00 MATH. I - MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit M l'ensemble des matrices complexes m d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m = \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Dans cette relation, a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$) est le nombre complexe conjugué de a (resp. b).

Partie préliminaire

0. **L'ensemble M est un espace vectoriel réel** :

Démontrer qu'en munissant l'ensemble M de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble M est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.

Démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient à M.

Soit I la matrice unité d'ordre 2. Soit m une matrice appartenant à l'espace vectoriel M ; la matrice transposée de la matrice m est notée ${}^t m$. Si p est un entier naturel, m^p est le produit de la matrice m p-fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit G le sous-ensemble des matrices g appartenant à l'espace M dont le déterminant est égal à 1 :

$$G = \{g \in M \mid \det g = 1\}.$$

Il est admis que l'ensemble G est, pour le produit des matrices, un groupe.

Soit U le sous-ensemble des matrices u de l'espace M antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité :

$$U = \left\{u \in M \mid u + {}^t u = 0,\ u^2 = -I\right\}.$$

Soit V le sous-ensemble des matrices symétriques v appartenant à l'espace M :

$$V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}.$$

Il est admis que le sous-ensemble V de M est un sous-espace vectoriel réel.

Soient m_1 et m_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel M ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m}_1.{}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante :

$$(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} Tr(\overline{m}_1.{}^t m_2) = \frac{1}{2} Tr(m_1.{}^t \overline{m}_2).$$

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m}_1.{}^t m_2$ et $m_1.{}^t \overline{m}_2$ est admise.

Il est admis que l'espace $(M, (. \mid .))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices m_1 et m_2, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous-espace vectoriel V de M est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de M.

Première partie

I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M :

Soit m une matrice de l'espace M ; démontrer que les matrices $m + {}^t\overline{m}$ et $m.{}^t\overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité I, du déterminant $\det m$, de la trace Trm de la matrice m.

Soit g une matrice appartenant à M ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices g^{-1} et ${}^t\overline{g}$.

Soit m une matrice de l'espace M dont la trace est nulle $(Trm = 0)$; établir la relation : $m = -{}^t\overline{m}$; calculer les matrices m^2, $({}^t m)^2$ en fonction du déterminant de la matrice m et de la matrice unité I.

I.2 Matrices u :

Déterminer les matrices u qui appartiennent à l'ensemble U défini ci-dessus.

Soit m une matrice de l'espace M, u une matrice de l'ensemble U. Comparer les deux produits de matrices : $m.u$ et $u.\overline{m}$. Démontrer que, lorsque la trace de la matrice m est nulle $(Trm = 0)$, les deux matrices $m.u$ et $u.m$ appartiennent au sous-espace vectoriel V.

I.3. Norme d'une matrice m :

Soit m une matrice de l'espace M ; calculer la norme de la matrice m $\left(\| m \| = \sqrt{(m \mid m)}\right)$ en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices m et w de l'espace M la norme $\| m.w \|$ du produit des matrices m et w avec le produit $\| m \| . \| w \|$ des normes de ces matrices.

I.4. Matrices appartenant à G :

a. Démontrer que toute matrice g appartenant au groupe G s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$g = I\ \cos\theta + m,$$

où θ est un réel appartenant au segment $[0, \pi]$ et m une matrice de trace nulle ($Trm = 0$) qui appartient à M.

Calculer, en fonction du réel θ, le déterminant de la matrice m, ainsi définie à partir de la matrice g, ainsi que le carré m^2 de la matrice m.

b. Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ($m \neq 0$) : démontrer que la matrice g_1 définie par la relation ci-dessous appartient au groupe G :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

I-5 Un sous-groupe de G :

Soit g_1 une matrice, de trace nulle ($Trg_1 = 0$), appartenant à G ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices m_θ définies par la relation suivante

$$m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta,$$

où θ est un réel quelconque appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit :

$$G(g_1) = \left\{ m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta \ \mid\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

a. Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe G.

b. Soit m une matrice de l'espace M ; la matrice exponentielle de la matrice m est définie par la relation

$$\exp m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ m^n.$$

Calculer la matrice $\exp(\theta.g_1)$.

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel V des matrices symétriques de M à l'aide d'une matrice du groupe G.

Dans toute cette partie, g est une matrice donnée du groupe G, de trace nulle ($Trg = 0$) ; étant donnée une matrice w appartenant au sous-espace vectoriel V soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$l_g(w) = g.w + w.{}^t g.$$

II-1. **L'endomorphisme** l_g **de** V :

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel V de l'espace vectoriel M. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que l'application $l_g : w \mapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. Démontrer que cet endomorphisme l_g n'est pas nul.

II-2. **Propriétés de l'endomorphisme** l_g :

a. Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \mapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \mapsto 2g.l_g(w)$. Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\| l_g(w) \|$ et $\| g.l_g(w) \|$.
Calculer, pour une matrice u de l'ensemble U, l'expression $l_g(g.u)$.

b. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques v et w de l'espace V, les produits scalaires $(l_g(v) \mid w)$ et $(v \mid l_g(w))$.
En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme l_g.

c. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice w de V, les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$ sont perpendiculaires.

II-3. Une base de l'espace V :
Etant données une matrice v de l'espace vectoriel V telle que son image par l'endomorphisme l_g soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice u de l'ensemble U (u appartient à M, est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient h_0 le produit des matrices g et u, h_1 l'image de la matrice v par l'application l_g, h_2 le produit des matrices g et h_1 :

$$h_0 = g.u,\ h_1 = l_g(v),\ h_2 = g.l_g(v).$$

a. Calculer les produits scalaires de la matrice u avec chacune des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2$, et des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2$, deux à deux :

$$(u \mid h_i),\ 0 \leq i \leq 2,\ (h_k \mid h_l), 0 \leq k \leq l \leq 2.$$

b. Démontrer que la suite des matrices $h_i,\ 0 \leq i \leq 2$, est une base de l'espace vectoriel V. Déduire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme l_g dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2} l_g$.

II-4. Un endomorphisme de l'espace vectoriel M :
Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit m_θ la matrice appartenant au groupe G (question I-5) définie par la relation suivante :

$$m_\theta = I\cos\theta + g\sin\theta.$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice w de l'espace vectoriel M, associe la matrice $m_\theta.w$:

$$s_\theta : w \mapsto m_\theta.w.$$

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices $u,\ h_0,\ h_1,\ h_2$.

Troisième partie

Soit m une matrice donnée de l'espace vectoriel M. A toute matrice w du sous-espace vectoriel V de M est associée la matrice $m.w.{}^t m$.

III-1. Endomorphisme ψ_m de l'espace V :
a. Démontrer que l'application $w \mapsto m.w.{}^t m$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. L'endomorphisme $w \mapsto m.w.{}^t m$ de V est noté ψ_m.
Calculer $m.u.{}^t m$ où u est une matrice de l'ensemble U.

b. Déterminer les matrices m de l'espace vectoriel M pour lesquelles l'application ψ_m est l'application identité.

III-2. Endomorphisme ψ_g :
Soit g une matrice, différente des matrices I (identité) et -I, appartenant au groupe G.

a. Démontrer, à l'aide de la question I-4, qu'il existe un réel θ appartenant à l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ et une matrice m, appartenant à M, différente de 0, de trace nulle, tels que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g = I\cos\theta + m \; ; \; \theta \in]0, \pi[, \; m \in M.$$

Soit γ la matrice définie à partir de la matrice m par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

b. Exprimer, pour toute matrice w de l'espace vectoriel V, la matrice $\psi_g(w)$ en fonction des matrices w, $l_\gamma(w)$, $\psi_\gamma(w)$ et du réel θ.

c. Soit v une matrice de l'espace vectoriel V telle que son image par l'application l_γ soit différente de 0 ($l_\gamma(v) \neq 0$). D'après la question II-3.b, la famille $\gamma.u$, $l_\gamma(v)$, $\gamma.l_\gamma(v)$ est une base de l'espace vectoriel V. Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme ψ_g dans cette base. Calculer le déterminant de cette matrice noté $\det \psi_g$. Caractériser la transformation géométrique définie par l'endomorphisme ψ_g.

III-3. **Endomorphisme** ψ_m :

Soit m une matrice, différente des matrices 0, I et $-I$, appartenant à l'espace vectoriel M. Démontrer qu'il existe une matrice g appartenant au groupe G telle que l'endomorphisme ψ_m soit proportionnel à l'isomorphisme ψ_g. En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme ψ_m.

FIN DU PROBLEME

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'établir que le réel ln2 est irrationnel.

1. **Fonction** h :

Soit la série entière de terme général $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ définie par la relation suivante :

$$u_n(x) = C_{2n}^n \, x^n.$$

Rappel : pour tout entier strictement positif n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est le cardinal de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments. Par convention : $C_0^0 = 1$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(x)$; la somme h de cette série entière est la fonction définie à l'intérieur de l'intervalle ouvert $]-R, R[$ par la relation :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n \, x^n.$$

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n(x)$.

b. Démontrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, la fonction h vérifie l'équation différentielle linéaire du premier degré.

$$(1 - 4x) \, h'(x) = 2 \, h(x).$$

c. En déduire l'expression de $h(x)$ sur l'intervalle ouvert $]-R,\ R[$.

2. **Fonctions** M_p :

Soit p un entier strictement positif ($p \geq 1$) ; soit M_p la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty, 1[$ par la relation :

$$M_p(x) = \frac{1}{(1-x)^p}.$$

Déterminer le développement en série entière de la fonction M_p dans un voisinage de 0. Exprimer le coefficient de x^k à l'aide de $C_{p+k-1}^{k}\left(= C_{p+k-1}^{p-1}\right)$

3. **Fonction** f :

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-6\,x+x^2}}.$$

a. Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ?

b. Déterminer pour quelles valeurs du réel x la relation suivante

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right).$$

est vérifiée. En déduire que, dans un voisinage de 0, la fonction f est égale à la somme d'une série de fonctions $f_n, n = 0, 1, 2, ...,$ définies par la relation :

$$f_n(x) = \lambda_n\, M_{2n+1}(x)\, x^n.$$

Les λ_n sont des scalaires qui seront déterminés ; il vient par suite :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, M_{2n+1}(x)\, x^n.$$

c. Déduire des résultats précédents l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Exprimer chaque coefficient a_n à l'aide de la somme d'une série. Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n, n = 0, 1, 2....$

d. Démontrer que la fonction f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0,$$

dans laquelle les deux fonctions a et b sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Les déterminer.

e. En déduire que les coefficients $a_n, n = 0, 1, 2, ...$ du développement en série entière de la fonction f vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence (**R**) suivante :

$$(\mathbf{R}) \qquad \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} - 3\,(2n+1)a_n + n\,a_{n-1} = 0.$$

Déterminer les coefficients $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.

4. **Fonction** g :

Le but de cette question est la recherche d'une fonction g qui possède les deux propriétés :

i. les valeurs de $g(0)$ et de $g'(0)$ sont données par les relations suivantes :

$$g(0) = 0,\ g'(0) = 1.$$

ii. le réel $g(x)$ est la somme d'une série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,$ dont les coefficients $b_n,\ n = 0,1,2,$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$(\mathbf{R}) \qquad \forall n \geq 1,\ (n+1)b_{n+1} - 3\,(2n+1)b_n + n\,b_{n-1} = 0.$$

a. Démontrer que les coefficients $b_n, n = 0,1,2,$ sont bien déterminés ; calculer $b_0,\ b_1,\ b_2$ et b_3.

En supposant le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,$ strictement positif, déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction g .

b. Etablir la relation :

$$g(x) = f(x).\int_0^x f(t)\,dt.$$

c. En déduire l'expression de chaque coefficient b_n au moyen des coefficients $a_k,\ k = 0,1,2,..,n$. En déduire une minoration du rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n\,x^n,\ n = 0,1,2,...$

d. Soit n un entier strictement positif ; soit d_n le plus petit commun multiple des n premiers entiers $1,2,...,n$. Démontrer que le réel $d_n.b_n$ est un entier relatif : $(d_n.b_n \in \mathbf{Z})$

5. **Etude des suites** $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **et** $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

Soit $(u_n)_{n=1,2,..}$ la suite des réels définis par la relation suivante : pour tout entier n strictement positif :

$$u_n = b_n\,a_{n-1} - b_{n-1}\,a_n.$$

a. Calculer u_1 et u_2. Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme u_{n+1} en fonction de l'entier n et de u_n. Etudier le signe des réels $u_n,\ n = 1,2,...,$ et la monotonie de cette suite. Déterminer le plus petit des majorants C de cette suite.

b. Démontrer que la suite des nombres réels $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie et strictement croissante ; déterminer, pour tout entier n strictement positif une majoration de la différence

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$$

à l'aide de la constante C et des deux réels a_n et a_{n-1}. En déduire que la suite $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. Soit λ la limite de cette suite :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

6. **Détermination de la limite** λ :

Soit ε un réel strictement positif donné. D'après la question précédente, il existe un entier N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, le rapport b_n/a_n est encadré par $\lambda - \varepsilon$ et $\lambda + \varepsilon$:

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

a. Démontrer que, lorsque le réel x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures, les deux fonctions f et g croissent vers l'infini.

Soient f_N, g_N, U_N et V_N les fonctions définies par les relations suivantes :

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,\ g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n,\ U_N(x) = f(x) - f_N(x),\ V_N(x) = g(x) - g_N(x).$$

b. Démontrer, lorsque le réel x est compris entre 0 et $3-\sqrt{8}$ $\left(x \in \left[0,\ 3-\sqrt{8}\right[\right)$, l'encadrement suivant :

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{V_N(x)}{U_N(x)} \leq \lambda + \varepsilon.$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel N donné, il existe une constante A qui majore les deux fonctions f_N et g_N sur le segment $\left[0,\ 3-\sqrt{8}\ \right]$.

En déduire que la fonction $x \mapsto g(x)/f(x)$ a pour limite λ lorsque le réel x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures.

d. Déterminer le réel λ en admettant la relation ci-dessous :

$$\int_0^{3-\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{1 - 6x + x^2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

7. **Un équivalent du réel** a_n **à l'infini** :

Soit α un réel strictement positif donné ; soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des réels définis par la relation suivante :

$$v_n = n^{\alpha}.a_n.$$

a. Démontrer qu'il est possible de choisir le réel α et deux suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$, qui ont chacune, lorsque l'entier n croît vers l'infini, une limite finie, tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation de récurrence suivante

$$v_{n+1} - 6\,v_n + v_{n-1} = \frac{1}{n^2}(A_n.v_n + B_n.v_{n-1}).$$

b. Soit $(w_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ la suite qui vérifie les relations suivantes

$$w_0 = 0,\ w_1 = 3,\ \forall n \geq 1,\ w_{n+1} - 6\,w_n + w_{n-1} = 0.$$

Déterminer les réels w_n ; en déduire un infiniment grand équivalent à w_n à l'infini.

c. En admettant que les deux réels v_n et w_n sont équivalents à l'infini, en déduire un infiniment grand équivalent à a_n lorsque l'entier n croît indéfiniment.

8. **Le réel** $\ln 2$ **n'est pas rationnel** :
Soit u le réel défini par la relation :

$$u = \ln\left(3 + \sqrt{8}\,\right).$$

a. Démontrer l'existence d'un entier N_1 et d'une constante positive K_1, tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_1, il vienne :

$$\frac{1}{2}K_1\frac{e^{n\,u}}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq 2\,K_1\frac{e^{n\,u}}{\sqrt{n}}.$$

b. A l'aide de la majoration démontrée à la question 5.d, établir qu'étant donné un réel a strictement compris entre 0 et 2 ($0 < a < 2$), il existe une constante K_2, telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_1, l'encadrement ci-dessous a lieu :

$$0 \leq \lambda - \frac{b_n}{a_n} \leq K_2\,e^{-a\,n\,u}.$$

c. Il est admis que le nombre $N(n)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier n donné est un infiniment grand équivalent à $\frac{n}{\ln n}$:

$$N(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

En déduire qu'il existe un entier N_2 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_2 ($n \geq N_2$), la relation ci-dessous ait lieu.

$$d_n \leq e^{1,1.n}.$$

d. Soient p_n et q_n les entiers (premiers entre eux) définis par les relations suivantes :

$$p_n = d_n.b_n \quad ; \quad q_n = d_n.a_n.$$

Démontrer l'existence d'un réel r, strictement positif, d'une constante K_3 et d'un entier N_3 tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à N_3, l'encadrement ci-dessous ait lieu.

$$0 \leq \lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{K_3}{(q_n)^{r+1}}.$$

Le résultat ci-dessous est admis :

$$0,61 < \frac{u}{u+1,1} < 0,62.$$

e. Démontrer que, si λ est rationnel, il existe une constante L, strictement positive, ne dépendant que du rationnel λ, pour laquelle l'inégalité ci-dessous est vérifiée.

$$\left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{L}{q_n}.$$

f. En déduire que le réel $\ln 2$ est irrationnel.

FIN DU PROBLÈME

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PSI.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit M l'ensemble des matrices complexes m d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m = \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Dans cette relation, a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$) est le nombre complexe conjugué de a (resp. b).

Partie préliminaire

0. **L'ensemble M est un espace vectoriel réel** :

Démontrer qu'en munissant l'ensemble M de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble M est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.

Démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient à M.

Soit I la matrice unité d'ordre 2. Soit m une matrice appartenant à l'espace vectoriel M ; la matrice transposée de la matrice m est notée ${}^t m$. Si p est un entier naturel, m^p est le produit de la matrice m p-fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit G le sous-ensemble des matrices g appartenant à l'espace M dont le déterminant est égal à 1 :

$$G = \{g \in M \mid \det g = 1\}.$$

Il est admis que l'ensemble G est, pour le produit des matrices, un groupe.

Soit U le sous-ensemble des matrices u de l'espace M antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité :

$$U = \left\{u \in M \mid u + {}^t u = 0,\ u^2 = -I\right\}.$$

Soit V le sous-ensemble des matrices symétriques v appartenant à l'espace M :

$$V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}.$$

Il est admis que le sous-ensemble V de M est un sous-espace vectoriel réel.

Soient m_1 et m_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel M ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m}_1.{}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante :

$$(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} Tr(\overline{m}_1.{}^t m_2) = \frac{1}{2} Tr(m_1.{}^t \overline{m}_2).$$

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m}_1.{}^t m_2$ et $m_1.{}^t \overline{m}_2$ est admise.

Il est admis que l'espace $(M, (. \mid .))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices m_1 et m_2, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous-espace vectoriel V de M est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de M.

Première partie

I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M :

Soit m une matrice de l'espace M ; démontrer que les matrices $m + {}^t\overline{m}$ et $m.{}^t\overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité I, du déterminant $\det m$, de la trace Trm de la matrice m.

Soit g une matrice appartenant à M ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices g^{-1} et ${}^t\overline{g}$.

Soit m une matrice de l'espace M dont la trace est nulle $(Trm = 0)$; établir la relation : $m = -{}^t\overline{m}$; calculer les matrices m^2, $({}^t m)^2$ en fonction du déterminant de la matrice m et de la matrice unité I.

I.2 Matrices u :

Déterminer les matrices u qui appartiennent à l'ensemble U défini ci-dessus.

Soit m une matrice de l'espace M, u une matrice de l'ensemble U. Comparer les deux produits de matrices : $m.u$ et $u.\overline{m}$. Démontrer que, lorsque la trace de la matrice m est nulle $(Trm = 0)$, les deux matrices $m.u$ et $u.m$ appartiennent au sous-espace vectoriel V.

I.3. Norme d'une matrice m :

Soit m une matrice de l'espace M ; calculer la norme de la matrice m $\left(\| m \| = \sqrt{(m \mid m)}\right)$ en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices m et w de l'espace M la norme $\| m.w \|$ du produit des matrices m et w avec le produit $\| m \| . \| w \|$ des normes de ces matrices.

I.4. Matrices appartenant à G :

a. Démontrer que toute matrice g appartenant au groupe G s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$g = I\ \cos\theta + m,$$

où θ est un réel appartenant au segment $[0, \pi]$ et m une matrice de trace nulle ($Trm = 0$) qui appartient à M.

Calculer, en fonction du réel θ, le déterminant de la matrice m, ainsi définie à partir de la matrice g, ainsi que le carré m^2 de la matrice m.

b. Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ($m \neq 0$) : démontrer que la matrice g_1 définie par la relation ci-dessous appartient au groupe G :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

I-5 Un sous-groupe de G :

Soit g_1 une matrice de trace nulle ($Trg_1 = 0$) appartenant à G ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices m_θ définies par la relation suivante

$$m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta,$$

où θ un réel quelconque appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit :

$$G(g_1) = \left\{ m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta \ \mid\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe G.

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel V des matrices symétriques de M à l'aide d'une matrice du groupe G.

Dans toute cette partie, g est une matrice donnée du groupe G, de trace nulle ($Trg = 0$) ; étant donnée une matrice w appartenant au sous-espace vectoriel V soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$l_g(w) = g.w + w.{}^t g.$$

II-1. **L'endomorphisme** l_g **de** V :

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel V de l'espace vectoriel M. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que l'application $l_g : w \mapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. Démontrer que cet endomorphisme l_g n'est pas nul.

II-2. **Propriétés de l'endomorphisme** l_g :

a. Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \mapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \mapsto 2g.l_g(w)$. Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\| l_g(w) \|$ et $\| g.l_g(w) \|$.

Calculer, pour une matrice u de l'ensemble U, l'expression $l_g(g.u)$.

b. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques v et w de l'espace V, les produits scalaires $(l_g(v) \mid w)$ et $(v \mid l_g(w))$.

En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme l_g.

c. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice w de V, les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$ sont perpendiculaires.

II-3. **Une base de l'espace** V :

Etant données une matrice v de l'espace vectoriel V telle que son image par l'endomorphisme l_g soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice u de l'ensemble U (u appartient à M, est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient h_0 le produit des matrices g et u, h_1 l'image de la matrice v par l'application l_g, h_2 le produit des matrices g et h_1 :

$$h_0 = g.u,\ h_1 = l_g(v),\ h_2 = g.l_g(v).$$

a. Calculer les produits scalaires de la matrice u avec chacune des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2,$ et des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2,$ deux à deux :

$$(u \mid h_i),\ 0 \leq i \leq 2,\ (h_k \mid h_l), 0 \leq k \leq l \leq 2.$$

b. Démontrer que la suite des matrices $h_i,\ 0 \leq i \leq 2,$ est une base de l'espace vectoriel V. Déduire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme l_g dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2} l_g$.

II-4. **Un endomorphisme de l'espace vectoriel** M :

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit m_θ la matrice appartenant au groupe G (question I-5) définie par la relation suivante :

$$m_\theta = I\cos\theta + g\sin\theta.$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice w de l'espace vectoriel M, associe la matrice $m_\theta.w$.

$$s_\theta : w \mapsto m_\theta.w.$$

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices $u,\ h_0,\ h_1,\ h_2$.

FIN DU PROBLEME

00 MATH. II - PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURDS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de certaines équations différentielles du type suivant :

(**E**) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

Première partie

L'objet de cette partie est l'étude de l'équation différentielle :

(**E**$_1$) $$y''(t) + e^{i\,t}\, y(t) = 0.$$

I.1. Caractérisation d'une solution périodique :

Démontrer qu'une fonction f, définie sur toute la droite réelle, solution de l'équation différentielle (**E**$_1$), est 2π-périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée f', mêmes valeurs en 0 et en 2π :

$$f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi)$$

I.2. Construction d'une solution périodique :

Soit f une fonction 2π-périodique solution de l'équation différentielle (**E**$_1$) ; soit $c_n(f), n \in \mathbf{Z}$, ses coefficients de Fourier.

$$\text{pour tout entier relatif } n : c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\, dt.$$

a. Démontrer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que, pour tout

réel t,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{i\,n\,t}.$$

b. Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée seconde $f\,''$ de f en fonction de ceux de f. En déduire, à l'aide de l'équation différentielle, la relation de récurrence qui lie $c_n(f)$ à $c_{n-1}(f)$.

c. Préciser la valeur du coefficient de Fourier $c_{-1}(f)$; en déduire la valeur de tous les coefficients de Fourier de rang strictement négatif. Calculer les coefficients de Fourier de rang positif en fonction de $c_0(f)$. En déduire l'expression de la fonction f.

I.3. Inégalité vérifiée par la fonction f et sa dérivée $f\,'$:

a. Soit h un réel strictement positif ; établir une majoration du module des deux nombres complexes C et D, définis ci-dessous par les relations :

$$C = f(t+h) - f(t) - h\,f\,'(t) \quad ; \quad D = f(t-h) - f(t) + h\,f\,'(t).$$

en fonction de la norme de la convergence uniforme de la fonction f : $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$.

b. Déduire des deux inégalités obtenues la relation :

$$\|f\,'\|_\infty \leq \sqrt{2}\ \|f\|_\infty.$$

Deuxième partie

Soit $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ la suite des fonctions définies sur la droite réelle par la relation suivante :

$$u_n(x) = (-1)^n\ \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g.

II.1. Rayon de convergence :

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

II.2. Signe de la fonction g :

Quelle est le signe de la fonction dérivée g', sur le segment $[0,2]$? En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que la fonction g est positive sur l'intervalle semi-ouvert $[0,x_0[$ et négative sur l'intervalle semi-ouvert $]x_0,2]$. Démontrer l'inégalité $x_0 > \sqrt{2}$ (prendre $\sqrt{2} = 1,41$).

Troisième partie

Le but de cette partie est d'étudier les zéros des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{E}_2) \qquad y''(t) + e^t\, y(t) = 0.$$

Dans toute cette partie y désigne une solution réelle de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

III.1. Zéros de la fonction y :

a. Préciser la fonction y lorsqu'il existe un réel α tel que la fonction y et sa dérivée sont nulles en ce point α : $y(\alpha) = 0,\ y'(\alpha) = 0$.

b. Soient a et b deux réels $(a < b)$, z une solution réelle de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{F}) \qquad z''(t) + e^a\, z(t) = 0.$$

La fonction z est supposée s'annuler en deux points α et β de l'intervalle $[a, b]$ $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ et être strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

Soit **H** l'hypothèse : "la fonction y est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$".

Soit W la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par la relation suivante :

$$W(t) = y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t).$$

Etudier les variations de la fonction W sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$; en déduire que l'hypothèse **H** formulée ci-dessus est fausse.

En conclure que, pour toute solution réelle z de l'équation différentielle **(F)**, entre deux zéros consécutifs de la fonction z se trouve au moins un zéro de la fonction y.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel τ, toute solution y réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$ a au moins un zéro dans l'intervalle

$$\left[\tau,\ \tau + \pi\ \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

III.2. Espacement des zéros de la fonction y :

Soit y une solution réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$, différente de la solution nulle.

a. Soit τ un zéro de la fonction y ; démontrer qu'il existe un intervalle ouvert $]\tau, \tau + c[$, où c est un réel strictement positif sur lequel la fonction y n'est pas nulle.

b. Soient deux zéros consécutifs α et β de la fonction y. Démontrer, en considérant une solution réelle z de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{G}) \qquad z''(t) + e^\beta\, z(t) = 0,$$

que les réels α et β vérifient l'inégalité suivante :

$$\beta - \alpha \geq \pi\ \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right).$$

Quatrième partie

L'objet de cette partie est de construire une fonction Ψ solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$. Soit $(v_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, une suite de fonctions définies sur la droite réelle par la relation :

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, e^{n\,t}.$$

Lorsque la série de fonctions de terme général v_n est convergente, soit Ψ la fonction somme de cette série :

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, e^{n\,t}.$$

IV.1 La fonction Ψ est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$:

a. Etablir que, pour tout réel a, la série de terme général $v_n(t)$ est uniformément convergente sur la demi-droite $]-\infty, a]$.

b. Démontrer que la fonction Ψ est une solution de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_2$) définie sur toute la droite réelle.

IV.2. Zéros de la fonction Ψ :

Démontrer, en utilisant des résultats des deuxième et troisième parties, que les zéros de la fonction Ψ constituent une suite monotone croissante $(t_n)_{n=0,1,2,...}$, de réels :

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$$

telle que :

$$\frac{\ln 2}{2} < t_0, \quad \lim_{n\to\to\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Cinquième partie

Le but de cette partie est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

(**E**) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

V.1.Une inégalité :

Soient M un réel strictement positif ($M > 0$) et a un réel. Soient f et g deux fonctions positives, définies et continues sur la demi-droite $[a, \infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, \infty[$, l'inégalité ci-dessous ait lieu :

$$f(t) \le M + \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx.$$

Etablir, en considérant par exemple la fonction F, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$ par la relation :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx,$$

la propriété :

$$f(t) \le M \exp\left(\int_a^t g(x)\, dx\right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif ($a > 0$) ; soit y une fonction réelle, définie et

continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, vérifiant l'équation différentielle (**E**) :

(**E**) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0,$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t.\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, \infty[$. (l'intégrale $\int_a^\infty t\,|\varphi(t)|\,dt$ existe).

V.**2**. **Majoration de la fonction** $|y(t)|/t$:

a. Déterminer une fonction affine A : $t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-dessous ait lieu :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t - x)\, y(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

b. Démontrer que la fonction j définie par la relation

$$j(t) = \frac{y(t)}{t},$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à C ($t \geq C$), il vienne : $|y(t)| \leq D\, t$.

V.**3**. **Limites de** $y'(t)$ **et de** $y(t)/t$:

Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{t \to \infty} y'(t).$$

b. En déduire que l'expression $j(t) = \frac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.

FIN DU PROBLEME

00 MATH. I - PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURDS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$). Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$. A un vecteur X de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$, de coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$, est associée la matrice $V(X)$ dont les éléments $V(X)_{p,q}$, $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, sont définis par la relation :

$$V(X)_{p,q} = (x_p)^{q-1}.$$

Le déterminant $v(X)$ de la matrice $V(X)$ est un déterminant de Van der Monde ; il est admis que sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$v(X) = \det V(X) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (x_q - x_p).$$

Il est admis que l'application $\|.\|$ de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$X \mapsto \|X\| = \sup_{1 \leq p \leq n} |x_p|,$$

est une norme. Soit E_n l'espace vectoriel normé $(\mathbf{C}^n, \|.\|)$.

Le but du problème est de montrer qu'à cette application v de E_n dans $\mathbf{C}$ peut être associé un réel ρ tel que, pour tout vecteur X de E_n la relation suivante a lieu :

$$|v(X)| \leq \rho \, \|X\|^{n(n-1)/2},$$

où le réel ρ est une valeur prise pour un vecteur unitaire particulier W :

$$\rho = |v(W)|, \text{ avec : } \|W\| = 1.$$

1. **Définition du réel** ρ :

L'entier n est fixé ($n \geq 2$).

a. Comparer pour tout vecteur X de l'espace vectoriel normé E_n et tout nombre complexe λ les deux expressions $v(\lambda.X)$ et $v(X)$.

En particulier, étant donné un vecteur X de E_n, soit Y un vecteur de E_n de norme unité vérifiant la relation : $X = \|X\|.Y$; exprimer le nombre complexe $v(X)$ en fonction de $v(Y)$ et de $\|X\|$.

b. Démontrer que l'application v de l'espace vectoriel normé E_n dans **C** est continue. En déduire que l'application continue $X \mapsto |v(X)|$ admet un maximum sur la sphère unité S,

$$S = \{X \in E_n \mid \|X\| = 1\},$$

atteint pour au moins un vecteur W. Soit ρ le maximum de cette fonction sur la sphère unité :

$$\rho = \max_{\|X\|=1} |v(X)|.$$

c. Démontrer les deux relations :

i. pour tout vecteur X de E_n, $|v(X)| \leq \rho \, \|X\|^{n(n-1)/2}$;

ii. il existe au moins un vecteur unitaire W de E_n tel que

$$|v(W)| = \rho.$$

2. **Cas** $n = 2$:

Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_2 \mid \|X\| = 1\}.$$

Déterminer le maximum ρ de la fonction $X \mapsto |v(X)|$ sur la sphère unité. Démontrer que les vecteurs unitaires qui rendent maximum $|v(X)|$ sont proportionnels à un même vecteur X_1 dont la première coordonnée est égale à 1. Les déterminer.

3. **Cas** $n = 3$:

a. Etant donnés trois réels positifs ou nuls t_1, t_2 et t_3, $\left(t_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 3\right)$ démontrer l'inégalité suivante

$$t_1.t_2.t_3 \leq \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3.$$

Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si les trois réels t_1, t_2, t_3 sont égaux.

b. Etant donnés trois nombres complexes x_1, x_2 et x_3, soient A, B et C les trois fonctions des variables x_1, x_2 et x_3 définies par les relations suivantes :

$$A = |x_1 - x_2|^2 + |x_2 - x_3|^2 + |x_3 - x_1|^2$$

$$B = \sum_{k=1}^{3} |x_k|^2 \quad ; \quad C = \left| \sum_{k=1}^{3} x_k \right|^2.$$

Démontrer que A est une combinaison linéaire de B et de C.

c. Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_3 \mid \|X\| = 1\}.$$

d. Calculer, pour un vecteur X quelconque de l'espace E_3, l'expression $|v(X)|^2$. En déduire une valeur possible pour le réel ρ. Déterminer les équations que vérifient les coordonnées x_1, x_2 et x_3 d'un vecteur W unitaire rendant $|v(W)|$ maximum. Exhiber une solution à l'aide des racines cubiques de l'unité. En déduire le réel ρ.

4. **Une minoration du réel ρ** :

Soit Ω le vecteur unitaire dont les coordonnées $\omega_p, 1 \leq p \leq n,$ sont définies par la relation :

$$\omega_p = e^{2i(p-1)\pi/n} = \exp\left(\frac{2\,i\,(p-1)\,\pi}{n}\right).$$

a. $V(\Omega)$ est la matrice définie à partir du vecteur Ω ; $\overline{V(\Omega)}$ est la matrice complexe conjuguée. Démontrer que la matrice produit $\overline{V(\Omega)}.V(\Omega)$ est une matrice proportionnelle à la matrice identité.

b. En déduire la valeur du module $|v(\Omega)|$ du déterminant de la matrice $V(\Omega)$ et une minoration du réel ρ.

5. **Une inégalité de Hadamard** :

Dans cette question il est admis que l'application de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$ qui, à deux vecteurs $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n},$ fait correspondre le nombre complexe $(X \mid Y),$ défini par la relation suivante

$$(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}.y_i,$$

est un produit scalaire hermitien. Soit F_n l'espace préhilbertien $(\mathbf{C}^n, (. \mid .))$.

La norme déduite de ce produit scalaire est notée $\|.\|_2$; elle est définie par la relation :

$$\|X\|_2 = \sqrt{(X \mid X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Etant donnée une suite de n vecteurs indépendants $V_1, V_2, ..., V_n$ de l'espace préhilbertien F_n, soit $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.

a. Déterminer, lorsque les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$ sont deux à deux orthogonaux, le produit B de la matrice transposée de la matrice complexe conjuguée de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ avec la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$:

$$B = {}^t\overline{M(V_1, V_2, ..., V_n)}.M(V_1, V_2, ..., V_n).$$

Que vaut le module du déterminant de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$?

b. Soit $U_1, U_2, ..., U_n$ les vecteurs de l'espace F_n définis de la manière suivante :

- $U_1 = V_1$,
- $U_2 = V_2 - proj_1(V_2)$; $proj_1(V_2)$ est le vecteur projection du vecteur V_2 sur la droite

vectorielle engendrée par V_1 ,

• pour tout entier i compris entre 3 et n ($3 \leq i \leq n$) : $U_i = V_i - proj_{i-1}(V_i)$; $proj_{i-1}(V_i)$ est le vecteur projection du vecteur V_i sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_{i-1}$.

Démontrer l'égalité entre les déterminants des deux matrices $M(V_1,\ V_2, ..., V_n)$ et $M(U_1,\ U_2, ..., U_n)$:

$$\det M(U_1,\ U_2, ..., U_n) = \det M(V_1,\ V_2, ..., V_n).$$

c. Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$\left|\det M(V_1,\ V_2, ..., V_n)\right| \leq \|V_1\|_2.\|V_2\|_2...\|V_n\|_2.$$

Démontrer, lorsque les vecteurs $V_1,\ V_2, ..., V_n$ sont tous différents de 0, qu'il y a égalité entre les deux membres de cette relation si et seulement si les vecteurs $V_1,\ V_2, ..., V_n$ sont deux à deux orthogonaux.

6. **Une majoration du réel** ρ :

Démontrer pour tout vecteur X de l'espace vectoriel E_n, de coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$, l'inégalité suivante :

$$|v(X)|^2 \leq \prod_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)}.$$

Déterminer pour un vecteur X unitaire ($\|X\| = 1$) de l'espace vectoriel E_n une majoration du module $|v(X)|$. En déduire la valeur du réel ρ.

7. **Recherche des vecteurs** W :

Soit W un vecteur unitaire de l'espace E_n, de coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$, pour lequel le déterminant $v(W)$ de la matrice $V(W)$ a un module égal au réel $\rho = n^{n/2}$:

$$|v(W)| = n^{n/2}.$$

a. Démontrer que les coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$ de ce vecteur W sont deux à deux différentes l'une de l'autre :

pour tout couple d'entiers p et q, $p \neq q$, $x_p \neq x_q$.

b. Démontrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Hadamard, que les coordonnées $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$, de ce vecteur ont toutes un module égal à 1 et vérifient les $n - 1$ relations suivantes :

$$\sum_{p=1}^{n} x_p = 0,\ \sum_{p=1}^{n} (x_p)^2 = 0, ..., \sum_{p=1}^{n} (x_p)^{n-1} = 0.$$

A ce vecteur W est associé le polynôme P_W défini par la relation suivante : pour tout réel t,

$$P_W(t) = \prod_{p=1}^{n} (t - x_p).$$

Ce polynôme P_W peut aussi être écrit sous la forme :

$$P_W(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, t^k.$$

c. Que vaut le coefficient α_n ? Démontrer qu'il est possible de poser $\alpha_0 = -e^{i\,\theta_0}$ où θ_0 est un réel.

Soit F_W la fraction rationnelle définie par la relation :

$$F_W(t) = \frac{P'_W(t)}{P_W(t)}.$$

$P'_W(t)$ est le polynôme dérivée du polynôme P_W.

d. Démontrer que, sur l'ensemble de définition de la fraction rationnelle F_W, la relation ci-dessous a lieu. :

$$F_W(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{t - x_p}.$$

En déduire qu'il existe un réel R $(R > 0)$ tel que sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ la fonction F_W est développable en série entière. Déterminer un minorant du réel R.

La fonction F_W est donc dans l'intervalle $]-R, R[$ la somme d'une série entière qui s'écrit :

$$F_W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, t^k.$$

e. Déterminer les coefficients $f_k, k = 0, 1, ...,$ à l'aide des coordonnées du vecteur W. Quelle conclusion en tirer sur les $n - 1$ premiers coefficients $f_0, f_1, ..., f_{n-2}$?

f. Déduire des résultats précédents l'expression du polynôme P'_W, polynôme dérivée du polynôme P_W. Déterminer le polynôme P_W, puis les coordonnées $x_p, 1 \leq p \leq n$ du vecteur W. Calculer, à titre de vérification, les normes de ce vecteur dans E_n et dans F_n c'est-à-dire $\|W\|$ et $\|W\|_2$.

g. Combien y-a-t-il de vecteurs W dont une au moins des coordonnées est égale à 1 ?

FIN DU PROBLÈME

00 MATH. II - PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURDS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de certaines équations différentielles du type suivant :

(E) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

Première partie

L'objet de cette partie est l'étude de l'équation différentielle :

($\mathbf{E}_1$) $$y''(t) + e^{it}\, y(t) = 0.$$

I.1. Caractérisation d'une solution périodique :

Démontrer qu'une fonction f, définie sur toute la droite réelle, solution de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_1$), est 2π-périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée f', mêmes valeurs en 0 et en 2π :

$$f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi)$$

I.2. Construction d'une solution périodique :

Soit f une fonction 2π-périodique solution de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_1$) ; soit $c_n(f), n \in \mathbf{Z}$, ses

Tournez la page S.V.P.

coefficients de Fourier.

$$\text{pour tout entier relatif } n : c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

a. Démontrer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que, pour tout réel t,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{int}.$$

b. Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée seconde f'' de f en fonction de ceux de f. En déduire, à l'aide de l'équation différentielle, la relation de récurrence qui lie $c_n(f)$ à $c_{n-1}(f)$.

c. Préciser la valeur du coefficient de Fourier $c_{-1}(f)$; en déduire la valeur de tous les coefficients de Fourier de rang strictement négatif. Calculer les coefficients de Fourier de rang positif en fonction de $c_0(f)$. En déduire l'expression de la fonction f.

I.3. Inégalité vérifiée par la fonction f et sa dérivée f' :

a. Soit h un réel strictement positif ; établir une majoration du module des deux nombres complexes C et D, définis ci-dessous par les relations :

$$C = f(t+h) - f(t) - hf'(t) \quad ; \quad D = f(t-h) - f(t) + hf'(t).$$

en fonction de la norme de la convergence uniforme de la fonction f : $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$.

b. Déduire des deux inégalités obtenues la relation :

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\ \|f\|_\infty.$$

Deuxième partie

Soit $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ la suite des fonctions définies sur la droite réelle par la relation suivante :

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g.

II.1. Rayon de convergence :

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

II.2. Signe de la fonction g :

Quelle est le signe de la fonction dérivée g', sur le segment $[0,2]$? En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que la fonction g est positive sur l'intervalle semi-ouvert $[0,x_0[$ et négative sur l'intervalle semi-ouvert $]x_0,2]$. Démontrer l'inégalité $x_0 > \sqrt{2}$ (prendre $\sqrt{2} = 1,41$).

