$

a) On considère un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie et on note f un endomorphisme de E dont λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité r .

- Montrer que le sous-espace caractéristique $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^r$ est stable par f .
- On note alors $\tilde{f}$ et $\tilde{\text{Id}}_E$ les endomorphismes induits par f et Id_E sur $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^r$.

Montrer que $\tilde{f} - \lambda \tilde{\text{Id}}_E$ est nilpotent, de sorte qu'on a $\tilde{f} = \lambda \tilde{\text{Id}}_E + u$ où $u \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent.

b) Dans cette question b), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et de multiplicité $r_1, r_2, \dots, r_p$ sont de module strictement inférieur à 1.

Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X I_N - M) = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \text{Ker}(M - \lambda_1 I_N)^{r_1} \oplus \text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}$.
- Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \text{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & \lambda_p I_{r_p} + N_p \end{pmatrix}$$

où $I_{r_1}, I_{r_2}, \dots, I_{r_p}$ sont les matrices identités de tailles respectives $r_1, r_2, \dots, r_p$,

et $N_1, N_2, \dots, N_p$ sont des matrices nilpotentes de tailles respectives $r_1, r_2, \dots, r_p$.

- En déduire dans ce cas la limite de la suite géométrique $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
- c) Dans cette question c), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont :
- $\lambda_1 = 1$, de multiplicité r_1 , et on suppose de plus qu'on a l'égalité : $\dim(\text{Ker}(M - I_N)) = r_1$.
 - $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, de multiplicité $r_2, \dots, r_p$, toutes de module strictement inférieur à 1.

Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X I_N - M) = (X - 1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \text{Ker}(M - I_N) \oplus \text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}$.
- En raisonnant comme ci-dessus, préciser dans ce cas la limite de la suite géométrique $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

d) On reprend les hypothèses et les notations de la question c) ci-dessus.

- Montrer l'inclusion : $\text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k} \subset \text{Im}(M - I_N)$ pour $2 \leq k \leq p$.

On pourra, si $x \in \text{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k}$, considérer l'égalité : $(M - I_N + (1 - \lambda_k) I_N)^{r_k} x = 0$.

- En déduire l'égalité : $\text{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p} = \text{Im}(M - I_N)$.
- A l'aide des résultats précédents de la question 8, retrouver alors le résultat de la question 6.c).

e) A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ la suite géométrique matricielle $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente, et que peut-on dire de sa limite?

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024

Épreuve de Mathématiques MPI – MP – PSI – PC

Exponentielle de matrices

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices et à son lien avec la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{cases}$$

pourra donc être représenté sous forme matricielle par : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.

- On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}), (PX(t))' = PX'(t)$.

1 Exemples de systèmes différentiels

On considère dans cette partie et dans la partie 4 uniquement les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX_1 , AX_2 et AX_3 .

2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P_A D P_A^{-1}$.

3. Déterminer P_A^{-1} .

4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = DX(t)$.

5. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.
6. Montrer que $\chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.
7. B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.
8. Déterminer $P_B \in GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B = P_B T P_B^{-1}$.
9. Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = TX(t)$.
10. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = BX(t)$.

2 Exponentielle de matrices : convergence et propriétés

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |A_{i,j}|$.

On définit pour tout entier naturel k le polynôme $E_k = \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} X^p$.

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} A^p \right)_{k \in \mathbb{N}}$.

11. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.
12. Montrer par récurrence que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall p \in \mathbb{N}^*, \|A^p\|_\infty \leq n^{p-1} \|A\|_\infty^p$.
13. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (E_k(A))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
14. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
15. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $e^A = Pe^BP^{-1}$.
16. En reprenant la matrice A de la partie 1, déterminer e^A .
17. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.
On pose $\forall N \in \mathbb{N}, \Delta_N = \left(\sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} B^j \right) - \sum_{k=0}^N \frac{(A+B)^k}{k!}$.
Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}, \Delta_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$ et en déduire que $e^{A+B} = e^A e^B$.
18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.