Troisième partie

Le but de cette partie est d'étudier les zéros des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{E}_2) \qquad y''(t) + e^t\, y(t) = 0.$$

Dans toute cette partie y désigne une solution réelle de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

III.1. Zéros de la fonction y :

a. Préciser la fonction y lorsqu'il existe un réel α tel que la fonction y et sa dérivée sont nulles en ce point α : $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0$.

b. Soient a et b deux réels $(a < b)$, z une solution réelle de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{F}) \qquad z''(t) + e^a\, z(t) = 0.$$

La fonction z est supposée s'annuler en deux points α et β de l'intervalle $[a,b]$ $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ et être strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$. Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

Soit **H** l'hypothèse : "la fonction y est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$".

Soit W la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par la relation suivante :

$$W(t) = y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t).$$

Etudier les variations de la fonction W sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$; en déduire que l'hypothèse **H** formulée ci-dessus est fausse.

En conclure que, pour toute solution réelle z de l'équation différentielle **(F)**, entre deux zéros consécutifs de la fonction z se trouve au moins un zéro de la fonction y.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel τ, toute solution y réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$ a au moins un zéro dans l'intervalle

$$\left[\tau,\ \tau + \pi\ \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

III.2. Espacement des zéros de la fonction y :

Soit y une solution réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$, différente de la solution nulle.

a. Soit τ un zéro de la fonction y ; démontrer qu'il existe un intervalle ouvert $]\tau,\tau + c[$, où c est un réel strictement positif sur lequel la fonction y n'est pas nulle.

b. Soient deux zéros consécutifs α et β de la fonction y. Démontrer, en considérant une solution

Tournez la page S.V.P.

réelle z de l'équation différentielle suivante :

(G) $$z''(t) + e^{\beta} z(t) = 0,$$

que les réels α et β vérifient l'inégalité suivante :

$$\beta - \alpha \geq \pi \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right).$$

Quatrième partie

L'objet de cette partie est de construire une fonction Ψ solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$. Soit $(v_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, une suite de fonctions définies sur la droite réelle par la relation :

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}.$$

Lorsque la série de fonctions de terme général v_n est convergente, soit Ψ la fonction somme de cette série :

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{nt}.$$

IV.1 La fonction Ψ est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$:

a. Etablir que, pour tout réel a, la série de terme général $v_n(t)$ est uniformément convergente sur la demi-droite $]-\infty, a]$.

b. Démontrer que la fonction Ψ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$ définie sur toute la droite réelle.

IV.2. Zéros de la fonction Ψ :

Démontrer, en utilisant des résultats des deuxième et troisième parties, que les zéros de la fonction Ψ constituent une suite monotone croissante $(t_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, de réels :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$$

telle que :

$$\frac{\ln 2}{2} < t_0, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Cinquième partie

Le but de cette partie est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

(E) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

V.1.Une inégalité :

Soient M un réel strictement positif ($M > 0$) et a un réel. Soient f et g deux fonctions positives,

définies et continues sur la demi-droite $[a, \infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, \infty[$, l'inégalité ci-dessous ait lieu :

$$f(t) \leq M + \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx.$$

Etablir, en considérant par exemple la fonction F, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$ par la relation :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx,$$

la propriété :

$$f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(x)\, dx\right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif ($a > 0$) ; soit y une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, vérifiant l'équation différentielle **(E)** :

(E) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0,$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t.\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, \infty[$. (l'intégrale $\int_a^\infty t\, |\varphi(t)|\, dt$ existe).

V.2. Majoration de la fonction $|y(t)|/t$:

a. Déterminer une fonction affine A : $t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-dessous ait lieu :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t - x)\, y(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

b. Démontrer que la fonction j définie par la relation

$$j(t) = \frac{y(t)}{t},$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à C ($t \geq C$), il vienne : $|y(t)| \leq D\, t$.

V.3. Limites de $y'(t)$ et de $y(t)/t$:

Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{t \to \infty} y'(t).$$

b. En déduire que l'expression $j(t) = \frac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.

FIN DU PROBLEME

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis

A 2001 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même. Une application u de E dans lui-même est semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u\left(a\,x + y\right) = \bar{a}\,u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\,x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

I-1. **Premières propriétés**.
Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu\, x$ ait lieu.

b. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu\, e^{i\,\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu\, e^{i\,\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.

c. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu\, x$:

$$E_\mu = \left\{x \in E \mid u(x) = \mu\, x\right\}.$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

I-2. **Matrice associée à une application semi-linéaire** :
Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x, de coordonnées $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(f_i)_{1\le i\le n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\le i\le n}$ à la base $(f_i)_{1\le i\le n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, $(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu\, X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

I-3. **Exemples** :

a. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

b. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

I-4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$** :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b. Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}.X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

i. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont liés ;

ii. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont indépendants ;

c. En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

I-5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure** :

Dans cette question la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si λ est une valeur propre de la matrice A, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda\, e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b. Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu\, e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

c. Soit A la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser : $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

I-6. **Une caractérisation des valeurs co-propres** :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par

la relation suivante :

$$A = B + i\,C.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Seconde partie

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbf{C})$) telle que la relation

$$B = S.A.\overline{S}^{-1}$$

soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

II-1. Une relation d'équivalence :

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbf{C}) : B = S.A.\overline{S}^{-1}.$$

Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

II-2. Indépendance des vecteurs co-propres :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, soient $X_1,\ X_2, ...,\ X_k,\ k$ vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1,\ \mu_2, ...,\ \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leq n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres $\mu_p,\ p = 1, 2, ..., k$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Rightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$), la famille $\left(X_1,\ X_2, ...,\ X_k\right)$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A.\overline{A}$ a n valeurs propres $\lambda_p, p = 1, 2, ..., n$, positives ou nulles, $(\lambda_p \geq 0)$, distinctes les unes des autres ($p \neq q \Rightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$), la matrice A est co-diagonalisable.

II-3. Quelques propriétés :

a. Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbf{C})$) ; soit A la matrice définie par la relation

$$A = S.\overline{S}^{-1}.$$

Calculer la matrice produit $A.\overline{A}$.

b. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que

$$A.\overline{A} = I_n,$$

démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation ci-dessous

$$S(\theta) = e^{i\,\theta}\, A + e^{-i\,\theta}\, I_n,$$

soit inversible. Calculer, en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A.\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta).\overline{S(\theta)}^{-1}$.

II-4. **Une condition nécessaire** :

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}.A.\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

II-5. **Une condition suffisante** :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

i. la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,
ii. les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,
iii. le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\lambda_k,$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon qu'elles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_k \geq 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_k$ ont respectivement les multiplicités $n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale $\Lambda,$ semblable à la matrice $A.\overline{A},$ s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\, I_{n_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2\, I_{n_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k\, I_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse il existe une matrice S inversible telle que

$$A.\overline{A} = S.\Lambda.S^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = S^{-1}.A.\overline{S}.$$

a. Démontrer les relations :

$$B.\overline{B} = \overline{B}.B\ ;\ B.\Lambda = \Lambda.B.$$

b. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix}.$$

c. Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = P.\Delta.\overline{P}^{-1}.$$

En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses i, ii et iii est co-diagonalisable.

II-6. **Exemples** :

a. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

b. Soient $A,\ B,\ C$ et D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

FIN DU PROBLÈME

A 2001 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **4 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit **C** l'espace vectoriel normé des fonctions réelles, définies sur le segment $I = [-1, 1]$, continues ; la norme de cet espace est la norme de la convergence uniforme, définie pour une fonction f de **C** par la relation :

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Pour tout entier naturel n, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n, est notée $\mathbf{E}_n$. Par abus de langage, la locution " fonction polynomiale" est remplacée par polynôme.

Première partie

Il est admis que, pour une fonction f donnée continue sur le segment I et un entier naturel donné n, il existe un polynôme P_n, de degré inférieur ou égal à n, tel que :

$$\|f - P_n\| = \Delta_n(f) = \inf\{\|f - P\| \mid P \in E_n\}.$$

Le but de cette partie est d'étudier l'erreur commise lors de la meilleure approximation d'une fonction continue par une fonction polynomiale et de montrer le résultat : si f est une fonction k-fois continûment dérivable sur $I = [-1, 1]$, la meilleure approximation de la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n est telle que :

$$\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Soit φ une fonction réelle définie sur l'intervalle I, bornée (il existe une constante M telle

que, pour tout réel x de I, $|\varphi(x)| \leq M$). À cette fonction φ est associée la fonction ω_φ, dite "module de continuité de φ". Elle est définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ de la manière suivante :

Étant donné un réel h strictement positif, $\omega_\varphi(h)$ est égal à la borne supérieure des réels $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ sachant que x et y sont deux réels de l'intervalle I dont la valeur absolue de la différence est majorée par h :

$$\omega_\varphi(h) = \sup\left\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \,;\, (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq h\right\}.$$

I-1. **Propriétés du module de continuité** :

Soit φ une fonction réelle définie et bornée sur le segment I.

a. Démontrer que le module de continuité de cette fonction φ est une fonction croissante définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$.

b. Soient h et h' deux réels strictement positifs, démontrer la propriété :

$$\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h').$$

Soient h et λ deux réels strictement positifs, n un entier supérieur ou égal à 1 ; démontrer les relations suivantes :

$$\omega_\varphi(n\,h) \leq n\,\omega_\varphi(h) \quad ; \quad \omega_\varphi(\lambda\,h) \leq (1 + \lambda)\,\omega_\varphi(h).$$

c. Démontrer que la fonction φ est uniformément continue sur le segment I si et seulement si la limite du module de continuité ω_φ en 0 est nulle :

$$\varphi \text{ est uniformément continue sur } I \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \omega_\varphi(h) = 0.$$

d. Démontrer que, si la fonction φ est continûment dérivable sur le segment I, il vient pour tout réel positif h :

$$\omega_\varphi(h) \leq h\,\|\varphi'\|.$$

I-2. **Noyaux de Dirichlet et de Fejer** :

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), soient D_n et F_n les fonctions définies pour tout réel θ par les relations suivantes :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\,k\,\theta} \,;\, F_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta).$$

Il est admis que la fonction F_n vérifie les relations suivantes :

$$\text{pour tout } \theta \text{ différent de } 2k\pi,\ k \text{ entier relatif, } F_n(\theta) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{i\,k\,\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^2.$$

Soit K_n la fonction définie dans l'ensemble $\mathbf{R} \setminus 2\pi\,\mathbf{Z}$ par la relation suivante :

$$K_n(\theta) = \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\sin\left(n\,\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right)^4,$$

où le réel λ_n est défini par la condition :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\theta)\,d\theta = 1.$$

a. Calculer le réel λ_n et déterminer une constante C telle que ce réel soit équivalent à l'infini à $C\,n^3$. Rappel :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b. Soit α la fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\pi/2]$ par la relation suivante :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{t^4}.$$

Démontrer qu'il existe une constante A_1 telle que la fonction α soit équivalente en 0 à $A_1\,t^{-2}$. En déduire que la fonction $t \mapsto t^3\,\alpha(t)$ est bornée sur l'intervalle $]0,\pi/2]$. Soit A_2 un majorant de cette fonction sur l'intervalle $]0,\pi/2]$.

Soient I_n et J_n les deux intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4(nt)}{t^3}dt \quad ; \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t\,\alpha(t)\,\sin^4(nt)dt.$$

Démontrer les deux propriétés suivantes :

$$\text{lorsque l'entier } n \text{ tend vers l'infini,} \quad I_n \sim n^2.\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3}dt \quad ;$$

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ (n \geq 1), \quad J_n \leq A_2\,n\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2}dt.$$

c. Démontrer l'existence d'une constante M_0 telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il vienne :

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(1 + n\,t\big)K_n(t)\,dt \leq M_0.$$

I-3. **Polynôme** $j_n[g]$:

Soit g une fonction paire définie sur la droite réelle périodique et de période 2π ; étant donné un entier n supérieur ou égal à 1, soit $j_n[g]$ la fonction définie par la relation suivante :

$$j_n[g](\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - t)\,K_n(t)\,dt.$$

a. Démontrer que la fonction $j_n[g]$ est paire et est un polynôme de degré au plus égal à $2n - 2$.

b. Vérifier les inégalités suivantes :

$$|g(\theta) - g(\theta - t)| \leq \omega_g(|t|) \leq \big(1 + n\,|t|\big)\,\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

puis, en utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer la majoration :

$$|g(\theta) - j_n[g](\theta)| \leq M_0\,\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Dans la suite l'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 ; à l'entier n est associé l'entier p égal à la partie entière du réel $n/2$. L'entier vérifie les inégalités :

$$p \leq n/2 < p + 1.$$

I-4. **Polynôme associé à une fonction de l'espace C** :

Soit f une fonction de l'espace **C**. À cette fonction f est associée la fonction g périodique de période 2π, définie, pour tout réel θ, par la relation :

$$g(\theta) = f(\cos\theta).$$

Soit P_n la fonction définie sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ par la relation : pour tout réel x de I,

$$P_n(x) = j_{p+1}[g](Arc\cos x).$$

L'entier p est la partie entière de $n/2$ définie ci-dessus.

a. Démontrer que la fonction P_n est un polynôme (une fonction polynomiale) de degré au plus égal à n. Il est admis que, pour tout entier naturel k, la fonction $x \mapsto \cos\left(k\, Arc\cos x\right)$ est un polynôme de degré k.

b. Démontrer, pour toute fonction f de l'espace **C** et tout entier n ($n \geq 3$), la relation suivante :

$$\Delta_n(f) \leq 2\, M_0\, \omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$

La constante M_0 a été introduite à la question I-2.c et $\Delta_n(f)$ dans l'introduction de la partie I.

c. Établir le résultat préliminaire : soit f une fonction de l'espace **C** ; pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à n, il vient :

$$\Delta_n(f) = \Delta_n(f - Q).$$

Démontrer, pour toute fonction f continûment dérivable sur le segment $I = [-1, 1]$ et tout entier n, la relation ci-dessous entre $\Delta_n(f)$ et $\Delta_{n-1}\left(f'\right)$:

$$\Delta_n(f) \leq 2\, \frac{M_0}{n}\, \Delta_{n-1}\left(f'\right).$$

d. Étant donné un entier k supérieur ou égal à 1 ($k \geq 1$), soit f une fonction k-fois continûment dérivable ; déduire du résultat précédent une majoration, pour tout entier n supérieur strictement à k ($n > k$), de $\Delta_n(f)$ en fonction de $\Delta_{n-k}\left(f^{(k)}\right)$.

En déduire que, si f est une fonction k-fois continûment dérivable et n un entier croissant indéfiniment, l'expression $\Delta_n(f)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $1/n^k$.

$$\Delta_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

SECONDE PARTIE

Le but de cette partie est, pour une fonction f donnée dans $\mathbf{C}$, de construire une suite de polynômes $I_n[f]$, qui, lorsque la fonction f est continûment dérivable, converge uniformément vers la fonction f.

Dans cette partie, l'entier n est fixé et est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Soit $\mathbf{E}_n^0$ le sous-espace de $\mathbf{E}_n$ constitué des polynômes (fonctions polynomiales) nulles en -1 et en 1.

II-1. L'espace préhilbertien $\mathbf{E}_n^0$:

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$? Soit $(e_k)_{2\leq k\leq n}$ la suite de polynômes définie par la relation :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad e_k(x) = x^k - x^{k-2}.$$

Démontrer que la suite de ces polynômes est une base B de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$.

b. Soit Φ_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ défini par la relation suivante :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbf{E}_n^0, \quad \Phi_n(P)(x) = (1-x^2)\,P''(x).$$

Démontrer que la matrice M_n associée à l'endomorphisme Φ_n dans la base B est une matrice triangulaire supérieure ; déterminer les éléments de la diagonale de cette matrice.

En déduire l'existence d'une base B' définie par une suite de polynômes $(Q_k)_{2\leq k\leq n}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 2 \leq k \leq n, \quad (1-x^2)\,Q_k''(x) = \mu_k\,Q_k.$$

Ces polynômes sont supposés unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1). Préciser les coefficients μ_k, $2 \leq k \leq n$ et le degré des polynômes Q_k.

c. À deux polynômes quelconques P et Q appartenant à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_n^0$ est associée l'intégrale $J(P,Q)$ définie par la relation suivante :

$$J(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\,Q(x)}{1-x^2}\,dx.$$

Démontrer que cette intégrale existe ; à quelle condition sur le polynôme P l'expression $J(P,P)$ est-elle nulle ?

Il est admis dans la suite que l'application $(P,Q) \mapsto J(P,Q)$ de $\mathbf{E}_n^0 \times \mathbf{E}_n^0$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Dans la suite le produit scalaire est noté $(.\mid.)$:

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\,Q(x)}{1-x^2}\,dx.$$

d. Démontrer que la base $B' = (Q_k)_{2\leq k\leq n}$ est orthogonale dans l'espace préhilbertien $(\mathbf{E}_n^0, (.\mid.))$.

II-2. Racines du polynôme Q_n :

a. Un résultat préliminaire : démontrer que le polynôme Q_n possède la propriété : pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-3$, l'intégrale K ci-dessous est nulle :

$$K = \int_{-1}^{1} P(x)\,Q_n(x)\,dx = 0.$$

b. Deux cas sont considérés :

i. Le polynôme Q_n admet des racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$. Soient $x_1,\ x_2,\ ...,x_p,$ ces racines (l'entier p est strictement positif).

Soit R_1 le polynôme défini par la relation :

$$R_1(x) = \prod_{k=1}^{k=p}(x - x_k).$$

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto R_1(x)\ Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0 :

$$\int_{-1}^{1} R_1(x)\ Q_n(x)\ dx \neq 0.$$

En utilisant le résultat de l'alinéa a, déterminer le degré du polynôme R_1.

ii. Le polynôme Q_n n'a pas de racines, d'ordre de multiplicité impair, situées dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Démontrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ étendue au segment I est différente de 0.

En déduire que les racines du polynôme Q_n sont simples et situées sur le segment I.

Dans la suite, les racines du polynôme Q_{n+1} sont notées $y_k,\ k = 0, 1, ..., n$ et vérifient la relation suivante :

$$-1 = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = 1.$$

II-3. **Polynôme** $I_n[f]$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace $\mathbf{C}$: $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit u_n l'application de l'espace vectoriel E_n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par la relation suivante :

$$u_n(P) = \big(P(y_0),\ P(y_1),\ ...,P(y_n)\big).$$

Démontrer que l'application u_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_n sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans $\mathbf{C}$, est associé un seul polynôme $I_n[f]$ appartenant à $E_n,$ vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \leq k \leq n, \quad I_n[f](y_k) = f(y_k).$$

Démontrer que, si P est un polynôme appartenant à E_n, il vient :

$$I_n[f - P] = I_n[f] - P.$$

b. Démontrer que le polynôme $I_n[f]$ s'écrit :

$$I_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\ L_k(x).$$

où L_k est le polynôme défini par la relation :

$$L_k(x) = \frac{Q_{n+1}(x)}{(x - y_k)\ Q_{n+1}{}'(y_k)}.$$

c. Démontrer, pour tout polynôme P appartenant à E_n, l'inégalité :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I, \quad |f(x) - I_n[f](x)| \leq \left(1 + \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| \right) \|f - P\|.$$

II-4. Majoration de $\sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$:

Soit f une fonction continue appartenant à l'espace **C** : $f : I \to \mathbf{R}$.

a. Soit v_n l'application de l'espace vectoriel E_{2n+1} dans $\mathbf{R}^{2n+2}$ définie par la relation suivante :

$$v_n(P) = \big(P(y_0),\ P(y_1),\ ...,P(y_n),\ P'(y_0),\ P'(y_1),\ ...,P'(y_n)\big).$$

Démontrer que l'application v_n est un isomorphisme de l'espace vectoriel E_{2n+1} sur $\mathbf{R}^{2n+2}$.

En déduire qu'à une fonction f donnée dans **C** est associé un seul polynôme $H_n[f]$ appartenant à E_{2n+1}, vérifiant les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier } k,\ 0 \leq k \leq n, \quad H_n[f](y_k) = f(y_k),\ H_n[f]'(y_k) = f'(y_k).$$

Que vaut $H_n[1]$?

Il est admis que le polynôme $H_n[f]$ est défini par la relation suivante :

$$H_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} f'(y_k)\,(x - y_k)\,(L_k(x))^2 + \sum_{k=0}^{n} f(y_k)\,(1 - 2(x - y_k)L_k'(y_k))\,(L_k(x))^2.$$

b. Calcul des dérivées $L_k'(y_k)$.

Déterminer l'expression, pour tout entier k compris entre 0 et n ($0 \leq k \leq n$), de la dérivée $L_k'(y_k)$ en fonction des dérivées première et seconde $Q_{n+1}'(y_k)$ et $Q_{n+1}''(y_k)$.

En utilisant l'équation différentielle vérifiée par le polynôme Q_{n+1} (question II-1.b) déterminer les valeurs de $L_k'(y_k)$ lorsque l'entier k est compris entre 1 et $n - 1$ ($1 \leq k \leq n - 1$). Calculer ensuite $L_0'(y_0)$ et $L_n'(y_n)$.

c. En déduire les inégalités :

$$\text{pour tout réel } x \text{ du segment } I, \quad \sum_{k=0}^{n} (L_k(x))^2 \leq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| \leq \sqrt{n+1}\,.$$

II-5 Estimation de l'approximation :

Démontrer que, pour toute fonction continue appartenant à l'espace **C**, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la norme de la différence entre la fonction f et le polynôme $I_n[f]$ est majorée par le produit $2\sqrt{n}\ \Delta_n(f)$:

$$\|f - I_n[f]\| \leq 2\ \sqrt{n}\ \Delta_n(f).$$

En particulier démontrer que, si la fonction f est continûment dérivable sur I, la suite des polynômes $I_n[f]$ converge uniformément, lorsque l'entier n tend vers l'infini, vers la fonction f.

Que dire de la convergence lorsque la fonction f est indéfiniment continûment dérivable ?

FIN DU PROBLÈME

A 2001 Math PSI 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PSI

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 5 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même. Une application u de E dans lui-même est semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u\big(a\,x + y\big) = \bar{a}\,u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\,x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

I-1. **Premières propriétés**.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu\, x$ ait lieu.

b. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu\, e^{i\,\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu\, e^{i\,\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.

c. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu\, x$:

$$E_\mu = \left\{ x \in E \mid u(x) = \mu\, x \right\}.$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

I-2. **Matrice associée à une application semi-linéaire** :

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x, de coordonnées $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, est associée une matrice-colonne X, d'éléments $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée complexe d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X , différent de 0, $(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu\, X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

I-3. **Exemples** :

a. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

b. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

I-4. Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$:

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b. Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}.X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

i. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont liés ;

ii. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont indépendants ;

c. En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

d. Étant donné un réel m, soit A_m la matrice définie par la relation suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs co-propres réelles positives ; discuter suivant les valeurs du réel m.

I-5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

Dans cette question la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si λ est une valeur propre de la matrice A, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda\, e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b. Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu\, e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

c. Soit A la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser : $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

I-6. **Une caractérisation des valeurs co-propres** :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + i\,C.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Seconde partie

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbf{C})$) telle que la relation

$$B = S.A.\bar{S}^{-1}$$

soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

II-1. **Une relation d'équivalence** :

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbf{C}) : B = S.A.\bar{S}^{-1}.$$

Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

II-2. **Indépendance des vecteurs co-propres** :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, soient $X_1, X_2, ..., X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leq n$). Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p, $p = 1, 2, ..., k$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Rightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$), la famille $\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A.\overline{A}$ a n valeurs propres $\lambda,\ p = 1, 2, ..., n$, positives ou nulles, $(\lambda_p \geq 0),$ distinctes les unes des autres $(p \neq q \Rightarrow \lambda_p \neq \lambda_q)$, la matrice A est co-diagonalisable.

II-3. **Quelques propriétés** :

a. Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible $(S \in GL_n(\mathbf{C}))$; soit A la matrice définie par la relation

$$A = S.\overline{S}^{-1}.$$

Calculer la matrice produit $A.\overline{A}$.

b. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que

$$A.\overline{A} = I_n,$$

démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation ci-dessous

$$S(\theta) = e^{i\,\theta}\, A + e^{-i\,\theta}\, I_n,$$

soit inversible. Calculer, en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A.\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta).\overline{S(\theta)}^{-1}$.

II-4. **Une condition nécessaire** :

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}.A.\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

II-5. **Exemples** :

a. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

b. Soient $A,\ B,\ C$ et D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

FIN DU PROBLÈME

A 2001 Math PSI 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PSI

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - \lambda\,y = 0.$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :

Il est admis qu'il existe une fonction f_λ, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0, $(f_\lambda(0) = 1)$, solution dans l'intervalle $]-R,R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

a. Déterminer les coefficients a_n, $n \geq 1$, en fonction de l'entier n et du réel λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

b. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ est-elle un polynôme ? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée au réel λ et le coefficient du terme de plus haut degré (le terme

dominant).

c. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n\, x^n,\ n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et qui prenne la valeur 1 en 0.

I-2. **Solution de l'équation différentielle** E_1 :
Dans cette question le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - y = 0.$$

a. Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0,\infty[$; exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0,\infty[$, par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

b. Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty,0[$.

c. Déterminer enfin les fonctions solutions sur **R** de l'équation différentielle E_1.

I-3. **Relation entre les fonctions** f_λ :
Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation ci-dessous :

$$g_\lambda(x) = e^x\ f_\lambda(-x).$$

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

b. En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle **R** est encore une fonction développable en série entière sur la droite réelle **R**, que, pour tous réels λ et x, il vient :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x\, f_\lambda(-x).$$

c. Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d. Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$) ; quelle est, lorsque le réel x croît indéfiniment, la limite de l'expression ci-dessous :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x\, f_p(x)} \ ?$$

I-4. **Application à une équation aux dérivées partielles** :

Soit Ω le sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^3$, rapporté à un repère Oxyz, obtenu en retranchant de $\mathbf{R}^3$ le plan *Oxy* :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, z \neq 0\right\}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie dans l'ouvert Ω, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (P) suivante :

$$(P) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2}F = 0.$$

Il a été posé dans cette relation :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Comment y a-t-il lieu de choisir le réel λ pour que la fonction F définie dans l'ouvert Ω par la relation suivante

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles (P) ?

SECONDE PARTIE

L'objet de cette seconde partie est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but la fonction φ, définie pour tout réel x par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin^2\theta} d\theta,$$

est introduite ainsi que les intégrales I_p définies par la relation suivante : pour tout entier naturel p, l'intégrale I_p est donnée par la relation :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta \; d\theta.$$

II-1. Détermination de l'intégrale I_p :

Déterminer une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

II-2. Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur toute la droite réelle **R**. Est-elle plusieurs fois continûment dérivable ?

b. Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $]-R, R[$. En déduire qu'elle est proportionnelle à la fonction $f_{1/2}$. Préciser le coefficient de proportionnalité.

II-3. **Encadrements de** $\varphi(x)$:

a. Démontrer que, pour tout réel u strictement inférieur à 1 ($u < 1$), l'inégalité ci-dessous existe :

$$e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

b. Soit x un réel strictement inférieur à 1 ($x < 1$) ; soit $J(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x \sin^2\theta}.$$

Calculer l'intégrale $J(x)$.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x strictement inférieur à 1 ($x < 1$), la fonction φ vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

d. Démontrer l'existence d'une constante A strictement positive telle que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 ($x \leq -1$), la fonction φ vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

e. Démontrer que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite lorsque le réel x tend vers $-\infty$. Préciser cette limite. Est-ce que la fonction $f_{1/2}$ est intégrable sur la demi-droite $]-\infty, -1]$?

Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x).$$

II-4. **Étude de la fonction** h :

a. Démontrer que la fonction h est paire et que la valeur de $h(x)$ est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = k \int_0^{\pi/2} ch\left(x \frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta.$$

où k est une constante qui sera déterminée.

b. Déterminer, lorsque le réel x croît indéfiniment, les limites des deux expressions suivantes :

$$h(x) \text{ et } \frac{h(x)}{x}.$$

c. Étudier les variations de la fonction h et tracer la courbe représentative, lorsque le réel x varie sur la droite réelle **R**.

FIN DU PROBLÈME

A 2001 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

NOTATIONS

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $L(V)$. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \; ; \; f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbf{R}[X] \; ; \; E_n = \mathbf{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés :

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

a. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k,\ k = 0, 1, 2, ...$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboitée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset ... \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset ...$$

b. Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux $\left(\ker f^p = \ker f^{p+1}\right)$, pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux $\left(\ker f^q = \ker f^{q+1}\right)$; en déduire la propriété suivante :

pour tout entier k supérieur ou égal à p, $\ker f^k = \ker f^p$.

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n ($p \leq n$). En particulier les noyaux $\ker f^n$, $\ker f^{n+1}$ sont égaux.

c. Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 ($q \geq 1$), pour lequel l'endomorphisme u^q est nul ($u^q = 0$), l'endomorphisme u^n est nul ($u^n = 0$).

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

PREMIÈRE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

I-1.Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :

Soit λ un réel donné.

a. Étant donné un entier naturel n ($n \in \mathbf{N}$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n ($0 \leq p \leq n$). Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n,$$

l'endomorphisme g commute avec D_n :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbf{R}_p[X]$ est égal à $\ker(D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda\, Id_{E_p} + D_p.$$

b. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à E_n, il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

c. Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D.$$

i/ Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbf{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

I-2. **Une application immédiate** : **le cas** $\lambda < 0$:

a. À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbf{R}_0[X]$ tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_0} + D_0 \ ?$$

b. Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D.$$

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

I-3. **Une représentation matricielle simple de** D_n :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.

Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients a_{ij}, $i = 0, 1, ...n$, $j = 0, 1, ..., n$, sont définis par les relations :

$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = \left(f^n(y),\ f^{n-1}(y), \dots,\ y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b. En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

I-4. **Un exemple** :

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = a\, Id_{E_2} + b\, D_2 + c\, (D_2)^2.$$

$a,\ b,\ c$ sont trois réels.

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_2} + D_2.$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

II-1. **Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$** :

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme g^2 a une dimension au moins égale à 2 ($\dim \ker g^2 \geq 2$).

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que

$g^2 = D$.

II-2. **Existence d'un endomorphisme** g **tel que** $g^k = D^m$:

Soit m un entier supérieur ou égal à 1 ($m \geq 1$) et k un entier supérieur ou égal à 2 ($k \geq 2$). Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m.$$

a. Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b. Démontrer que les sous-espaces vectoriels de E, $\ker g^q$ ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à l'entier k ($0 \leq q \leq k$).

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à k ($2 \leq p \leq k$). Soit Φ l'application définie dans l'espace vectoriel $\ker g^p$ par la relation :

$$\Phi : P \mapsto g(P).$$

Démontrer que cette application Φ est une application linéaire de $\ker g^p$ dans l'espace vectoriel $\ker g^{p-1}$. Quel est le noyau de l'application Φ ? Démontrer que l'application Φ est surjective ($\mathrm{Im}\,\Phi = Ker g^{p-1}$).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels $\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\ker g^p$ en fonction de la dimension de l'espace vectoriel $\ker g$?

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel λ supposé strictement positif ($\lambda > 0$), soit L_n l'application de $\mathbf{R}$ dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$, $M_{n+1}(\mathbf{R})$ qui, au réel t associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k.$$

La matrice $(D_n)^k$ est le produit k-fois avec elle-même de la matrice D_n.

III-1. **Dérivée de l'application** $t \mapsto (L_n(t))^k$:

a. Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + t\, D_n$ est inversible et que son inverse,

noté $\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,(D_n)^k.$$

Déterminer les fonctions $a_k : t \mapsto a_k(t)$ (bien sùr : $(D_n)^0 = I_{n+1}$).

b. Démontrer que l'application de **R** dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre $n+1$: $t \mapsto \left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}$ et D_n.

c. Démontrer que, pour tout réel t, la matrice $L_n(t)$, élevée à la puissance $n+1$ est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1} = 0.$$

d. Calculer la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}L_n(t)$ de la fonction $t \mapsto L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}$.

Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}(L_n(t))^k$ de la fonction $t \mapsto (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}$.

III-2. **Matrice** $\varphi_u(t)$:
Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}(L_n(t))^k.$$

La matrice $(L_n(t))^k$ est la matrice $L_n(t)$ élevée à la puissance k.

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à la matrice $\varphi_{u+v}(t)$:

$$\varphi_u(t).\varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t).$$

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable et que sa dérivée $\varphi_u{}'$ est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi_u{}'(t) = u\,\left(I_{n+1} + t\,D_n\right)^{-1}.D_n.\varphi_u(t).$$

c. Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle : pour tout réel t, $\varphi_1{}''(t) = 0$. En déduire la relation :

$$\varphi_1(t) = I_{n+1} + t\,D_n.$$

III-3. **Existence de l'endomorphisme** g :
a. Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$) ; en utilisant les résultats de la question

précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda\, I_{n+1} + D_n = \lambda \left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n \right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n + 1$ telle que

$$M^2 = \lambda\, I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

QUATRIÈME PARTIE

IV-1. **Un développement en série entière** :

a. Soit h la fonction définie sur la demi-droite $[-1, \infty[$ par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1 + x}\,.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R, R[$ dans lequel la fonction h est la somme d'une série entière de terme général $b_p\, x^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Déterminer le rayon de convergence R et les coefficients b_p.

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à }]-R, R[,\ h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\, x^p.$$

c. Déterminer les valeurs des réels c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p\, b_{n-p}.$$

IV-2 Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda\, Id_E + D$ où λ est strictement positif :

Soit λ un réel strictement positif donné ($\lambda > 0$).

a. Soit T l'application définie dans $E = \mathbf{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E,\ T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p}\, D^p P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b. Calculer pour tout polynôme P de E son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D.$$

d. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

FIN DU PROBLÈME

A 2001 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - \lambda\,y = 0.$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. **Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle** :

Il est admis qu'il existe une fonction f_λ, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0, $(f_\lambda(0) = 1)$, solution dans l'intervalle $]-R,R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

a. Déterminer les coefficients a_n, $n \geq 1$, en fonction de l'entier n et du réel λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

b. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ est-elle un polynôme ? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée au réel λ et le coefficient du terme de plus haut degré (le terme

dominant).

c. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n\, x^n,\ n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et qui prenne la valeur 1 en 0.

I-2. **Solution de l'équation différentielle** E_1 :
Dans cette question le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - y = 0.$$

a. Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0,\infty[$; exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0,\infty[$, par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

b. Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty,0[$.

c. Déterminer enfin les fonctions solutions sur **R** de l'équation différentielle E_1.

I-3. **Relation entre les fonctions** f_λ :
Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation ci-dessous :

$$g_\lambda(x) = e^x\ f_\lambda(-x).$$

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

b. En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle **R** est encore une fonction développable en série entière sur la droite réelle **R**, que, pour tous réels λ et x, il vient :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x\, f_\lambda(-x).$$

c. Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d. Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$) ; quelle est, lorsque le réel x croît indéfiniment, la limite de l'expression ci-dessous :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x\, f_p(x)} \ ?$$

I-4. **Application à une équation aux dérivées partielles** :

Soit Ω le sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^3$, rapporté à un repère Oxyz, obtenu en retranchant de $\mathbf{R}^3$ le plan *Oxy* :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, z \neq 0\right\}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie dans l'ouvert Ω, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (P) suivante :

$$(P) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2}F = 0.$$

Il a été posé dans cette relation :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Comment y a-t-il lieu de choisir le réel λ pour que la fonction F définie dans l'ouvert Ω par la relation suivante

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles (P) ?

SECONDE PARTIE

L'objet de cette seconde partie est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but la fonction φ, définie pour tout réel x par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin^2\theta} d\theta,$$

est introduite ainsi que les intégrales I_p définies par la relation suivante : pour tout entier naturel p, l'intégrale I_p est donnée par la relation :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta \; d\theta.$$

II-1. Détermination de l'intégrale I_p :

Déterminer une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

II-2. Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur toute la droite réelle **R**. Est-elle plusieurs fois continûment dérivable ?

b. Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $]-R, R[$. En déduire qu'elle est proportionnelle à la fonction $f_{1/2}$. Préciser le coefficient de proportionnalité.

II-3. **Encadrements de** $\varphi(x)$:

a. Démontrer que, pour tout réel u strictement inférieur à 1 ($u < 1$), l'inégalité ci-dessous existe :

$$e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

b. Soit x un réel strictement inférieur à 1 ($x < 1$) ; soit $J(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x \sin^2\theta}.$$

Calculer l'intégrale $J(x)$.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x strictement inférieur à 1 ($x < 1$), la fonction φ vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

d. Démontrer l'existence d'une constante A strictement positive telle que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 ($x \leq -1$), la fonction φ vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

e. Démontrer que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite lorsque le réel x tend vers $-\infty$. Préciser cette limite. Est-ce que la fonction $f_{1/2}$ est intégrable sur la demi-droite $]-\infty, -1]$?

Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x).$$

II-4. **Étude de la fonction** h :

a. Démontrer que la fonction h est paire et que la valeur de $h(x)$ est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = k \int_0^{\pi/2} ch\left(x \frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta.$$

où k est une constante qui sera déterminée.

b. Déterminer, lorsque le réel x croît indéfiniment, les limites des deux expressions suivantes :

$$h(x) \text{ et } \frac{h(x)}{x}.$$

c. Étudier les variations de la fonction h et tracer la courbe représentative, lorsque le réel x varie sur la droite réelle **R**.

FIN DU PROBLÈME

A 2002 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.
Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des réels définis par les relations suivantes :

$$B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 1,\ B_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, B_p.$$

Les réels C_n^p sont les coefficients du binôme ; le nombre réel C_n^p, noté aussi $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, est égal au cardinal de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble ayant n éléments.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. **Fonction** E :
Soit E la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation suivante :

$$E(x) = \exp(\exp x) = e^{e^x}.$$

a. Démontrer que la fonction E est développable en série entière sur la droite réelle **R**.

b. Étant donné un entier naturel n, soit A_n le réel égal à la valeur de la dérivée n-ième de la fonction E en 0 :

$$A_n = E^{(n)}(0).$$

Démontrer, en admettant les conventions habituelles $0^0 = 0! = 1$, la relation suivante :

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} .$$

c. Établir, pour tout entier naturel n ($n \geq 0$), une relation de récurrence exprimant A_{n+1} en fonction de A_0, A_1, …, A_n.

En déduire l'expression suivante du réel B_n en fonction de A_n :

$$B_n = \frac{1}{e} A_n.$$

I-2. Comparaison de sommes infinies :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs ($u_n > 0$) ; on suppose que, pour tout entier naturel n, la série de terme général $u_k\, k^n$, $k = 1, 2, ...$, est convergente. Soit U_n sa somme :

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, k^n.$$

a. Démontrer que, pour tout entier p donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$), lorsque l'entier n croît vers l'infini, le réel U_n est équivalent au reste d'ordre p de la série défini par la relation : $R_{p,\,n} = \sum_{k=p}^{\infty} u_k\, k^n$; c'est-à-dire :

$$\text{pour tout entier strictement positif } p, \quad U_n \sim R_{p,\,n} = \sum_{k=p}^{\infty} u_k\, k^n.$$

b. Étant données deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs $\left(u_n > 0,\ v_n > 0\right)$, démontrer que, si les réels u_n et v_n sont équivalents lorsque l'entier n croît vers l'infini ($u_n \sim v_n$), les deux suites de réels U_n, $n = 1, 2, \ldots$ et V_n, $n = 1, 2, \ldots$ définis par les relations suivantes :

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, k^n, \quad V_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\, k^n,$$

sont équivalentes, lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$U_n \sim V_n.$$

I-3 Fonction f_n :

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit f_n la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0, \\ e^x\, x^{-x+n-1/2}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit s_k le réel défini par la relation suivante :

$$s_k = f_n(k).$$

a. Étudier, pour un entier n donné, la convergence de la série de terme général s_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$; soit S_n la somme de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k).$$

b. Démontrer, lorsque l'entier n croît vers l'infini, l'équivalence suivante :

$$A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k).$$

DEUXIÈME PARTIE

Étant donné un réel λ strictement positif ($\lambda > 0$), soit Φ_λ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, par la relation suivante :

$$\Phi_\lambda(x) = -x \ln x + x + \lambda \ln x.$$

II-1.Étude de la fonction Φ_λ :

a. Déterminer des équivalents de $\Phi_\lambda(x)$ dans des voisinages de 0 et de l'infini.

b. Déterminer les variations de la fonction Φ_λ sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$; établir en particulier l'existence d'un réel μ en lequel la fonction Φ_λ atteint son maximum.

c. Soit φ la fonction qui, au réel λ, associe le réel μ. Démontrer que cette fonction φ, définie sur la demi-droite $]0, \infty[$, est continûment dérivable.