3 Calcul avec les polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ par : $L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$

On définit alors $\tilde{L}_f$ le **polynôme interpolateur de Lagrange** de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ par :

$$\tilde{L}_f(X) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) L_i(X)$$

$\tilde{L}_e$ sera donc le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

19. Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

20. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], P(X) = \tilde{L}_P(X)$.

21. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X], E_k(A) = R_k(A)$.

22. Montrer que e^A est un polynôme en A .

23. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$.
Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}[X], Q(M) = PQ(N)P^{-1}$.

24. Soit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = P^{-1} \tilde{L}_e(A) P$.

25. En déduire que $e^A = \tilde{L}_e(A)$.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X' = MX \Leftrightarrow X \in \{t \mapsto e^{tM} X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Dans cette partie on considère à nouveau les matrices A, B et T telles que définies dans la partie 1.

26. $E = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

27. En utilisant la question 25, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, e^{tA} = \frac{1}{6} (-3e^t(A + I_3)(A - 2I_3) + e^{-t}(A - I_3)(A - 2I_3) + 2e^{2t}(A + I_3)(A - I_3))$$

28. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} & e^t - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

29. Retrouver la réponse à la question 5.

30. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tT} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

31. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t - te^{2t} & te^{2t} & e^t - (t+1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

32. Retrouver la réponse à la question 10.

Fin du sujet

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024

Épreuve de Mathématiques PT – TSI

Exponentielle de matrices nilpotentes

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices nilpotentes et à la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

— Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.

— Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{cases}$$

pourra donc être représenté sous forme matricielle par $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.

— On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}), (PX(t))' = PX'(t)$.

On définit dans ce problème $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Étude d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dira que la matrice N est **nilpotente**.

Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N .

On notera par $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente. On déterminera également son indice de nilpotence.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) = \lambda^3$.
3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer X_1, X_2 et X_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $AX_1 = 0, AX_2 = X_1$ et $AX_3 = X_2$.
On choisira X_1, X_2 et X_3 de sorte que la 3^e coordonnée de X_1 soit 1 et que celle de X_2 et de X_3 soit nulle.
5. En déduire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on précisera, telle que $A = PTP^{-1}$.
On vérifiera que la seconde ligne de P a pour somme -4 .

6. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = TX(t)$.
7. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.
8. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.

En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Quelques propriétés des matrices nilpotentes

9. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ d'indice de nilpotence p . En justifiant qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0$, montrer que la famille $(X, MX, \dots, M^{p-1}X)$ est libre.
10. En déduire que $\forall M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}), M^n = 0_n$.
11. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{C})$ est-il un espace vectoriel ? On justifiera sa réponse.
12. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.
13. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.
14. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M a pour unique valeur propre 0. En déduire que $\det(M) = 0$.
15. Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer que N n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
16. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer que la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul sans pour autant être nilpotente.
17. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle (c'est-à-dire $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \geq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$).
En considérant $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est M , montrer par récurrence que la propriété « $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \varphi^k(e_i) = 0$ » est vérifiée pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
En déduire que $M^n = 0_n$.
18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M a pour unique valeur propre 0 alors M est nilpotente.

3 Exponentielle de matrices nilpotentes

On définit l'exponentielle de $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ par $e^M = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k$.

19. Soit $(M, N) \in (\mathcal{N}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$. Montrer que $e^M = Pe^N P^{-1}$.
20. Montrer que $e^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
21. Soit $N \in \mathbb{N}$.
On considère les matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies pour chaque entier $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et chaque entier $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
Montrer que $\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N M_{i,j} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=N-i+1}^N M_{i,j}$ et justifier que $\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^N \sum_{i=0}^s M_{i,s-i}$.
22. En déduire, en remarquant que $e^A e^B = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j \right)$, que $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent.
23. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^M est inversible et déterminer son inverse.
24. $E = \{e^M \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\}$ est-il un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

On appelle matrice **unipotente** toute matrice s'écrivant comme somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

25. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $X' = NX \Leftrightarrow X \in \{t \mapsto e^{tN} X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\}$.

26. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2 + 5t & \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1 & \frac{9}{2}t^2 + 6t \\ -\frac{1}{2}t^2 - 2t & -\frac{1}{2}t^2 - t & -\frac{3}{2}t^2 - 3t + 1 \end{pmatrix}$ puis retrouver la réponse à la question 8.