Pour tous réels x et λ strictement positifs, la relation ci-dessous, dans laquelle le réel μ est l'image par la fonction φ du réel λ ($\mu = \varphi(\lambda)$), est admise :

$$\Phi_\lambda\big(\mu\,(1+x)\big) = \Phi_\lambda(\mu) + (\mu - \lambda)(x - \ln(1+x)) - \mu\, x \ln(1+x).$$

II-2. Maximum de la fonction f_n :

a. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n admet un maximum en un unique point μ_n. Est-ce que la fonction f_n est continûment dérivable sur la droite réelle **R** ?

b. Établir les propriétés suivantes vérifiées par les réels μ_n ($n \geq 1$) :

i. En admettant les inégalités suivantes,

$$0 < \frac{1}{2} < 2\ln 2 < \frac{3}{2},$$

démontrer que les réels μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ vérifient les encadrements suivants :

$$1 < \mu_1 < 2 < \mu_2 \text{ ; pour tout entier supérieur ou égal à } 3 : \sqrt{n} < \mu_n < n.$$

ii. le réel μ_n est négligeable devant l'entier n lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$\mu_n = o(n) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

iii. pour tout réel α compris strictement entre 0 et 1, le réel n^α est négligeable devant μ_n, lorsque l'entier n croît vers l'infini :

$$n^\alpha = o(\mu_n) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

TROISIÈME PARTIE

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit g_n la fonction définie sur la droite réelle **R** par la relation suivante :

$$g_n(x) = \frac{1}{f_n(\mu_n)} f_n\left(\mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

III-1. **Propriétés de la fonction** g_n :

a. Vérifier, pour tout entier n strictement positif et tout réel x, la relation suivante :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n)\, g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\right).$$

b. Donner l'allure du graphe de la fonction g_n.

c. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction g ; expliciter cette fonction g.

d. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 ($n \geq n_0$) et tout réel x strictement supérieur à $-\sqrt{n}$ ($x > -\sqrt{n}$), la fonction g_n vérifie la majoration suivante :

$$g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right).$$

III-2 : **Une majoration de la fonction** g_n :

a. Soit u la fonction définie par la relation suivante :

$$u(x) = \frac{1}{x^2}\,(x - \ln(1+x)).$$

Démontrer que cette fonction se prolonge en une fonction dérivable sur la demi-droite ouverte $]-1, \infty[$; démontrer que cette fonction u est décroissante sur cet intervalle. Préciser son signe.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier n_0 introduit à la question III-1.d, la fonction g_n, définie sur la droite réelle, vérifie les majorations suivantes :

$$g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \text{ si } x \leq 0 \quad ; \quad g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right), \text{ si } x \geq 0.$$

QUATRIÈME PARTIE

Recherche d'un équivalent du réel B_n lorsque l'entier n croît indéfiniment.

IV-1. **Intégrabilité de la fonction** g_n :

Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction g_n est intégrable sur la droite réelle. Soit I_n la valeur de son intégrale :

$$I_n = \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, dx.$$

Démontrer que la suite de réels $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Il est admis que la limite de cette suite est égale à $\sqrt{2\pi}$.

IV-2. **Un encadrement de la somme** S_n :

Étant donné un entier n strictement positif, d'après la question I-3.a, le réel S_n est la somme de la série de terme général $f_n(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Déterminer des réels K_n et ε_n tels que la somme S_n soit encadrée de la manière suivante au moyen de l'intégrale I_n :

$$K_n(I_n - \epsilon_n) \leq S_n \leq K_n(I_n + \epsilon_n).$$

Les réels K_n et ϵ_n seront explicités en fonction de n, μ_n et de la fonction f_n. La suite ϵ_n tend vers 0.

Indication : Soit p l'entier égal à la partie entière du réel μ_n ; cet entier est défini par les inégalités ci-dessous :

$$p \leq \mu_n < p + 1.$$

Déterminer des encadrements des deux sommes S_n' et S_n'' définies par les relations suivantes :

$$S_n' = \sum_{k=0}^{p} f_n(k) \quad ; \quad S_n'' = \sum_{k=p+1}^{\infty} f_n(k).$$

IV-3. **Un équivalent du réel** B_n :

Déduire des résultats précédents un équivalent du réel B_n lorsque l'entier n croît vers l'infini.

FIN DU PROBLÈME

A 2002 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(**Durée de l'épreuve** : **4 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est conseillé aux Candidats de lire le problème en entier. Les deuxième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des parties précédentes.

Le crible d'Ératosthène donne un algorithme qui permet de savoir si un entier est premier ou non. Il est par suite possible d'indexer la suite des nombres premiers $p_i,\ i = 1, 2, \ldots$:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots$$

Dans tout le problème la lettre p est réservée aux nombres premiers. Étant donné un réel x, sa partie entière $[x]$ est l'entier n qui vérifie la double inégalité suivante :

$$[x] = n \leq x < n + 1.$$

Étant donné un réel x, supérieur ou égal à 2, $(x \geq 2)$, il existe un entier N égal au rang du plus grand nombre premier p_N inférieur ou égal à x

$$p_N = \sup\{p \mid p \leq x\}$$

Première partie

Le but de cette partie est de démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée et d'étudier la nature de la série de terme général $1/p_i,\ i = 1, 2, \ldots$.

I-1. **La suite des nombres premiers est illimitée** :

Démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée en considérant, par exemple, pour n nombres premiers $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ donnés, l'entier Q défini à partir de ces n nombres premiers par la relation suivante :

$$Q = p_1.p_2.\ldots.p_n + 1 = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1.$$

Dans toute la suite n est un entier supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), s un réel donné strictement positif ($s > 0$)

I-2. **Ensemble** M_n :

a. Justifier la relation suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^{k\,s}}.$$

b. Soient a et b deux entiers, différents l'un de l'autre, tous les deux supérieurs ou égaux à 2 ($a \neq b,\ a \geq 2,\ b \geq 2$) ; démontrer que la série double de terme général $u_{i\,j}$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ $j = 0, 1, 2, \ldots,$ défini par la relation suivante

$$u_{i\,j} = \frac{1}{a^{i\,s}.b^{j\,s}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

est sommable. Déterminer sa somme S.

Soient $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ les n premiers nombres premiers, M_n l'ensemble des réels obtenus en considérant tous les produits des réels $(p_1)^s,\ (p_2)^s, \ldots,\ (p_n)^s$ élevés à des exposants α_i, $1 \leq i \leq n,$ entiers positifs ou nuls.

$$M_n = \left\{m \mid m = (p_1)^{s\,\alpha_1}.(p_2)^{s\,\alpha_2}.\ldots.(p_n)^{s\,\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbf{N}\right\}.$$

c. Démontrer que l'application $\left(\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \mapsto (p_1)^{s\,\alpha_1}.(p_2)^{s\,\alpha_2}.\ldots.(p_n)^{s\,\alpha_n}$, de $\mathbf{N}^n$ dans $M_n,$ est injective. En déduire qu'il est possible d'indexer les réels m dans l'ordre croissant : l'application $i \mapsto m_i$ est strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ sur M_n.

Exemples : écrire la suite des 12 premiers termes de la suite $(m_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ lorsque le réel s est égal à 1 et l'entier n égal à 2 puis à 3.

Il est admis que la série de terme général $v_i = 1/m_i,\ i \in \mathbf{N}^*,$ est convergente ; sa somme est désignée par le symbole : $\sum_{m \in M_n} m^{-1}$. Comme le laisse présager l'alinéa b, le résultat plus général ci-dessous est vrai et est admis :

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} = \sum_{m \in M_n} \frac{1}{m} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i}.$$

Soit f_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$f_n(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1}.$$

Soit N le rang du plus grand nombre premier inférieur à n ($N = \sup\{i \mid p_i \leq n\}$).

d. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1}.$$

Retrouver, en donnant une valeur particulière au réel s, le résultat : la suite des entiers premiers est illimitée.

Déterminer, en supposant le réel s inférieur ou égal à 1 ($0 < s \leq 1$), la limite, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de l'expression $f_n(s)$ introduite ci-dessus.

Il est admis, puisque la suite des nombres premiers est illimitée, qu'à tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), peut être associé un entier N tel que le réel x soit encadré par les nombres premiers p_N et p_{N+1} :

$$p_N \leq x < p_{N+1}.$$

e. Établir, lorsque le réel s est strictement supérieur à 1 ($s > 1$), l'encadrement ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \prod_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

En déduire, pour $s > 1$, la limite de l'expression $f_n(s)$ introduite ci-dessus lorsque l'entier n tend vers l'infini.

I-3. Série de terme général $1/p_i$, $i = 1, 2, \ldots$:

Déduire des résultats ci-dessus la nature de la série de terme général v_i, $i = 1, 2, \ldots$, défini par la relation suivante.

$$v_i = \ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

En déduire la nature de la série de terme général :

$$w_i = \frac{1}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Quelle conclusion qualitative est-il possible d'en tirer sur la répartition des nombres premiers ?

I-4. Fonction ζ :

Soit ζ la fonction limite de la suite f_n. Démontrer que cette fonction, définie d'après la question I-2.e sur la demi-droite ouverte $]1, \infty[$ par la relation ci-dessous, est continûment dérivable.

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{(p_i)^s}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'établir une majoration du produit des nombres entiers premiers inférieurs ou égaux à un entier donné n et d'encadrer le plus petit commun multiple de tous les entiers inférieurs ou égaux à cet entier n.

Soit toujours n un entier supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), N le rang du plus grand nombre premier inférieur ou égal à n ; soit P_n le produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n :

$$p_N \leq n < p_{N+1}, \quad P_n = \prod_{i=1}^{N} p_i.$$

II-1. Majoration du produit P_n des nombres premiers majorés par un entier n :

a. Construire un tableau donnant pour les valeurs 2, 3, 4 et 5 de l'entier n les valeurs de N, p_N, P_n, 4^n.

b. Vérifier que, si l'entier $n + 1$ n'est pas premier, l'inégalité $P_n \leq 4^n$ implique l'inégalité $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$.

c. L'entier $n + 1$ est premier dans cet alinéa ; justifier l'existence d'un entier m tel que :

$$2m + 1 = n + 1.$$

Démontrer que tout nombre premier p compris entre $m + 2$ et $n + 1$ ($m + 2 \leq p \leq n + 1$) divise le coefficient du binôme C^m_{2m+1}. Établir la majoration suivante :

$$C^m_{2m+1} \leq 4^m.$$

En déduire que l'inégalité $P_{m+1} \leq 4^{m+1}$ implique l'inégalité $P_{n+1} \leq 4^{n+1}$.

d. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, la majoration :

$$P_n = \prod_{i=1}^{N} p_i \leq 4^n.$$

Soit d_n le plus petit commun multiple de tous les entiers 1, 2, 3,..., n.

II-2. Une expression du p. p. c. m. d_n :

Démontrer que le p. p. c. m. d_n est égal au produit des nombres premiers p_i, inférieurs ou égaux à l'entier n, élevés à des puissances α_i égales aux parties entières du rapport $\ln n$ sur $\ln p_i$; c'est-à-dire :

$$p_N \leq n < p_{N+1}, \quad d_n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}, \quad \text{avec : } \alpha_i = \left[\frac{\ln n}{\ln p_i} \right].$$

II-3. Une minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$:

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), soit I_n l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_n = \int_0^1 x^n \, (1-x)^n \, dx.$$

a. Démontrer la majoration :

$$I_n \leq \frac{1}{4^n}.$$

b. Démontrer que le p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$ est divisible par tout entier $n + k + 1$, lorsque l'entier k varie de 0 à n ($0 \leq k \leq n$). En déduire que le produit $d_{2\,n+1}.I_n$ est un entier en considérant, par exemple, une expression de I_n obtenue par développement de $(1-x)^n$.

Démontrer, à l'aide de la majoration de l'intégrale I_n, une minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'étudier les deux fonctions π et θ définies ci-dessous pour en déduire un encadrement à l'infini du réel $\pi(x)$.

Pour tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), $\pi(x)$ est égal au nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x.

$$p_N \leq x < p_{N+1}, \quad \pi(x) = N = \sum_{i=1}^{N} 1.$$

Pour tout réel x supérieur ou égal à 2 ($x \geq 2$), $\theta(x)$ est égal à la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x.

$$p_N \leq x < p_{N+1}, \quad \theta(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln p_i.$$

Plus généralement : étant donnée une suite réelle $A = (a_k)_{k\geq 1}$, soit H_A la fonction définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$, par la relation suivante :

$H_A(x)$ est nul sur l'intervalle $[1, 2[$, égal, pour $x \geq 2$, à la somme des termes de la suite A dont les rangs sont inférieurs ou égaux au rang N du plus grand nombre entier premier inférieur ou égal à x :

$$H_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 1 \leq x < 2, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k, \text{ si } 2 \leq x \text{ et } p_N \leq x < p_{N+1}. \end{cases}$$

III-1. Un résultat auxiliaire :

Préciser, pour une suite $A = (a_i)_{i\geq 1}$ donnée, sur quels intervalles la fonction H_A est continue. Quels sont ses points de discontinuité ? Préciser en ces points x la valeur de $H_A(x) - H_A(x-0)$.

Soit f une fonction réelle, définie et continûment dérivable sur la demi-droite fermée $[2, \infty[$, et une suite réelle $A = (a_i)_{i\geq 1}$; démontrer la relation suivante : pour tout réel x compris entre p_N et p_{N+1}, $(p_N \leq x < p_{N+1})$ il vient :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\, f(p_i) = H_A(x)\, f(x) - \int_2^x H_A(t)\, f'(t)\, dt.$$

III-2. **Une majoration de la fonction π** :

a. Démontrer la majoration suivante de la fonction θ :

$$\theta(x) \leq x\, \ln 4.$$

b. Établir en choisissant, dans la relation établie à la question précédente, comme suite A, la suite $\ln p_k$, $k = 1, 2, ...,$ et comme fonction f, la fonction $x \mapsto 1/\ln x$, l'inégalité suivante :

$$\pi(x) \leq \ln 4 \left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \right).$$

c. Démontrer la convergence vers 0, lorsque le réel x croît vers l'infini, de la fonction $R(x)$ suivante :

$$R(x) = \frac{\ln x}{x} . \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}.$$

Indication : introduire, pour $x \geq 4$, les intégrales de 2 à $\sqrt{x}$ et de $\sqrt{x}$ à x.

d. En déduire l'existence d'un réel x_0 tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à x_0, la fonction π vérifie la majoration suivante :

$$\pi(x) \leq 4\, \ln 2\, \frac{x}{\ln x}.$$

III-3. **Une minoration de la fonction π** :

En utilisant par exemple la minoration du p. p. c. m. $d_{2\,n+1}$ obtenue à la question II-3, démontrer qu'il existe un réel x_1 tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à x_1, la fonction π vérifie la minoration suivante :

$$\pi(x) \geq \frac{\ln 2}{2}\, \frac{x}{\ln x}.$$

Ces deux résultats sont cohérents avec le "théorème des nombres premiers" établi par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896, qui affirme que la fonction π est équivalente à l'infini à la fonction $x \mapsto x/\ln x$.

Quatrième partie

Soit, dans toute cette partie, un entier n donné ($n \geq 2$). L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est l'ensemble quotient de l'anneau $\mathbf{Z}$ par la relation d'équivalence : "deux entiers relatifs sont équivalents si leur différence est divisible par l'entier n". Classiquement un élément de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, une classe d'équivalence, est notée $\bar{a}$, a étant un représentant de cette classe.

Soit φ la fonction qui, à l'entier n, associe le nombre d'éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

IV-1. **Théorème d'Euler** :

a. Démontrer que, pour que l'élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit inversible, il faut et il suffit que l'entier a soit premier avec n. Donner les valeurs de $\varphi(n)$ lorsque l'entier n prend toute valeur de 2 à 7.

b. Démontrer que l'ensemble $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles est un groupe multiplicatif. Quel est son cardinal ?

Soit a un entier compris entre 0 et $n-1$ ($0 \leq a \leq n-1$), premier avec n. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles. Démontrer la relation :

$$\bar{a}^{\varphi(n)} \equiv \bar{1}, \qquad (n).$$

Indication : considérer l'application $\gamma : \bar{b} \mapsto \bar{b}.\bar{a}$ de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ dans lui-même puis l'expression c définie par la relation suivante :

$$c = \prod_{b \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*} \bar{b}.\bar{a}.$$

c. Application : déterminer le reste de la division de 251^{311} par 6.

IV-2. **Principe de cryptographie** :

Soit n un entier ($n \geq 2$) égal au produit de deux nombres premiers p et q ; $n = p.q$.

a. Démontrer la relation :

$$\varphi(n) = (p-1)\,(q-1).$$

Soit e un nombre entier premier avec $(p-1)\,(q-1)$.

b. Établir l'existence d'un entier d tel que :

$$\bar{e}.\bar{d} \equiv 1, \qquad \big((p-1)\,(q-1)\big).$$

Exemple simple : $n = 6$, $e = 5$; calculer, pour tout élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\bar{a}^{e.d}$.

c. Démontrer pour tout élément $\bar{a}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, la relation :

$$\bar{a}^{\,e.d} \equiv \bar{a}, \qquad (n).$$

En fait l'entier e est connu de l'expéditeur, l'entier d du destinataire. L'entier d est très difficile à calculer si la factorisation de l'entier n n'est pas connue (les entiers p et q sont grands).

Chiffrement du message a par l'expéditeur : $a \rightarrow a^e$; déchiffrement par le destinataire : $a^e \rightarrow (a^e)^d$. Le message est retrouvé.

FIN DU PROBLÈME

A 2002 PSI 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PSI

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étant donnée une fonction f réelle, définie sur le segment $[0,1]$, indéfiniment dérivable, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par les relations suivantes :

(**U**) $u_0 = 1$; pour tout entier n strictement positif, $u_n = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{1}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) \dots f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n\, x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Soit F la somme de cette série entière ; son ensemble de définition est l'ensemble des points en lesquels la série entière est convergente. Elle est définie par la relation suivante :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^n.$$

Première partie

I-1. **Rayon de convergence** :

a. Exemples : étant donnés un réel α différent de 0 ($\alpha \neq 0$) et un entier naturel p différent de 0 ($p \geq 1$), déterminer les rayons de convergence et les sommes F_1, F_2 et F_3 des séries entières de terme général $u_n\, x^n$, lorsque la fonction f est successivement définie par l'une des trois relations suivantes :

$$f_1(t) = \alpha\ ;\ f_2(t) = \alpha\, t\ ;\ f_3(t) = p\, t - 1.$$

Préciser les ensembles de définition des trois fonctions F_1, F_2 et F_3 ; pour déterminer la fonction F_3, exprimer le coefficient u_n pour $n \leq p-1$ au moyen du coefficient du binôme C_{p-1}^{n}

égal à $\begin{pmatrix} p-1 \\ n \end{pmatrix}$.

b. Déterminer, pour une fonction f réelle, définie sur le segment $[0,1]$, indéfiniment dérivable, le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n\, x^n$.

Dans la suite du problème, les fonctions indéfiniment dérivables f considérées prennent des valeurs différentes de 0 en tout point d'abscisse $1/n$ où n est un entier strictement positif (pour tout entier n strictement positif $f(1/n) \neq 0$).

I-2 Suite de terme général u_n :

a. Démontrer que, si la fonction f prend une valeur en 0 strictement positive ($f(0) > 0$), il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, le réel u_n soit de signe constant.

b. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans les deux cas suivants :

i. le réel $|f(0)|$ appartient à l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ $(0 \leq |f(0)| < 1)$,

ii. le réel $|f(0)|$ est strictement supérieur à 1 $(|f(0)| > 1)$.

Dans toute la suite du problème, la fonction f prend la valeur 1 en 0 ($f(0) = 1$) et des valeurs strictement positives sur le segment $[0,1]$.

I-3. **Série de terme général** u_n :

Soit β la valeur prise par la fonction dérivée f' en 0 :

$$\beta = f'(0).$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par les relations suivantes :

$$v_0 = 1\ ;\ \text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 1 : v_n = \frac{u_n}{n^\beta}.$$

Dans le cas particulier où β est nul : $v_n = u_n$.

Étudier la convergence de la série dont le terme général w_n, $n = 1, 2, \ldots$, est défini par la relation :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 1 : w_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

En déduire l'existence d'une constante L, différente de 0, telle que u_n soit équivalent à l'infini à $L\, n^\beta$.

$$u_n \sim L\, n^\beta.$$

I-4. **Fonction** F :

a. Soit f une fonction réelle, définie sur le segment $[0,1]$, strictement positive, indéfiniment dérivable, prenant la valeur 1 en 0 ; déterminer l'ensemble de définition D_F de la fonction F, c'est-à-dire l'ensemble des réels pour lesquels la série de terme général $u_n\, x^n$ est convergente ;

les coefficients u_n sont définis par la relation (**U**) de la première page.

b. Exemple : étant donné un réel α différent d'un entier naturel, soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la relation suivante :

$$f(t) = 1 - \alpha\, t.$$

Soit F la fonction égale à la somme de la série entière de terme général $u_n\, x^n$; les coefficients u_n sont définis par la relation (**U**). Écrire l'expression de $F(x)$ comme somme d'une série entière ; préciser son rayon de convergence. Reconnaître la fonction F.

Deuxième partie

Soit α un réel strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$; soit f la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par la relation suivante :

$$f(t) = 1 - \alpha^2\, t^2.$$

C'est un exemple de fonction f dont la dérivée est nulle en 0 $\left(f'(0) = 0\right)$. Soit g la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par les relations suivantes :

$$g(0) = 0\ ;\ \text{pour tout } x \text{ vérifiant } 0 < |x| < 1,\ g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi\, x}\ .$$

II-1. Propriétés de la fonction g :

a. Démontrer que la fonction g, définie par les relations ci-dessus, est continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Calculer pour tout réel α, appartenant à l'intervalle ouvert $\left]-1,\ 1\right[$, l'intégrale I_α définie par la relation ci-dessous :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha g(t)\, dt.$$

b. Soit h la fonction complexe, périodique de période 2π, définie sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 2\pi[$ par la relation suivante :

$$\text{pour tout réel } t \text{ vérifiant les inégalités } 0 \leq t < 2\pi,\ h(t) = e^{-i\,\alpha\, t}.$$

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction h ; préciser la convergence de la série obtenue. En déduire la relation :

$$g(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

c. En déduire une expression de l'intégrale I_α, considérée à l'alinéa a, au moyen de la somme d'une série.

II-2. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie à partir de la fonction f grâce aux relations (**U**) est convergente et déterminer sa limite.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'utiliser les résultats de la deuxième partie pour établir des propriétés de la fonction G définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ par la relation :

$$G(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = \int_{]0,\,\infty[} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), soit φ_n la fonction définie sur le quart de plan $]0,\infty[\times]0,\infty[$ par la relation suivante :

$$\varphi_n\left(x,\, t\right) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \text{ si } 0 < t \leq n \,;\, \varphi_n\left(x,\, t\right) = 0, \text{ si } t \geq n.$$

Soit G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ par la relation suivante :

$$G_n(x) = \int_0^n \varphi_n\left(x,\, t\right)\, dt = \int_{]0,\,n]} \varphi_n\left(x,\, t\right)\, dt.$$

III-1. Existence des fonctions G_n **et** G :

Démontrer que les deux fonctions G_n et G sont définies et continues sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$. Démontrer que la suite des fonctions $G_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ converge simplement, sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$, vers la fonction G.

III-2. Une expression de $G_n(x)$:

a. Étant donnés un entier naturel n et un réel x strictement positif ($x > 0$), soit $J_n(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n\, t^{x-1}\, dt = \int_{]0,\,1]} (1-t)^n\, t^{x-1}\, dt.$$

Calculer cette intégrale.

b. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel x strictement positif, une expression de $G_n(x)$.

III-3. Relation des compléments :

Démontrer, pour tout réel x strictement compris entre 0 et 1 ($0 < x < 1$), la relation suivante :

$$G(x)\, G(1-x) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\, x\right)}.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2002 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.
Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit F la somme de la série entière réelle de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(n!)^2}, n = 0, 1, 2, ...;$$

cette fonction F est définie par la relation suivante :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Le but de ce problème est de rechercher une fonction équivalente à la fonction F à l'infini.

Première partie

I.1 Définition de la fonction F :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F. Étudier les variations de la fonction F et la convexité de son graphe.

I.2 Encadrement de la fonction F :

Soient $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les suites réelles définies par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n\ ; \quad w_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}4^n\ ;\ n = 0,1,2,\ldots,\ (0! = 1).$$

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone croissante. En déduire l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}\ ;\ n = 0,1,2,\ldots.$$

En déduire une majoration, sur la demi-droite fermée $[0,\ \infty[$, de la fonction F à l'aide de la fonction $x \mapsto ch(2x)$.

b. Démontrer de même une minoration, sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, de la fonction F à l'aide de la fonction $x \mapsto sh(2x)/2x$.

Pour tout réel x strictement positif, soit $G(x)$ la moyenne géométrique des réels $ch(2x)$ et $sh(2x)/2x$. Soit Φ la fonction définie, sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, par la relation suivante :

$$\Phi(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}.$$

c. Comparer les deux fonctions G et Φ à l'infini.

Deuxième partie

Dans la suite il sera utile de considérer la transformation L suivante (dite de Laplace). À une fonction f donnée $t \mapsto f(t)$, définie et continue sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, intégrable sur tout intervalle semi-ouvert $]0,\ a\,]$, (a est un réel positif quelconque), la transformation L associe la fonction $L(f)$ qui, si elle existe, est définie par la relation suivante :

$$L(f)(x) = \int_0^\infty f(t)\ e^{-xt}\ dt.$$

II-1. **Exemples** : **transformées de Laplace des fonctions** F **et** Φ :

a. Un résultat préliminaire : soit x un réel strictement positif donné ($x > 0$) ; calculer pour tout entier naturel k ($k \in \mathbf{N}$), l'intégrale I_k suivante :

$$I_k = \int_0^\infty t^k\ e^{-xt}\ dt.$$

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto F(t)\ e^{-xt}$ est intégrable sur la demi-droite fermée $[0,\ \infty[$ dès que le réel x est strictement supérieur à 2 ($x > 2$). Déterminer la fonction $L(F)$ en calculant $L(F)(x)$ au moyen de la somme d'une série.

$$L(F)(x) = \int_0^\infty F(t)\ e^{-xt}dt.$$

c. Soit g la somme d'une série entière définie par la relation suivante :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, t^{2n}.$$

Déterminer l'intervalle ouvert $]-R,\ R[$ de définition de la fonction g. Déterminer au moyen de fonctions élémentaires l'expression de $g(t)$ en utilisant par exemple le développement en série entière de la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}.$$

d. En déduire l'expression, pour tout réel x supérieur strictement à 2, de la transformée de Laplace de la fonction F.

e. Déterminer, en précisant son ensemble de définition, la transformée de Laplace de la fonction Φ, définie pour $t > 0$ par la relation suivante :

$$\Phi(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}.$$

Le résultat ci-contre est admis : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II-2. Une propriété de la transformation de Laplace :

Étant donnée une fonction f définie et continue sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, intégrable sur tout intervalle semi-ouvert $]0,\ a]$, (a est un réel positif quelconque), soit $I(f)$ l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t}$ est intégrable sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$:

$$I(f) = \left\{x \mid t \mapsto f(t)\, e^{-x\,t} \text{ est intégrable sur }]0,\ \infty[\right\}.$$

a. Démontrer que si le réel x_0 appartient à l'ensemble $I(f)$, alors la demi-droite fermée $[x_0,\ \infty[$ est contenue dans $I(f)$.

Soit E l'ensemble des fonctions f, considérées ci-dessus, dont l'ensemble $I(f)$ n'est ni vide ni égal à toute la droite réelle $\left(I(f) \neq \emptyset \text{ et } I(f) \neq \mathbf{R}\right)$.

b. Démontrer que, pour toute fonction f appartenant à l'ensemble E, l'ensemble $I(f)$ admet une borne inférieure $\alpha(f)$:

$$\alpha(f) = \inf\{x \mid x \in I(f)\}.$$

En déduire que l'ensemble $I(f)$ est la demi-droite ouverte $]\alpha(f),\ \infty[$ ou la demi-droite fermée $[\alpha(f),\ \infty[$.

c. Démontrer que, pour toute fonction f appartenant à E, la fonction $x \mapsto L(f)(x)$ est continue sur la demi-droite ouverte $]\alpha(f),\ \infty[$.

Démontrer que, si la fonction f est positive, la fonction $L(f)$ est décroissante ; en déduire que, si $\alpha(f)$ appartient à $I(f)$, la fonction $L(f)$ est bornée sur la demi-droite fermée $[\alpha(f),\ \infty[$.

d. Soit g une fonction positive appartenant à l'ensemble E, dont la transformée de Laplace $L(g)$ est bornée sur la demi-droite ouverte $]\alpha(g), \infty[$. Démontrer les propriétés suivantes :

i/ il existe une constante positive M, telle que, pour tout réel x strictement supérieur à $\alpha(g)$ ($x > \alpha(g)$) et tout réel positif A :

$$\int_0^A g(t)\, e^{-x\,t} dt \leq M.$$

ii/ En déduire que la transformée de Laplace de la fonction g est définie sur la demi-droite fermée $[\alpha(g), \infty[$.

II-3. **Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes** :

Soient g et h deux fonctions, positives, appartenant à l'espace E. Ces deux fonctions sont supposées croître vers l'infini lorsque le réel t tend vers l'infini et être équivalentes à l'infini ($g \simeq h$).

a. Démontrer que les deux réels $\alpha(g)$ et $\alpha(h)$ sont égaux.

b. Ici $\alpha(h)$ n'appartient pas à $I(h)$. Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur $L(h)(x)$ lorsque le réel x tend vers $\alpha(h)$ (par valeurs supérieures) ? Démontrer que, pour tout réel positif ε, il existe un réel A tel que, pour t supérieur à A, il vienne l'inégalité :

$$|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|h(t)|.$$

En déduire l'inégalité ci-dessous, pour tout réel x appartenant à la demi-droite ouverte $]\alpha(h), \infty[$,

$$|L(g)(x) - L(h)(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)|\, e^{-x\,t}\, dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_A^\infty |h(t)|\, e^{-x\,t}\, dt.$$

Démontrer que les deux fonctions $L(g) - L(h)$ sont équivalentes lorsque le réel x tend vers $\alpha(h)$.

II-4. **Une conjecture** :

Comparer les transformées de Laplace des fonctions F et Φ. Est-il possible de proposer un équivalent à la fonction F à l'infini ?

Troisième partie

Le but de cette partie est d'établir le résultat suggéré par la question II-4.

III-1. **Fonction k** :

Dans cette question, x est un réel fixé strictement positif. Soit $k : t \mapsto k(t)$ la fonction définie par la relation suivante :

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, e^{i\,n\,t}.$$

a. Démontrer que, pour tout réel x fixé, la fonction $k : t \mapsto k(t)$ est définie et continue sur la droite réelle $\mathbf{R}$, périodique et de période 2π.

En déduire la valeur de l'intégrale J ci-dessous au moyen du réel $F(x)$.

$$J = \int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt.$$

b. Calculer $k(t)$. En déduire une expression de $|k(t)|^2$.

c. En déduire l'expression de $F(x)$ au moyen de l'intégrale $\int_0^{\pi} \exp\left(2\, x\, \cos t\right)\, dt$.

III-2. **Trois fonctions auxiliaires** :
Étant donné un réel x strictement positif, soient h_1, h_2 et h_3 les trois fonctions suivantes :

$$h_1(x) = \int_0^{\pi/2} \exp\left(x\, \cos t\right)\, dt \quad ; \quad h_2(x) = \int_0^1 \frac{\exp\left(x\, t\right)}{\sqrt{1-t}}\, dt \quad ;$$

$$h_3(x) = \int_0^1 \exp\left(x\, t\right)\, \sqrt{1-t}\, dt.$$

a. Justifier l'existence de ces trois intégrales.

b. En effectuant d'abord le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ dans l'intégrale servant à calculer $h_2(x)$, déterminer un équivalent de $h_2(x)$ lorsque le réel x tend vers l'infini.

c. Déterminer de même un équivalent de $h_3(x)$ lorsque le réel x tend vers l'infini.

Le résultat ci-contre est admis : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u}\, \sqrt{u}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

d. Établir la propriété suivante : il existe une constante C telle que, pour tout réel u de l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$, la relation ci-dessous soit vraie :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leq C\sqrt{1-u}\,.$$

e. Déduire des résultats précédents un équivalent de $h_1(x)$ à l'infini.

III-3 Équivalent de la fonction F à l'infini :
Déduire des résultats précédents un équivalent de la fonction F à l'infini.

FIN DU PROBLÈME

A 2002 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, I est le segment $[0,1]$, f est une fonction réelle définie et continue sur le segment I, p est une fonction définie et continue sur le segment I, positive (pour tout réel x de I, $p(x) \geq 0$).

L'objet du problème est l'étude et l'approximation des solutions réelles, définies sur le segment I, deux fois continûment dérivables (de classe C^2) des équations différentielles suivantes :

$$\mathbf{E}_0 \qquad -u''(x) + p(x)\,u(x) = 0,$$

$$\mathbf{E} \qquad -u''(x) + p(x)\,u(x) = f(x).$$

vérifiant, en outre, les conditions suivantes aux extrémités du segment I :

$$\mathbf{C} \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Une fonction u, de classe C^2, définie sur le segment I, vérifiant les conditions **C**, est dite solution du problème P_0 si elle est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, respectivement solution du problème P si elle est solution de l'équation différentielle **E**.

Première partie

Exemples, résultats généraux.

I-1. **Exemples** :

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle **E** vérifiant les conditions **C** dans les deux cas suivants :

a. La fonction p est nulle et la fonction f constante et égale à 1 :

$$p(x) = 0, \quad f(x) = 1.$$

b. La fonction p est constante et égale à 1 ; la fonction f est la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ où α est un réel donné :

$$p(x) = 1, \quad f(x) = e^{\alpha x}.$$

I-2. **Unicité des solutions** :

a. Soit u une fonction solution de l'équation $\mathbf{E}_0$ vérifiant les conditions **C** ; démontrer que cette solution u vérifie la relation :

$$\int_0^1 \left[u'(x)^2 + p(x)\, u(x)^2 \right] dx = 0.$$

En déduire que la seule solution du problème P_0 est la solution nulle.

b. Démontrer que, pour des fonctions p et f données, il existe, au plus, une solution du problème P.

I-3. **Existence d'une solution** :

a. Étant données deux fonctions u_1 et u_2 solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, soit g la fonction définie sur l'intervalle I par la relation suivante :

$$g(x) = u_1(0)\, u_2(x) - u_2(0)\, u_1(x).$$

Démontrer que, si la fonction g s'annulle au point 1 ($g(1) = 0$), la fonction g est nulle sur l'intervalle I.

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les deux solutions u_1 et u_2 pour que la fonction g ne s'annulle pas en 1 ($g(1) \neq 0$).

Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E}_0$, v une solution de l'équation **E** et λ et μ deux scalaires. Soit u et X la fonction et le vecteur définis par les relations suivantes :

$$u(x) = \lambda\, u_1(x) + \mu\, u_2(x) + v(x) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que, pour que la fonction u soit solution du problème P, il faut et il suffit que le vecteur X vérifie la relation matricielle suivante :

$$U.X = B,$$

où U est une matrice carrée d'ordre 2 et B un vecteur qui seront précisés.

c. Démontrer que le problème P admet une solution unique.

Deuxième partie

Quelques propriétés de certaines matrices de $M_n(\mathbf{R})$.

Il est admis que l'application de l'espace $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \mapsto \|X\| = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|,$$

est une norme. Il est admis que l'application de l'espace des matrices carrées d'ordre n, $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^+$:

$$A \mapsto N(A) = \sup_{\|X\|\leq 1} \|A.X\|,$$

est une norme. Un vecteur $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbf{R}^n$ est dit positif si toutes ses coordonnées x_i sont positives ou nulles ($x_i \geq 0$). Cette propriété s'écrit :

$$X \geq 0.$$

Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est dite positive si tous ses termes a_{ij} sont positifs ou nuls. Cette propriété s'écrit :

$$A \geq 0.$$

Étant donnée la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$, soit E le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1 : $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

II-1. Quelques propriétés matricielles :
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que, pour que cette matrice A soit positive, il faut et il suffit que le vecteur image de tout vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ soit positif.

b. Établir la propriété : pour tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$,

$$\|A.X\| \leq N(A)\ \|X\|.$$

c. Démontrer, pour une matrice A positive, la relation :

$$N(A) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Comparer les deux expressions $N(A)$ et $\|A.E\|$; en déduire la norme de la matrice A.

d. Soit A une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ possédant la propriété suivante : chaque fois qu'un vecteur X de $\mathbf{R}^n$ a une image positive ($A.X \geq 0$), le vecteur X est positif ($X \geq 0$). Démontrer que la matrice A est injective puis qu'elle est inversible et que son inverse A^{-1} est une matrice positive.

II-2. **Un exemple** :

Soient A et H les deux matrices carrées d'ordre n suivantes :

Les termes de la matrice A situés sur la diagonale principale sont égaux à 2, ceux situés juste au dessus et juste au dessous à -1, les autres sont nuls.

La matrice H est diagonale et positive ; les termes h_i, $1 \leq i \leq n$, de la diagonale principale sont positifs ou nuls ($h_i \geq 0$) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}.$$

a. Soit X un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tel que le vecteur $(A + H).X$ soit positif.

Démontrer que le vecteur X est positif à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, par exemple, en complétant la suite $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ par des termes x_0 et x_{n+1} nuls ($x_0 = x_{n+1} = 0$), et en considérant l'entier k pour lequel le réel x_k est égal au plus petit des réels x_i, $0 \leq i \leq n + 1$:

$$x_k = \min_{0\leq i\leq n+1} x_i.$$

b. Déduire du résultat précédent que les deux matrices $A + H$ et A sont inversibles.

II-3. **Norme de la matrice** $(A + H)^{-1}$:

Soit V et W les deux vecteurs définis par les relations suivantes :

$$V = (A + H)^{-1}E, \quad W = A^{-1}E.$$

a. Démontrer que ces vecteurs sont positifs ainsi que le vecteur $A(W - V)$.

b. Comparer les normes des deux vecteurs V et W ; en déduire : pour tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$,

$$\left\| (A + H)^{-1}.X \right\| \leq \|W\| \, \|X\|.$$

II.4. Une majoration de la norme du vecteur W :

Soit S l'ensemble des suites réelles infinies $(x_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, pour $k > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$-x_{k-1} + 2\,x_k - x_{k+1} = 1.$$

Soit S_0 l'ensemble des suites réelles $(x_k)_{k\geq 0}$ vérifiant, pour $k > 0$, la relation de récurrence suivante :

$$-x_{k-1} + 2\,x_k - x_{k+1} = 0.$$

a. Déterminer les suites qui appartiennent à l'espace S_0.

b. Déterminer une suite $(y_k)_{k\geq 0}$ appartenant à l'espace S qui soit un monome du deuxième degré :

$$y_k = a\,k^2.$$

c. Déterminer les suites qui appartiennent à l'espace S ; en particulier celles qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 0.$$

d. Déterminer les coordonnées du vecteur $W = A^{-1}E$; en déduire que la norme de ce vecteur vérifie l'inégalité suivante :

$$\|W\| \leq \frac{1}{8}(n+1)^2.$$

Troisième partie

Approximation de la solution du problème P.

Dans toute la suite l'entier n est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Soit h et $t_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$ les réels définis par les relations suivantes :

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad t_k = h.k = \frac{k}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n+1.$$

III-1 Une approximation de la dérivée seconde :

Soit u une fonction quatre fois continûment dérivable sur le segment I. Soit M le maximum de la valeur absolue de la dérivée quatrième :

$$M = \sup_{x\in I} |u^{(4)}(x)|.$$

Soient t et h des réels tels que les réels $t - h$ et $t + h$ appartiennent au segment I. Démontrer l'existence d'une fonction R des réels t et h qui vérifient les relations suivantes :

$$u(t+h) + u(t-h) - 2\,u(t) = h^2\,u''(t) + R(t,h)\ , \quad |R(t,h)| \leq \frac{h^4}{12}\,M.$$

III-2. **Problème** *P* **discrétisé** :

a. Démontrer que, si les deux fonctions *p* et *f* sont deux fois continûment dérivables, la solution *u* du problème *P* est quatre fois continûment dérivable.

Soient *X* et *Y* les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et *H* la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définis par les relations suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \cdots \\ u(t_n) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} f(t_1)\,h^2 \\ f(t_2)\,h^2 \\ \cdots \\ f(t_n)\,h^2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} p(t_1)\,h^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(t_2)\,h^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(t_n)\,h^2 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer, en désignant toujours par *A* la matrice définie à la question II-2, un majorant de la norme du vecteur $Z = (A + H).X - Y$, au moyen des réels *M* et *h*.

Soit $\widetilde{X}$ le vecteur défini par la relation suivante :

$$\widetilde{X} = (A + H)^{-1}Y.$$

c. Démontrer la majoration :

$$\left\| X - \widetilde{X} \right\| \leq K\,h^2,$$

où *K* est une constante ; en donner une valeur à l'aide de *M*.

Donner une signification du vecteur $\widetilde{X}$. Préciser comment ce vecteur se calcule.

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première partie

Le but de cette première partie est d'établir des résultats qui seront utiles dans la seconde partie.

Étant donné un entier n strictement positif $(n \geq 1)$, soient S_n et I_n les deux réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \right) \quad ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

Intégrale I_n.

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif n, l'intégrale I_n.

2. Déterminer les constantes A, B, C et D figurant dans le développement limité de la fonction $n \longmapsto I_n$ à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = A\ n + B\ \ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Somme S_n :

3. Établir un encadrement du réel S_n à l'aide de I_n.

4. En déduire que la somme S_n est équivalente à l'infini à $2n\ \ln 2$.

Soit J_n l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2\ dx.$$

Intégrale J_n :

5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale J_n au réel S_n. En déduire, lorsque l'entier n croît indéfiniment, un équivalent de J_n à l'infini.

Seconde partie

Soit E un espace préhilbertien réel ; soit $(x,\ y) \longmapsto (x \mid y)$ le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur x de E, déduite de ce produit scalaire est notée $\|x\|$.

Étant donné un réel μ supérieur ou égal à 1 ($\mu \geq 1$), une suite de n vecteurs d'un espace euclidien E_n, de dimension finie n, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ est dite μ-presque orthogonale (en abrégé μ-p.o.) si et seulement si :

i. les vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ sont de norme unité,

ii. pour toute suite finie de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\ x_i$ vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i\ x_i\right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Plus généralement : une suite dénombrable $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p. o.), si et seulement s'il existe un réel $\mu \geq 1$ tel que, pour tout entier n strictement positif, pour toute suite extraite $x_{k_1},\ x_{k_2},\ ...,\ x_{k_n}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour toute suite finie de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\ x_{k_i}$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\ x_{k_i}\right\|^2 \leq \mu\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\,.$$

Remarque : la suite des indices $k_1,\ k_2,\ ...,\ k_n$ de la suite extraite $x_{k_1},\ x_{k_2},\ ...,\ x_{k_n}$, est une suite monotone strictement croissante $k_1 < k_2 < ... < k_n$.

Premières propriétés :

Soit E_n un espace euclidien de dimension n.

6. Démontrer que, pour qu'une suite de n vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ soit une base orthonormée de E_n, il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.

7. Démontrer que, si une suite de n vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ de E_n est μ-presque orthogonale, la suite est libre.

Un exemple :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,\ 1]$; le produit scalaire de deux fonctions f et g de E est défini par la relation suivante :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)\ g(x)\ dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de E définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}\ x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions P_n de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas presque orthogonale.

Soit $(V_1,\ V_2,\ ...,V_n)$ une suite libre de n vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien E_n de dimension n. Soit M la matrice carrée d'ordre n dont les éléments $m_{i\ j}$ sont égaux aux produits scalaires des vecteurs V_i et V_j.

$$M = (m_{i\ j}) \quad ; \quad m_{i\ j} = (V_i \mid V_j)\,.$$

Étant donnée une suite de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, soit A le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ et W le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs $V_1,\ V_2,\ ...,V_n$ avec les coefficients $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^{n} a_i\ V_i.$$

La suite de vecteurs $(V_1,\ V_2,\ ...,V_n)$ est μ-presque orthogonale :

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée P orthogonale et d'une matrice diagonale D dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^tP.D.P.$$

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur W au réel ${}^tA.M.A$; ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice colonne A.

11. En déduire que les éléments de la matrice D sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur W à l'aide des valeurs propres de la matrice M et de la norme du vecteur B égal à l'image par la matrice P du vecteur A ($B = P.A$).

12. En déduire que la suite $(V_1,\ V_2,\ ..., V_n)$ est μ-presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel μ.

Soit maintenant $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E.

Une condition suffisante :

13. Démontrer que, s'il existe un réel α, strictement supérieur à 3 ($\alpha > 3$), tel que le produit scalaire de deux vecteurs V_p et V_q soit majoré en valeur absolue par le réel $\alpha^{-|p-q|}$, c'est-à-dire :

$$|(V_p \mid V_q)| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}},$$

la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est presque orthogonale.

Deux questions préliminaires :

14. Soit f la fonction définie dans le quart de plan $[1,\infty[\times [1,\infty[$ par la relation suivante :

$$f\,(x,\ y) = \frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

Soit G la fonction, définie sur la demi-droite $[1,\infty[$, par la relation suivante :

$$G\,(x) = \lim_{y\longrightarrow\infty} f\,(x,\ y)\,.$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$ par les relations suivantes :

$$x \longmapsto f\,(x,\ 1)\ ;\quad y \longmapsto f\,(1,\ y)\ ;\ G\ :\ x \longmapsto \lim_{y\longrightarrow\infty} f\,(x,\ y)\ ;$$
$$y \longmapsto \lim_{x\longrightarrow\infty} f\,(x,\ y)\ ;\quad f_y :\ x \longmapsto f\,(x,\ y)\,;\quad f_x :\ y \longmapsto f\,(x,\ y)\,.$$

15. Soit γ un réel strictement compris entre 0 et 1 ($0 < \gamma < 1$). Démontrer l'existence d'une fonction φ_γ, définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$, telle que, pour tout réel y de la demi-droite $[1, \infty[$, la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f\left(\varphi_\gamma\left(y\right),\ y\right) = \gamma.$$

Démontrer l'existence d'un réel β tel que la fonction G, définie ci-dessus, prenne la valeur γ en ce point : $G\left(\beta\right) = \gamma$. Démontrer que ce réel β est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par φ_γ de la demi-droite fermée $[1, \infty[$.

Soit (P_{k_i}) une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application $i \longmapsto k_i$ est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit Q_i le polynôme P_{k_i} :

$$Q_i = P_{k_i}.$$

Étude de la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$:

16. On choisit une suite $(k_i)_{i\geq 0}$ telle que la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$ soit presque orthogonale.

Démontrer que le réel μ entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 ($\mu > 1$).

Démontrer qu'il existe un réel β, strictement supérieur à 1 ($\beta > 1$), tel que, pour tout indice i, les indices k_i et k_{i+1} soient liés par la relation suivante :

$$k_{i+1} \geq \beta\ k_i.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet du problème est l'étude de méthodes analytiques (méthodes du gradient, du Lagrangien) pour résoudre l'équation linéaire $A.x = b$ où A est une matrice symétrique positive, inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Dans tout le problème, l'entier n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$) ; la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $e_1,\ e_2, ...,\ e_n$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est noté $(x \mid y)$. La norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$.

Les matrices considérées sont réelles ; l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n est noté $M_n(\mathbb{R})$. Il est admis que l'application qui, à une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, associe la borne supérieure $N(M)$ des normes des images par M des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est une norme :

$$N(M) = \sup_{\|x\|=1} \|M.x\| .$$

Une matrice symétrique A est dite positive lorsque, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire des vecteurs $A.x$ et x est positif ou nul $(A.x \mid x) \geq 0$.

Première partie

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu.

Résultats préliminaires :

Soit M une matrice carrée symétrique d'ordre n.

1. Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q tels que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire $(M.x \mid x)$ vérifie l'encadrement suivant :

$$p \ \|x\|^2 \leq (M.x \mid x) \leq q \ \|x\|^2 .$$

Préciser ces deux réels p et q en fonction des valeurs propres de la matrice M.

2. Montrer que, pour que cette matrice M soit inversible et positive, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient strictement positives.

3. Démontrer que la norme $N(M)$ d'une matrice M symétrique est égale à la plus grande valeur absolue des valeurs propres λ_i $(1 \leq i \leq n)$ de la matrice M :

$$N(M) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| .$$

Étant donnés la matrice carrée, d'ordre n, symétrique positive A et le vecteur b, soit α un réel strictement positif strictement majoré par $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$ où λ_n est la plus grande valeur propre de la matrice A ; soit $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite définie par un premier vecteur x^0 choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^n$ et par la relation de récurrence suivante : pour tout entier naturel k,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha \ \left(b - A.x^k\right) .$$

Étude de la suite $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$:

4. Démontrer que la suite $\left(x^k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite convergente de limite le vecteur z de l'espace $\mathbb{R}^n$, solution de l'équation $A.x = b$.

Soit f la fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^n$, par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}(A.x \mid x) - (b \mid x).$$

Minimum de f :

5. Calcul préparatoire : démontrer que l'expression $f(x+u) - f(x)$ se calcule en fonction des expressions $(A.u \mid u)$, $(A.x \mid u)$ et $(b \mid u)$.

6. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(1 \leq k \leq n)$:

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x).$$

Étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, soit $g(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, sont égales aux valeurs des dérivées partielles de la fonction f en ce point x :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\ e_k.$$

7. Exprimer ce vecteur $g(x)$ au moyen de la matrice A et des vecteurs x et b.

Étant donnés deux vecteurs x et u de $\mathbb{R}^n$, soit $I(x,u)$ l'expression suivante :

$$I(x,u) = f(x+u) - f(x) - (g(x) \mid u).$$

8. Démontrer que, pour tout vecteur x donné, il existe deux constantes positives ou nulles r et s telles que, pour tout vecteur u, $I(x,u)$ vérifie la relation suivante :

$$r\ \|u\|^2 \leq I(x,u) \leq s\ \|u\|^2.$$

9. Démontrer que, pour que la fonction f admette en z un minimum, il faut et il suffit que le vecteur z vérifie la relation $A.z = b$.

Recherche du minimum de f :

Soit α un réel compris strictement entre 0 et $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$.

10. Étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, déterminer le signe de l'expression suivante

$$f(x - \alpha\ g(x)) - f(x).$$

11. Proposer, à partir de ce résultat, une méthode pour construire une suite de vecteurs $\left(y^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ qui converge vers le vecteur z en lequel la fonction f atteint son minimum ; la justification de la convergence n'est pas demandée.

Seconde partie

Le but de cette partie est de rechercher un vecteur x appartenant à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est supposé être le noyau d'une matrice B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$; ce noyau est supposé différent de tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ($\ker B \neq \mathbb{R}^n$).

L'équivalence, établie dans la première partie, entre d'une part résoudre l'équation $A.x = b$ et d'autre part chercher le vecteur z rendant minimum la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par la relation suivante

$$f(x) = \frac{1}{2}(A.x \mid x) - (b \mid x),$$

conduit à se poser le problème suivant :

Soit B une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ dont le noyau F est différent de $\mathbb{R}^n$; rechercher un vecteur $\overline{x}$ appartenant à F rendant minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F.

Existence du minimum de la fonction f dans F :

12. Démontrer que la fonction f possède la propriété suivante : pour tout réel c, il existe un réel ρ, tel que, pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à ρ ($\|x\| \geq \rho$), le réel $f(x)$ est supérieur ou égal à c ($f(x) \geq c$).

13. En déduire que, si y est un point de F, il existe un réel r tel que pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à r ($\|x\| \geq r$), $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$.

14. Démontrer à l'aide du résultat précédent qu'il existe au moins un vecteur $\overline{x}$ du sous-espace vectoriel F en lequel la restriction de la fonction f à ce sous-espace F atteint un minimum.

15. Démontrer qu'il existe un seul vecteur $\overline{x}$ en lequel la fonction f atteint son minimum dans F, en admettant que la fonction f est convexe ; c'est-à-dire : pour tout couple $(x,\ y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de vecteurs et tout réel λ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$, les valeurs prises par la fonction f vérifient la relation suivante :

$$f(\lambda\ x + (1-\lambda)\ \ y) \leq \lambda\ f(x) + (1-\lambda)\ \ f(y),$$

où l'inégalité est stricte si et seulement si les vecteurs x et y sont différents.

Propriétés du point $\overline{x}$:

16. Démontrer que, pour qu'un vecteur y de F rende minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F, il faut et il suffit que le vecteur $Ay-b$ soit orthogonal à ce sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

17. Démontrer que la valeur prise par la fonction f au point $\overline{x}$, en lequel elle atteint son minimum dans F, est donnée par la relation suivante :

$$f(\overline{x}) = -\frac{1}{2}(A\overline{x} \mid \overline{x}) = -\frac{1}{2}(b \mid \overline{x}).$$

Le Lagrangien L :

Soit L la fonction définie sur l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par la relation suivante :

$$L(x,\ y) = f(x) + (y \mid Bx).$$

Un point $(x^*,\ y^*)$ de l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est dit point selle de la fonction L, s'il possède la propriété suivante : quel que soit le point $(x,\ y)$ de l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les valeurs prises par la fonction L aux points $(x^*,\ y)$, $(x^*,\ y^*)$ et $(x,\ y^*)$ vérifient la double inégalité suivante :

$$L(x^*,\ y) \leq L(x^*,\ y^*) \leq L(x,\ y^*).$$

Propriétés du Lagrangien et de ses points selles :

18. Établir l'inégalité suivante :

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right).$$

Il est supposé dans toute la suite qu'il existe un point selle $(x^*,\ y^*)$ de la fonction L.

19. Démontrer que la valeur prise par la fonction L en un point selle $(x^*,\ y^*)$ vérifie les égalités suivantes :

$$L(x^*,\ y^*) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,\ y)\right).$$

20. Démontrer, pour tout point $(x_1,\ y_1)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall y \quad &\in \quad \mathbb{R}^n, \quad L(x_1,\ y) \leq L(x_1,\ y_1) \Longleftrightarrow Bx_1 = 0. \\ \forall x \quad &\in \quad \mathbb{R}^n, \quad L(x_1,\ y_1) \leq L(x,\ y_1) \Longleftrightarrow Ax_1 + {}^tBy_1 = b. \end{aligned}$$

21. Soient x_1 un vecteur du sous-espace vectoriel F et y_1 un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le couple $(x_1,\ y_1)$

soit un point selle du Lagrangien L est que le vecteur x_1 réalise le minimum de la restriction de la fonction f à F et que les vecteurs x_1 et y_1 vérifient la relation suivante :

$$Ax_1 + {}^tBy_1 = b.$$

La suite logique est la recherche d'un point selle du Lagrangien L.

Algorithme d'Uzawa : soit toujours $(x^*,\ y^*)$ un point selle, supposé exister ; étant donnés un vecteur y^0 arbitraire de $\mathbb{R}^n$, une suite $(\rho_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de réels, qui seront précisés plus loin, soient $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ les deux suites de vecteurs définies par les conditions suivantes :

• Pour tout entier naturel m, le vecteur x^m est le vecteur qui rend minimum la fonction $x \longmapsto L(x,\ y^m)$.

• Pour tout entier naturel m, le vecteur y^{m+1} est défini par la relation suivante :

$$y^{m+1} = y^m + \rho_m\ Bx^m.$$

Existence des deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$:

22. Démontrer que les conditions énoncées permettent de déterminer tous les termes de ces deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et que les vecteurs de ces suites vérifient, pour tout entier naturel m, les relations suivantes :

$$A(x^m - x^*) + {}^tB(y^m - y^*) = 0,$$

$$y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m\ B(x^m - x^*).$$

où x^* et y^* sont les deux vecteurs d'un point selle de L.

23. En déduire l'égalité ci-dessous :

$$\left\|y^{m+1} - y^*\right\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 - 2\,\rho_m\ (A(x^m - x^*) \mid (x^m - x^*)) + (\rho_m)^2\ \|B(x^m - x^*)\|^2.$$

Convergence de la suite numérique de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbb{N}$:

24. Un résultat préliminaire : démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique positive inversible, notée $A^{1/2}$, telle que :

$$\left(A^{1/2}\right)^2 = A.$$

Soit C la matrice définie par la relation suivante :

$$C = A^{-1/2}.{}^tB.B.A^{-1/2},$$

où la matrice $A^{-1/2}$ est la matrice inverse de la matrice $A^{1/2}$.

25. Démontrer que la matrice C est une matrice symétrique positive. Établir qu'il existe une constante ν telle que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité ci-dessous soit vraie :

$$\|Bu\|^2 \leq \nu \ (Au \mid u)\,.$$

Soient α et β deux réels tels que le segment $[\alpha,\ \beta]$ soit contenu dans l'intervalle ouvert $]0,\ 2/\nu[$, $(0 < \alpha < \beta < 2/\nu)$. La suite des réels ρ_m est supposée vérifier pour tout entier naturel m l'inégalité suivante :

$$\alpha \leq \rho_m \leq \beta.$$

26. Démontrer que la suite de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbb{N}$ est monotone décroissante ; utiliser, pour simplifier, la suite $(u^m)_{m\in\mathbf{N}}$ dont le terme général est définie par la relation suivante :

$$u^m = x^m - x^*.$$

Convergence de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$:

27. En déduire la convergence et la limite de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$.

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math PSI 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I le segment d'extrémités 0 et 1 : $I = [0, 1]$; dans tout ce problème h et f sont des fonctions réelles données définies et continues sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit (**E**) l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{E}) \qquad -y''(x) + h(x)\ y(x) = f(x),$$

où la fonction y est une fonction inconnue définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de cette équation différentielle (**E**) qui vérifient les conditions "aux limites" suivantes : la solution y recherchée est nulle en chacune des extrémités 0 et 1 de l'intervalle I.

Les fonctions h et f étant des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$, soit (**S**) le système constitué de l'équation différentielle (**E**) et des équations exprimant la nullité de la solution y aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I :

$$(\mathbf{S}) \quad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\ y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Une fonction y, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les équations du système $(\mathbf{S})$ est dite solution du système $(\mathbf{S})$.

Première partie

La fonction h est égale à une constante et la fonction f est nulle :

1. Démontrer que, lorsque la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, est égale à une constante réelle α ($h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$) et la fonction f est nulle ($f(x) = 0$), la seule solution y du système $(\mathbf{S})$ est la fonction nulle ($y(x) = 0$ pour tout x), sauf pour certaines valeurs du réel α qui seront précisées ; poser $\alpha = \omega^2$ ou $\alpha = -\omega^2$ ($\omega > 0$), suivant que le réel α est strictement positif ou strictement négatif.

Une expression de la solution du système $(\mathbf{S})$:

Un résultat préliminaire : soit φ une fonction réelle définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$; soit Φ la fonction définie par la relation suivante :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\ \varphi(t)\ dt + x\ \int_x^1 (1-t)\ \varphi(t)\ dt.$$

2. Démontrer que la fonction Φ est définie et de classe C^2 sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$; déterminer sa dérivée seconde Φ' ainsi que les valeurs prises par la fonction Φ en 0 et en 1 : $\Phi(0), \Phi(1)$.

3. Démontrer que, si Φ_1 est une fonction réelle, deux fois dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telle qu'elle vérifie les relations suivantes :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \Phi_1''(x) = -\varphi(x), \ \Phi_1(0) = 0, \ \Phi_1(1) = 0,$$

les fonctions Φ et Φ_1 sont égales $(\Phi_1 = \Phi)$.

4. En déduire, lorsque la fonction h est nulle, l'existence et l'unicité d'une solution y du système $(\mathbf{S}_0)$ suivant :

$$(\mathbf{S}_0) \quad \begin{cases} -y''(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Une condition sur la fonction h lorsque la fonction f est nulle :

La fonction f est supposée nulle ($f = 0$) ; le système $(\mathbf{S})$ s'écrit,

$$(\mathbf{S}_1) \quad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\ y(x) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

5. Démontrer que, pour qu'une fonction y, définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$, vérifie le système $(\mathbf{S}_1)$, il faut et il suffit que la fonction y vérifie, pour tout réel x, la relation $(\mathbf{R})$ suivante :

$$(\mathbf{R}) \quad \text{pour tout réel } x, \quad y(x) = (x-1)\int_0^x t\,h(t)\ y(t)\ dt + x\ \int_x^1 (t-1)\ h(t)\ y(t)\ dt.$$

6. Démontrer l'existence de deux réels H et Y respectivement maximums des valeurs absolues des fonctions h et y sur le segment $I = [0, 1]$.

7. Soit y une solution du système $(\mathbf{S}_1)$; démontrer, pour tout réel x appartenant au segment I $(0 \leq x \leq 1)$, l'inégalité suivante :

$$|y(x)| \leq \frac{H\ Y}{8}.$$

8. En déduire une condition nécessaire sur la fonction h, pour qu'il existe des solutions y, autres que la fonction nulle, du système $(\mathbf{S}_1)$. Vérifier que, lorsque la fonction h est constante, cette condition est remplie lorsqu'il y a des solutions différentes de 0.

Seconde partie

Rappel : une fonction f, réelle, définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$, est dite 2-périodique si et seulement si : pour tout réel x, $\quad f(x+2) = f(x)$. Les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $n \geq 1$, sont définis par les relations suivantes :

pour tout n supérieur ou égal à 1, $\quad a_n(f) = \displaystyle\int_0^2 f(t)\ \cos(n\ \pi\ t)\ dt$, $b_n(f) = \displaystyle\int_0^2 f(t)\ \sin(n\ \pi\ t)\ dt$.

Le but de cette seconde partie est de résoudre l'équation différentielle suivante

$$(\mathbf{F}) \qquad -y''(x) + h(x)\ y(x) = f(x),$$

où h et f sont des fonctions définies sur la droite réelle, continues, impaires, 2-périodiques. La fonction inconnue y est supposée impaire, elle aussi 2-périodique, mais en plus deux fois continûment dérivable et vérifiant les conditions aux limites suivantes sur le segment I : elle est nulle en 0 et en 1.

Lorsque la fonction y, impaire 2-périodique, deux fois continûment dérivable, vérifie l'équation différentielle $(\mathbf{F})$ et les conditions aux limites définies ci-dessus, elle est dite solution du système $(\mathbf{T})$ suivant :

$$(\mathbf{T}) \qquad \begin{cases} -y''(x) + h(x)\ y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Soit G la fonction définie dans le carré $I \times I$ par la relation suivante :

$$(x,t) \longmapsto G(x,\ t) \begin{cases} t\ (1-x), \text{ si } 0 \leq t \leq x, \\ x\ (1-t), \text{ si } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Étant donné un réel x fixé du segment I, soit $\widetilde{G}_x$ la fonction impaire, 2-périodique, égale à $G(x,\ t)$ pour tout réel t appartenant au segment I :

$$\forall t \in I, \quad \widetilde{G}_x(t) = G(x,\ t).$$

Développement en série de Fourier de la fonction $\widetilde{G}_x$:

9. Tracer le graphe de la restriction de la fonction $\widetilde{G}_x$ au segment $[-1,\ 1]$. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $\widetilde{G}_x$.

10. Y a-t-il égalité, pour tout réel t, entre $\widetilde{G}_x(t)$ et la somme de la série de Fourier obtenue ? Préciser et vérifier la nature de la convergence.

11. En déduire que la fonction $G : (x,\ t) \longmapsto G(x,\ t)$ est, dans le carré $I \times I$, la somme d'une série de fonctions uniformément convergente.

Solution du système (T) lorsque la fonction h est nulle :

12. Démontrer, lorsque la fonction h est nulle, qu'il existe une seule solution possible z au système (**T**). Préciser son expression à l'aide de la fonction G.

13. Déterminer, lorsque la fonction h est nulle, le développement en série de Fourier de la fonction z ; exprimer les coefficients de Fourier de la fonction z à l'aide de ceux de f. En déduire l'existence d'une solution au système (**T**).

14. Exemple : la fonction h est nulle, f est la fonction impaire, 2-périodique, définie sur le segment I par la relation suivante

$$f(t) = \begin{cases} t, \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 1-t, \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f puis celui de la fonction u solution du système (**T**). Est-ce que le développement en série de Fourier de la fonction u obtenu est celui d'une fonction deux fois continûment dérivable ?

La fonction h est une constante :

La fonction h est supposée dans la suite égale à une constante a différente de 0 ($a \neq 0$). La fonction f est toujours une fonction impaire, 2-périodique. Le but de cette question est de rechercher une solution du système

$$(\mathbf{T}_a) \qquad \begin{cases} -y''(x) + a\ y(x) = f(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

La méthode proposée consiste à écrire ce système sous la forme suivante :

$$(\mathbf{T}'_a) \qquad \begin{cases} -y''(x) = f(x) - a\ y(x), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

et à considérer que la fonction $x \longmapsto f(x) - a\ y(x)$ joue le même rôle que celui joué par la fonction f aux questions 12 et 13.

15. En supposant qu'il existe une solution z au système $(\mathbf{T}_a)$, déterminer les relations que doivent vérifier les coefficients de Fourier de la fonction z.

16. Discuter suivant les valeurs du réel a l'existence de solutions des équations vérifiées par les coefficients de Fourier de la fonction z.

17. Démontrer, lorsque les équations donnant les coefficients de Fourier de la fonction z admettent des solutions et que la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'existence d'une fonction z solution du système $(\mathbf{T}_a)$.

18. Exemple : Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction z lorsque la fonction f est la fonction définie à la question 14.

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est d'introduire suivant une méthode originale la fonction Γ et de déterminer, à l'aide de cette fonction, une expression de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\left(\ln\left(\tan x\right)\right)\ dx.$$

Première partie

Il est admis que, si la fonction réelle f, définie sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}$, est convexe, pour toute suite croissante de trois réels x_1, x_2, x_3, $(x_1 < x_2 < x_3)$ appartenant à l'intervalle I, les valeurs prises par cette fonction en ces points vérifient la relation suivante :

$$\frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_1\right)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, prenant des valeurs strictement positives ($F(x) > 0$), qui vérifie les propriétés suivantes :

i. pour tout réel x strictement positif :

$$F(x+1) = x\ F(x).$$

ii. La fonction $x \longmapsto \ln F(x)$ est une fonction convexe.

iii. La fonction F prend la valeur 1 en 1 :

$$F(1) = 1.$$

Encadrement de $F(n+x)$ et de $F(x)$:

Dans les quatre premières questions, x est un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]0,\ 1]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$).

1. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq \ln F(n+1) - \ln F(n).$$

2. Calculer $F(n)$. En déduire un encadrement de $F(n+x)$ à l'aide des deux expressions $(n-1)^x.(n-1)!$ et $n^x.(n-1)!$.

3. Établir la relation qui lie, pour tout entier p supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$), $F(p+x)$ à $F(x)$.

4. En déduire les inégalités suivantes :

$$\frac{n}{x+n} F(x) \leq \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \leq F(x).$$

Unicité de la fonction F :

Dans les questions 5 et 6, il est admis qu'il existe une fonction F, positive ($F(x) > 0$), définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, vérifiant les hypothèses **i**, **ii** et **iii**.

Étant donné un entier strictement positif n, soit u_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$ par la relation suivante :

$$u_n(x) = \frac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

5. Déterminer, en supposant le réel x appartenir à l'intervalle semi-ouvert $]0,\ 1]$, la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.

6. En déduire la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment, pour tout réel x strictement positif.

7. En déduire qu'il existe au plus une fonction F définie sur la demi-droite $]0,\ \infty[$, strictement positive, vérifiant les propriétés **i**, **ii** et **iii**.

Fonction Γ :

Soit k la fonction définie sur le quart de plan $]0,\ \infty[\times]0,\ \infty[$ par la relation suivante :

$$k\left(x,\ t\right) = t^{x\ -\ 1}.e^{-\ t}.$$

8. Étudier, pour un réel x donné, l'intégrabilité de la fonction : $t \longmapsto t^{x\ -\ 1}.e^{-\ t}$ sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$.

Soit Γ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$ par la relation suivante :

$$\Gamma\left(x\right) = \int_0^{\infty} t^{x\ -\ 1}.e^{-\ t}\ dt.$$

9. Établir que cette fonction Γ est strictement positive ($\Gamma\left(x\right) > 0$).

10. Établir que cette fonction Γ est deux fois continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$. Donner les expressions de ces dérivées. Préciser l'expression de la dérivée de la fonction Γ pour $x = 1$, $\Gamma'(1)$, au moyen d'une intégrale.

Existence de la fonction F :

11. Démontrer que la fonction Γ est la fonction F étudiée dans les questions précédentes.

Il est admis, dans la suite, que la constante d'Euler γ est définie par la relation suivante :

$$\gamma = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Valeur de $\Gamma'(1)$:

Soit $\left(g_n\right)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$ par la relation suivante :

$$g_n\left(x\right) = x\ \ \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

12. Déterminer, à l'aide des résultats obtenus précédemment, la limite de $g_n\left(x\right)$ lorsque l'entier n croît vers l'infini et que le réel x appartient à la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$.

Soit $\left(v_n\right)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$ par les relations suivantes :

$v_1\left(x\right) = g_1\left(x\right)$; pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $v_n\left(x\right) = g_n\left(x\right) - g_{n\ -\ 1}\left(x\right)$.

13. Il est admis que chaque fonction v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continûment dérivable ; démontrer que la série des fonctions dérivées, de terme général $v_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente pour tout x strictement positif puis uniformément convergente sur tout segment $[a,\ b]$ contenu dans la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$.

14. En déduire la limite de la suite des fonctions dérivées g_n'.

15. Que vaut $\Gamma'(1)$ au moyen de la constante d'Euler γ ?

Seconde partie

Soit s un réel donné strictement positif ($s > 0$).

Fonction L :

16. Étudier la convergence de la série de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}$, défini par la relation suivante :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Soit L la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$ par la relation :

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

17. Démontrer que la série entière de terme général

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

est uniformément convergente sur le segment $[0,\ 1]$. Soit $\varphi(x)$ la somme de cette série :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1}.$$

Déterminer la fonction φ définie sur le segment $[0,\ 1]$. En déduire $L(1)$.

18. Soit h_s la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, par la relation suivante :

$$h_s(x) = \frac{\ln x}{x^s}.$$

Étudier les variations de la fonction h_s sur son ensemble de définition. Soit x_s l'abscisse du maximum de cette fonction. Préciser les variations de la fonction $s \longmapsto x_s$.

19. Démontrer que la fonction L est continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$. Exprimer la valeur prise en 1 par la fonction dérivée L', $L'(1)$, au moyen de la somme d'une série.

Expression du produit $L(s).\Gamma(s)$:

20. Calculer, pour tout entier n strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$), au moyen d'une valeur prise par la fonction Γ, l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^\infty e^{-n\ t}\ t^{s\ -\ 1}\ dt.$$

21. Démontrer la relation :

$$L(s).\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-\ t}}{1 + e^{-2\ t}}\ t^{s\ -\ 1}\ dt.$$

Calcul de l'intégrale I :

Il est admis que la fonction $s \longmapsto L(s).\Gamma(s)$ est continûment dérivable et que sa dérivée est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d}{ds}\left(L(s).\Gamma(s)\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\ t}\ \ln t}{1 + e^{-2\ t}}\ t^{s\ -\ 1}\ dt.$$

22. Après avoir donné au réel s la valeur 1, effectuer le changement de variable $u = e^t$ dans l'intégrale. Effectuer un nouveau changement de variables pour obtenir l'intégrale I définie dans le préambule :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\left(\ln\left(\tan x\right)\right)\ dx.$$

En déduire une expression de l'intégrale I à l'aide de la constante d'Euler et de la somme d'une série.

Remarque : un calcul de $L'(1)$ permet d'obtenir le résultat :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\left(\ln\left(\tan x\right)\right)\ dx = \frac{\pi}{2} \ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right).$$

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première partie

Soit $\mathbf{M}$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 3. Soit $\mathbf{C}$ le produit cartésien $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$. Il est admis que cet ensemble est un espace vectoriel réel à l'aide de la loi interne, addition, et de la loi externe, multiplication par un réel, définies par les relations suivantes :

La somme de deux éléments de $\mathbf{C}$, $(P,\ Q)$ et $(R,\ S)$ est l'élément $(P+R,\ Q+S)$:

$$(P,\ Q)+(R,\ S)=(P+R,\ Q+S)\,.$$

Le produit d'un réel λ et de l'élément $(P,\ Q)$ est l'élément $(\lambda P,\ \lambda Q)$ de $\mathbf{C}$:

$$\lambda\,(P,\ Q)=(\lambda P,\ \lambda Q)\,.$$

En plus de ces lois de composion, soit $*$ la loi de composition interne, appelée produit, qui, aux deux éléments de $\mathbf{C}$, $(P,\ Q)$ et $(R,\ S)$ fait correspondre l'élément de $\mathbf{C}$, $(P.R,\ P.S+Q.R)$, ($P.R,\ P.S$ et $Q.R$ sont respectivement les produits des matrices $P,\ R$, $P,\ S$ et $Q,\ R$).

$$(P,\ Q)*(R,\ S)=(P.R,\ P.S+Q.R).$$

L'algèbre $(\mathbf{C},\ +,\ .,\ *)$:

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{C}$?

2. Démontrer que l'espace $\mathbf{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire. L'élément unité de cette algèbre est noté e.

Étant donné l'élément $(P,\ Q)$ de $\mathbf{C}$, soit ${}^t(P,\ Q)$ l'élément de $\mathbf{C}$ défini à l'aide des matrices transposées ${}^tP$ et ${}^tQ$ des matrices P et Q de la façon suivante :

$${}^t(P,\ Q)=\left({}^tP,\ {}^tQ\right).$$

Soit $\mathbf{G}$ le sous-ensemble des éléments $(P,\ Q)$ de $\mathbf{C}$ tels que :
· la matrice P est orthogonale directe : son déterminant est égal à 1.
· les matrices P et Q vérifient la relation : ${}^tP.Q+{}^tQ.P=0$

$$\mathbf{G}=\left\{(P,\ Q)\mid(P,\ Q)\in\mathbf{C},\ P\in SO\left(\mathbb{R}^3\right),\ {}^tP.Q+{}^tQ.P=0\right\}.$$

Le groupe G :

3. Démontrer que le sous-ensemble $\mathbf{G}$ de $\mathbf{C}$ est, pour la loi produit $*$, un groupe.

4. Soit $\mathbf{H}$ le sous-ensemble des éléments $(P,0)$ du groupe $\mathbf{G}$. Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}$ isomorphe au groupe $SO\left(\mathbb{R}^3\right)$.

5. Soit $\mathbf{A}$ le sous-ensemble des éléments $(I_3,\ Q)$ de $\mathbf{G}$ (I_3 est la matrice unité).

$$\mathbf{A}=\{(I_3,\ Q)\mid(I_3,\ Q)\in\mathbf{G}\}.$$

Est-ce que $\mathbf{A}$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}$?

6. Démontrer que, pour qu'un élément $(P,\ Q)$ de $\mathbf{C}$ appartienne à $\mathbf{G}$, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice P soit égal à 1 et que la relation ${}^t(P,\ Q)*(P,\ Q)=e$ ait lieu :

$$(P,\ Q)\in\mathbf{G}\Longleftrightarrow{}^t(P,\ Q)*(P,\ Q)=e,\ \det P=1.$$

Seconde partie

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace de la géométrie affine euclidienne et le groupe **G** étudié ci-dessus.

Dans toute la suite, $\mathbf{E}_3$ est un espace vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ est noté $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.

Un résultat préliminaire :

7 . Soit $\overrightarrow{a}$ un vecteur de $\mathbf{E}_3$; soit $p_{\overrightarrow{a}}$ l'endomorphisme de $\mathbf{E}_3$ dans lui-même qui, au vecteur $\overrightarrow{x}$, associe le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{x}$: $\overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}$. Quelle est la matrice $P_{\overrightarrow{a}}$ associée à l'application $p_{\overrightarrow{a}}$ dans la base B de $\mathbf{E}_3$?

8. Soit r une rotation de $\mathbf{E}_3$ dans lui-même ; comparer pour deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\mathbf{E}_3$ les expressions suivantes :

$$r\left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right), \quad r\left(\overrightarrow{x}\right) \wedge r\left(\overrightarrow{y}\right).$$

9. Démontrer que, si r est une rotation de $\mathbf{E}_3$ et $\overrightarrow{a}$ un vecteur de $\mathbf{E}_3$, il existe un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbf{E}_3$ tel que l'endomorphisme $r \circ p_{\overrightarrow{a}}$, composé de $p_{\overrightarrow{a}}$ et de r, est égal à l'endomorphisme $p_{\overrightarrow{b}} \circ r$, composé de r et de $p_{\overrightarrow{b}}$:

$$r \circ p_{\overrightarrow{a}} = p_{\overrightarrow{b}} \circ r \ ;$$

exprimer ce vecteur $\overrightarrow{b}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{a}$ et de la rotation r.

Dans toute la suite, soit **E** l'espace de la géométrie affine euclidienne orientée ; **E** est supposé être un espace affine de direction un espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{E}_3$. Soit O une origine et $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ trois vecteurs orthonormés constituant avec le point O un repère $Oxyz$ direct.

Détermination d'une droite à l'aide de deux vecteurs et d'un repère :

L'espace **E** est muni d'un repère orthonormé direct $Oxyz$; soit D une droite de l'espace affine **E**, A un point de cette droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de cette droite.

10. Soit M un point quelconque de la droite D. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$, égal au produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u}$, est indépendant du point M de la droite D :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Comparer les directions des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

11. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbf{E}_3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{u}$ soit unitaire ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$) et $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$). Déterminer, à l'aide des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, les vecteurs $\overrightarrow{x}$ de $\mathbf{E}_3$, solutions de l'équation suivante :

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

12. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace $\mathbf{E}_3$ tels que le vecteur $\overrightarrow{u}$ soit unitaire ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$) et $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$), démontrer qu'il existe une seule droite D de l'espace $\mathbf{E}$ telle qu'un vecteur directeur unitaire de la droite D soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ et que tout point M de D vérifie la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

13. Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont définis, dans le repère $Oxyz$, par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k},$$

où b et c sont deux réels donnés. Déterminer la droite D correspondante.

Soit $\mathbf{P}$ le sous-ensemble de $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3$ des couples de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ tels que le premier vecteur $\overrightarrow{u}$ soit unitaire et le second $\overrightarrow{v}$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$.

14. À quelle condition nécessaire et suffisante deux couples de vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'})$, appartenant à $\mathbf{P}$, déterminent la même droite D ?

Soit d un déplacement de l'espace $\mathbf{E}$ muni du repère orthonormé direct $Oxyz$; par définition, il est égal à l'application composée d'une rotation r de l'espace $\mathbf{E}_3$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{a}$ de $\mathbf{E}_3$; soit M' l'image par ce déplacement d d'un point M ; le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est relié au vecteur $\overrightarrow{OM}$ par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{a} + r\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

Isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace E et le groupe G :

Soient d un déplacement, D une droite quelconque de l'espace $\mathbf{E}$ et D' l'image de la droite D par le déplacement d :

$$D' = d\,(D).$$

15. Aux deux droites D et D' de l'espace $\mathbf{E}$, muni du repère orthonormé direct $Oxyz$, sont associés d'après la question 14 des couples de vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'})$; démontrer que, le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ étant fixé, il est possible de choisir le couple de vecteurs$(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'})$ de façon que les vecteurs $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ s'expriment au moyen des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{u'} = \alpha\,(\overrightarrow{u})\,, \quad \overrightarrow{v'} = \alpha\,(\overrightarrow{v}) + \beta\,(\overrightarrow{u})\,,$$

où α et β sont deux endomorphismes de $\mathbf{E}_3$ tels que le déterminant de α soit strictement positif ($\det\alpha > 0$).

16. Au déplacement d est donc associé le couple des deux endomorphismes α et β. Soient A et B les matrices associées aux endomorphismes α et β dans une base orthonormée directe de $\mathbf{E}_3$. Démontrer que le couple de matrices $(A,\ B)$ appartient au groupe $\mathbf{G}$.

17. Démontrer que l'application qui, au déplacement d de $\mathbf{E}$ associe l'élément $(A,\ B)$ du groupe $\mathbf{G}$, est injective.

18. Exemple : soit D la droite du plan xOy d'équation $y = y_0$ (y_0 est un réel différent de zéro donné) ; soit D' son image par le déplacement égal à la rotation d'axe Oz et d'angle θ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Déterminer les endomorphismes α et β associés à ce déplacement et les couples de vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'})$ associés respectivement aux droites D et D'. Vérifier dans ce cas particulier la relation obtenue à la question 15.

19. Démontrer que l'application J qui, à un déplacement d de l'espace $\mathbf{E}$ associe le couple de matrices $(A,\ B)$ du groupe $\mathbf{G}$ est bijective.

Droite invariante dans un déplacement :

20. Soit d un déplacement, distinct de l'application identique ; à ce déplacement est associé un couple de matrices $(A,\ B)$ appartenant à $\mathbf{G}$. Rechercher l'existence d'une droite invariante par le déplacement d en considérant le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ associé à cette droite. Écrire les relations vérifiées par ces vecteurs inconnus $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$. Quelle conclusion y a-t-il lieu d'en tirer sur le vecteur $\overrightarrow{u}$?

21. Déterminer la droite invariante dans l'exemple de la question 18.

FIN DU PROBLÈME

A 2004 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est principalement l'étude et le calcul de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ dt\ .$$

Première partie

Le but de cette partie est d'établir une expression de l'intégrale I et d'étudier la fonction φ définie par la relation suivante :

$$\varphi\,(t) = \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ .$$

Variations de la fonction φ :

1. Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction φ en 0.

2. Étudier les variations de la fonction φ sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$; il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire ψ définie par la relation suivante :

$$\psi\,(t) = \frac{1 - e^{-\pi\ t}}{1 + t^2} - \pi\ \arctan t\ .$$

En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur D.

Existence et expressions de l'intégrale I :

3. Justifier l'existence de l'intégrale I définie par la relation suivante :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ dt\ .$$

4. Démontrer les deux relations suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k\ \pi\ t}\ \arctan t\ dt \quad ; \quad I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\ \pi\ t}}{1+t^2}\ dt\ .$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'introduire une fonction f de façon à transformer les expressions obtenues précédemment pour l'intégrale I et à pouvoir calculer l'intégrale I. Soit f la fonction définie par la relation suivante :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\ t}}{1+t^2}\ dt\ .$$

Propriétés de la fonction f :

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Préciser l'ensemble dans lequel la fonction f est continue ; quelle est sa limite lorsque le réel x tend vers l'infini ?

6. Dans quel ensemble est-elle deux fois continûment dérivable ? Établir une relation simple entre la fonction f et sa dérivée seconde $f\,'$ sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$.

Deux intégrales :

Soit a un réel strictement positif ($a > 0$). Étant donné un réel X supérieur ou égal à a ($X \geq a$), soient $S(X)$ et $C(X)$ les deux intégrales suivantes :

$$S(X) = \int_a^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad C(X) = \int_a^X \frac{\cos t}{t} dt\ .$$

7. Existe-t-il une limite à chacune des expressions $S(X)$ et $C(X)$, lorsque le réel X croît vers l'infini ?

Soient g et h les deux fonctions définies sur la demi-droite ouverte D par les relations suivantes :

$$g(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_x^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad h(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_x^X \frac{\cos t}{t} dt\ .$$

Une expression de la fonction f :

8. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction f dans la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$; exprimer la solution générale de cette équation à l'aide des deux fonctions g et h.