27. Soit :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$;
- $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t) + B(t)$;
- $X_p \in \mathcal{S}$.

Montrer que $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X - X_p \in \mathcal{S}_h$.

28. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 - t - 1 \\ -6t^2 - 2t - 4 \\ 3t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix}$

Déterminer une solution particulière sous la forme $X_p : t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}$ avec a , b et c trois réels.

En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.

Fin du sujet



Samedi 6 avril 2024

OPTION : MATHÉMATIQUES
MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI

DURÉE : 2 HEURES

Conditions particulières :
Calculatrice autorisée
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2024

Option Mathématiques

On se propose dans ce problème d'étudier la *transformation de Fourier* et l'inversion de celle-ci. A cet effet, on associe à toute fonction continue par morceaux et intégrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sa *transformée de Fourier* $T(f) = Tf$ et sa *transformée de Fourier conjuguée* $\bar{T}(f) = \bar{T}f$, qui sont deux fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t u} f(u) du \quad ; \quad \bar{T}f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t u} f(u) du = T f(-t).$$

1°) Un premier exemple de transformée de Fourier

On étudie ici la transformée de Fourier $F = Tf$ de la fonction $f : u \mapsto e^{-\pi u^2}$, définie donc par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2i\pi t u} du.$$

- a) Etablir que F est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et préciser $F'(t)$.
- b) Etablir la relation $F'(t) = -2\pi t F(t)$ pour tout nombre réel t .
- c) En déduire la transformée de Fourier $F = Tf$ de f en admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du = 1$.

2°) Un second exemple de transformée de Fourier

On étudie ici pour $n \in \mathbb{N}^*$ les transformées de Fourier des fonctions $g_n : u \mapsto \exp\left(-\frac{2\pi|u|}{n}\right)$.

- a) Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$, étudier l'existence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-au} du$.
- b) En déduire la transformée de Fourier Tg_n de la fonction g_n .

Vérifier que Tg_n est à valeurs positives, et pour tout réel $\alpha > 0$, préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|t| \geq \alpha} Tg_n(t) \right)$.

- c) Par convention, on pose dans ce problème : $\int_{|t| \geq \alpha} Tg_n(t) dt = \int_{-\infty}^{-\alpha} Tg_n(t) dt + \int_{\alpha}^{+\infty} Tg_n(t) dt$.

Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(t) dt = 1$, et pour tout réel $\alpha > 0$, préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} Tg_n(t) dt$.

3°) Premières propriétés de la transformation de Fourier

On considère dans cette question des fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec f continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et g continue, bornée, et intégrable sur $\mathbb{R}$ (on posera $\|g\|_\infty = \sup \{|g(x)| / x \in \mathbb{R}\}$).

- a) Etablir que la fonction Tf est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est bornée par le réel $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

- b) Justifier l'existence des deux intégrales suivantes pour tout réel x :

$$A(x) = \int_{-\infty}^x Tf(t) g(t) dt \quad ; \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^x e^{-2i\pi t u} g(u) du \right) dt.$$

- c) Justifier la dérivabilité et expliciter la dérivée des fonctions A et B .
- d) Déterminer les limites de $A(x)$ et $B(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis lorsque x tend vers $+\infty$.
- e) En déduire l'égalité $A(x) = B(x)$ pour tout réel x , puis la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) Tg(t) dt.$$

4°) *Inversion de la transformation de Fourier*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$, et dont la transformée de Fourier Tf est aussi supposée intégrable sur $\mathbb{R}$.

- a) En posant $g(u) = e^{2i\pi xu} g_n(u)$ où x désigne un réel et g_n l'une des fonctions introduites au 2° avec $n \geq 1$, puis en exploitant l'égalité obtenue à la question 3.e), établir que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t) e^{2i\pi xt} g_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \tau) Tg_n(\tau) d\tau.$$

En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t) e^{2i\pi xt} g_n(t) dt = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x + \tau) - f(x)) Tg_n(\tau) d\tau.$$

On se propose maintenant de déterminer la limite de chacun des deux membres de cette égalité.

- b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t) e^{2i\pi xt} g_n(t) dt$ en fonction de $\overline{T}(Tf)(x)$.

On suppose désormais que **le réel x est un point de continuité de la fonction f** , de sorte qu'on a :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \alpha > 0), (\forall \tau \in \mathbb{R}) : |\tau| \leq \alpha \implies |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

- c) Avec les notations introduites ci-dessus, établir, en découpant l'intervalle d'intégration, que :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x + \tau) - f(x)) Tg_n(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon + \left(\sup_{|\tau| \geq \alpha} Tg_n(\tau) \right) \|f\|_1 + |f(x)| \int_{|\tau| \geq \alpha} Tg_n(\tau) d\tau.$$

A l'aide des résultats obtenus au 2°, déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x + \tau) - f(x)) Tg_n(\tau) d\tau$.

- d) En déduire qu'en tout point de continuité x de la fonction f , on a l'égalité $\overline{T}(Tf)(x) = f(x)$.

5°) *Application à la recherche d'autres transformées de Fourier*

- a) En exploitant ces résultats, préciser la transformée de Fourier de la fonction $G_1 : u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$.

- b) On considère un nombre complexe a de partie réelle strictement positive et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions h_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $h_n(u) = \frac{u^n}{n!} e^{-au}$ si $u \geq 0$, et : $h_n(u) = 0$ si $u < 0$.

Déterminer Th_0 , puis plus généralement Th_n pour $n \in \mathbb{N}$.

- c) Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $H_n : u \mapsto \frac{1}{(a+2i\pi u)^{n+1}}$ pour $n \geq 1$?

Que peut-on dire du cas $n = 0$?



Samedi 12 avril 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI

DURÉE : 3 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

Exercice 1. Étude d'une équation fonctionnelle

Dans tout l'exercice $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, λ est un réel tel que $|\lambda| < 1$ et a est un réel quelconque.

On pose lorsque cela a un sens : $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$.

- Q1.** On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
- Q2.** On suppose dans cette question que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ notée ℓ .
- (a) Démontrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en fonction de ℓ .

Dans la suite, on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des applications f pour lesquelles il existe une constante K telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

On suppose désormais que f est un élément de $\mathcal{L}$.

- Q3.** Prouver que $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Q4.** Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B$.
- Q5.** En déduire que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.
- Q6.** (a) Démontrer que la fonction F appartient à $\mathcal{L}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - \lambda F(x + a) = f(x)$.
(b) Démontrer que F est l'unique élément $G \in \mathcal{L}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) - \lambda G(x + a) = f(x)$.
- Q7.** On suppose que f est la fonction constante définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.
Démontrer que $f \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.
- Q8.** On suppose que f est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.
Démontrer que $f \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.

Exercice 2. Pile je gagne, Face tu perds

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne « pile » avec probabilité $1/2$.

On effectue une infinité de fois des lancers successifs de cette pièce de manière indépendante.

On admet qu'on peut modéliser la situation par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note P_n (resp. F_n) l'évènement « le n -ième lancer donne pile (resp. face) ».

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et discrètes à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si X est l'une d'elles, on a donc $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Q9.** Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, démontrer que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$.

- Q10.** En utilisant une variable aléatoire de loi géométrique, démontrer que l'évènement « la pièce donne au moins une fois pile » est de probabilité 1.
- Q11.** Dans cette question on découpe les lancers par groupe de 3 lancers consécutifs et disjoints. On note alors Y la variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y = n$ lorsque la séquence PPF apparaît pour la première fois lors du $(n+1)$ -ième groupe de lancers (c'est-à-dire les lancers de rangs $3n+1$ à $3n+3$). Par exemple l'évènement $\{Y = 2\}$ est réalisé lorsque les 3 premiers lancers n'ont pas donné PPF, les lancers de rang 4 à 6 non plus, par contre aux lancers de rangs 7, 8 et 9 on a obtenu successivement « pile », « pile » et « face ».
- On dira aussi que $Y = +\infty$ lorsque la séquence PPF n'apparaît jamais.
- Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y+1$ et en déduire que la séquence PPF apparaît au moins une fois avec probabilité 1.