9. En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u+x}\, du = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t}\, dt \quad .$$

Troisième partie

Un résultat intermédiaire :

10. En utilisant les résultats établis dans les première et deuxième parties, démontrer la relation suivante :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k\ u)}{\pi + u}\, du\ .$$

11. Démontrer le résultat suivant :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) du.$$

Somme de la série de terme général $\cos(nu)/n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$ **:**

Soit G la fonction, définie sur la droite réelle, périodique de période 2π ($G(x + 2\pi) = G(x)$), dont la restriction au segment $[0, 2\pi]$ est définie par la relation suivante :

$$G(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Étudier la parité de la fonction G. Déterminer le développement en série de Fourier, à coefficients réels, de cette fonction G.

Quelle est la nature de la convergence de la série de Fourier ?

13. En déduire la somme $T(x)$ de la série de terme général $\cos(nx)/n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$, lorsque le réel x appartient au segment $[0, 2\pi]$:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

En déduire la somme S de la série de terme général $1/n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Valeur de l'intégrale I :

Soit a_k le réel défini par l'intégrale suivante :

$$a_k = \int_{2\ k\ \pi}^{2\ (k+1)\ \pi} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right)\ du.$$

14. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur du réel a_k.

Soit N un entier strictement positif. Soit I_N le réel défini par la relation ci-dessous :

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left(-1 + (n+1) \ln \frac{2n+3}{2n+1} \right).$$

15. Démontrer que la valeur de l'intégrale I est égale à la limite de la suite $(I_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$:

$$I = \lim_{N \longrightarrow \infty} I_N\ .$$

En déduire que l'intégrale I est la somme d'une série convergente.

16. Après avoir montré que l'expression $E_N = \exp(I_N)$ est égale à un produit de facteurs, déterminer la valeur de l'intégrale I.

Soit J l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{2\ \pi\ t} - 1}\ dt\ .$$

Il est facile de calculer l'intégrale J par la même méthode que celle qui a servi pour calculer l'intégrale I ; il vient :

$$J = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{2} \right).$$

Soit K l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} + 1}\ dt\ .$$

Calcul de l'intégrale K :

17. Calculer l'intégrale K, définie ci-dessus, en utilisant le résultat obtenu pour l'intégrale I et la valeur admise pour l'intégrale J.

FIN DU PROBLÈME

A 2004 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes complètement indépendants.

Problème I

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf, définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\,.$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le principe du maximum, la propriété de moyenne, le fait que les fonctions bornées harmoniques dans tout le plan sont constantes.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Quelques exemples de fonctions harmoniques :

1. Démontrer que les fonctions complexes f et g_n, $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x,y) = e^{x\,+\,i\,y}, \quad g_n(x,y) = (x + i\,y)^n .$$

2. Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2, définies sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique

$$h(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2, définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $y\acute{O}y$ $\left(\mathbb{R}^2 \setminus y\acute{O}y\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x,y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x,y) = (-1)^n \frac{(x+iy)^n}{(2n)!}.$$

4. Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_{n|K}$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ, définie par la relation suivante

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y),$$

est continue dans le plan.

5. Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Principe du maximum :

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r $(r > 0)$; soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2\right\}, \\ C &= \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 = r^2\right\}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier strictement positif p $(p > 0)$, soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x,y) = f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p}.$$

6. Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p, appartenant au disque fermé D en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p(a_p,b_p) = \max_{(x,y)\in D} f_p(x,y).$$

7. Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque D, les deux dérivées secondes de la fonction f_p, obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y, sont, en ce point M_p, négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p,b_p) \leq 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p,b_p) \leq 0.$$

8. En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p, que le point M_p est situé sur le cercle C.

9. Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D :

$$f(a,b) = \max_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

10. En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque D de frontière C.

Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donnés un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0,\infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\ \cos\theta,\ y_0 + \rho\ \sin\theta)\, d\theta.$$

11. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0,\infty[$.

12. Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.

13. Démontrer que le produit $\rho.F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho.F'(\rho) = \int_\Gamma (A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ.

14. Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.

15. Soit D le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r $(r > 0)$; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f étendue au disque D se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \pi\ r^2\ f(x_0, y_0)\,.$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x, y) du plan :

$$|f(x,y)| \leq C.$$

16. Soient deux disques fermés D_1 et D_2 de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0, de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r $(0 < d < r)$. Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1.

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2, démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi\ r\ d$.

17. À l'aide par exemple de la question 15, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0, 0)$ au moyen de la constante C, du rayon r et de d.

En déduire que la fonction f est constante.

Problème II

Soit φ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\text{si } |t| < 1,\ \varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right) \quad ; \quad \text{si } |t| \geq 1, \quad \varphi(t) = 0.$$

Un difféomorphisme f de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même de classe C^1 est dit difféomorphisme de classe C^∞ si la fonction f est indéfiniment dérivable.

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe C^∞ :

18. Démontrer que la restriction φ_I de la fonction φ à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que la dérivée $\varphi_I^{(n)}$ de φ_I d'ordre n s'écrive sous la forme suivante :

$$\varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2 - 1)^{2\ n}} \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right).$$

19. En déduire que la fonction φ est indéfiniment dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Justifier, sans calcul, l'existence d'un majorant M de la valeur absolue de la dérivée première φ' sur la droite réelle :

$$M = \sup_{t\ \in\ \mathbb{R}} |\varphi'(t)|\,.$$

Étant donné un réel λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), soit ψ_λ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\psi_\lambda(x) = x + \lambda\, \varphi(x).$$

20. Démontrer que, si la valeur absolue du réel λ est strictement majorée par $1/M$, ($|\lambda| < 1/M$), la fonction ψ_λ est une bijection de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$.

Quelle est, dans ces conditions ($|\lambda| < 1/M$), l'image du segment $\overline{I} = [-1, 1]$ par l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$? Que dire de la restriction de l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$ aux demi-droites fermées $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$?

Un difféomorphisme de classe C^1 du plan $\mathbb{R}^2$, défini par des fonctions indéfiniment dérivables est appelé difféomorphisme de classe C^∞.

Difféomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ :
Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne et rapporté à un repére orthonormé Oxy.

Étant donnés un réel λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), un réel strictement positif r ($r > 0$) et un point P du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (p, q), soit $\theta^P_{\lambda,\, r}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par la relation suivante :

$$\theta^P_{\lambda,\, r} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + \lambda\, \varphi\left(\left((x-p)^2 + (y-q)^2\right)/r^2\right) \\ y \end{pmatrix}.$$

L'image du point de coordonnées (x, y) par l'application $\theta^P_{\lambda,\, r}$ est le point de coordonnées :

$$\left(x + \lambda\, \varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right),\ y\right).$$

21. Quelle est l'image par cette application $\theta^P_{\lambda,\, r}$ du point P ? du cercle C^P_r de centre le point P et de rayon égal à r ? de l'ouvert Ω^P_r des points du plan situé à une distance du point P strictement supérieure à r ?

Existence de difféomorphismes du plan de classe C^∞ :
22. Démontrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que, si le réel λ a une valeur absolue strictement inférieure à m ($|\lambda| < m$), l'application $\theta^P_{\lambda,\, r}$ est une bijection du plan $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

Soient n points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ du plan $\mathbb{R}^2$, deux à deux distincts, et deux points B et B', distincts entre eux et distincts des points A_i, $1 \leq i \leq n$. Les coordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$; celles de B et B' respectivement (b, c) et (b', c').

Le but des questions 23 à 26 est de montrer qu'il existe un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ transformant B en B' et laissant les points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ invariants. Un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ laissant les points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ invariants est dit avoir la propriété $\mathcal{A}$.

Il est admis que l'ensemble des difféomorphismes de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Trois cas sont envisagés :

1^{er} cas : Les points B et B' ont même ordonnée ; les ordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B ($y_i \neq c = c'$).

23. Démontrer, dans ce cas, que, si les points B et B' sont suffisamment proches, il existe une application $\theta^P_{\lambda,\, r}$ transformant B en B' et laissant les A_i, $1 \leq i \leq n$ invariants.

24. Démontrer, toujours dans ce cas, que, quelle que soit la position des points B et B', il existe une suite finie de bijections $\theta^{P_i}_{\lambda,\, r}$, $0 \leq i \leq k$, telle que la composée F de ces applications transforme B en B' et ait la propriété $\mathcal{A}$.

$$F = \theta^{Pk}_{\lambda,\, r} \circ \theta^{P_{k-1}}_{\lambda,\, r} \circ \ldots \circ \theta^{P_0}_{\lambda,\, r}.$$

$2^{ième}$ cas : Les points B et B' ont même abscisse ; les abscisses des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B ($x_i \neq b = b'$).

25. Indiquer comment modifier l'application $\theta^P_{\lambda,\, r}$ en $\eta^P_{\lambda,\, r}$ pour construire un endomorphisme G transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

$3^{ième}$ cas : Les points B et B' n'ont plus d'abscisse ou d'ordonnée commune.

26. Établir l'existence d'un difféomorphisme H transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

Difféomorphisme transformant une suite de n points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ en une suite de n points $A'_1,\ A'_2, \ldots,\ A'_n$.

27. Soient deux suites de points, deux à deux distincts, $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ et $A'_1,\ A'_2, \ldots,\ A'_n$ du plan $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe un difféomorphisme K de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$, tel que chaque point A_i ait pour image le point A'_i.

FIN DE L'ÉPREUVE

A 2004 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce problème met en évidence par une méthode originale une propriété et une méthode de calcul de la moyenne et de la variance bien connues en Probabilités.

Soit S l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes u_n sont positifs ou nuls et la somme égale à 1 :

$$S = \left\{ U \mid U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \quad \forall n,\ u_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 \right\}.$$

Soit F l'ensemble des fonctions réelles f qui sont des sommes de série entière de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 ; ces séries entières sont convergentes lorsque le réel x est égal à 1 et leur somme vaut 1 en ce point ; toutes les dérivées des fonctions f en 0 sont positives ou nulles :

$$F = \left\{ f \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1,\ R \geq 1, \quad \forall n,\ f^{(n)}(0) \geq 0 \right\}.$$

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appartenant à S, est associée la fonction f définie par la relation suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ x^n.$$

Soit j l'application ainsi définie : $U \longmapsto f = j(U)$; la fonction $j(U)$ est notée $\widehat{U}$.

Propriétés des fonctions de F et des suites de S :

1. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est, sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$, une fonction indéfiniment dérivable, croissante sur le segment $[0,1]$ et convexe sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$.

2. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est continue à gauche en 1.

Exemples : soient G, E^q et V les trois suites définies par les relations suivantes :

· G est la suite géométrique de terme général $g_n = 1/2^{n+1}$:

$$G = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

· Étant donné un entier naturel q, E^q est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang q égal à 1 :

$$E^q = (0,\dots,0,1,0,\cdots).$$

· $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de réels définie par les relations suivantes :

$$v_0 = 1/2 \ ; \ \text{pour } n \geq 1, \ v_n = \frac{a}{n^2} \text{ avec } a = \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1} .$$

3. Montrer que les suites G, E^q et V sont dans S. Déterminer les images $\widehat{G} = j(G)$, $\widehat{E^q} = j(E^q)$ des suites G et E^q ; calculer la dérivée $\widehat{V}'$ de la fonction $\widehat{V} = j(V)$ image de la suite V ; puis donner l'expression de $\widehat{V}(x)$ à l'aide d'une intégrale.

4. Soit f une fonction appartenant à l'ensemble F.

Démontrer que, si la fonction f est nulle en 0 ($f(0) = 0$), la fonction f est, soit égale à x sur le segment $[0,1]$, soit strictement majorée par x sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ ($0 < x < 1 \Longrightarrow f(x) < x$).

Démontrer que, si la fonction f est strictement positive en 0 ($f(0) > 0$), l'équation

$$f(x) = x$$

a, dans l'intervalle ouvert $]0,1[$, au plus une solution.

5. Démontrer que, pour toute suite U appartenant à l'ensemble S, la fonction $j(U)$ appartient à l'ensemble F. Démontrer que l'application j est une application bijective de l'ensemble S sur l'ensemble F.

Une loi de composition dans l'ensemble S :

Étant données deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S, soit $U * V$ la suite, dont les termes w_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par la relation suivante :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \ v_{n-p}.$$

6. Démontrer que la suite $U * V = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie appartient à l'ensemble S.

7. Démontrer qu'étant données deux suites U et V de S, à la composée $U * V$ de ces suites correspond par l'application j le produit des fonctions $j(U)$ et $j(V)$:

$$j(U * V) = j(U)\ \ j(V) \quad \text{ou} \quad \widehat{U * V} = \widehat{U}\ .\ \widehat{V}.$$

8. Démontrer que la loi de composition $*$ définie ci-dessus est associative, a un élément neutre et est commutative.

Étant donnés un réel p, strictement compris entre 0 et 1 ($0 < p < 1$) et un réel λ strictement positif, soient B^p, Γ^p et Π^λ les suites définies de la manière suivante :

· B^p est la suite dont tous les termes β_n^p, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls sauf les deux premiers : $\beta_0^p = 1 - p$ et $\beta_1^p = p$:

$$B^p = (1-p,\ p,\ 0,\ 0, \ldots).$$

· Γ^p est la suite de terme général $\gamma_n^p = (1-p)\ \ p^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma^p = ((1-p)\ \ p^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

· Π^λ est la suite de terme général $\pi_n^\lambda = \frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Pi^\lambda = \left(\frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\ \lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Produit de composition $*$ de chacune de ces suites q fois avec elle-même :

9. Démontrer que les trois suites B^p, Γ^p et Π^λ appartiennent à l'ensemble S. Déterminer leurs images $\widehat{B^p}$, $\widehat{\Gamma^p}$ et $\widehat{\Pi^\lambda}$ par l'application j.

10. Étant donné un entier naturel q strictement positif, déterminer les suites B^{p*q}, Γ^{p*q} et $\Pi^{\lambda*q}$ obtenues respectivement à partir des suites B^p, Γ^p et Π^λ par composition q fois avec elle-même. Préciser les termes de ces suites notés respectivement β_n^{p*q}, γ_n^{p*q} et $\pi_n^{\lambda*q}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour un réel λ donné, limite de la suite $B^{\frac{\lambda}{q}*q}$ lorsque l'entier q croît vers l'infini.

11. Le réel strictement positif λ est donné ; lorsque l'entier q est suffisamment grand, le rapport λ/q est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Déterminer, pour tout entier n fixé, la limite du terme

$$\beta_n^{\frac{\lambda}{q}*q} \text{ de rang } n \text{ de la suite } B^{\frac{\lambda}{q}*q},$$

lorsque l'entier q croît vers l'infini. Exprimer cette limite à l'aide du terme π_n^λ de rang n de la suite Π^λ.

Suite d'éléments de S :

12. Soit une suite $(U^q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble S. Soit u_n^q le terme de rang n de la suite U^q :

$$U^q = (u_n^q)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

Cette suite d'éléments de S est supposée telle que chacune des suites des termes de rang n $(u_n^q)_{q\in\mathbb{N}}$ est, lorsque l'entier q croît vers l'infini, une suite convergente de limite v_n.

Démontrer que la série de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}$, est une série de terme général positif ou nul, convergente, de somme inférieure ou égale à 1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leq 1.$$

Donner un exemple de suite $(U^q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'ensemble S telle que chacune des suites $(u_n^q)_{q\in\mathbb{N}}$ définie par les termes de rang n soit convergente et de limite v_n nulle.

Étant donné un réel r strictement positif ($r > 0$), soit S_r le sous-ensemble des éléments $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble S tels que la série de terme général $u_n\ n^r$, $n \in \mathbb{N}$, soit convergente.

$$S_r = \left\{ U \mid U \in S,\ U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ n^r < \infty \right\}.$$

Relation d'inclusion entre les sous-ensembles S_r :

13. Étant donnés deux réels r et s strictement positifs ($r > 0,\ s > 0$), démontrer que, si les réels r et s sont distincts l'un de l'autre ($r \neq s$), l'un des deux sous-ensembles S_r et S_s est contenu dans l'autre.

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S_1, est associé le réel $M(U)$, appelé moyenne de U, défini par la relation suivante :

$$M(U) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ u_n.$$

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S_2, est associé le réel $V(U)$, appelé variance de U, défini par la relation suivante :

$$V(U) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\ u_n - M(U)^2 .$$

Dans toute la suite du problème l'élément U de S appartient au sous-ensemble S_2.

Positivité de la variance :

14. Un résultat préliminaire : soient N un entier strictement positif et $A = (a_i)_{1\leq i\leq N}$ une suite de N réels strictement positifs ($1 \leq i \leq N,\ a_i > 0$). Démontrer que l'application φ qui, à deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$, $X = (x_i)_{1\leq i\leq N}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq N}$ associe le réel

$$\varphi(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} a_i\ x_i\ y_i,$$

est un produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

15. Pour tout élément U de S_2, démontrer l'existence des deux grandeurs $M(U)$ et $V(U)$. Démontrer que la variance $V(U)$ est positive ou nulle :

$$V(U) \geq 0.$$

Indication : comparer, pour tout entier N, les deux expressions suivantes :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} n\ u_n\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right).\left(\sum_{n=1}^{N} n^2\ u_n\right).$$

Une expression approchée de la fonction $\widehat{U}$ à l'aide de la moyenne et de la variance :

16. Démontrer que les dérivées première $\widehat{U}'$ et seconde $\widehat{U}'$ de $\widehat{U}$ admettent une limite lorsque le réel x tend vers 1 par valeurs inférieures. Déterminer ces deux limites, notées $\widehat{U}'(1)$ et $\widehat{U}'(1)$, en fonction de $M(U)$ et $V(U)$.

17. Soit $x \longmapsto \varepsilon(x)$ la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par la relation suivante :

$$\varepsilon(x) = \widehat{U}'(1) - \widehat{U}'(x).$$

Démontrer, pour tout réel x compris strictement entre 0 et 1, l'inégalité suivante :

$$\left|\widehat{U}(x) - 1 - M(U)(x-1) - \frac{1}{2}\left(V(U) + M(U)^2 - M(U)\right)(x-1)^2\right| \leq \frac{1}{2}(x-1)^2\ \varepsilon(x).$$

Moyenne et variance des trois suites B^p, Γ^p et Π^λ :

18. Démontrer, lorsque p est un réel strictement compris entre 0 et 1 et λ un réel strictement positif, que les trois suites B^p, Γ^p et Π^λ définies ci-dessus, appartiennent à l'ensemble S_2.

19. Calculer pour chacune de ces suites B^p, Γ^p et Π^λ la moyenne et la variance. C'est-à-dire les six grandeurs :

$$M(B^p),\ V(B^p),\ M(\Gamma^p),\ V(\Gamma^p),\ M\left(\Pi^\lambda\right),\ V\left(\Pi^\lambda\right).$$

FIN DU PROBLÈME

A 2004 Math PSI 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude de deux suites réelles $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des séries entières de termes généraux $(f_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies chacune par leurs deux premiers éléments et la même relation de récurrence ci-dessous :

$$\begin{array}{lcll} F & : & f_0 = 0, \quad f_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ ; \\ G & : & g_0 = 2, \quad g_1 = 1, & \text{pour tout entier naturel } n, \ g_{n+2} = g_{n+1} + g_n. \end{array}$$

Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; soient I la matrice unité et J la matrice carrée définies par les relations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, soit U_n la matrice définie par la relation suivante :

$$U_n = f_n \ J + \frac{1}{2} g_n I.$$

Soient U la matrice U_1 $\left(U = U_1 = J + \frac{1}{2}I\right)$ et E le sous-espace vectoriel de M_2 engendré par les deux matrices I et J.

Première partie

Le but de cette partie est l'étude alternée des deux suites de réels et de la suite des matrices ; elle permet d'obtenir des résultats préliminaires.

Quelques propriétés :

1. Démontrer que la suite des matrices $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où U^n est la matrice U élevée à la puissance n, (avec la convention habituelle $U^0 = I$), appartient à l'espace vectoriel E.

2. Établir la relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n.

Caractérisation de la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; quelques conséquences :

3. Comparer, pour tout entier p compris entre 0 et 2 $(0 \leq p \leq 2)$ les matrices U_p et U^p. Démontrer qu'il existe, pour tout entier naturel n, une relation simple entre les matrices U_n et U^n.

4. Déduire des deux résultats précédents les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \det U_n = (-1)^n\,, \quad (g_n)^2 - 5\ (f_n)^2 = 4\,(-1)^n\,.$$

5. Étant donnés deux entiers naturels p et q, exprimer les termes f_{p+q} et g_{p+q} des suites F et G en fonction des termes f_p, g_p, f_q et g_q de ces mêmes suites.

Inverse des matrices U_n :

6. Déterminer l'inverse de la matrice U_n en fonction des matrices I et J. Exprimer les coefficients des matrices I et J à l'aide des réels f_n et g_n.

Des polynômes annulés par la matrice U

Soit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = X^{\,n} - f_n\ X - f_{n-1}.$$

7. Démontrer que le polynôme $P_n(X)$ est divisible par le polynôme $X^{\,2} - X - 1$.

8. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice U ?

9. Calculer la valeur de la matrice $C_n = U^{\,n} - f_n\ U - f_{n-1} I$.

Divisibilité du polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ par $X^{\,2} - X - 1$:

Soit toujours n un entier supérieur ou égal à 2 .

10. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice U_n. En déduire la relation suivante :

$$U^{\,2\,n} - g_n\ U^{\,n} + (-1)^n\ \ I = 0.$$

11. Soient Q et R les polynômes obtenus en effectuant la division euclidienne du polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ par le polynôme $X^{\,2} - X - 1$:

$$X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n = Q(X)\left(X^{\,2} - X - 1\right) + R(X)\,.$$

Préciser les degrés des polynômes Q et R.

Démontrer, en utilisant par exemple les résultats de la question précédente, que le polynôme $X^{\,2\,n} - g_n\ X^{\,n} + (-1)^n$ est divisible par $X^{\,2} - X - 1$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est l'étude de propriétés de suites construites à partir des deux suites F et G.

Un calcul de sommes :

12. Le but de cette question est de calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), des expressions plus simples des deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= f_0 + f_2 + \ldots + f_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2\ k}. \\ \beta_n &= g_0 + g_2 + \ldots + g_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} g_{2\ k}. \end{aligned}$$

Déterminer les expressions de α_n et de β_n en fonction respectivement de f_{2n+1} et de g_{2n+1} en considérant par exemple la matrice S_n définie par la relation suivante :

$$S_n = U_0 + U_2 + \ldots + U_{2\ n} = \sum_{k=0}^{n} U_{2\ k}.$$

Soit T la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n.$$

Détermination des éléments t_n de la suite T à l'aide des réels f_n et g_n.

13. Démontrer que le polynôme $X^{\ 6} - 4\ X^{\ 3} - 1$ est divisible par le polynôme $X^{\ 2} - X - 1$.

14. En déduire que la matrice U vérifie, pour tout entier naturel p, la relation suivante :

$$U^{\ 6+p} = 4\ U^{\ 3+p} + U^{\ p}.$$

15. Déduire de la relation précédente que les termes des suites F et G vérifient, pour tout entier naturel p, les relations suivantes :

$$f_{6+p} = 4\ f_{3+p} + f_p, \quad g_{6+p} = 4\ g_{3+p} + g_p.$$

16. Déduire des résultats précédents l'expression du terme général t_n de la suite T, définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\ t_{n+1} + t_n,$$

en fonction de termes des suites F et G.

Troisième partie

Le but de cette partie est l'étude des deux séries entières de termes généraux $a_n = f_n\ x^n$ et $b_n = g_n\ x^n$. Pour tout entier naturel n, soit A_n la matrice définie par la relation suivante :

$$A_n = x^n\ U_n\ .$$

et $\Sigma_n(x)$ la somme des $n+1$ premières matrices A_k :

$$\Sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k\ U_k\ .$$

17. Déterminer pour quelles valeurs du réel x la matrice $I - x\ U$ est inversible et déterminer son inverse sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices I et U.

Il est admis qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel E tend vers 0, lorsque l'entier n croît vers l'infini, si et seulement si tous les termes de la matrice A_n tendent vers 0.

18. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel x pour que la suite de matrices $(x^n\ U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

19. En déduire, lorsque la condition obtenue sur le réel x est réalisée, la limite de la suite de matrices $(\Sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

20. À partir des résultats précédents, déterminer un minorant ρ des rayons de convergence des deux séries entières de termes généraux $(\ f_n\ x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n\ x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les sommes $A(x)$ et $B(x)$ de ces deux séries :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ x^n \quad ; \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\ x^n.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2004 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème l'entier n est strictement positif $(n \geq 1)$; l'expression C_n^p désigne le nombre des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments. Autre notation :

$$C_n^p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right).$$

Première partie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$u_n(x) = x^n \ (x-1)^n \quad ; \quad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} u_n(x).$$

Intégrale de la fonction u_n sur le segment $K = [0,1]$:

1. Étant donnés un réel strictement positif a $(a > 0)$ et un entier naturel k $(k \in \mathbb{N})$, démontrer l'existence de l'intégrale $I_{a,\,k}$ définie ci-dessous et la calculer :

$$I_{a,\,k} = \int_0^1 x^{a-1} \ (x-1)^k \ dx.$$

2. Déduire du résultat précédent la valeur de l'intégrale de la fonction u_n , étendue au segment $K = [0,1]$, en fonction du coefficient du binôme $C_{2\,n}^n$:

$$\int_0^1 x^n \ (x-1)^n \ dx.$$

Polynômes P_n :

3. Déterminer le degré du polynôme P_n et préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

4. Déterminer de deux manières différentes le polynôme P_n : la première, par dérivation de l'expression de u_n obtenue après développement ; la seconde, par dérivation du produit $x^n \ (x-1)^n$; le résultat sera exprimé en fonction d'expressions du type $x^k \ (x-1)^{n-k}$.

5. En déduire la relation :

$$C_{2\ n}^{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

Deuxième partie

Étant donnés deux réels a et b, strictement positifs ($a > 0,\ b > 0$), soit $J\left(a,\ b\right)$ l'intégrale suivante :

$$J\left(a,\ b\right) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

Intégrale $J\left(a,\ b\right)$:

6. Étudier l'existence de l'intégrale $J\left(a,\ b\right)$.

7. Démontrer que l'intégrale $J\left(a,\ b\right)$ est égale à la somme de la série de terme général $(-1)^k / (a + k\ b)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$J\left(a,\ b\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a + k\ b}.$$

8. En déduire la somme de la série suivante :

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \ldots.$$

Étant donné un réel a strictement compris entre -1 et 1 ($-1 < a < 1$), soit φ_a la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ par la relation suivante :

$$\varphi_a\left(x\right) = \frac{1}{(1 - a\ x)\sqrt{1-x^2}}.$$

9. Démontrer que la fonction φ_a est intégrable sur l'intervalle ouvert I.

Soit $K\left(a\right)$ l'intégrale de la fonction φ_a étendue à l'intervalle I :

$$K\left(a\right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1 - a\ x)\sqrt{1-x^2}} \ dx.$$

10. Démontrer, pour tout réel a appartenant à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$, la relation suivante :

$$K\left(a\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2\ k} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2\ k}}{\sqrt{1-x^2}} \ dx.$$

11. Déterminer, en admettant le résultat suivant

$$K(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

le développement en série entière de la fonction $K : a \longmapsto K(a)$ dans un voisinage de l'origine. Préciser le rayon de convergence.

12. Exprimer, pour tout entier n strictement positif, la valeur de l'intégrale L_n ci-dessous en fonction du coefficient du binôme $C_{2\,n}^{n}$:

$$L_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2\,n}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Troisième partie

Soit f la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty,\ 1[$ par la relation suivante :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1,\ 1[$ par la relation suivante :

$$g(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 :

13. Déterminer le développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de l'origine 0. Préciser le rayon de convergence de la série entière. Déterminer des coefficients α_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de façon que ce développement s'écrive sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, C_{2\,n}^{n}\, t^n.$$

Développement en série entière de la fonction g dans un voisinage de 0 :

14. Établir que la fonction g vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.

15. En déduire le développement en série entière de la fonction g dans un voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence R de la série entière obtenue.

16. Établir, lorsque le réel x appartient à l'intervalle ouvert de convergence de la série entière, l'expression ci-dessous de $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2\,n-1}}{n\, C_{2\,n}^{n}}\, x^{2\,n-1}.$$

17. Déduire des résultats précédents la somme Σ de la série suivante :

$$\Sigma = 1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5}.\frac{1}{2^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{1}{2^3} + \ldots.$$

Soit h la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x\ \arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

18. Démontrer que la fonction h est développable en série entière dans un voisinage de 0 ; déterminer des coefficients β_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de façon que ce développement s'écrive sous la forme suivante :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{C_{2\ n}^{n}}\ x^{2\ n}.$$

19. Déduire des deux dernières questions la somme de chacune des séries de termes généraux v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, définis respectivement par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{1}{n\ C_{2\ n}^{n}} \quad ; \quad w_n = \frac{1}{C_{2\ n}^{n}}.$$

Quatrième partie

Le but de cette partie est de montrer que, plus généralement, étant donnés une fonction F, définie et continue sur le segment $K = [0,\ 1]$, et un réel α strictement positif, il existe des coefficients $c_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, permettant d'écrire la relation suivante :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\alpha}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha)\ \int_0^1 F(t)\ t^k\ dt.$$

Étant donné un réel α strictement positif ($\alpha > 0$), soit f_α la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty,\ 1[$ par la relation suivante :

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha}}.$$

Développement de la fonction f_α en série entière :

20. Déterminer le développement en série entière de la fonction f_α dans un voisinage de 0 ; préciser le rayon de convergence. Soit $c_k(\alpha)\ t^k$, $k \in \mathbb{N}$, le terme général de la série entière obtenue. Démontrer que les coefficients $c_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, sont strictement positifs.

L'intégrale I_α est égale à la somme d'une série.

21. La fonction F étant une fonction définie et continue sur le segment $K = [0,\ 1]$, étudier, lorsque le réel α est strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$, l'existence de l'intégrale I_α :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\alpha}} dt.$$

22. Démontrer, lorsque le réel α est strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$, la relation suivante :

$$I_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \int_0^1 F(t)\ t^k\ dt.$$

23. Application : démontrer que le coefficient du binôme $C_{2\ n}^{n}$ est égal à la somme d'une série dont le terme général dépend de coefficients $C_{2\ k}^{k}$; choisir, par exemple, la fonction F et le réel α définis par les relations suivantes :

$$F(t) = t^{n\ -\ \frac{1}{2}} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2005 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1 - Filière MP.
Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

Pour une suite de réels $z = (z_n,\, n \geq 1)$, on note $\liminf_n z_n$ (respectivement $\limsup_n z_n$), la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs d'adhérence de z.

On rappelle qu'une suite converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence finie.

Pour une suite de fonctions à valeurs réelles $(f_n(x), n \geq 1)$, on note $\liminf_n f_n$ la fonction qui à tout réel x associe $\liminf_n f_n(x)$.

I. Calculs préliminaires

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left((\frac{1}{2} - \rho) x^2 \right). \qquad \text{(A)}$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \quad = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

1) Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

En particulier

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Montrer que F_f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}\,[$.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u) e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

3) Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2,$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

5) Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)\,e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

6) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u\ \geq\ \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}.$$

8) Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right)\ e^{-u^2/2}.$$

9) Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

II. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u,$$
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

10) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

11) Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

12) Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \qquad (1)$$

13) Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

14) Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

III. Extension aux fonctions positives

On veut maintenant étendre le résultat de la question 13 aux fonctions qui peuvent s'annuler. On considère donc une fonction continue positive g qui satisfait les mêmes hypothèses que f, à la différence près que g peut s'annuler. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = x\ln(x)$, on convient que ψ est prolongée par continuité en 0 par $\psi(0) = 0$.

Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$f_n(u) = \frac{n-1}{n}\, g(u) + \frac{1}{n}.$$

15) Montrer que $(E(f_n), n \geq 1)$ converge vers $E(g)$ quand n tend vers l'infini.

16) Soit φ_n la fonction associée à f_n, comme φ était associée à f dans la question 2. Pour tout réel x, on note

$$\psi_1(x) = \liminf_n \varphi_n(x) \text{ et } \psi_2(x) = \limsup_n \varphi_n(x).$$

Montrer que pour tout réel x et pour $j = 1$ et $j = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \qquad (2)$$

17) On note respectivement a et b les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des x tels que $g(x) > 0$:

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0\} \text{ et } b = \sup\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0\}.$$

Lorsque g est strictement positive au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$), on obtient $a = -\infty$ (respectivement $b = +\infty$) de sorte que

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty \text{ et que } g = 0 \text{ sur }]-\infty, a] \cup [b, +\infty[.$$

Montrer que pour $j = 1$ et $j = 2$, ψ_j est strictement croissante et

$$\lim_{x \to -\infty} \psi_j(x) = a \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \psi_j(x) = b.$$

18) On note D l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1. Pour x élément de D, on note

$$\psi_1(x^+) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \psi_1(y) \text{ et } \psi_1(x^-) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \psi_1(y).$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon = \{x \in D \,/\, \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \varepsilon\}.$$

On fixe N entier non nul, montrer que le cardinal de $D_{1/N}$ est inférieur à $N(b - a)$.

19) Que peut-on dire du cardinal de D ?

20) Montrer que si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ alors g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$.

21) Montrer que si $g(\psi_1(x)) > 0$ alors ψ_1 est continue en x.

22) Montrer que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_1(x) = \psi_2(x)$.

23) Notons C l'ensemble des points de continuité de ψ_1 et K une partie compacte de C. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Montrer qu'il existe dans K des réels $x_0, \cdots, x_{2q+1}$ tels que :
(a) $K \subset \cup_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$,

(b) pour $j \in \{0, \cdots, q\}$, $x_{2j} < x_{2j+1}$ et $\psi_1(v) - \psi_1(u) \leq \varepsilon$ quels que soient u et v tels que $x_{2j} \leq u \leq v \leq x_{2j+1}$.

24) Déduire des questions 20 à 23 que $(\varphi_n, n \geq 1)$ converge uniformément sur K, vers ψ_1.

25) Montrer qu'il existe A et n assez grands tels que pour tout $m \geq n$, on ait :

$$\sup_{u \in [-A,\, A]} |\varphi_m(u)| \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1.$$

En déduire que

$$\sup\{|u - \varphi_n(u)|^2 \,/\, |u| \leq A,\, n \geq 1\} \text{ est fini.}$$

On note M ce nombre.

26) Montrer que pour tout $A > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-A}^{A} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u = \int_{-A}^{A} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u.$$

Indication : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $(\lambda_n, n \geq 1)$ la suite des points de discontinuité de ψ_1 dans $[-A, A]$. Pour tout entier p non nul, introduisons

$$J_p =]\lambda_p - 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M},\, \lambda_p + 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M}[\text{ et } K = [-A, A] \setminus \cup_{p \geq 1} J_p.$$

On majorera séparément les intégrales sur K et sur $\cup_{p \geq 1} J_p$.

27) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Le problème de transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - du$ et $u + du$ est donnée par $2\exp(-u^2/2)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 2 minimise le coût du transport défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|^2 e^{-u^2/2}\, du$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre $E(f)$ est appelée l'entropie de Boltzmann.

A 2005 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

Durée de l'épreuve : 4 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2 - Filière MP.
Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont notées respectivement $(a_k,\ 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k,\ 1 \leq k \leq n)$, répétées suivant leur multiplicité. On veut démontrer l'inégalité :

$$\det(A+B) \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}), \tag{1}$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

Notations

On note par $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle subordonnée que, pour alléger les notations, on notera aussi $\|.\|$. Pour toute matrice carrée M, on note M^t sa matrice transposée, $\det(M)$ son déterminant et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique (respectivement anti-symétrique) lorsque $M = M^t$ (respectivement $M^t = -M$). On note $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (respectivement anti-symétriques).

Résultats admis

On admet les propriétés suivantes :

P1 – Si A et B sont deux matrices diagonalisables et si elles commutent, il existe une base de diagonalisation commune à A et B.

P2 – Si A et B commutent alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

I. Préliminaires

1) Montrer que
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

2) On note $(E_{(i,j)},\ (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, n\})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter $\mathrm{tr}(ME_{(i,j)})$ en fonction des coefficients de M.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice $T \in \mathcal{A}_n$, $\mathrm{tr}(MT) = 0$. La matrice M est-elle symétrique ou anti-symétrique ?

4) Soit $T \in \mathcal{A}_n$, montrer que e^T est orthogonale.

5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour s au voisinage de 0,

$$e^{sM} = \mathrm{I} + sM + O(s^2). \tag{2}$$

6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j \in \{0, \cdots, n\}$, on note $\alpha_j(M)$ le coefficient de X^j dans le polynôme caractéristique de M :

$$\det(M - X\,\mathrm{I}) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(M) X^j.$$

Montrer que pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, l'application $(M \mapsto \alpha_j(M))$ est continue.

7) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour s au voisinage de 0,

$$\det(\mathrm{I} + sM) = 1 + s\ \mathrm{tr}(M) + O(s^2),$$

et que

$$\det(\mathrm{I} + sM + O(s^2)) = 1 + s\ \mathrm{tr}(M) + O(s^2). \tag{3}$$

8) On suppose que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible. Construire une matrice N_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $s > 0$, on ait $\det(M + sN_0) > 0$.

9) Montrer que l'on peut choisir N_0, à coefficients réels, diagonalisable (respectivement symétrique) si M est diagonalisable (respectivement symétrique).

II. Démonstration de l'inégalité (1)

On rappelle que A et B sont des matrices réelles symétriques.

10) Montrer que si les matrices A et B commutent alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\det(A + B) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

11) Soit $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{O}_n$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la partie $\mathcal{O}_n(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1};\ U \in \mathcal{O}_n\}.$$

Montrer qu'il existe $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$ telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C).$$

II.1 $A + B_0$ inversible

De cette question à la question 17, on suppose que $A + B_0$ est inversible. Pour $T \in \mathcal{A}_n$ et pour tout réel s, on définit $\psi_T(s)$ par

$$\psi_T(s) = \det\left(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}\right).$$

13) Montrer que pour s au voisinage de 0, on a

$$\psi_T(s) = \det(A+B_0)\left[1 + s\ \mathrm{tr}\left((TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)\right] + O(s^2). \quad (4)$$

14) Montrer que pour tout s réel, on a $\psi_T(s) \leq \psi_T(0)$.

15) Montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{tr}(TB_0(A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(T(A+B_0)^{-1}B_0). \quad (5)$$

16) Montrer que B_0 commute avec $(A+B_0)^{-1}$ et A.

17) Montrer l'inégalité (1).

II.2 $A + B_0$ singulière

On suppose dorénavant que $A + B_0$ n'est pas inversible.

18) Montrer qu'il existe deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(B_k, k > 0)$ et $(N_k, k > 0)$ telles que

(i) N_k converge vers B_0 quand k tend vers $+\infty$,

(ii) $B_k \in \mathcal{O}_n(N_k)$ pour tout $k > 0$,

(iii) $\det(A + N_k) \leq \det(A + B_k)$ pour tout $k > 0$,

(iv) B_k commute avec A pour tout $k > 0$.

19) Montrer l'inégalité (1).

III. Une permutation qui réalise le maximum

Indépendamment des matrices A et B, étant données deux suites de réels $(a_k,\, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k,\, 1 \leq k \leq n)$, on se propose de préciser l'inégalité (1), en explicitant une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ pour laquelle le produit

$$P(\sigma) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$$

est maximum. On supposera que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \\ a_i + b_j > 0 \text{ pour tout } (i,j). \end{array} \right. \qquad \text{(H)}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la propriété $\pi(n)$ suivante : pour toutes les suites $(a_k,\, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k,\, 1 \leq k \leq n)$ vérifiant (H) et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{n-k+1}).$$

20) Établir $\pi(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Indication : pour $n > 2$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ donnés, on distinguera deux cas :

Cas 1 : σ vérifie $\sigma(n) = 1$. On montrera qu'il existe alors $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ telle que pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, $\sigma(i) = \tau(i) + 1$.

Cas 2 : Il existe $i < n$ et $j > 1$ tels que $\sigma(i) = 1$ et $\sigma(n) = j$ et on ramènera l'étude du second cas au premier en factorisant $P(\sigma)$ par $(a_i + b_1)(a_n + b_j)$.

FIN DU PROBLÈME

A 2005 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1 - Filière PC.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires

1) Montrer les inégalités suivantes :

$$\ln(1+t) \leq t, \text{ pour tout } t \in]-1, +\infty[, \tag{1}$$

$$t\ln(t) \geq -\frac{1}{e}, \text{ pour tout } t \in]0, +\infty[. \tag{2}$$

2) Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J. Si ψ est de classe C^1 sur I, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit un C^1-difféomorphisme de I sur J. Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

II. Construction d'une application particulière

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho}\exp\left((\frac{1}{2}-\rho)x^2\right). \tag{A}$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \quad = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

3) Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

En particulier

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Montrer que F_f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0,\sqrt{2\pi}\,[$.

4) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

5) Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6) Pour tout réel x, calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2,$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

7) Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)\,e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

8) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \;\geq\; \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

9) Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}.$$

10) Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right)\, e^{-u^2/2}.$$

11) Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right) e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

III. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u,$$
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u-\varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

12) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

13) Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

14) Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\right) e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u. \qquad (3)$$

15) Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

16) Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

FIN DU PROBLÈME

Le problème de transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u-du$ et $u+du$ est donnée par $2\exp(-u^2/2)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 4 minimise le coût du transport défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} |u-s(u)|^2 e^{-u^2/2}\,du$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre $E(f)$ est appelée l'entropie de Boltzmann.

A 2005 Math PSI 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PSI

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2 - Filière PSI.
Cet énoncé comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les différentes parties sont indépendantes. Ceci étant, la plus grande attention sera apportée à l'unité de votre travail. La résolution intégrale de partie sera hautement appréciée.

Ce problème traite des applications de la notion de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, et de ses applications tant en algèbre qu'en analyse ou en géométrie.

Les théorèmes du cours utilisés lors de la résolution de ce problème devront être énoncés avec précision, leurs hypothèses devront être soigneusement vérifiées.

Dans ce texte, $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ représente l'ensemble des fonctions numériques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour deux espaces vectoriels E et F, $\mathcal{L}(E,F)$ représente l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

I. Deux exemples simples de supplémentaires

1) Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions paires. Donner un supplémentaire de F dans E.

2) Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.
Montrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2, que l'on déterminera explicitement, telles que tout élément f de F se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 \text{ avec } (\alpha_f, \beta_f) \in \mathbb{R}^2.$$

3) Déterminer l'unique matrice A telle que l'on ait, pour tout $f \in F$,

$$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}.$$

4) Montrer que $G = \{g \in E \text{ telle que } g(0) = g'(0) = 0\}$ est un supplémentaire de F dans E.

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Montrer que f est diagonalisable.

6) Montrer que le plan (P) d'équation $x - y + z = 0$ est stable par f.

7) Déterminer un supplémentaire de (P) stable par f.

8) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

   i - L'endomorphisme f est diagonalisable.

   ii - Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

III. Supplémentaires et calcul différentiel

La définition suivante permet d'étendre les notions de famille génératrice et de famille libre, aux espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et I un ensemble d'indices non nécessairement fini.

- Une famille $(e_i, i \in I)$ est dite génératrice de E lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille finie $(e_i, i \in J)$ de $(e_i, i \in I)$.
- Une famille $(e_i, i \in I)$ est dite libre dans E lorsque toute sous-famille finie de cette famille est libre.

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on définit la fonction

$$f_{ij}(x, y) = x^i y^j.$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_{ij},\ (i, j) \in \mathbb{N}^2)$. On pose

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

Pour $g \in F$, on note gF l'ensemble des fonctions qui s'écrivent gf avec $f \in F$.

9) Prouver que la famille $(f_{ij},\ (i, j) \in \mathbb{N}^2)$ est libre.

10) Montrer que les restrictions $\tilde{\Delta}$ (respectivement $\tilde{\Phi}$) de Δ (respectivement Φ) à F sont des endomorphismes de F.

11) Déterminer $\operatorname{Ker}\tilde{\Phi}$.

12) Montrer que $F = xyF \oplus \operatorname{Ker}\tilde{\Phi}$.

13) Soit le changement de variables

$$w : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\dfrac{u+v}{2},\ \dfrac{u-v}{2}) \end{cases}$$

ainsi que l'application

$$L : \begin{cases} F & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f \circ w. \end{cases}$$

Montrer que L est un automorphisme de F.

14) Montrer que $L(\operatorname{Ker}\tilde{\Delta}) = \operatorname{Ker}\tilde{\Phi}$.

15) Montrer que $L[(x^2 - y^2)F] = uvF$.

16) Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\tilde{\Delta}$ dans F.

IV. Supplémentaires et géométrie

17) Soient trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : E, F et G. On suppose G de dimension finie. On se donne $g \in \mathcal{L}(E,G)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) Il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ tel que $f = h \circ g$.
ii) $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

18) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(k+1)$ formes linéaires non nulles notées f_i pour $i \in \{1, \cdots, k+1\}$. On note $H_i = \operatorname{Ker} f_i$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'inclusion suivante est satisfaite :

$$\bigcap_{i=1}^{k} H_i \ \subset \ H_{k+1}.$$

ii) Il existe $(a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i.$$

Indication : on utilisera éventuellement l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \cdots, f_k(x)). \end{cases}$$

19) On considère, dans cette question, l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, que l'on rapporte à un repère orthonormé. Soit (D) la droite définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, z = 0, \, y = x\}$. Soit également (S) la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 10 = 0.$$

En utilisant ce qui précède, déterminer les équations cartésiennes des plans contenant (D) et tangents à (S).

FIN DU PROBLÈME

A 2005 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2 - Filière PC.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racine carrée d'endomorphisme

Pour toute fonction f continue intégrable sur $\mathbb{R}$, on considère $\widehat{f}$, dite *transformée de Fourier de* f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\ \mathrm{d}x.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on sait que $\widehat{f}$ est continue et on *admet* que si, de plus, $\widehat{f}$ est intégrable alors l'égalité suivante est vérifiée pour tout réel x :

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy}\ \mathrm{d}y.$$

On note $\mathcal{S}$, l'ensemble, appelé espace de Schwartz, des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tous les entiers $j \geq 0$ et $k \geq 0$, la fonction $f^{(j)}$ soit négligeable devant la fonction $(y \mapsto (1+|y|^k)^{-1})$ quand $|y|$ tend vers l'infini : pour tout j et tout k entiers,

$$|f^{(j)}(y)|(1+|y|^k) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } |y| \text{ tend vers l'infini.}$$

On admet que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}$ dans lui-même.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On appelle dérivation dans E l'application d qui à tout f de E associe sa dérivée f'. On suppose que d est un endomorphisme de l'espace vectoriel E. L'objet du problème est de chercher s'il existe un endomorphisme δ de E tel que $\delta \circ \delta = d$: on dira alors que δ est une racine carrée de d.

I. Préliminaires

On suppose, dans cette partie seulement, que δ existe.

1) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre le noyau de d et le noyau de δ ?
2) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre l'image de d et l'image de δ ?
3) Montrer que δ est un automorphisme de E si et seulement si d est un automorphisme de E.
4) Montrer que tout sous-espace propre de d est stable par δ.

II. Dimension finie

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, dont une base est $(\cos\ x,\ \sin x)$.

5) Montrer que la dérivation dans E est un automorphisme d de E.

6) Écrire la matrice D de d dans la base $(\cos x, \sin x)$. Montrer que D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

7) Qu'est-ce que cela implique pour δ ?

8) Pour diagonaliser D, prenons la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de la matrice Δ de δ dans cette base ?

9) Déterminer, par leur matrice dans la base $(\cos x, \sin x)$, tous les automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dont le carré est égal à d.

III. Espace de Schwartz

Désormais, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{S}$ défini dans l'introduction. Dans ce qui suit, on considère un élément donné f de E. Pour tout nombre réel y, on note

$$r(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ i\sqrt{-y} & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

On définit la fonction $\delta(f)$ par :

$$\delta(f)(x) = \frac{1+i}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(y)\widehat{f}(y)e^{ixy}\ \mathrm{d}y.$$

10) À quelle condition sur le réel λ, la fonction φ_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\lambda(x) = \exp(-\lambda.x^2),$$

appartient-elle à E ?

11) Soit j un entier naturel. Donner l'expression de la transformée de Fourier, $\widehat{f^{(j)}}$, de la dérivée j-ième de f en fonction de la transformée de Fourier de f.

12) Montrer que $\delta(f)$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

13) Désormais, on suppose de plus que f est nulle en-dehors d'un segment $[-A,A]$, où A est un réel strictement positif, et que f est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, autrement dit telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que la transformée de Fourier de f est développable en série entière au voisinage de l'origine, et donner une expression des coefficients $(a_n, n \geq 0)$ tels que

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n.$$

14) Montrer qu'il existe une fonction u définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel y, on ait $\widehat{f}(y) = y\,u(y)$.

15) Démontrer que pour tout réel non nul x, l'identité suivante est satisfaite :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) e^{ixy}\,\mathrm{d}y = \\ -\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y}u'(y) + y^{3/2}u''(y)\right)e^{ixy}\,\mathrm{d}y. \quad (1)$$

16) Montrer que $\delta(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

17) Pour $f \in \mathcal{S}$, on note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.
Comparer $\widehat{\widetilde{f}}$ et $\widetilde{\widehat{f}}$.

18) Montrer que $r\widehat{\delta(f)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

19) Montrer que $\delta^2 = d$.

20) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, il n'existe aucun segment en dehors duquel $\delta(f)$ est nulle.

FIN DU PROBLÈME

A 2006 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$,de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$m_{ij} \geq 0 \text{ (resp. } m_{ij} > 0) \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \text{ pour tout } j \in \{1, \cdots, n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}, \\ B^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x > 0\}, \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n \ / \|x\|_1 = 1\}. \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Perron-Frobenius) *Soit $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(\mathrm{I}_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

I Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

1) Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}^+ \,/\, \theta x \leq Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :
$$\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} \;\middle/\; 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}.$$

On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4) Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \geq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

11) Montrer que $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

12) Montrer que $\sup_{x\in C} \theta(x) = \sup_{x\in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup_{x\in C} \theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

II Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j.$$

14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ. Montrer que $|\theta| x^+ \leq T x^+$.

15) En déduire que $|\theta| \leq \theta_0$.

16) Montrer que $|\theta| \, \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leq 1$.

17) En déduire $\theta_0 = 1$.

18) Montrer que pour tout $j \geq 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19) Établir, pour tout $k \geq 1$, les inégalités suivantes :

$$\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1.$$

20) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}$.

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geq 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.

22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x, k \geq 1)$, montrer que $Ty = y$ et que pour tout $k \geq 1$, $R_k y = y$.

23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x, k \geq 1)$, montrer pour tous les entiers m et l, l'identité suivante :

$$y - z = R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y).$$

24) Montrer que la suite $(R_k x, k \geq 1)$ a exactement une valeur d'adhérence.

25) Montrer qu'il existe une matrice R telle que $Rx = \lim_{k \to +\infty} R_k x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lim_{k \to +\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

26) Montrer que T et R commutent.

27) Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

28) Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}(T - \mathrm{I}_n)$.

29) On admet que $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

FIN DU PROBLÈME

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.

A 2006 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique fin des racines de la dérivée du polynôme de degré $n+1$,

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n),$$

lorsque n tend vers l'infini.

On notera cot la fonction définie sur $]0,\pi[$ par

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. On notera Arc cot sa fonction réciproque. Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ .(\frac{n}{e})^n \text{ quand } n \to +\infty.$$

Les parties I et II sont indépendantes.

I. Quelques propriétés des racines de P_n'

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P_n' admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k = 0, \dots, n-1$.

Notons $\alpha_{n,\,k} = x_{n,\,k} - k \in]0{,}1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,\,k}$.

2) Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n-1$ et n de P_n', exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,\,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,\,k}$ en fonction de n.

3) En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,\,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,\,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

4) Déterminer la valeur de $\alpha_{n,\,k} + \alpha_{n,\,n-1-k}$.

Le but des questions suivantes est de montrer que, n étant fixé, la suite des $\alpha_{n,\,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.

5) Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de n, le tableau de variations de P_n.

On y fera apparaître les réels $x_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ainsi que les entiers $0, 1, \ldots, n$. On pourra s'inspirer du modèle de la figure 1.

6) En déduire le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

7) En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$.

8) En déduire que pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.

9) En utilisant l'idendité $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de k et n, le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(1 + x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \cdots, n-1$.

10) En déduire que pour $k = 1, \cdots, n-1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.

11) Conclure.

II. Un développement asymptotique

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

12) Déterminer $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid h_x \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

13) Montrer que Γ est strictement positive sur $\mathcal{E}$.

14) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathcal{E}$.

15) Exprimer pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

On admet que la fonction Γ satisfait, pour tout $x \in]0,1[$, la formule :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \qquad \text{(A)}$$

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

16) Montrer que Ψ est strictement croissante.

17) Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln m\right] = 0.$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln(x).$$

18) Montrer que la série de terme général $(\phi(n+1) - \phi(n))$ converge.

19) Montrer que la suite $(\phi(n), n \geq 1)$ converge lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit C sa limite.

20) Établir que l'on a aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = C.$$

21) Montrer que si $C \neq 0$,

$$\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} Cx.$$

22) Montrer que $C = 0$.

23) Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

III. Comportement asymptotique des $\alpha_{n,\,k}$

24) En considérant la fraction $\dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,\,k}+j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1-\alpha_{n,\,k})+j} = 0.$$

25) Pour $t \in]0{,}1[$ fixé, on pose $u_n = \alpha_{n,\,[nt]}$ pour $t \in]0,1[$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right) \right] = 0.$$

26) Démontrer que la suite $(u_n, n \geq 1)$ est convergente et calculer sa limite, que l'on notera $F(t)$.

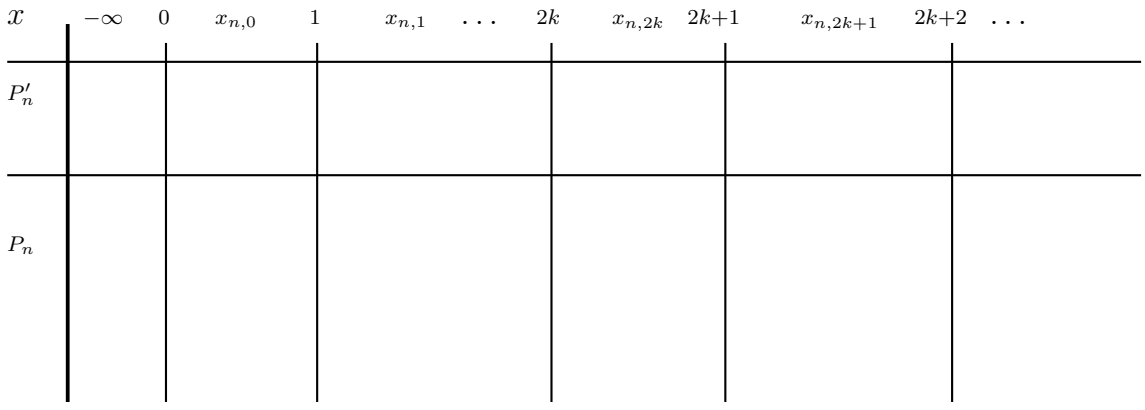


FIG. 1 – *Modèle de tableau de variation.*

FIN DU PROBLÈME

A 2006 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On rappelle que la fonction Gamma est définie pour tout réel $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Cette fonction possède les deux propriétés suivantes :

- pour tout réel z strictement positif, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
- il est admis que

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

I. Fonctions hypergéométriques

1) Soit z un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels α et β pour que la fonction

$$t \longmapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1} e^{-zt}$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit z un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels α, β pour que la fonction

$$t \longmapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1} e^{-zt},$$

soit intégrable sur $]-1, 0[$.

On fixe maintenant deux réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et on définit les fonctions

$$K(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta} e^{-zt} \, \mathrm{d}t,$$
$$I_1(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta} e^{-zt} \, \mathrm{d}t,$$
$$I_2(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1} e^{-zt} \, \mathrm{d}t.$$

pour tout réel strictement positif z.

3) Montrer que I_1 et I_2 sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$I_1' = -K \text{ et } I_2' = -K + I_2. \tag{E}$$

4) Montrer que $zK = \alpha I_1 + \beta I_2$.

5) En déduire que le vecteur $I(z) = \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel linéaire sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$I'(z) = \mathcal{A}(z)I(z), \tag{S}$$

où $\mathcal{A}(z)$ est une matrice que l'on explicitera.

6) Montrer que K satisfait sur $\mathbb{R}_+^*$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on explicitera.

On définit les fonctions

$$L(z) = \int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}\,\mathrm{d}t,$$
$$J_1(z) = -\int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}e^{-zt}\,\mathrm{d}t,$$
$$J_2(z) = \int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,\mathrm{d}t.$$

7) Montrer que les fonctions J_1, J_2, L satisfont les mêmes relations que respectivement, I_1, I_2, K définies dans l'équation (E), que le vecteur $J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ est solution du même système différentiel que I (voir (S)) et que L satisfait la même équation différentielle que K (trouvée à la question 6).

II. Calcul du Wronskien de (S)

8) Montrer que pour tout $t > 0$ et $z \geq 1$

$$\left| \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\beta-1} - 1 \right| \leq \begin{cases} \dfrac{t}{z}\ |\beta - 1|(1+t)^{\beta-2}, \text{ si } \beta \geq 2, \\ \\ \dfrac{t}{z}\ |\beta - 1|, \text{ si } \beta \leq 2. \end{cases}$$

9) En déduire que pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t$$

est équivalent à $\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}$ quand z tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t\ -\ \Gamma(\alpha)z^{-\alpha} \right) = o(z^{-\alpha}),$$

quand z tend $+\infty$.

10) Montrer, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et pour tout réel z, l'identité :

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t = e^z z^{-\beta} \int_0^{\frac{z}{2}} u^{\beta-1}(1 - \frac{u}{z})^{\alpha-1}e^{-u}du.$$

11) En déduire que cette intégrale est équivalente à $\Gamma(\beta)e^z z^{-\beta}$ quand z tend vers $+\infty$.

12) En déduire que

$$\int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t,$$

est équivalent à $\Gamma(\beta)e^z z^{-\beta}$ quand z tend vers $+\infty$. Pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $z > 0$ on définit le Wronskien

$$w(z) = \det \begin{pmatrix} I_1(z) & J_1(z) \\ I_2(z) & J_2(z) \end{pmatrix}.$$

13) Donner un équivalent de $w(z)$ quand z tend vers $+\infty$.

14) Montrer que w satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on explicitera.

15) Montrer que, pour tout z réel strictement positif, $w(z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)z^{-\alpha-\beta}e^z$.

III. Développement en série

16) Montrer que si β est un entier strictement positif

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,\mathrm{d}t = z^{-\alpha-\beta+1}P(z)$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $\beta-1$ en la variable z, que l'on explicitera.

Pour tout réel x et tout entier positif n, on pose

$$(x,n) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k),$$

pour $n > 0$ et $(x,0) = 1$.

17) Soient a et b deux réels. On suppose de plus que b n'est pas un entier négatif. Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$u_k = \frac{(a,k)}{k!(b,k)}.$$

On note alors pour tout réel x

$$F(a,b,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,k)}{k!(b,k)}\, x^k.$$

18) Montrer pour tout réel strictement positif z, l'identité suivante :

$$\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F(\alpha,\alpha+\beta,z).$$

19) Montrer directement (sans utiliser la partie I) que la fonction $y(x) = F(a, b, x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + (b - x)y'(x) - ay(x) = 0.$$

20) Montrer que si b n'est pas un entier, on peut trouver des réels a' et b' tels que $y(z) = z^{1-b}F(a', b', z)$ soit solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de la même équation différentielle.

FIN DU PROBLÈME

A 2006 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$, la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n, la matrice nulle.
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$, constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices A qui satisfont ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X \,|\, Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X,Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX \,|\, Y) = (X \,|\, {}^tAY).$$

Définition 1. *Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \,|\, X) \geq 0$.*

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ est dite définie positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1} \backslash \{0_{n,1}\}$, $(AX \,|\, X) > 0$.

Définition 2. *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n$, on dit que A est plus petite que B pour l'ordre de Löwner, et on note $A \preceq B$, si la matrice $B - A$ est positive. On notera $A \prec B$ si $B - A$ est définie positive.*

On suppose dorénavant que A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

I. Matrices positives

1) Montrer que si A est positive, alors pour toute matrice réelle $M \in \mathcal{M}_{n,p}$, la matrice ${}^tMAM$ est symétrique positive.

2) Montrer que toutes les puissances entières d'une matrice symétrique positive A sont positives.

3) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ est positive, respectivement définie positive, si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives, respectivement strictement positives.

4) Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

5) Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\text{Ker } (A - \lambda \, \mathrm{I}_n) = \text{Ker } (C - \sqrt{\lambda} \, \mathrm{I}_n).$$

6) En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$ et que dans toute base orthonormale de vecteurs propres de A, la matrice C est diagonale.

   On notera désormais $C = A^{1/2}$.

7) On suppose A définie positive. Montrer que A est inversible et qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

8) Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.

II. Ordre de Löwner

9) Montrer que l'ordre de Löwner est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

10) Soit $B \in \mathcal{S}_n$ avec $A \preceq B$. Montrer que pour toute matrice réelle $C \in \mathcal{M}_{n,p}$, la relation ${}^tCA\,C \preceq {}^tCB\,C$ est vérifiée.

11) Montrer que si $\mathrm{I}_n \preceq A$ alors A est inversible et $A^{-1} \preceq I_n$.

12) En déduire que si $0_n \prec A \preceq B$ alors B est inversible et $B^{-1} \preceq A^{-1}$.

13) Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ soit positive.

14) On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe des réels a et b de sorte que $0_n \preceq D \preceq B$ mais que $D^2 \not\preceq B^2$.

III. Fonctions matriciellement croissantes

Soit n un entier non nul et M une matrice diagonalisable à valeurs propres positives. Il existe donc une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $M = P\Delta P^{-1}$. Notons $(\lambda_i, i = 1, \cdots, n)$ les valeurs propres de M, répétées suivant leur multiplicité, qui sont donc les coefficients diagonaux de Δ.

Définition 3. *Si f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et Δ une matrice diagonale positive, on note $f(\Delta)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux*

sont donnés par $f(\Delta)_{ii} = f(\lambda_i)$ *pour* $i = 1, \cdots, n$.

15) On considère f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et l'on note $R = Pf(\Delta)\,P^{-1}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et λ un réel positif tels que $MX = \lambda X$. Calculer $R\,X$.

16) Montrer que, pour toutes matrices P et Q inversibles et toutes matrices diagonales Δ_P et Δ_Q de $\mathcal{M}_n$ telles que $M = P\Delta_P P^{-1} = Q\Delta_Q Q^{-1}$, on a :

$$Pf(\Delta_P)P^{-1} = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}.$$

Désormais, si M est une matrice diagonalisable à valeurs propres positives et $M = P\Delta P^{-1}$ est une diagonalisation de M, on définit $f(M)$ par

$$f(M) = P\,f(\Delta)\,P^{-1}.$$

Définition 4. *Une fonction f est dite matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $n \geq 1$ et tout couple (A, B), de matrices symétriques, l'implication suivante est satisfaite :*

$$0 \preceq A \preceq B \Longrightarrow f(A) \preceq f(B).$$

Soit E l'ensemble des fonctions φ continues sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que $(s \mapsto s\varphi(s))$ soit intégrable sur $[0, 1]$ et φ soit intégrable sur $[1, +\infty[$. On définit une fonction $L_\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$L_\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{st}{1+st}\,\varphi(s)\,ds.$$

17) Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_r(s) = s^{-r-1}$. Pour quelles valeurs de r a-t-on $\varphi_r \in E$? Exprimer alors, pour tout $t > 0$, $L_{\varphi_r}(t)$ en fonction de $L_{\varphi_r}(1)$.

18) Soit $s \geq 0$. On pose pour tout $t \geq 0$, $f_s(t) = 1 - \dfrac{1}{1+st}$. Exprimer $f_s(A)$ lorsque A est une matrice symétrique positive.

19) Montrer que f_s est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

20) Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n$ positive et toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, établir l'identité :

$$(L_\varphi(A)X \mid X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X \mid X)\ \mathrm{d}s.$$

21) Montrer que, pour toute $\varphi \in E$, l'application L_φ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

22) Soient A et B deux matrices symétriques telles que $0 \preceq A \preceq B$. Compte-tenu des questions précédentes, pour quelles valeurs du réel positif r, pouvez-vous montrer que $A^r \preceq B^r$?

FIN DU PROBLÈME

A 2006 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est de montrer la propriété suivante : soient deux familles de réels $(a_k, k = 1, \cdots, n)$ et $(b_k, k = 1, \cdots, n)$ satisfaisant

$$0 < a_1 \leq a_k \leq a_n \text{ et } 0 < b_1 \leq b_k \leq b_n \text{ pour tout } k \in \{1, \cdots, n\},$$

les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leq \frac{(a_n b_n + a_1 b_1)^2}{4 a_1 b_1 a_n b_n}. \tag{1}$$

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$, la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n, la matrice nulle.
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$, constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices A qui satisfont ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X \,|\, Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X,Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX \,|\, Y) = (X \,|\, {}^tAY).$$

Définition 1 *Une matrice A est dite positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \,|\, X) \geq 0$. Une matrice A est dite définie positive lorsque pour tout $X \neq 0$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \,|\, X) > 0$.*

I. Préliminaires

Dans cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$.

1) Montrer que A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.

2) Montrer que A est définie positive si et seulement si A est positive et inversible.

3) Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

4) Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\text{Ker } (A - \lambda \, \mathrm{I}_n) = \text{Ker } (C - \sqrt{\lambda} \, \mathrm{I}_n).$$

5) En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive telle que $C^2 = A$ et que dans toute base de vecteurs propres de A, C est diagonale.

On notera désormais $C = A^{1/2}$.

6) On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

7) Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.

8) Soit B une matrice symétrique positive qui commute avec A. Est-ce que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent ?

II. Inégalité de Kantorovitch

Dans cette partie, A est une matrice fixée de $\mathcal{S}_n$, définie positive. On range les valeurs propres de A, répétées suivant leur multiplicité, dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. On note m et M deux réels strictement positifs tels que $m \leq \lambda_1$ et $\lambda_n \leq M$.

9) Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, montrer l'inégalité suivante :

$$(X \,|\, X)^2 \;\leq\; (AX \,|\, X)(A^{-1}X \,|\, X). \tag{2}$$

10) Quelles sont les matrices pour lesquelles cette inégalité est une égalité pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$?

Soit F la fonction polynomiale qui à tout s de $\mathbb{R}$ associe

$$F(s) = s^2 - (m+M).s + mM.$$

11) Quelles sont, en fonction de celles de A, les valeurs propres de la matrice $F(A)$?

12) Montrer que toutes les valeurs propres de $F(A)$ sont de même signe. Préciser ce signe.

13) Soit N la matrice définie par

$$N = -\left(A - (m+M)\,\mathrm{I}_n + mM\,A^{-1}\right).$$

Montrer que N est symétrique positive.

Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on considère l'application polynomiale f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$f(s) = (AX \,|\, X).s^2 - (m+M)(X \,|\, X).s + (A^{-1}X \,|\, X)mM.$$

14) Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que $f(0)f(1) \leq 0$.

15) Établir que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(AX \mid X)(A^{-1}X \mid X) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(X \mid X)^2. \tag{3}$$

16) Soit $\mathcal{D} = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < m \leq \lambda_1 \leq \lambda_n \leq M\}$. Établir l'identité suivante :

$$\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}.$$

17) On suppose que A n'est pas une homothétie. On considère X_1 (respectivement X_n) un vecteur colonne propre, de norme 1, pour la valeur propre λ_1 (respectivement λ_n). On pose $X = X_1 + X_n$. Calculer

$$\frac{(AX \mid X)(A^{-1}X \mid X)}{(X \mid X)^2}.$$

18) Que peut-on en déduire sur l'inégalité (3) ?

III. Inégalité de Pólya-Szegö

On suppose dorénavant que A_1 et A_2 sont deux matrices symétriques, définies positives qui commutent. On note m_i (respectivement M_i), la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A_i, pour $i = 1, 2$. On pose $D = A_1 A_2^{-1}$.

19) Déterminer un réel α tel que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$(DX \mid X)(D^{-1}X \mid X) \leq \alpha(X \mid X)^2.$$

20) Exprimer $(D(A_1A_2)^{1/2}X \,|\, (A_1A_2)^{1/2}X)$ en fonction de A_1X, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

21) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(A_1X \,|\, A_1X)(A_2X \,|\, A_2X) \leq \alpha\,(A_1X \,|\, A_2X)^2.$$

22) Établir la relation (1).

FIN DU PROBLÈME

A 2007 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Séries et caractères

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté $\bar{a}$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \cdots, N-1\}$ qui sont premiers avec N. L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P. Si a divise b dans $\mathbb{Z}$, on notera $a \,|\, b$.

On rappelle aussi le lemme suivant : soit $(u_k, k \in \mathbb{N}^*)$ et $(\alpha_k, k \in \mathbb{N}^*)$ deux suites réelles. Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k,$$

alors

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k-1}) + u_m T_m, \tag{1}$$

pour n, m entiers tels que $2 \leq n < m$. On rappelle que pour tout $x \in]-1, 1]$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{2}$$

On suppose fixée une application χ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

A. $\chi(0) = 0$ et χ non identiquement nul.

B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N,

$$\chi(a) = 0.$$

C. Pour tous les entiers relatifs a et b,

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b).$$

D. χ est N-périodique :

$$\chi(a + N) = \chi(a), \text{ pour tout } a \in \mathbb{Z}.$$

I Cas particuliers

1. Calculer $\chi(1)$.

2. Lorsque $N = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

3. Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.

4. On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} .$$

II Convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N. Pour $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, on désigne par r_k le reste de la division de ak par N.

5. En considérant le produit $\prod_{k \in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N.

6. Montrer que $|\chi(a)| = 1$.

7. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.

8. Établir l'identité:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

9. Pour chaque entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
   On pourra commencer par le cas $n = 0$.

10. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \varphi(N).$$

11. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}, n \geq 1\right)$ est convergente.

III Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n = \sum_{d \,|\, n} \chi(d).$$

12. Soit n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.

13. Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α}.

14. Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n.$$

15. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $f_{n^2} \geq 1$.

16. Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n.$$

On note $f(x)$ la somme de cette série.

17. Montrer pour tout $x \in [1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u.$$

On pourra utiliser une comparaison d'une série à une intégrale.

FIN DU PROBLÈME

A 2007 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \cdots, n)$ et pour $k = 0, \cdots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \cdots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

De sorte que si i_V représente l'injection de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout $y \in V$.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice colonne nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

- 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

- 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \text{ pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

❑ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j}(M) \, X_j \tag{1}$$

$$[M, A]X_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j+1}(M) \, X_j. \tag{2}$$

❑ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$.

❑ 5 - Montrer que $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

❑ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.

❑ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$?

❑ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

❑ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \cdots, p-1\}. \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 10 - Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

- 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

  On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, $\ldots$, et $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

- 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

- 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \cdots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \cdots, \overline{M}_r$.

- 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

- 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H\, u = p_H\, u\, p_H \text{ et } p_H\, v = p_H\, v\, p_H.$$

- 16 - Montrer que $p_H\, u\, p_H$ et $p_H\, v\, p_H$ commutent puis que $p_H\, u_H$ et $p_H\, v_H$ commutent.

❑ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❑ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}, M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

❑ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

❑ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

❑ 21 - Que peut-on en déduire?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

Fin du problème

A 2007 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pseudo-inverse et matrice stochastique

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on appelle endomorphisme canoniquement associé à M, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, noté m, dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $M(i,j)$ représente le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, on considère la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{r} |M(i,j)|.$$

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est positive (respectivement strictement positive), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs).*

Une matrice positive $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque $MJ_m = J_n$.

On désigne par $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes stochastiques.

On admet le théorème suivant :

Théorème 1 (CCMP 2006, filière MP) *Soit P une matrice stochastique strictement positive de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Le réel 1 est valeur propre simple de P et il existe un unique élément de $\mathcal{K}_n$, noté X_∞, tel que*

$$X_\infty = X_\infty P.$$

De plus, quel que soit $X \in \mathcal{K}_n$,

$$X_\infty = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} X P^j.$$

L'objectif de ce problème est de trouver une méthode de calcul de X_∞ en utilisant la notion de pseudo-inverse.

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, une matrice $A' \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$AA' = A'A \tag{1}$$

$$A = AA'A \tag{2}$$

$$A' = A'AA'. \tag{3}$$

Dorénavant, P est une matrice stochastique, strictement positive, de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

I Préliminaires

- 1 - Montrer que $\|MN\| \leq \|M\| \, \|N\|$ pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n,\,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{r,\,m}(\mathbb{K})$.

- 2 - Montrer que $\|P\| = 1$.

- 3 - Montrer que pour tout $k \geq 1$, P^k est une matrice stochastique.

II Pseudo-inverse

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,\,n}(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

- 4 - Montrer que l'existence d'un pseudo-inverse implique que

$$\operatorname{rang}(a) = \operatorname{rang}(a^2).$$

Inversement, on suppose maintenant que $\operatorname{rang}(a) = \operatorname{rang}(a^2)$. On note r cet entier.

- 5 - Montrer que le noyau et l'image de a sont en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(a) \oplus \operatorname{Ker}(a).$$

- 6 - Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, B inversible et $W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, W inversible, telles que

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

- 7 - Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'.

❑ 8 - Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ telle que

$$A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

❑ 9 - Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a et préciser ce que vaut $W^{-1}(AA')W$.

❑ 10 - Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

III Calcul de X_∞

À tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, on associe l'endomorphisme u_c de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$u_c(x+iy) = u(x) + iu(y),$$

pour tout x, y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Dans les questions suivantes, on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A = \mathrm{I}_n - P$.

❑ 11 - Montrer que $a_c \circ a_c = (a^2)_c$.

❑ 12 - Montrer que

$$a_c(\mathbb{C}^n) = a_c^2(\mathbb{C}^n).$$

❑ 13 - Montrer que $\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2) = n - 1$.

On note A', le pseudo-inverse de A dont l'existence et l'unicité sont garanties par ce qui précède.

❑ 14 - Soit $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible. Établir, pour tout entier non nul k, l'identité

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\mathrm{I}_n - C)^j = (\mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n - C)^k)C^{-1}.$$

❑ 15 - Établir, pour tout entier non nul k, l'identité suivante :

$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (\mathrm{I}_n - P^k)A' + k(\mathrm{I}_n - AA').$$

❑ 16 - Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

existe et donner sa valeur.

❑ 17 - Montrer que $(\mathrm{I}_n - AA')$ est stochastique et que $(\mathrm{I}_n - AA')A = 0$.

❑ 18 - Montrer que $\mathrm{I}_n - AA' = J_n X_\infty$.

FIN DU PROBLÈME

A 2007 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration de polynômes trigonométriques

Soit p un réel strictement supérieur à 1 et $q = p/(p-1)$. On admet que si u et v sont deux fonctions continues, à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $[c, d] \subset \mathbf{R}$, alors

$$\left| \int_c^d u(x)v(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_c^d |u(x)|^p\ \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_c^d |v(x)|^q\ \mathrm{d}x \right)^{1/q}. \qquad (1)$$

Soit n un entier non nul, $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}^n$ où pour tout k, r_k est un réel positif et $r \neq 0$. On introduit sur $\mathbf{R}^n$, les deux normes suivantes :

$$\|r\| = (r_1^2 + \ldots + r_n^2)^{1/2} \text{ et } \|r\|_1 = \sum_{j=1}^n |r_j|.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose

$$P_r(x, \alpha) = \sum_{k=1}^n r_k \cos(kx - \alpha_k).$$

Si s est un réel positif, on note

$$I_s(\alpha) = \int_0^{2\pi} |P_r(x, \alpha)|^{2s}\ \mathrm{d}x.$$

Dans la suite, t désigne un réel supérieur ou égal à 1.

L'objectif de ce problème est de montrer que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} |P_r(x, \alpha)|$$

est fini et d'obtenir un majorant fonction de r.

I Préliminaires

❏ 1 - Soit $\varphi(\lambda) = \lambda^{2t}(1-\lambda)^2$ pour $\lambda \in [0,1]$. Calculer $\max_{\lambda\in[0,1]} \varphi(\lambda)$.

❏ 2 - Soit ψ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\psi(x) = |x|^{2t}$. Montrer que ψ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et calculer ψ' et ψ''.

❏ 3 - Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. Prouver que $l = |h|^{2t}$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et calculer l' et l''.

II Propriétés de I_t

Pour $\alpha \in \mathbf{R}^n$, on introduit la fonction L_α définie par

$$\begin{aligned} L_\alpha \,:\, [-1,1]\times\mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\varepsilon,\beta) &\longmapsto I_t(\alpha+\varepsilon\beta). \end{aligned}$$

❏ 4 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$, la fonction $(\varepsilon \mapsto L_\alpha(\varepsilon,\beta))$ est dérivable et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.

❏ 5 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$, la fonction $(\varepsilon \mapsto L_\alpha(\varepsilon,\beta))$ est deux fois dérivable et exprimer sa dérivée seconde sous forme d'intégrale.

❏ 6 - Établir que

$$I_t(\alpha+\beta) - I_t(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial L_\alpha}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\beta)\ \mathrm{d}\varepsilon,$$

puis montrer que I_t est continue sur $\mathbf{R}^n$.

❏ 7 - En utilisant les propriétés de L_α, montrer que les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial\alpha_k^2} \text{ pour } k = 1,\cdots,n,$$

existent et les exprimer sous forme d'intégrales.

❏ 8 - Montrer que I_t est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^n$, qui atteint son minimum.

On note $\tilde{\alpha}$ l'un des points où le minimum est atteint.

❑ 9 - Montrer que pour tout $\beta \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{\partial^2 L_{\tilde{\alpha}}}{\partial \varepsilon^2}(0,\beta) \geq 0 \text{ puis que } \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2}(\tilde{\alpha}) \geq 0.$$

❑ 10 - Établir alors l'inégalité suivante :

$$I_t(\tilde{\alpha}) \leq (2t-1)\,\|r\|^2\, I_{t-1}(\tilde{\alpha}). \tag{2}$$

❑ 11 - Établir la majoration suivante :

$$I_t(\tilde{\alpha}) \leq 2\pi\Big((2t-1)\|r\|^2\Big)^t.$$

III Propriétés de P_r

Dans cette partie, α est un élément quelconque de $\mathbf{R}^n$ fixé.

❑ 12 - Établir les deux identités

$$\int_0^{2\pi} P_r(x,\alpha)\ \mathrm{d}x = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} |P_r(x,\alpha)|^2\ \mathrm{d}x = \pi\|r\|^2.$$

❑ 13 - Montrer que la borne supérieure $S = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_r(x,\alpha)|$ est finie et qu'il existe $x_\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$$|P_r(x_\alpha,\alpha)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_r(x,\alpha)|.$$

❑ 14 - Montrer que $\|r\|^2 \leq 2S^2$.

❑ 15 - Montrer que la fonction $x \mapsto P_r(x,\alpha)$ est non identiquement nulle et n'est pas de signe constant.

❑ 16 - Soit $\lambda \in]0,1[$. Soit $V_\lambda^+ = \{\xi \in [x_\alpha, x_\alpha + 2\pi],\ |P_r(\xi,\alpha)| = \lambda S\}$. Montrer que V_λ^+ est un ensemble compact non vide.

Soit $b = \min\{\xi, \xi \in V_\lambda^+\}$.

❑ 17 - Montrer qu'il existe a tel que :

$$a < x_\alpha < b \text{ et } b - a < 2\pi,$$

$$|P_r(a,\alpha)| = |P_r(b,\alpha)| = \lambda S,$$

$$|P_r(x,\alpha)| > \lambda S \text{ pour tout } x \in]a,b[.$$

❑ 18 - Établir les relations

$$2(1-\lambda)S = \left| \int_a^b \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha)\ \mathrm{d}x \right|$$

et

$$\Big(2(1-\lambda)S\Big)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha) \right|^2\ \mathrm{d}x.$$

❑ 19 - Établir l'inégalité suivante :

$$\int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x,\alpha) \right|^2\ \mathrm{d}x \leq \pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2.$$

IV Majoration

❑ 20 - Établir les inégalités suivantes :

$$\frac{2}{\pi} \frac{\|r\|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 r_k^2} (1-\lambda)^2 \leq (b-a) \leq I_t(\tilde{\alpha})(\lambda S)^{-2t}.$$

❑ 21 - Montrer qu'il existe une constante A, indépendante de n, r, t et $\tilde{\alpha}$, telle que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$S^2 \leq At \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2 \right)^{1/t} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k^2 \right)^{1-1/t}.$$

Fin du problème

A 2007 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude d'une série trigonométrique

On rappelle que pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, pour tout réel t,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}. \tag{1}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Dans tout le problème, u représente un réel de $]-1, 1[$.

I Deux représentations de S_α

- 1 - Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

- 2 - Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction

$$J : t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}.$$

Soit $t \geq 0$. On pose,

$$R_N(t,u) = \Big(\frac{u}{e^t - u} - ue^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (ue^{-t})^n\Big) t^{\alpha-1}.$$

- 3 - Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.

- 4 - Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u) \, \mathrm{d}t = 0.$$

❑ 5 - Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^t - u}\, \mathrm{d}t = K(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}, \text{ pour tout } u \in]-1,1[. \qquad (2)$$

❑ 6 - On admet que l'identité (2) reste vraie aussi pour $u = e^{ix}$ où $x \in]0,2\pi[$. En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\ t - \cos x}\, \mathrm{d}t.$$

❑ 7 - Montrer, pour tout $M > 0$, pour tout $u \in]-1,1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t - u}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

❑ 8 - Établir, pour tout $u \in]-1,1[$, l'identité

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

❑ 9 - Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $S_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$G_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ pour } u \in]-1,1[$$

avec

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t. \qquad (3)$$

II Comportement asymptotique

Soit $B :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^{+\infty} |B(s)|\, \mathrm{d}s < +\infty. \qquad (4)$$

$$B(s) = a s^{\lambda-1}(1 + o(1)),\ s \to 0^+,\ a > 0,\ \lambda \in]0, +\infty[. \qquad (5)$$

❑ 10 - Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\Big| \int_0^{\delta} (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) \, \mathrm{d}s \Big| < \varepsilon \, \frac{a}{n^{\lambda}} \, \Gamma(\lambda).$$

❑ 11 - Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$

$$\Big| \int_{\delta}^{+\infty} (B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns}) \, \mathrm{d}s \Big| \leq Ce^{-(n-1)\delta}.$$

❑ 12 - Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty} B(s)e^{-ns} \, \mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}(1 + o(1)), \text{ quand } n \to +\infty.$$

❑ 13 - Montrer que pour tout entier n, on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \, e^{-ns} \, \mathrm{d}s,$$

où a_n est défini dans (3).