On admettra dans la suite que n'importe quelle séquence apparaît au moins une fois avec probabilité 1.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le mot PP pour la première fois. D'après la propriété admise on sait donc que $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$.

- Q12.** Pour k un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note A_k l'évènement « les $(k-1)$ -ième et k -ième lancers donnent pile ». Démontrer que :

$$\forall k \geq 4, \quad \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \leq k-2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k)$$

- Q13.** En déduire que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \geq k-1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k)$$

- Q14.** Rappeler le résultat du cours reliant l'espérance de Z et la série $\sum \mathbb{P}(Z \geq n)$.
L'utiliser pour démontrer que Z est d'espérance finie et déterminer sa valeur.

- Q15.** Établir que :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(Z = k+2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k+1)$$

et en déduire la fonction génératrice de Z .

Dans la suite deux joueurs appelés Alice et Bob s'affrontent lors des lancers de la pièce. Alice joue avec la séquence PPF et Bob avec la séquence FPP ; celui qui voit sa séquence apparaître en premier remporte la partie.

D'après le résultat admis la séquence PPFFPP apparaît au moins une fois avec probabilité 1 et donc la probabilité qu'un joueur soit déclaré gagnant est égale à 1 (c'est-à-dire que la partie ne peut pas durer une infinité de tours).

On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire égale au numéro du lancer à l'issue duquel Alice (resp. Bob) est déclaré(e) gagnant(e), si cela se produit, et à $+\infty$ si ce n'est pas Alice (resp. Bob) qui est déclaré(e) gagnant(e). On note aussi π_A (resp. π_B) la probabilité que Alice gagne (resp. Bob gagne), c'est-à-dire : $\pi_A = \mathbb{P}(X_A < +\infty)$ et $\pi_B = \mathbb{P}(X_B < +\infty)$.

- Q16.** On pose $T = \min(X_A, X_B)$. Que représente la variable aléatoire T ?
- Q17.** Soit $n \geq 2$. En remarquant que l'évènement $\{T \geq n+1\} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}$ correspond soit à la victoire d'Alice au lancer $n+3$, ou à celle de Bob au lancer $n+1$, ou encore à celle de Bob au lancer $n+2$, démontrer que :

$$\frac{1}{8}\mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(X_A = n+3) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_B = n+2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_B = n+1)$$

- Q18.** Soit $n \geq 2$. En procédant de même avec l'évènement $\{T \geq n+1\} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}$, démontrer que :

$$\frac{1}{8}\mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(X_B = n+3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1)$$

- Q19.** Démontrer que $\pi_A + \pi_B = 1$ puis calculer la valeur de π_A et π_B . Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3. Racines carrées de matrices

Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non nul, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Q20. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

Dans la suite, A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent : $AM = MA$.

On suppose aussi que A admet n valeurs propres distinctes.

Q21. Démontrer que toute colonne propre de A est aussi colonne propre de M .

Q22. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}MP$ sont toutes les deux diagonales.

Q23. On considère à nouveau la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$ selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la dernière question on suppose que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

Q24. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $M^2 = B$.



Samedi 12 avril 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PT - TSI

DURÉE : 3 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

■ Exercice : Racine carrée d'une matrice

Notons $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- 1) Justifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer les valeurs propres de A . Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?
- 3) La matrice A est-elle inversible ?
- 4) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

- 5) Déterminer une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\Delta^2 = D$.
- 6) En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$.

■ Problème : La formule des compléments d'Euler

Dans ce problème, on démontre une relation entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction sinus. Nous l'appliquons ensuite au calcul de l'intégrale de Gauss.

Dans tout le problème, la lettre a désignera un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Partie 1 : Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Considérons les intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_0^1 \frac{1}{t^a(1+t)} dt \quad \text{et} \quad J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)} dt.$$

- 1) Démontrer que l'intégrale $I(a)$ est convergente.
- 2) Démontrer que l'intégrale $J(a)$ est convergente.
- 3) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, démontrer que $J(a) = I(1-a)$.
- 4) Soit N un entier naturel.
 - (a) Démontrer que, pour tout réel t appartenant à $[0, 1]$, on a :

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} - (-1)^{N+1} \frac{t^{N+1}}{1+t}.$$

- (b) En déduire que :

$$I(a) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^{n-a} dt + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t} dt.$$

5) Démontrer que pour tout entier naturel N :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t} dt \leq \frac{1}{N+2-a},$$

puis déterminer la valeur de $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t} dt$.

6) Vérifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n-a+1}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $I(a)$.

7) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $J(a)$.

8) En déduire que :

$$I(a) + J(a) = \frac{1}{1-a} + 2(a-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (1-a)^2}.$$

On admet que l'on a la formule suivante, valable pour tout réel λ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\lambda}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}.$$

9) Conclure que : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)} dt = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$

Partie 2 : La fonction Gamma d'Euler

Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} \forall x > 0, & \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ \forall x \geq 0, & f_a(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^a(1+t)} dt \end{cases}.$$

10) Démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

11) (a) Démontrer que la fonction f_a est continue sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de $f_a(0)$.

(b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Démontrer que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée avec le symbole intégrale.

12) (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f_a(x) - f'_a(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale $f_a(x) - f'_a(x)$.

(b) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$0 \leq f_a(x) \leq \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$.

13) Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite du problème, on pose pour tout réel $x \geq 0$, $g_a(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} dt$.

- 14) (a) Démontrer que la fonction g_a est continue sur $[0, +\infty[$.
 (b) Démontrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée.
 15) (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$0 \leq g_a(x) \leq \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.$$

- (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x)$.

Partie 3 : La formule des compléments

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad \forall x > 0, \quad y(x) - y'(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

- 16) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).
 17) Démontrer que la fonction $h_a : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Gamma(1-a)e^x g_a(x) \end{cases}$ est une solution particulière de (E).
 18) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que :

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = \lambda e^x + h_a(x).$$

- 19) Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = h_a(x).$$

On pourra isoler λ et considérer la limite en $+\infty$ dans l'égalité précédente.

- 20) Dédurre de la question précédente que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(t+1)} dt = \Gamma(1-a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} dt.$$

- 21) Démontrer alors la formule des compléments :

$$\forall a \in]0, 1[, \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Partie 4 : Application au calcul de l'intégrale de Gauss

- 22) Déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
 23) Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ est convergente déterminer sa valeur.



Samedi 12 avril 2025

OPTION MATHÉMATIQUES
MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI

DURÉE : 2 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité d'ordre n est notée I_n , et $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

La topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.

Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $\mathcal{S}(M)$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M :

$$\mathcal{S}(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\}.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

1. Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose $E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et déterminer leurs inverses.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k A E_k^{-1}$ et $F_k A F_k^{-1}$.

(c) Montrer que la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

3. On suppose dans cette question que A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$.

Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(a) Soit $i \in \{1, 2\}$. En considérant la suite $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k \geq 0}$, montrer que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

(b) En déduire que $B \in \mathcal{S}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

4. On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et que A n'est pas une matrice scalaire.
- (a) Montrer que A est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
- (b) En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.
5. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur A pour que $\mathcal{S}(A)$ soit fermée.
6. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- (a) Montrer que le spectre réel de A est vide si, et seulement si, $4\det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$.
Dans la suite de la question 6., on suppose cette condition réalisée.
- (b) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A . Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de u dans cette base est :
- $$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}.$$
- (c) Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que B a à la fois la même trace et le même déterminant que A . En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
7. Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et considérer $u(e_1 + e_i)$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de u a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \|PMP^{-1}\| = \|M\| ?$$

Partie III : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - (a) Montrer que l'application $\left| \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ M & \mapsto \chi_M(X) \end{array} \right.$, qui à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique, est continue.
 - (b) Montrer que tout polynôme annulateur de A annule aussi B . En déduire que B est diagonalisable.
 - (c) Conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A , et on considère une base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ cette matrice.
 - (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{B}_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et écrire la matrice de u dans cette base en fonction des coefficients de T .
 - (b) En déduire que A est diagonalisable.

Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On pose $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(M) = \text{tr}(A)\}$.

Quelle est la structure de $\mathcal{T}$? Montrer que $\mathcal{T}$ est d'intérieur vide.
2. En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est d'intérieur vide.