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$B(s) = \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}}.$$

❑ 14 - Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+.

❑ 15 - Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.

Fin du problème

A 2008 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Inégalité d'Alexandrov

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $I_n = \{1, \cdots, n\}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ de coefficients m_{ij}, on notera m_j le j-ème vecteur colonne de M, celui dont les composantes sont $(m_{ij},\ i = 1, \cdots, n)$. On écrira ainsi

$$M = (m_1, \cdots, m_n).$$

On remarquera que m_{ij} est indifféremment le coefficient en ligne i et colonne j de M ainsi que la i-ième composante de m_j. On identifiera une matrice colonne m et le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ sont les coefficients de m. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$ et $x.y$ représente le produit scalaire euclidien de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On note S la sphère unité de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire

$$S = \{x \,/\, \|x\| = 1\}.$$

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, pour i et j éléments de $\{1, \cdots, n\}$, on note $M(i|j)$ la matrice obtenue en supprimant de M la i-ème ligne et la j-ième colonne. Pour un vecteur colonne m, $m(j)$ représente le vecteur colonne m duquel on a ôté la j-ième composante.

Soit Q une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. On note B_Q la forme bilinéaire associée : pour tout x et y de $\mathbf{R}^n$,

$$B_Q(x,\, y) = Qx.y,$$

et on note Φ_Q la forme quadratique associée : $\Phi_Q(x) = B_Q(x,\, x)$.

Définition 1. *Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, on dira que Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative) sur V lorsque*

$$\Phi_Q(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } V \cap S$$

(respectivement $\Phi_Q(x) \geqslant 0$, respectivement $\Phi_Q(x) < 0$). On notera $\mathcal{V}^+$ (respectivement $\mathcal{V}_0^+$, respectivement $\mathcal{V}^-$) l'ensemble des sous-espaces vectoriels sur lesquels Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative). On pose

$$r(\Phi_Q) = \max_{V \in \mathcal{V}^+}(\dim V) \text{ et } s(\Phi_Q) = \max_{V \in \mathcal{V}^-}(\dim V),$$

avec la convention que $\max_{V \in \emptyset} \dim V = 0$.

I Permanents

Définition 2. *Pour $M = (m_1, \dots, m_n) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, on définit son permanent, noté* per*, par*

$$\begin{aligned} \mathrm{per} \,:\, \Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\Big)^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (m_1, \dots, m_n) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

On tiendra pour acquis que la forme per est multilinéaire et symétrique, c'est-à-dire invariante par permutation des vecteurs.

1. Établir pour tous $m_1, m_2, \cdots, m_n$ éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, l'inégalité

$$|\operatorname{per}(m_1, \cdots, m_n)| \leqslant n! \prod_{j=1}^{n} \|m_j\|.$$

2. Pour $(m_1, \cdots, m_n)$ et $(r_1, r_2 \cdots, r_n)$ éléments de $\Big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\Big)^n$, établir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &|\operatorname{per}(m_1, \cdots, m_n) - \operatorname{per}(r_1, \cdots, r_n)| \\ &\qquad \leqslant n! \sum_{j=1}^{n} \|m_1\| \dots \|m_{j-1}\| \, \|m_j - r_j\| \, \|r_{j+1}\| \dots \|r_n\|, \end{aligned}$$

   où l'on convient que

$$\|m_1\| \dots \|m_{j-1}\| = 1 \text{ pour } j = 1 \text{ et } \|r_{j+1}\| \dots \|r_n\| = 1 \text{ pour } j = n.$$

3. Montrer la propriété suivante : pour tout $j \in I_n$,

$$\operatorname{per} M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \operatorname{per}\Big(M(i|j)\Big). \tag{1}$$

II Formes quadratiques

Dans toute cette partie, Q est une matrice symétrique réelle inversible. On note $\operatorname{sp}(Q) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ la suite de ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité, $n^+(Q)$ le nombre de termes strictement positifs dans $\operatorname{sp}(Q)$ et $n^-(Q)$ le nombre de termes strictement négatifs dans $\operatorname{sp}(Q)$.

4. Soit $H \in \mathcal{V}_0^+$ et $G \in \mathcal{V}^-$, montrer que H et G sont en somme directe et que $r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leqslant n$.

5. Montrer que $r(\Phi_Q) \geqslant n^+(Q)$.

   On a alors de même $s(\Phi_Q) \geqslant n^-(Q)$.

6. Montrer que $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et que $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

Soit R une autre matrice symétrique réelle inversible de taille n telle qu'il existe une constante κ satisfaisant la propriété suivante : pour tout x et y de $\mathbf{R}^n$,

$$|B_Q(x,y) - B_R(x,y)| \leqslant \kappa \|x\| \, \|y\|.$$

7. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $r(\Phi_Q) = r(\Phi_R)$ si $\kappa \leqslant \delta$.

III Espaces de Lorentz

Définition 3. *Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, une matrice symétrique et Φ_Q la forme quadratique associée. On dit que $(\mathbf{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) *Q est inversible,*

ii) *$r(\Phi_Q) = 1$ et $s(\Phi_Q) = n - 1$.*

On suppose dans cette partie que $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est telle que $(\mathbf{R}^n, Q)$ soit un espace de Lorentz. Soit a un vecteur tel que $\Phi_Q(a) > 0$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Soit l'application φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi \, : \, \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \rho &\longmapsto \Phi_Q(b + \rho a). \end{aligned}$$

8. On suppose, dans cette question, que a et b sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe au moins une valeur de λ telle que

$$\varphi(\lambda) < 0.$$

9. Établir la propriété :

$$B_Q(a,\, b)^2 \geqslant \Phi_Q(a)\Phi_Q(b), \tag{2}$$

   avec égalité si et seulement si a et b sont colinéaires.

   On pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

IV Inégalité d'Alexandrov

On veut maintenant établir le théorème suivant. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Théorème 1. *Soit n un entier supérieur à 2. Soit $m_1, \cdots, m_n$ des éléments de $\mathbf{R}^n$ à composantes strictement positives. Soit Q la matrice symétrique dont les coefficients sont définis par*

$$q_{ij} = \mathrm{per}(m_1, m_2, \cdots, m_{n-2}, e_i, e_j),\ i \in I_n,\ j \in I_n$$

Soit B_Q et Φ_Q les formes bilinéaires et quadratiques associées à Q respectivement. L'espace $(\mathbf{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz.

10. Calculer $r(\Phi_Q)$ et $s(\Phi_Q)$ pour $n = 2$, c'est-à-dire pour

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose le théorème 1 établi pour tout $k \leqslant n-1$.

11. Établir pour tout j de I_n l'inégalité :

$$\Big(\mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-3}, m_{n-2}, c, e_j)\Big)^2 \geqslant \mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-3}, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) \times \mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-3}, c, c, e_j), \quad (3)$$

avec égalité si et seulement si $c(j)$ et $m_{n-2}(j)$ sont colinéaires.

Dans les questions 12 et 13, c est un élément de $\mathbf{R}^n$ tel que $Qc = 0$.

12. Établir l'identité :

$$0 = Qc.c = \sum_{j=1}^{n} m_{j,n-2}\,\mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-3}, c, c, e_j)$$

13. Montrer que pour tout $j \in I_n$,

$$\mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-2}, c, e_j) = 0 \text{ et } \mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) > 0.$$

14. En déduire $Qc = 0$ si et seulement si $c = 0$.

Soit $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$, pour tout θ appartenant à $[0, 1]$, on pose

$$B_\theta(x, y) = \mathrm{per}(\theta m_1 + (1-\theta)e, \cdots, \theta m_{n-2} + (1-\theta)e, x, y).$$

On note Q_θ et Φ_θ la matrice symétrique et la forme quadratique associées à la forme bilinéaire symétrique B_θ.

15. Expliciter Q_0. Montrer que ses valeurs propres sont $(n-1)!$ et $-(n-2)!$ et que

$$r(\Phi_{Q_0}) = 1 \text{ ainsi que } s(\Phi_{Q_0}) = n - 1.$$

16. Soit θ et θ' deux éléments distincts de $[0, 1]$. Montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbf{R}^n$,

$$|B_\theta(x, y) - B_{\theta'}(x, y)| \leqslant n\, n!|\theta - \theta'|\, \|x\|\|y\| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_j\| + \sqrt{n}).$$

17. Établir que $r(\Phi_{Q_1}) = 1$ et $s(\Phi_{Q_1}) = n - 1$.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\tau = \sup_{\theta\in[0,1]}\{\theta \,/\, r(\Phi_{Q_\theta}) = 1\}$.

18. Établir l'inégalité d'Alexandrov qui stipule que pour $m_1, \cdots, m_{n-1}$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$ à coordonnées strictement positives et b vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$,

$$\Big(\mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-1}, b)\Big)^2 \geqslant \mathrm{per}(m_1, \cdots, m_{n-1}, m_{n-1})\, \mathrm{per}(m_1, \cdots, b, b).$$

Fin du problème

A 2008 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations de géométrie

Dans tout le problème, on se place dans le plan affine $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\, e_1,\, e_2)$ et de la norme euclidienne, notée $\|\ \|$. On notera $(x_1,\, x_2)$ les coordonnées dans ce repère d'un élément $x \in \mathcal{P}$. L'application $x \in \mathcal{P} \mapsto (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2$ permettra d'identifier le plan affine $\mathcal{P}$ et l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$. On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathring{B}(x,\, r) &= \{y \in \mathcal{P},\ \|x - y\| < r\}\\ B(x,\, r) &= \{y \in \mathcal{P},\ \|x - y\| \leqslant r\}\\ S(x,\, r) &= \{y \in \mathcal{P},\ \|x - y\| = r\}.\end{aligned}$$

Soit $\theta \in [0,\, 2\pi[$, on note

$$u_\theta = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \text{ et } v_\theta = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2.$$

Pour tout $\varphi \in [0,\, 2\pi[$, on note Rot_φ la rotation de centre 0 et d'angle φ. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}_\theta\, e_1 &= u_\theta\\ x + R\, u_\theta &= (x_1 + R\cos\theta,\, x_2 + R\sin\theta).\end{aligned}$$

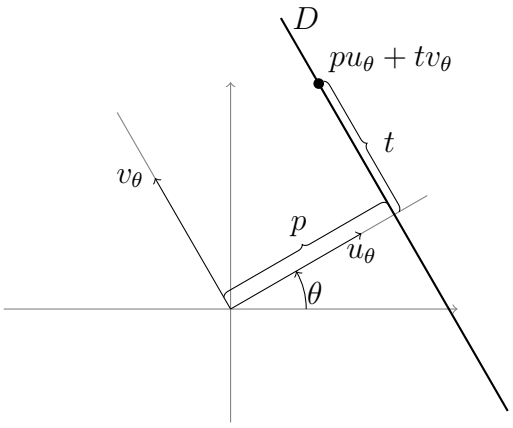


Fig. 1 – Notations

À toute droite affine D ne passant pas par l'origine, on associe un unique couple $(p,\, \theta)$ où $p \in \mathbf{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ sont tels que

$$D = \{pu_\theta + tv_\theta,\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Si D passe par l'origine, on lui associera l'unique couple $(0,\, \theta)$ qui convienne avec $\theta \in [0,\, \pi[$. On appelle p et θ les paramètres de la droite D.

Notations d'analyse

Pour $X = \mathbf{R}$ ou $X = \mathbf{R}^2$ et f fonction de X dans $\mathbf{R}$, on appelle support de f, noté supp f, l'adhérence de l'ensemble des points où f est non nulle. Pour $X = \mathbf{R}$ ou $X = \mathbf{R}^2$, on note $\mathscr{C}^1_K(X;\, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions f de X dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur X, à support compact : il existe $M > 0$, dépendant de f, avec $f(x) = 0$ si $\|x\| > M$, où $\|x\| = |x|$ si $X = \mathbf{R}$. En d'autres termes, supp $f \subset B(O,\, M)$ si $X = \mathbf{R}^2$ et supp $f \subset [-M,\, M]$ si $X = \mathbf{R}$. On notera que de telles fonctions sont bornées et on posera

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Pour les fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, si $x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2$, on utilisera, selon le contexte, la notation $f(x)$ ou la notation $f(x_1,\, x_2)$ pour représenter l'image de x par f.

Pour $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R};\, \mathbf{R})$, il existe M tel que supp $f \subset [-M,\, M]$ et alors

$$\int_{-M}^{M} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-J}^{J} f(x)\ \mathrm{d}x,\ \text{dès que } J \geqslant M.$$

On note $\int_{\mathbf{R}} f(x)\ \mathrm{d}x$ la valeur commune de toutes les intégrales sur un intervalle contenant le support de f.

Le même principe vaut pour la dimension 2 : pour $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\, \mathbf{R})$, on remarque que

$$\iint_{B(O,\, M)} f(x_1,\, x_2)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2 = \iint_J f(x_1,\, x_2)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2,$$

pour tout compact J qui contient $B(O,\, M)$ où M est tel que supp $f \subset B(O,\, M)$. On note

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x_1, x_2)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2 \text{ cette valeur commune.}$$

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est radiale lorsque pour tout $\varphi \in [0,\, 2\pi[$, $f \circ \mathrm{Rot}_\varphi = f$.*

Pour $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, continue, nulle en dehors d'un intervalle $[0,\, M]$, on pose

$$Lh(x) = \int_x^{+\infty} \frac{h(v)}{\sqrt{v - x}}\ \mathrm{d}v.$$

On admet que Lh est continue, nulle en dehors de $[0,\, M]$ et que $L(Lh)$ est dérivable avec

$$(L(Lh))' = -\pi h. \tag{1}$$

I Un peu de géométrie

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R})$. Montrer que si f est radiale, il existe $F \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^+;\ \mathbf{R})$ telle que
$$f(x) = F(\|x\|),\ \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^2.$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\ \mathbf{R})$; pour $x \in \mathbf{R}^2$, on considère la fonction
$$\begin{aligned} T_{f,x}\ :\ \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (y,\ \varphi) &\longmapsto f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(y)). \end{aligned}$$
Montrer que la fonction $T_{f,\,x}(y,\ \varphi)$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ et que pour tout $y \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\varphi \mapsto T_{f,\,x}(y,\ \varphi)$ est 2π-périodique.

3. Montrer que la fonction
$$\mathcal{T}_{f,x}\ :\ y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{f,\,x}(y,\ \varphi)\ \mathrm{d}\varphi$$
est radiale.

4. Soit $x \in \mathbf{R}^2$, que l'on écrit $x = \|x\|u_\psi$ où ψ appartient à $[0,\ 2\pi[$. Soit $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que l'ensemble
$$D_{x,\varphi} = \{x + \mathrm{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta),\ t \in \mathbf{R}\}$$
est une droite dont on précisera les paramètres en fonction de $\|x\|,\ \psi, \varphi,\ p$ et θ. *On pourra commencer par étudier $D_{O,\varphi}$.*

II Lemme préparatoire

Soit $A > 0$, on note Q_A l'ensemble
$$Q_A = \{(x, R) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+,\ R > \|x\| + A\}.$$

L'objectif de cette partie est de montrer le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit $f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\ \mathbf{R})$ telle que pour tout $(x,\ R) \in Q_A$,*
$$\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta,\ x_2 + R\sin\theta)\ d\theta = 0, \tag{2}$$
alors f est nulle sur le complémentaire de $B(O,\ A)$.

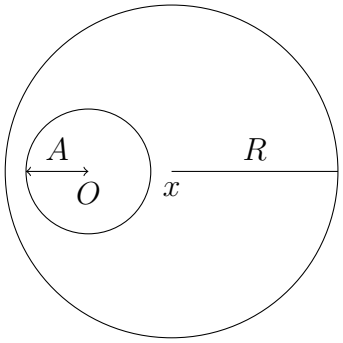


FIG. 2 – $(x,\, R) \in Q_A$

5. Soit $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\, \mathbf{R})$. Soit $(x,\, R) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$. Montrer que les applications

$$V_i \,:\, x_i \longmapsto \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta,\, x_2 + r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r,\ \ i = 1, 2$$
$$W_i \,:\, x_i \longmapsto \int_0^{2\pi}\int_0^R f(x_1 + r\cos\theta,\, x_2 + r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta,\ \ i = 1, 2$$

sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et calculer leur dérivée.

6. Soient P et Q deux éléments de $\mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\, \mathbf{R})$ et soit $(x,\, R) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer l'identité :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x + r\,u_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x + r\,u_\theta)\right)\ r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} P(x + Ru_\theta)(-R\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} Q(x + Ru_\theta)R\cos\theta\ \mathrm{d}\theta.$$

Dans les questions 7 à 13, on suppose que f vérifie les hypothèses du lemme.

7. Établir, pour tout $(x,\, R) \in Q_A$, les deux identités suivantes :

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(y_1,\, y_2)\ \mathrm{d}y_1\ \mathrm{d}y_2 = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x_1 + z_1,\, x_2 + z_2)\ \mathrm{d}z_1\ \mathrm{d}z_2$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R f(x_1 + r\cos\theta,\, x_2 + r\sin\theta)\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta.$$

8. Soit $R > A$. Montrer que W_1 et W_2 sont constantes sur $\overset{\circ}{B}(O,\, R - A)$ et établir, pour tout $x \in \overset{\circ}{B}(O,\, R - A)$, les relations :

$$\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta,\, x_2 + R\sin\theta)\cos\theta\ \mathrm{d}\theta = 0 \tag{3}$$

et

$$\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta,\, x_2 + R\sin\theta)\sin\theta \;\mathrm{d}\theta = 0. \tag{4}$$

Pour $i = 1, 2$, on introduit les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} y_i f \;:\; \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y = (y_1,\, y_2) &\longmapsto y_i f(y). \end{aligned}$$

Plus généralement, pour une fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on note $g(y_i)f$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} g(y_i) f \;:\; \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y = (y_1,\, y_2) &\longmapsto g(y_i) f(y). \end{aligned}$$

9. Montrer que $y_1 f$ et $y_2 f$ satisfont les hypothèses du lemme.

10. Soit $(x,\, R) \in Q_A$. Montrer, pour tous les entiers k et l, l'identité suivante :

$$\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos^k\theta \sin^l\theta \;\mathrm{d}\theta = 0. \tag{5}$$

On pourra raisonner par récurrence sur $n = k + l$.

11. Soit $(x,\, R) \in Q_A$. En déduire, pour tout entier n, les identités :

$$\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos(n\theta) \;\mathrm{d}\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\sin(n\theta) \;\mathrm{d}\theta = 0.$$

12. Établir, pour tout $(x,\, R) \in Q_A$, que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x_1 + R\cos\theta,\, x_2 + R\sin\theta) \;\mathrm{d}\theta = 0.$$

13. Prouver le lemme.

III Théorème de support

Définition 2. *Pour $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\, \mathbf{R})$, on pose*

$$\widehat{f}(\theta,\, p) = \int_{\mathbf{R}} f(pu_\theta + tv_\theta)\ dt \ \textit{pour}\ \theta \in [0,\, 2\pi[,\ p \geqslant 0.$$

On veut montrer le théorème de support suivant :

Théorème 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^2;\, \mathbf{R})$. Si il existe $A > 0$ tel que $\widehat{f}(\theta,\, p) = 0$ pour $p > A$ quel que soit θ alors $f(x) = 0$ pour $\|x\| > A$.*

Soit f une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème. On suppose dans les questions 14 à 16 que f est radiale. Soit $F \in \mathscr{C}^1_K(\mathbf{R}^+;\, \mathbf{R})$ telle que $f(x) = F(\|x\|)$.

14. Montrer, pour tout $\theta \in [0,\, 2\pi[$ et pour tout $p \geqslant 0$, les identités suivantes :

$$\widehat{f}(\theta,\, p) = \widehat{f}(0,\, p) = 2\int_0^{+\infty} F(\sqrt{p^2 + t^2})\ \mathrm{d}t.$$

15. Établir, pour tout $v > 0$, l'identité

$$\widehat{f}(0,\, \sqrt{v}) = \int_v^{+\infty} F(\sqrt{u})(u - v)^{-1/2}\ \mathrm{d}u.$$

16. En déduire que F est nulle sur $]A, +\infty[$.

On ne suppose plus que f est radiale. Soit x un élément quelconque de $\mathbf{R}^2$.

17. Établir, pour tout $(\theta,\, p)$, l'identité

$$\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta,\, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\, \varphi)\ \mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}\varphi.$$

18. Montrer pour tout $\theta \in [0,\, 2\pi[$, la propriété :

$$\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta,\, p) = 0 \text{ pour } p > A + \|x\|.$$

19. Quel est géométriquement, l'ensemble $\{x + \mathrm{Rot}_\varphi\, y,\, \varphi \in [0,\, 2\pi]\}$? Que signifie géométriquement la condition $\|y\| > A + \|x\|$?

20. Prouver le théorème.

Fin du problème

A 2008 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La partie III est indépendante des deux premières.

I Préliminaires

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ un ensemble de $n+1$ complexes distincts et pour i entier compris entre 0 et n, on définit le polynôme L_i par :

$$L_i(X) = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1. Montrer que les polynômes L_i forment une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

2. Écrire la matrice M du système $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ dans la base $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$.

II Fonctions polynomiales

Dans cette partie, on note k un entier naturel fixé et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k. Pour $a \in \mathbf{C}^*$, on définit

$$\begin{aligned} t_a \,:\, E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto (X \mapsto P(X+a)). \end{aligned}$$

Pour $P \in E$, on note $d(P)$ le polynôme dérivé :

$$\begin{aligned} d \,:\, E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P'. \end{aligned}$$

Pour $k \geqslant 2$, on pose $d^k = d^{k-1} \circ d = d \circ d^{k-1}$. On tiendra pour acquis que t_a et d sont des endomorphismes de E. On désignera par $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \cdots, e_k\}$ la base de E définie par $\{1, X, X^2, \cdots, X^k\}$.

3. Écrire les matrices, notées respectivement T_a et D, des endomorphismes t_a et d dans la base $\mathcal{B}$.

4. En déduire les éléments propres de ces endomorphismes. On donnera les valeurs propres, les espaces propres correspondants ainsi que leurs dimensions.

5. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E stables par d ? Donner leur nombre. *Indication : on pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F, sous-espace stable.*

6. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$ un polynôme fixé de degré k ($p_k \neq 0$). Montrer que le système
$$\left\{P, \frac{d(P)}{1!}, \frac{d^2(P)}{2!}, \cdots, \frac{d^k(P)}{k!}\right\}$$
constitue une base $\mathcal{B}_1$ de E. Donner la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_1$.

7. Pour $a \in \mathbf{C}^*$, exprimer les coordonnées du système
$$S = \{P(X), P(X+a), P(X+2a), \cdots, P(X+ka)\}$$
dans la base $\mathcal{B}_1$. On note U la matrice ainsi obtenue. En déduire que S constitue une base de E qu'on notera $\mathcal{B}_2$.

8. On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_2$. Exprimer Q en fonction de R et U.

9. Pour a fixé dans $\mathbf{C}^*$, caractériser les sous-espaces vectoriels de E stables par t_a.

III Fonctions continues, 2π-périodiques

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques. Pour $f \in E$, on désignera par $c_n(f)$ la suite (indexée sur $\mathbf{Z}$) des coefficients de Fourier de f : pour tout entier relatif n,
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$
Pour tout entier relatif k, on notera e_k la fonction
$$e_k \,:\, x \longmapsto \exp(ikx).$$
Pour $a \in \mathbf{R}$ et $f \in E$, on note $t_a(f)$ la fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$ définie
$$t_a(f) \,:\, x \longmapsto f(x+a).$$
Cela nous permet de définir l'endomorphisme t_a de E :
$$\begin{aligned} t_a \,:\, E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto t_a(f). \end{aligned}$$

Pour tout réel a, on définit la fonction ϕ_a par

$$\begin{aligned}\phi_a \,:\, \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{C}\\ n &\longmapsto \exp(ina).\end{aligned}$$

10. Préciser les réels a pour lesquels la fonction ϕ_a est injective. Dans le cas contraire, montrer que ϕ_a est périodique.

11. Pour $f \in E$, donner les valeurs de la suite $c_n(t_a(f))$ en fonction des valeurs prises par la suite $c_n(f)$.

12. Donner les valeurs propres de t_a. Caractériser les valeurs de a pour lesquelles les espaces propres de t_a sont tous de dimension 1.

13. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$ et stable par t_a. Soit $f \in F$, f non nul, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires α_j non tous nuls tels que pour tout entier relatif n,

$$\left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j \exp(inaj)\right) c_n(f) = 0.$$

14. Soit a réel fixé tel que a/π soit irrationnel. Soit f appartenant à F, montrer qu'il existe un entier N_f tel que $c_n(f) = 0$ pour $|n| \geqslant N_f$.

15. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout g appartenant à F, $c_n(g) = 0$ pour $|n| \geqslant N$.

16. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_k,\, k = -N, \cdots, N)$. Vérifier que $F \subset G$ et G stable par t_a.

17. L'endomorphisme t_a restreint à G est-il diagonalisable ?

18. Montrer qu'on peut trouver un ensemble fini S d'entiers relatifs tel que F soit le sous-espace vectoriel engendré par les e_k pour k décrivant S.

Fin du problème

A 2008 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Équation de la chaleur en dimension 2

Dans ce qui suit, on dira qu'une fonction de plusieurs variables est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle admet des dérivées partielles de tous ordres et si toutes ces dérivées partielles sont continues.

Définition 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de réels positifs indexée par $\mathbf{Z}$. La série de terme général $(a_n,\, n \in \mathbf{Z})$ est convergente lorsque les séries*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \text{ et } \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

sont convergentes. On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Définition 2. *Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double (indexée par $\mathbf{Z}^2$) de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big) \text{ [respectivement } \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big)\text{]}$$

converge. On admet alors que la série

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big) \text{ [respectivement } \sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}|\Big)\text{]}$$

converge également. On dira alors que la série double $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$ est sommable. En outre, on a :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_{m,n}\Big) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}\Big).$$

La valeur commune de ces deux nombres complexes sera notée $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$ et appelée somme de la série double $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} a_{m,n}$.

Pour u fonction bornée de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$, on note

$$\|u\|_\infty = \sup_{x,\,y} |u(x,\, y)|.$$

Soit $(u_n(x,\, y),\, n \in \mathbf{Z})$ une suite de fonctions bornées de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$.

Définition 3. *La série de terme général $(u_n(x,\, y),\, n \in \mathbf{Z})$ est dite normalement convergente sur $\mathbf{R}^2$ lorsque la série de terme général $(\|u_n\|_\infty,\, n \in \mathbf{Z})$ est convergente.*

On admet le théorème suivant :

Théorème 1. *Si*

a) pour tout entier relatif n, u_n est continue sur $\mathbf{R}^2$,

b) et la série de terme général $(u_n(x, y), n \in \mathbf{Z})$ est normalement convergente

alors la fonction u définie par

$$u(x, y) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n(x, y)$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$.

I Série de Fourier à deux variables

Dans les questions 1 à 9, u est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs complexes et doublement $2\pi-$périodique, c'est-à-dire que pour tous les entiers relatifs k, l et tout couple de réels (x, y), on a :

$$u(x, y) = u(x + 2k\pi, y + 2l\pi).$$

On pose pour chaque couple d'entiers relatifs (m, n) :

$$a_{m,n}(u) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y)e^{-imx}\, e^{-iny}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Pour tout entier relatif m, on introduit la fonction u_m définie pour tout réel y, par

$$u_m(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y)e^{-imx}\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer, pour tout entier relatif m, que u_m est 2π-périodique, continue sur $\mathbf{R}$ et que l'on a la relation suivante :

$$\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2\, \mathrm{d}y = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_{m,n}(u)|^2.$$

2. Pour tout réel y, établir l'identité

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} |u_m(y)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x, y)|^2\, \mathrm{d}x.$$

3. Prouver que la série double

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_{m,n}(u)|^2$$

converge et établir l'identité

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_{m,n}(u)|^2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(x,\,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

On suppose maintenant, que pour tous les entiers positifs k et l, la suite double

$$\Big(|a_{m,n}(u)|\,(1+|m|)^k(1+|n|)^l\Big)_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$$

est bornée.

4. Prouver que pour tout couple de réels $(x,\,y)$, la série double suivante est sommable :

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

On pose alors

$$v(x,\,y)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

5. Prouver que v ainsi définie est continue.

6. Démontrer que v est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ et que pour tout couple $(k,\,l)$ d'entiers naturels :

$$\frac{\partial^{k+l}v}{\partial x^k\partial y^l}(x,\,y)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(im)^k(in)^la_{m,n}(u)\,e^{imx+iny}.$$

7. Soit un réel y. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(x,\,y)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_{k,n}(u)e^{iny}.$$

8. Pour tout couple $(k,\,l)$ d'entiers relatifs, calculer $a_{k,\,l}(v)$.

9. En déduire que $u=v$.

II Application

Soit $u_0(x, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs complexes et doublement $2\pi-$périodique. On cherche à déterminer l'existence et l'unicité d'une fonction $u(t,\, x,\, y)$

a) continue sur $[0, +\infty[\times\mathbf{R}^2$,

b) doublement $2\pi-$périodique en $(x,\, y)$,

c) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$

d) et dont toutes les dérivées partielles en $(t,\, x,\, y)$ admettent un prolongement continu à $[0, +\infty[\times\mathbf{R}^2$,

e) qui soit solution du problème suivant :

$$\forall\,(x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ \ u(0,\, x,\, y) = u_0(x,\, y),\ \text{et} \tag{3}$$

$$\forall\,(t,\, x,\, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(t,\, x,\, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\, x,\, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,\, x,\, y) = 0. \tag{4}$$

10. Pour tout couple d'entiers relatifs $(m,\, n)$, exprimer $a_{m,n}(\dfrac{\partial u_0}{\partial x})$ en fonction de $a_{m,n}(u_0)$.

11. Démontrer, pour tous les entiers naturels k et l, que la suite double

$$\Big(|a_{m,n}(u_0)|\,(1+|m|)^k(1+|n|)^l\Big)_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$$

est bornée.

12. Construire une fonction u qui soit solution du problème posé.
Indication : on pourra chercher u sous la forme

$$u(t,\, x,\, y) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi_{m,\,n}(t)\alpha_{m,\,n}e^{imx+iny}.$$

Soit $u(t,\, x,\, y)$ une solution du problème précédent. Pour t réel positif, on pose

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t,\, x,\, y)|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \int_0^t \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(s,\, x,\, y)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(s,\, x,\, y)\right|^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}s.$$

13. Montrer que la fonction E_u est continue sur $\mathbf{R}^+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale sur $[0,\, 2\pi]^2$.

14. Pour tout $(t,\, x,\, y)$ appartenant à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^2$, établir l'identité suivante :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{u}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\, x,\, y) \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(t,\, x,\, y).$$

15. Prouver que $E_u(t) = E_u(0)$ pour tout $t \geqslant 0$.

16. Montrer que le problème posé possède au plus une solution.

Fin du problème

A 2008 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définition 1. *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction c de la variable réelle x de la forme*

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

où les c_n sont des nombres complexes, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On appelle degré de c, noté $\deg c$, le plus petit entier K tel que $c_j = 0$ pour tout $|j| > K$.

On désigne par E l'ensemble des polynômes trigonométriques ; on tiendra pour acquis que E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel stable par la multiplication des fonctions.

Pour un nombre complexe z, $\Re(z)$ représente sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

pour tout $c \in E$.

2. Soit $c \in E$, établir pour tout entier p de $\{-\deg c, \cdots, \deg c\}$, l'identité

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} \, \mathrm{d}x.$$

3. Montrer que pour tout $c \in E$, on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)| \leqslant \|c\| \leqslant (2 \deg c + 1) \sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)|.$$

Définition 2. *On dira que le polynôme trigonométrique c est stable lorsque la suite $\|c^k\|$ des normes de ses puissances successives est bornée quand k décrit $\mathbf{N}$.*

4. Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|c(x_0)| > 1$ alors c n'est pas stable.

Le but de la suite de ce problème est de montrer que la condition $|c(x)| \leqslant 1$ pour tout réel x n'est pas suffisante pour que c soit stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

Dorénavant, α désigne une constante réelle telle que $0 < \alpha < 1$ et a désigne le polynôme trigonométrique

$$a(x) = \alpha^2 \cos x - i\alpha \sin x + 1 - \alpha^2.$$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $a_{k,n}$ les nombres complexes tels que la puissance k-ième de $a(x)$ s'écrive

$$a^k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_{k,n} e^{inx}.$$

5. Établir, pour tout réel x, l'identité

$$|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4) \sin^4 \frac{x}{2}\cdot$$

En déduire que a vérifie les propriétés $a(0) = 1$ et $|a(x)| < 1$ pour tout x appartenant à $]0, \pi]$.

6. Donner les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions g et h définies par

$$g(x) = \ln(|a(x)|^2) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\frac{\Im(a(x))}{\Re(a(x))}\right).$$

7. En déduire que l'on a, au voisinage de 0, la relation suivante :

$$a(x) = \exp\Big(-i\alpha\, x + i\,\frac{\alpha - \alpha^3}{6}\, x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8}\, x^4 + o(x^4)\Big).$$

Il existe donc trois réels α, β et γ strictement positifs et une fonction $\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$, tendant vers 0 quand x tend vers 0 tels que l'on ait, pour tout x dans un voisinage de 0,

$$a(x) = \exp\Big(-i\alpha x + i\beta\, x^3 - \gamma x^4(1 + \varepsilon(x))\Big).$$

On admet que la fonction ε est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$. Dans toute la suite, on posera

$$d(x) = \exp\Big(-i\alpha x + i\beta\, x^3\Big) \text{ et } b(x) = \exp\Big(-\gamma x^4(1 + \varepsilon(x))\Big),$$

de sorte que $a(x) = d(x)b(x)$ et $|a(x)| = |b(x)|$.

III Majoration des coefficients de a^k

Soit $[r,\, s]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$, soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geqslant K$ pour tout $t \in [r,\, s]$ et que de plus $f''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [r,\, s]$.

8. Montrer l'inégalité
$$\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2}{K}\cdot$$

9. En intégrant par parties l'intégrale
$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)} \Big(f'(t)\ \cos f(t) \Big)\ \mathrm{d}t,$$
établir que
$$\left| \int_r^s \cos f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{4}{K}\cdot$$

Dans les question 10 à 12, $[u,\, v]$ désigne un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[u,\, v]$, à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f''(t) \geqslant M > 0$ pour tout t appartenant à $[u,\, v]$.

10. On suppose que $f'(u) \geqslant 0$. Établir, sur $[u + 2/\sqrt{M},\, v]$, l'inégalité suivante
$$f'(t) \geqslant 2\sqrt{M}.$$

11. En déduire que
$$\left| \int_u^v \cos f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{M}}\cdot$$
On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leqslant 0$.

12. On suppose que $f'(u)f'(v) < 0$. Montrer qu'il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$. En déduire que
$$\left| \int_u^v \cos f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{M}}\cdot$$

Dans les questions 13 et 14 , ζ désigne un nombre réel, k un entier naturel non nul et $J_{k,\zeta}$ la fonction définie par

$$J_{k,\zeta}(x) = \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t,$$

où β est le nombre réel non nul défini après la question 7.

13. Montrer, pour tout x appartenant à $[k^{-1/3}, \pi]$, l'inégalité :

$$\left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}\cdot$$

14. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de ζ et k, telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation

$$|J_{k,\zeta}(x)| \leqslant C_1 k^{-1/3}.$$

On admet que l'on peut démontrer de la même manière qu'il existe une constante C_2, indépendante de k et ζ, telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation suivante :

$$\left|\int_0^x \sin(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant C_2 k^{-1/3}. \tag{1}$$

15. Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b(x)| \leqslant \exp(-\lambda x^4).$$

16. Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b'(x)| \leqslant C_3 |x^3|.$$

17. À l'aide d'une intégration par parties et en utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe une constante C_4 indépendante de n et de k telle que pour tout entier non nul k et pour tout entier relatif n, on ait l'inégalité :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k\ \mathrm{d}x\right| \leqslant C_4 k^{-1/3}.$$

18. En déduire qu'il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de k et n telle que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $n \in \{-k, \cdots, k\}$, on ait l'inégalité

$$|a_{k,n}| \leqslant C_5\, k^{-1/3}.$$

On admet dorénavant l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que, pour tout entier k non nul,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^{2k}\, \mathrm{d}x \geqslant C_6\, k^{-1/4}.$$

19. Montrer qu'il existe $C_7 > 0$ tel que, pour tout entier k,

$$\|a^k\| \geqslant C_7\, k^{1/12},$$

c'est-à-dire que a n'est pas stable !

Fin du problème

A 2009 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP,
Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On note E l'ensemble des fonctions f continues, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, et vérifiant l'équation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Lorsqu'elle existe, la *fonction caractéristique* de $f \in E$ est la fonction $\phi_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par la formule

$$\phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx.$$

Lorsque pour un entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle moment d'ordre k de f la quantité

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx.$$

Si, pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on dit que f admet des moments de tous ordres.

On admettra que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\big(\lambda x - \frac{x^2}{2}\big)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \exp\big(\frac{\lambda^2}{2}\big).$$

A. Questions préliminaires.

Les résultats de ces questions, indépendantes les unes des autres, pourront être utilisés dans la suite du problème.

1) Soit $f \in E$. On suppose, dans cette question, que f admet des moments de tous ordres.

Montrer l'existence de ϕ_f et de ses dérivées successives que l'on exprimera à l'aide de f.

2) Montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la fonction $h_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} & si \quad t \neq 0 \\ b - a & si \quad t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour tout réel t, $|h_{a,b}(t)| \leqslant b-a$.

5) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$, $e^k \geqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

B. La fonction ϕ_f caractérise f

On considère la fonction R définie pour tout $(\theta, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par la formule

$$R(\theta, T) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta t)}{t} dt$$

et la fonction S définie pour tout $T \in \mathbb{R}$ par la formule

$$S(T) = \int_0^T \frac{\sin x}{x} dx.$$

On admet que $\lim_{T\to+\infty} S(T) = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Exprimer $R(\theta, T)$ à l'aide de S.

7) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $R(x,T) - R(y,T)$ quand $T \to +\infty$ (on discutera de cette limite en fonction des signes de x et y).

8) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

9) En déduire qu'étant donné deux fonctions f et g de E, si $\phi_f = \phi_g$, alors $f = g$.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

On définit la fonction f_0 par

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0. \end{cases}$$

10) Montrer que $f_0 \in E$.

11) Montrer que f_0 admet des moments de tous ordres et calculer $a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On introduit, pour $a \in [-1, 1]$, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$f_a(x) = f_0(x) \cdot (1 + a \sin(2\pi \ln x)).$$

12) Montrer que $f_a \in E$, et que $a_k(f_0) = a_k(f_a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

Dans cette partie, f est une fonction de E qui admet des moments de tous ordres, et vérifie en outre la condition (**U**) suivante :

(**U**) Il existe $M>0$ tel que pour tout entier $k>0$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leqslant M.$

On pose $b_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x)\,dx$ pour tout entier $k>0$.

13) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$\big(b_{2k+1}(f)\big)^2 \leqslant a_{2k}(f)\cdot a_{2k+2}(f).$$

14) En déduire que la suite de terme général $\dfrac{b_k(f)^{\frac{1}{k}}}{k}$ est majorée par $2M$.

15) Montrer que pour tous x et h réels, et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left|\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{|h|^n}{n!} b_n(f).$$

16) Montrer que, pour un certain $A>0$ que l'on exprimera en fonction de M, on a l'égalité

$$\phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)$$

pour tout réel x et pour tout h tel que $|h|<A$.

17) En déduire que si ℓ est un entier >0 et g une fonction de E admettant des moments de tous ordres tels que $a_k(f) = a_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\phi_f(x) = \phi_g(x)$$

pour tout $x \in [-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}]$ (on pourra procéder par récurrence).

18) Conclure.

E. Application

19) Résoudre en $f \in E$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)\,a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. (On pourra utiliser la fonction caractéristique de f.)

FIN DU PROBLÈME

A 2009 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP,
Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels $\geqslant 0$ deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}.$$

2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

5) Montrer que si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E, et on note $B = \{y \,;\, \|y - x\| \leqslant \|x\|\}$.

6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x,V) = \|x-y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{pmatrix}.$$

9) Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x,V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$ on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2, respectivement. Pour $f \in C([0,1])$ la notation $d(f,A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11) Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]) \,;\, f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.

14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geqslant 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geqslant 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0,\mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors pour tout $\mu \geqslant 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant N_2\big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}\big).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geqslant 1 \text{ pour tout } k \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii'): \quad \inf_{k\geqslant 1} \lambda_k > 0.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2009 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.

Soit C^0 l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui sont continues et $1-$périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,,\, x \in \mathbf{R}\}.$$

On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbf{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de C^0 engendré par e_0.

Si $f \in C^0$ on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right).$$

L'objet du problème est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de C^0. On mettra notamment en évidence sur certains de ces espaces la propriété de « trou spectral » : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r.

I Préliminaires

1) Montrer que si f appartient à C^0 alors Tf aussi.

2) Montrer que pour tout élément f de C^0 on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ puis que

$$\sup_{\|f\|_\infty=1} \|Tf\|_\infty = 1.$$

On appelle H^0 l'hyperplan de C^0 des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

3) Montrer que H^0 est stable par T.

4) Expliciter la projection P sur D parallèlement à H^0.

II Fonctions trigonométriques

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à C^0. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace de C^0 engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \cdots, e_n, e_{-n}$.

5) Déterminer Te_k (respectivement Pe_k) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont $T-$stables (respectivement P-stables).

On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).

6) Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

7) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geqslant k$, l'identité suivante :
$$T_n^p = P_n.$$

8) Calculer les coefficients de Fourier de Tf en fonction de ceux de f pour tout $f \in C^0$.

9) Déterminer le noyau de T.

III Fonctions höldériennes

On rappelle que pour tous les réels x et y,
$$|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant |x - y|.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle C^α le sous-espace de C^0 des fonctions f telles que
$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \Big/ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\} \text{ soit majoré.}$$

On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \Big/ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\, x \neq y \right\}.$$

On admettra que

$$\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$$

définit une norme sur C^α.

10) Montrer que C^α est stable par T.

On note T_α l'endomorphisme de C^α induit par T.

11) Montrer que pour tout $f \in C^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha$ puis que $\sup_{\|f\|_\alpha=1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On pose, pour tout réel x,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}(x).$$

12) Montrer que la série de fonctions $\sum_k \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $f_\lambda \in C^0$.

On admettra, que dans ce cas, la suite $(S_n,\, n \geqslant 0)$ converge dans l'espace vectoriel $(C^0,\, \|\ \|_\infty)$ vers f_λ :

$$\lim_{n \to +\infty} \|S_n - f_\lambda\|_\infty = 0.$$

13) Montrer qu'alors $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Est-ce que λ est une valeur propre de T ?

14) Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que

$$2^{-n-1} < |x-y| \leqslant 2^{-n}.$$

En considérant séparément les sommes avec $k \leqslant n$ et $k > n$ dans la série ayant pour valeur $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in C^\alpha$.

15) Montrer que T_α laisse invariant $H^\alpha = H^0 \cap C^\alpha$.

16) Soit $f \in C^0$, montrer que

$$T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n}).$$

17) Établir, pour $f \in C^\alpha$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t| \leqslant 2^{-n\alpha} m_\alpha(f).$$

18) Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n f\|_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha.$$

19) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).

Fin du problème

A 2009 MATH. II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Rappels

On rappelle la formule de Stirling qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers l'infini

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}.$$

On rappelle aussi que le déterminant d'une matrice M de coefficient $(m_{i,j}\,;\, 1 \leqslant i,j \leqslant n)$ peut s'exprimer comme

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

I Polynômes d'Hermite

Pour tout entier naturel k, on définit la fonction h_k par

$$\begin{aligned} h_k \,:\, \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \frac{(-1)^k}{2^k} e^{x^2}\, \mathrm{D}^k(e^{-x^2}), \end{aligned}$$

où $\mathrm{D}^k(e^{-x^2})$ désigne la dérivée k-ième de la fonction $g(t) = e^{-t^2}$ prise au point $t = x$. (Par convention $D^0(e^{-x^2}) = e^{-x^2}$.)

1) Calculer h_0 et h_1 et établir pour tout entier n, pour tout réel x, l'identité suivante :

$$2h_{n+1}(x) - 2xh_n(x) + h_n'(x) = 0. \tag{1}$$

2) En déduire que h_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

On admet que pour tous les entiers m et n,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_m(x) h_n(x) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{\pi}\, n!\, 2^{-n} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

On notera dorénavant

$$d_n = \sqrt{\pi}\, n!\, 2^{-n}.$$

3) Montrer que pour tout réel x, l'identité suivante est satisfaite :

$$\left.\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2}\right|_{t=0} = 2^n\, e^{-x^2} h_n(x).$$

4) Montrer que pour tout réel x, la fonction f_x de la variable réelle t définie par

$$f_x(t) = e^{-(x-t)^2},$$

admet le développement en série entière suivant, dont on précisera le rayon de convergence,

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\, 2^k\, h_k(x)\, e^{-x^2}.$$

On considère la fonction w définie par

$$\begin{aligned} w \,:\, \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,\, t) &\longmapsto e^{2xt-t^2}. \end{aligned}$$

Il est évident (et admis dans la suite) que w satisfait la propriété suivante : pour tout réel x et tout réel t,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - (2x - 2t) w(x,t) = 0. \tag{3}$$

5) Établir pour tout réel x et tout entier positif n, l'équation de récurrence suivante :

$$2h_{n+1}(x) - 2x h_n(x) + n h_{n-1}(x) = 0, \tag{4}$$

avec la convention $h_{-1}(x) = 0$.

6) Montrer que pour tout entier n, l'identité $h_n' = n h_{n-1}$ est satisfaite.

On pose maintenant pour tout entier k et pour tout réel x,

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{d_k}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, h_k(x).$$

Les égalités (2) impliquent que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)^2 \, \mathrm{d}x = 1 \text{ et que } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(x)\phi_n(x) \, \mathrm{d}x = 0, \text{ si } m \neq n. \tag{5}$$

7) Calculer $\phi_n(0)$ et $\phi_n'(0)$ pour tout entier n.

8) Pour tout entier k, tout réel x et tout réel y, exprimer

$$(x-y)h_k(x)h_k(y)$$

uniquement en fonction de $h_{k+1}(x)$, $h_{k+1}(y)$, $h_k(x)$, $h_k(y)$, $h_{k-1}(x)$ et $h_{k-1}(y)$.

9) Établir, pour des réels x et y distincts, les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k} h_k(x)h_k(y) &= \frac{1}{d_{n-1}}(h_n(x)h_{n-1}(y) - h_n(y)h_{n-1}(x)), \\ \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x)\phi_k(y) &= \sqrt{\frac{n}{2}} \, \frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_{n-1}(x)\phi_n(y)}{x-y}\cdot \end{aligned} \tag{6}$$

II Étude de ϕ_{2m}

Dans toute cette partie, m est un entier naturel fixé. Soient β et γ deux réels non nuls et r une fonction continue sur $\mathbf{R}$, on considère l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho''(x) + \gamma^2\rho(x) &=& r(x), \quad \text{pour tout réel } x, \\ \rho(0) &=& \beta, \\ \rho'(0) &=& 0. \end{array} \right. \tag{$S(r,\beta,\gamma)$}$$

10) Montrer que l'équation différentielle $(S(r,\beta,\gamma))$ a une solution unique dont on donnera l'expression.

Avec les résultats de la première partie, on peut montrer (et on l'admet dorénavant) que pour tout m, ϕ_{2m} est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho''(x)+(4m+1)\rho(x) &=& x^2\rho(x), \quad \text{pour tout réel } x, \\ \\ \rho(0) &=& \phi_{2m}(0), \\ \rho'(0) &=& \phi'_{2m}(0). \end{array}\right. \tag{S}$$

11) Montrer que pour tout réel x,

$$\phi_{2m}(x) = \alpha_{2m}\cos(\sqrt{4m+1}\,x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}}\; y^2\phi_{2m}(y)\;\mathrm{d}y,$$

avec pour tout entier m :

$$\alpha_{2m} = \frac{(-1)^m}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}.$$

12) Trouver un équivalent de α_{2m} quand m tend vers l'infini.

13) Montrer que pour tout réel x, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left|\int_0^x \frac{\sin(\sqrt{4m+1}(x-y))}{\sqrt{4m+1}}\; y^2\phi_{2m}(y)\;\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\;\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les relations (5).

14) Établir pour tout réel $x>0$, la limite suivante :

$$\lim_{m\to+\infty}(-1)^m\sqrt{\pi}\,m^{\frac{1}{4}}\;\phi_{2m}(\frac{x}{2\sqrt{m}}) = \cos(x).$$

III Intégrales de déterminants

Pour tout entier N, on note $K^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$K^{(N)}(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1}\phi_k(x)\phi_k(y),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

15) Montrer, pour tout x et y dans $\mathbf{R}$, les identités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)\ \mathrm{d}z = K^{(N)}(x,y),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,x)\ \mathrm{d}x = N.$$

Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$, et σ une permutation de l'ensemble $\{1,\dots k\}$. Pour deux entiers i et j de $\{1,\dots k\}$, on note $(i,\ j)$ la transposition qui échange i et j. On fait la convention : $(i,\ j)$ est égale à l'identité de $\mathfrak{S}_k$ si $i = j$.

On pose

$$\widehat{\sigma} = (k,\ \sigma(k)) \circ \sigma.$$

16) Montrer que $\widehat{\sigma}$ définit une permutation de $\{1,\dots,k\}$ telle que $\widehat{\sigma}(k) = k$. Calculer sa signature en fonction de celle de σ. (On distinguera le cas où $\sigma(k) = k$ du cas où $\sigma(k) \neq k$.)

On note $\widetilde{\sigma}$ la restriction de $\widehat{\sigma}$ à $\{1,\cdots,k-1\}$. On considère l'application θ définie par :

$$\theta\ :\ \mathfrak{S}_k \longrightarrow \mathfrak{S}_{k-1}$$
$$\sigma \longmapsto \widetilde{\sigma}.$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on rappelle que

$$\theta^{-1}\Big(\{\theta(\sigma)\}\Big) = \{\tau \in \mathfrak{S}_k\,/\,\theta(\tau) = \theta(\sigma)\}.$$

17) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, établir les propriétés suivantes :

$$\mathrm{cardinal}\Big(\theta^{-1}(\{\theta(\sigma)\})\Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k, \\ k-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

18) Montrer pour tout $(x_1,\cdots,x_k) \in \mathbf{R}^k$, pour tout entier N, les identités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} K^{(N)}(x_i, x_{\sigma(i)})\ \mathrm{d}x_k = \begin{cases} N \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}) & \text{si } \sigma(k) = k, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si L est une fonction de $\mathbf{R}^2$ à valeur dans $\mathbf{R}$, on note pour tout $(x_1, \cdots, x_k)$ dans $\mathbf{R}^k$,

$$\operatorname{Det} L(x_1, \cdots, x_k) = \det \begin{pmatrix} L(x_1,x_1) & L(x_1,x_2) & \dots & L(x_1,x_k) \\ L(x_2,x_1) & L(x_2,x_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L(x_k,x_1) & \dots & \dots & L(x_k,x_k) \end{pmatrix}.$$

On notera que si L est continue sur $\mathbf{R}^2$ alors $\operatorname{Det} L$ est continue sur $\mathbf{R}^k$.

19) En utilisant l'expression du déterminant rappelée dans les préliminaires, déduire, des questions précédentes, que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k)\, \mathrm{d}x_k = (N-k+1) \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_{k-1}),$$

avec par convention $\operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k) = 1$ si $k = 0$.

IV Déterminants et intégrales

Pour tout entier $N \geqslant 1$, on note $\Psi^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\Psi^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i - x_j)^2.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note $\Psi_k^{(N)}$ la fonction de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}$ définie par récurrence par

$$\Psi_N^{(N)} = \Psi^{(N)},$$

et pour $k < N$

$$\Psi_k^{(N)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{N-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k+1}^{(N)}(x_1, \dots, x_k, y)\, \mathrm{d}y.$$

20) Soient N réels, $x_1, \cdots, x_N$, montrer les deux égalités suivantes :

$$\det \begin{pmatrix} h_0(x_1) & h_1(x_1) & \cdots & h_{N-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0(x_N) & h_1(x_N) & \cdots & h_{N-1}(x_N) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i - x_j).$$

21) Soient N réels $(x_1, \cdots, x_N)$, établir pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant N$, l'identité suivante :

$$\frac{1}{d_0 \cdots d_{N-1}} \Psi_k^{(N)}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{Det} K^{(N)}(x_1, \cdots, x_k).$$

On commencera par le cas $k = N$.

Fin du problème

On déduit de tout ce qui précède, que pour tout entier $k > 0$ et tout $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$,

$$\lim_{N \to +\infty} (2N)^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{d_0 \cdots d_{N-1}} \Psi_k^{(N)}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2N}}, \ldots, \frac{x_k}{\sqrt{2N}}\right) = \det S(x_1, \cdots, x_k),$$

où

$$\begin{aligned} S : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)} \text{ si } x \neq y \\ (x, x) &\longmapsto \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Sans le savoir, vous venez de démontrer que si l'on choisit une matrice hermitienne de taille N,« au hasard », la probabilité que k de ses valeurs propres soit dans un voisinage de $(x_1, \ldots, x_k)$ est proportionnelle à $\det S(x_1, \cdots, x_k)$ pour N grand. Ces considérations sont particulièrement d'actualité pour l'étude des systèmes radio à plusieurs antennes utilisés dans les « box ».



A 2009 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

- On note F l'ensemble des nombres réels positifs non entiers ;
- On note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur strictement à 1.
- Si Z est un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(Z)$ sa partie réelle et $\mathrm{Im}(Z)$ sa partie imaginaire.
- Dans tout le problème, on désigne par g la fonction réelle de variable réelle définie par :

$$\begin{aligned} g \,:\, [0,1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{1+u}. \end{aligned}$$

I Question préliminaire

1) Soit x un réel. Montrer que l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\, \mathrm{d}u$$

existe si et seulement si $x \in]0,\, 1[$.

L'objet du problème est de calculer la valeur de cette intégrale.

II Une identité intégrale

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et développable en série entière sur $[0,\, 1[$. On note $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les coefficients de son développement.

2) Montrer que l'expression

$$\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\, \mathrm{d}v$$

a un sens pour tout $x > 0$ et tout $y \in]0,\, 1[$.

Pour $x > 0$, on pose

$$S[f](x,\, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\ \mathrm{d}v & \text{pour } y \in]0,\, 1[, \\ \\ \dfrac{f(0)}{x} & \text{pour } y = 0. \end{cases}$$

3) Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $y \mapsto S[f](x, y)$ est continue sur $[0, 1[$.

4) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto S[f](x,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière.

On considère la fonction $\tilde{f}$ définie sur D par la relation :

$$\forall z \in D\ :\ \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0,\, 1[$, on considère l'expression :

$$J[f](x,\, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \mathrm{Re}\left[\int_0^1 e^{i\pi x t} \tilde{f}(-y e^{i\pi t})\ dt\right].$$

5) Calculer, pour tout $x \in F$ et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \cos(\pi(n + x)t)\ \mathrm{d}t.$$

6) Montrer que pour tout $x \in F$, la fonction $y \mapsto J[f](x,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière. En déduire que $S[f](x,\, y) = J[f](x,\, y)$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in [0, 1[$.

Pour tout $x \in]0,\, 1[$ et tout $y \in [0,\, 1[$, on pose :

$$C[f](x,\, y) = S[f](x,\, y) + S[f](1 - x,\, y).$$

7) Établir l'identité suivante pour tout $x \in]0,\, 1[$ et tout $y \in [0,\, 1[$:

$$C[g](x,\, y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2} dt.$$

III Noyau de Poisson

Pour tout $y \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, 1]$, on définit le *noyau de Poisson* P par :

$$P(t, y) = \frac{1 - y^2}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2}.$$

8) Établir l'identité suivante pour tout $y \in [0,\, 1[$ et tout $t \in [0,\, 1]$:

$$P(t, y) = \mathrm{Re}\left[\frac{1 + ye^{i\pi t}}{1 - ye^{i\pi t}}\right].$$

9) Montrer que pour $t \in [0,\, 1]$ fixé, la fonction $y \mapsto P(t,\, y)$ est développable en série entière sur $[0,\, 1[$, et calculer les coefficients de son développement en série entière.

10) Établir que pour tout $y \in [0,\, 1[$ on a :

$$\int_0^1 P(t, y)\ \mathrm{d}t = 1.$$

Dans les questions 11) et 12) ci-dessous, on désigne par φ une fonction définie et continue sur $[0,\, 1]$, à valeurs réelles.

11) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,\, 1[$, on a :

$$\lim_{y \to 1} \int_\alpha^1 P(t, y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

et

$$\left| \int_0^\alpha P(t, y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \sup_{t \in [0,\alpha]} |\varphi(t)|\,.$$

12) En déduire que l'on a :

$$\lim_{y\to 1}\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(0).$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\varphi(0) = 0$.

IV Application à un calcul d'intégrale

Pour tout $x \in]0,\ 1[$ et tout $y \in [0,\ 1[$, on pose :

$$A(x,\ y) = \int_0^1 P(t,y)\cos(\pi x t)\ \mathrm{d}t.$$

13) Pour tout $x \in]0,\ 1[$ et tout $y \in [0,\ 1[$, exprimer $C[g](x,\ y)$ en fonction de $A(x,\ y)$ et de $A(1-x,\ y)$.

14) Pour $x \in]0,\ 1[$ fixé, déterminer la limite de $C[g](x,\ y)$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

15) En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in]0,\ 1[$.

Fin du problème

A 2010 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2010

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Si A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{C}(A)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de A dans $\mathbb{C}$. Les notations D, $\overline{D}$ et T désignent respectivement

- le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$
- le disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leqslant 1\}$
- le cercle $T = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$.

À une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ quelconque on associe

- les coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

- la fonction $g_f : D \to \mathbb{C}$ définie par la formule suivante, dont l'existence sera traitée dans la question 1) :

$$g_f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\overline{z}^n$$

  où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z ;
- la fonction $G_f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in T \\ g_f(z) & \text{si } z \in D. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n et q_n les fonctions de $\mathscr{C}(T)$ définis par

$$\begin{aligned} p_n(z) &= z^n \\ q_n(z) &= \overline{z}^n \end{aligned} \qquad (\forall z \in T).$$

Le but du problème est de caractériser de différentes manières le prolongement G_f de f à $\overline{D}$.

A. Prolongement harmonique

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\widetilde{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + iy \in U\}$. Pour toute fonction $u : U \to \mathbb{C}$, on note $\widetilde{u} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la formule $u(x, y) = u(x + iy)$. La fonction u est dite de *classe* C^2 si $\widetilde{u}$ est de classe C^2 au sens des fonctions de deux variables réelles. On note alors Δu la fonction définie sur U par

$$\Delta u(x + iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x, y).$$

Dans cette partie, on fixe une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ et on se propose de montrer que G_f est l'unique fonction $G : \overline{D} \to \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a1) la restriction de G à T coïncide avec f ;

(a2) G est continue sur $\overline{D}$;

(a3) la restriction G à D est de classe C^2 et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On va d'abord montrer que G_f vérifie ces conditions. La condition (a1) est évidemment vérifiée.

1) Montrer que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont convergentes pour tout $z \in D$.

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$.

2) Au moyen d'une dérivation terme à terme d'une série de fonctions de variable réelle, justifier que l'application $\widetilde{S} : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur $\widetilde{D}$, et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x, y)$ sous la forme de la somme d'une série.

3) Montrer que S est de classe C^2 sur D et déterminer $\Delta S(z)$ pour tout $z \in D$.

4) En déduire que g_f est de classe C^2 sur D et que $\Delta g_f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On fixe $z \in D$, et on note $P_z(t) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5) En tenant compte de la définition des c_n dans l'expression de $g_f(z)$, montrer que

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) \, \mathrm{d}t.$$

6) Déterminer g_f pour $f = p_n$ et $f = q_n$, où $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) \, \mathrm{d}t$ et étudier le signe de $P_z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T, alors G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\overline{D}$.

8) Soit $\mathscr{P}(T)$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(T)$ engendré par $\{p_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\} \cup \{q_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que tout élément de $\mathscr{C}(T)$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathscr{P}(T)$, et en déduire que G_f est continue sur $\overline{D}$.

On se donne maintenant une fonction G vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3) et on se propose de démontrer que $G = G_f$.

9) On suppose dans cette question que f est la fonction nulle et que G est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon|z|^2$.
Montrer que $\Delta u(z) > 0$ pour tout $z \in D$. En déduire que $u(z) \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in \overline{D}$ (on pourra considérer, après en avoir justifié l'existence, un point $z_0 \in \overline{D}$ où u atteint son maximum.)

10) Conclure dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général. (On pourra d'abord étendre la conclusion au cas où f est nulle mais G est à valeurs complexes.)

B. Deux applications

Première application. On considère la fonction G définie sur $\overline{D}$ par $G(x+iy) = e^x \cos y$.

11) Montrer que G vérifie la condition (a3) et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Deuxième application. Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une application continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-a| < R\}$ et $\overline{D}(a,R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-a| \leqslant R\}$.

12) Montrer que u est de classe C^2 et telle que $\Delta u = 0$ sur U si et seulement si, pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a,R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\big(a + Re^{it}\big) P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 telle que $\Delta u_n = 0$ sur U.

13) Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u, alors u est également de classe C^2 et telle que $\Delta u = 0$ sur U.

C. Propriétés duales

Dans cette partie, on fixe $z \in D$ et on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_z : & \mathscr{C}(T) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & g_f(z) \end{array}$$

où $\mathscr{C}(T)$ est muni de la norme N définie par

$$N(f) = \sup_{z \in T} |f(z)|$$

pour tout $f \in \mathscr{C}(T)$. Pour toute application $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(c1) φ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire et continue ;

(c2) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(p_n) = z^n$;

(c3) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(q_n) = \overline{z}^n$;

(c4) $\forall f \in \mathscr{C}(T), |\varphi(f)| \leqslant N(f)$.

14) Montrer que φ_z vérifie ces quatre propriétés.

15) Montrer que si φ vérifie les conditions (c1), (c2) et (c3), alors $\varphi = \varphi_z$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c4), et on se propose de démontrer que $\varphi = \varphi_z$.

Dans les deux questions suivantes, on se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ à valeurs réelles $\geqslant 0$. Soit $h \in \mathscr{C}(T)$ définie par la formule $h(z) = 2f(z) - N(f) + i\lambda$ pour tout $z \in T$.

16) Calculer $N(h)^2$ en fonction de $N(f)$ et de λ.

17) En étudiant $|\varphi(h)|^2$, montrer que $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ puis que $\varphi(f) \geqslant 0$.

18) En déduire que $\varphi\left(\overline{f}\right) = \overline{\varphi(f)}$ pour tout $f \in \mathscr{C}(T)$, et conclure.

FIN DU PROBLÈME

A 2010 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2010

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes. On appelle *matrice binaire* de taille n une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1. L'élément d'une telle matrice situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne est dit en position (i, j), où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

On désigne par $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne. L'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de $\mathscr{U}_4$.

On note u_n le cardinal de $\mathscr{U}_n$, et on pose par convention $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

La partie D est indépendante des parties B et C.

A. Questions préliminaires

1) Exhiber toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$ pour $n = 2$ et 3, et déterminer les valeurs correspondantes de u_n. (Dans le cas $n = 3$, on pourra raisonner sur la position des éléments nuls dans chacune de ces matrices.)

Soit X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2) Si $A \in \mathscr{U}_n$, montrer que X_0 est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

Soit $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{U}_n$ comportant un 1 en position (1,1). On note h_n le cardinal de $\mathscr{H}_n$.

3) Calculer la somme de toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$ en fonction de h_n et de J.

B. Étude du cardinal de $\mathscr{U}_n$

4) Établir la relation $u_n = \frac{n}{2} h_n$ pour tout $n \geqslant 2$. (On pourra s'aider des deux questions précédentes.)

Soit $\mathscr{K}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}_n$ comportant un 1 en position (1,2) et un 1 en position (2,1). On note k_n le cardinal de $\mathscr{K}_n$.

5) Pour tout $n \geqslant 2$, établir une relation donnant h_n en fonction de k_n et de $(n-1)^2$.

6) En examinant les possibilités pour le coefficient situé en position (2,2), démontrer la relation $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 4$.

On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Déduire de ce qui précède une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8) Prouver que $w_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la série de terme général w_n diverge. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

On pose $W(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

9) Donner une équation différentielle vérifiée par W et en déduire une expression de $W(x)$ en fonction de x.

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Soit α un réel et β un réel > 0. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule :

$$\phi(x) = \frac{e^{\alpha x}}{(1-x)^{\beta}}.$$

On note $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ la fonction Gamma définie pour tout réel $t > 0$; on rappelle que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10) Montrer que $\phi(x)$ est la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

11) Montrer que si $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$\frac{1}{(1-x)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où l'on exprimera les coefficients a_n en fonction de $n!$, $\Gamma(\beta)$ et $\Gamma(n+\beta)$.

12) En déduire que $\phi_n = \dfrac{\psi_n}{n!\,\Gamma(\beta)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où l'on a posé :

$$\psi_n = \int_0^{\infty} u^{\beta-1} e^{-u} (\alpha+u)^n\,\mathrm{d}u.$$

13) On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. A l'aide des variations de la fonction

$$u \mapsto e^{-u}(\alpha+u)^n$$

définie pour tout $u \geqslant -\alpha$, montrer que $\left|\int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n \,\mathrm{d}u\right|$ est négligeable devant $\int_a^\infty u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n \,\mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.

14) En déduire qu'il existe $a > |\alpha|$ tel que ψ_n soit équivalent à l'intégrale $\int_a^\infty e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1} \,\mathrm{d}u$ quand $n \to +\infty$.

15) En conclure que les suites ψ_n et $e^\alpha \,\Gamma(n+\beta)$ sont équivalentes.

On revient sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16) Établir un équivalent de ϕ_n, puis de u_n quand $n \to +\infty$. On prendra soin de simplifier l'équivalent trouvé de u_n en utilisant la formule de Stirling.

D. Étude de rang

Dans cette partie, on cherche à déterminer le rang r_n du système constitué des u_n matrices de $\mathscr{U}_n$, considérées comme des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que X_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, et que J est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

17) Calculer r_n pour $n = 2$ et 3. (Dans le cas $n = 3$, on pourra considérer les matrices $J - A$, où $A \in \mathscr{U}_3$.)

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{V}_n$ des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois un vecteur propre pour A et pour sa transposée ${}^tA$.

18) Montrer que $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{V}_n$ et comparer les valeurs propres de A et de ${}^tA$ associées à X_0 lorsque $A \in \mathscr{V}_n$.

19) Déterminer la dimension de $\mathscr{V}_n$. (On pourra considérer une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dont un des vecteurs est colinéaire à X_0.) En déduire une majoration sur r_n.

Pour $n \geqslant 3$, soit A une matrice de $\mathscr{U}_n$ comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,2)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$.

20) Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathscr{U}_n$ telle que $A - B$ ne comporte que des éléments nuls, *sauf* en positions (i,j) pour $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$. En déduire que si r'_n désigne le rang du système constitué de toutes les matrices $U - V$ où $U, V \in \mathscr{U}_n$, on a $r'_n \geqslant (n-1)^2$.

21) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

A 2010 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2010

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Théorème de la Limite Centrale.

Notations

On introduit les trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de fonctions suivants

- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} u(x).$$

  On rappelle qu'une telle fonction u est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues et de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{x\to-\infty} u^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} u^{(k)}(x).$$

  On a noté $u^{(k)}$ la dérivée k-ième de u.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues positives bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

On munit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\|_\infty$: plus précisément, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|.$$

On pourra utiliser librement le théorème de Fubini *admis* ci-dessous :

Théorème 1. *(Fubini) Soit $(x, y) \mapsto F(x, y)$ une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que F vérifie les trois propriétés suivantes.*

1] Pour tous réels x, y, les deux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v, y)|dv$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, t)|dt$ convergent.

2] Les fonctions $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|dx$, $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|dy$, $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dx$, $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dy$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

3] $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|dx \Big) dy$$

converge.

Alors dans ce cas, $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dx$ et $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dy$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales. Autrement dit, on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dx \Big) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)dy \Big) dx.$$

I. Préliminaires

Pour f et g appartenant respectivement à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution $f * g$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

On définit $f * g(x)$ par la même formule si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q1 Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ converge pour tout réel x. Puis montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème de continuité sous le signe $\int$ et on vérifiera avec soin que les conditions de validité sont remplies). Vérifier de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = g * f(x).$$

Q2 Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f * g(x) = 0$. (On considèrera une suite réelle quelconque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$. On vérifiera avec soin qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour étudier $\lim_{n \to +\infty} f * g(x_n)$). Montrer de même que

$\lim_{x \to -\infty} f * g(x) = 0$.

Q3 Soient f et g appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g$ définit une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Plus précisément, montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, positive et d'intégrale égale à 1. (On appliquera le théorème de Fubini à la fonction $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ et on pourra se contenter de ne vérifier que les conditions 1] et 3]).

Dans la suite on admettra et utilisera librement le résultat suivant. Si f et g appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et u est une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ alors,

$$f * (g * u) = (f * g) * u.$$

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On définit alors le produit de convolution $f_1 * \ldots * f_n$ par récurrence comme suit :

$$f_1 * \ldots * f_k = (f_1 * \ldots * f_{k-1}) * f_k,\ \forall k \in \{3, \ldots, n\}.$$

Il est clair que $f_1 * \ldots * f_n$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on notera f^{*n} la fonction $f * \ldots * f$, la fonction f intervenant n fois.

II. Une classe d'opérateurs sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On lui associe l'opérateur T_f agissant sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ défini pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ par

$$T_f(u) = f * u.$$

D'après **Q1** et **Q2**, T_f définit un endomorphisme de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Q4 Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty \,.$$

Q5 Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour toute fonction u de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$T_f T_g(u) = T_g T_f(u)$$

où $T_f T_g$ désigne la composée des opérateurs T_f et T_g .

Q6 Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty$$

Q7 Soient f et g des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que si $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leq n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty \,.$$

III. Lois normales

On introduit pour tout réel $h > 0$, la fonction

$$g_h(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

dite loi normale de paramètre h. On admet que g_1 est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q8 Pour tout réel $h > 0$, montrer que g_h est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, puis calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x) dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x) dx \,.$$

Soient $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ deux réels strictement positifs. On admettra que :

$$g_{h_1} * g_{h_2} = g_h \,,$$

où $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Q9 Soit $h > 0$. Etablir les deux égalités suivantes entre opérateurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_{g_h} = \left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} \,.$$

IV. Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dira que (f_n) converge faiblement vers f, f étant une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, si pour toute fonction u de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0 \,.$$

Soit u une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On fixe un réel $h > 0$ et on considère la fonction $T_{g_h}(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour x réel par :

$$(g_h * u)(x) \ = \ T_{g_h}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)u(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x-t)u(t)dt,$$

où g_h a été défini au début de la partie III.

Q10 Soit h strictement positif fixé et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un polynôme $P_{k,h}$ dont on précisera le degré tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\frac{d^k}{dx^k} g_h)(x) = P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}.$$

Q11 Soient $h, a \in \mathbb{R}^{+*}$ et k un entier positif ou nul. Prouver qu' il existe une fonction $\phi_k : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, \ |P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}| \leq \phi_k(t).$$

La fonction ϕ_k ne dépend que de h, a et k. (On pourra majorer $|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}|$ indépendamment de $(x-t)$. Ensuite on pourra majorer convenablement $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$ pour $|t| \geq 2a$ et $x \in [-a, a]$).

Q12 Soient h strictement positif fixé et $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puis montrer que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q13 Pour h strictement positif fixé et $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Q14 Soit α un réel strictement positif. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)dt$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)dt$.

Q15 Soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\lim_{h \to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0.$$

Pour cela on utilisera la question précédente ainsi que le résultat admis suivant, valable pour tout $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \epsilon.$$

Q16 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On suppose que pour toute fonction u de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0.$$

Prouver alors que (f_n) converge faiblement vers f. (On pourra utiliser les questions 4 et 15).

Dans la suite, f est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $x \to x^2 f(x)$ est aussi dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge et on supposera que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 0$. Pour tout n entier strictement positif, on introduit les deux fonctions f_n et $f_n^{\#}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{n} f(\sqrt{n}\, x),\ f_n^{\#}(x) = nx^2 f_n(x).$$

On admettra que f_n et $f_n^{\#}$ appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q17 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Vérifier que $t \to \dfrac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2}$ se prolonge continûment en $t = 0$. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$n\Big(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\Big) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x) \right) f_n^{\#}(t)dt,$$

où u' désigne la dérivée première de u et u'' désigne la dérivée seconde de u.

Q18 Démontrer que pour toute fonction u de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| n\big(T_{f_n}(u) - u\big) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty = 0.$$

(On pourra considérer les trois intégrales $\int_{-\infty}^{-\alpha}$, $\int_{-\alpha}^{\alpha}$ et $\int_{\alpha}^{+\infty}$, avec $\alpha > 0$ bien choisi, dans le second membre de la formule de la question précédente).

Q19 Montrer que pour toute fonction u de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0,$$

où g_1 a été définie au début de la partie III. (On pourra utiliser les questions 7, 9 et 18). Conclure que la suite (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1 ; on rappelle que la notation f^{*n} a été définie juste après la question 3.

FIN DU PROBLÈME.

Ce dernier résultat intervient en théorie des probabilités. Il constitue une version faible du théorème de la limite centrale dans le cas de variables aléatoires à densité de probabilité f continue bornée sur $\mathbb{R}$.

A 2010 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PSI).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2010

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Déterminants et formule de condensation.

Le but de ce problème est de montrer la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer les applications et généralisations.

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels). On dira aussi que M est une matrice de taille $n \times n$.

• On note $M_{i,j}$ le coefficient de M qui se trouve sur la i-ème ligne et j-ème colonne.

• On note ${}^tM$ sa transposée définie par ${}^tM_{i,j} = M_{j,i}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

• On note $\det M$ son déterminant.

• Pour $n \geq 2$ et $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

• Plus généralement, soit $r \geq 0$.

Pour $n \geq r+1$ et $i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_r \in \{1, 2, ..., n\}$, vérifiant $i_k \neq i_l$ et $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, on note $[M]_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_r}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant les lignes d'indices $i_1, ..., i_r$ et les colonnes d'indices $j_1, ..., j_r$. On conviendra que cette matrice vaut M si $r = 0$.

• On note $\mathrm{Com}M$ la comatrice de M définie par

$$(\mathrm{Com}M)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det [M]_i^j$$

• On désignera par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$.

I. Préliminaires.

1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Montrer que l'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(M) = \sup_{i,j \in \{1,...,n\}} |M_{i,j}|,$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, on rappelle qu'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles $n \times n$) telles que $M = P.J.Q$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & . & & & & \\ & & . & & (0) & \\ & & & 1 & & \\ & & (0) & & 0 & \\ & & & & & . \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

J étant une matrice *diagonale* dont les r premiers éléments *diagonaux* valent 1 et dont les $n-r$ derniers éléments diagonaux valent 0. Si $J=0$ on convient que $r=0$.

2 Rappeler l'interprétation de r.

3 - On conserve les notations de la question précédente. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M=\lim_{k\to+\infty} P.J_k.Q$ au sens de la distance associée à la norme N.

4 - Montrer que le déterminant définit une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la distance associée à la norme N, dans $\mathbb{R}$ (on pourra écrire le déterminant comme une somme de fonctions toutes en forme de produits).

II. Formule de condensation

On se propose de montrer dans cette partie la formule de Desnanot-Jacobi, dite de *condensation*, suivante où n est un entier ≥ 3 :

$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det M \det[M]^{1,n}_{1,n} = \det[M]^1_1 \det[M]^n_n - \det[M]^1_n \det[M]^n_1 \qquad (1)$$

5 - Soit $i\in\{1,2,...,n\}$. Calculer

$$M_{i,1}\det[M]^1_i - M_{i,2}\det[M]^2_i + ... + (-1)^{n-1}M_{i,n}\det[M]^n_i$$

en fonction de $\det M$ et de i.

6 - Montrer que

$$M_{j,1}\det[M]^1_i - M_{j,2}\det[M]^2_i + ... + (-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]^n_i = 0$$

pour $i,j\in\{1,2,...,n\}$, vérifiant $i\neq j$ (on interprètera le membre de gauche comme le développement par rapport à une ligne du déterminant d'une certaine matrice).

7 - *Déduire des deux questions précédentes* le fait que $M\,.\,{}^t(\mathrm{Com}M) = xI_n$ où x est un nombre réel que l'on précisera.

On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M^\star = \begin{pmatrix} \det[M]^1_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]^1_n \\ -\det[M]^2_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]^2_n \\ \det[M]^3_1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]^3_n \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . \\ (-1)^n\det[M]^{n-1}_1 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & -\det[M]^{n-1}_n \\ (-1)^{n+1}\det[M]^n_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \det[M]^n_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $M^\star$ est obtenue à partir de ${}^t(\mathrm{Com}M)$ en remplaçant, pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$ et chaque $j \in \{2,\dots,n-1\}$ le coefficient ${}^t(\mathrm{Com}M)_{i,j}$ par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.

8 - Calculer $\det M^\star$ en fonction de $\det[M]_1^1, \det[M]_n^n, \det[M]_n^1, \det[M]_1^n$.

9 - Ecrire le calcul explicite de la matrice produit $M \,.\, M^\star$ sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.

10 - En utilisant la question précédente, démontrer (1) dans le cas où M est inversible.

11 - Démontrer (1) dans le cas où M n'est pas inversible.

III. Algorithme de Lewis Carroll

Le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll, s'est servi de la formule de condensation (1) pour mettre au point un algorithme de calcul de déterminant $n \times n$, n'utilisant que le calcul de déterminants 2×2.

L'algorithme fonctionne comme suit.

On doit trouver le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$.

Pour cela, on met en jeu une suite de couples de matrices $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{R})$ pour $k = 0, ..., n-2$ définies comme suit.

Pour $k = 0$, $A^{(0)} = M$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Voici comment l'on passe du couple $(A^{(k)}, B^{(k)})$ $(k \leq n-3)$ au couple $(A^{(k+1)}, B^{(k+1)})$.

Si aucun des coefficients de $B^{(k)}$ n'est nul, (ce qui est le cas pour $B^{(0)}$) alors on pose,

$$A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad i,j \in \{1,\dots,n-k-1\}$$

$$B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \quad i,j \in \{1,\dots,n-k-2\}.$$

Bien entendu, dans le membre de droite qui définit le terme $A_{i,j}^{(k+1)}$, $|\,|$ désigne un déterminant 2×2. Enfin, si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)})$ a pu être défini par la précédente procédure, alors on définit la matrice de taille 1×1, $A^{(n-1)} = (A_{1,1}^{(n-1)})$ par :

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{1}{B_{1,1}^{(n-2)}} \times \begin{vmatrix} A_{1,1}^{(n-2)} & A_{1,1+1}^{(n-2)} \\ A_{1+1,1}^{(n-2)} & A_{1+1,1+1}^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Noter qu'il *n'y a pas* de terme $B^{(n-1)}$. L'algorithme se termine en affirmant que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det M$, on prouvera plus loin sa validité. Si l'un des coefficients de $B^{(k)}$ est nul, l'algorithme ne s'applique pas, et Lewis Carroll préconise de recommencer après avoir échangé (convenablement) des lignes dans la matrice initiale.

Exemple :

$$M = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 38 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 77 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M vaut donc 77.

12 - Appliquer cet algorithme au calcul du déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13 - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'algorithme se termine sans qu'aucun des coefficients des matrices $B^{(i)}$ ne s'annule. Quel est le nombre u_n de déterminants 2×2 que l'on a calculé au cours de la procédure ?

Une autre méthode de calcul de déterminant consiste à répéter le développement suivant des lignes par cofacteurs jusqu'à ce qu'on obtienne des déterminants 2×2. L'objet de la question suivante est d'étudier le nombre v_n de déterminants 2×2 ainsi obtenus.

14 - Soit donc v_n le nombre de déterminants 2×2 calculés lorsque l'on applique la méthode de développements successifs par rapport à des lignes pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$. Etablir une relation entre v_n et v_{n-1}. Puis, comparer u_n et v_n lorsque $n \to +\infty$.

On se place désormais dans le cas où l'algorithme de Lewis Carroll s'applique. On se propose de montrer sa validité.

15 - Soit $r, s \in \{1, 2, ..., n-2\}$. En appliquant la formule de condensation, montrer que $A^{(2)}_{r,s}$ est le déterminant d'une matrice 3×3, extraite de M, que l'on précisera.

16 - Soit $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et $r, s \in \{1, 2, ..., n-k\}$.

Généraliser le résultat précédent en exprimant $A^{(k)}_{r,s}$ comme le déterminant d'une matrice de taille $(k+1, k+1)$ extraite de M que l'on précisera. Prouver que

$$A^{(n-1)}_{1,1} = \det M$$

ce qui établit la validité de l'algorithme.

IV. Le λ-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable, noté $\det_\lambda M$, de la manière suivante.

Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$.

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.

On impose de plus, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de condensation suivante :

$$\det_\lambda M \det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n} = \det_\lambda [M]^1_1 \det_\lambda [M]^n_n + \lambda \det_\lambda [M]^1_n \det_\lambda [M]^n_1 \qquad (2)$$

Cette condition (2) permet donc de définir, par récurrence, le λ-déterminant pour une matrice M de taille $n \times n$, à la condition de ne pas avoir à diviser par 0 au cours de son calcul. Plus précisément, supposons que cette procédure par récurrence ait permis de définir le membre de droite de (2) ainsi que $\det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n}$ et qu'en plus ce dernier soit non nul. Alors on définit $\det_\lambda M$ par (2) puisqu'on peut diviser par $\det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n} \neq 0$.

Dans la suite, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda M$ est bien défini.

17 - Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, et $j \in \{1, ..., n\}$. On note $M_{t,j}$ la matrice obtenue à partir de M par multiplication de la j^{eme} colonne de M par t. Montrer que $\det_\lambda M_{t,j}$ est bien défini et donner sa valeur en fonction de $\det_\lambda M$ et de t.

On considère un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les réels x_i sont tous non nuls. On introduit la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n},$$

où x_i^{j-1} est le coefficient situé sur la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

18 - On suppose que $x_j + \lambda x_i$ est non nul pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $1 \leq i < j \leq n$. Calculer $\det_\lambda V(x_1, x_2, ..., x_n)$ en fonction des $x_j + \lambda x_i$, $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$. (On commencera par le cas $n = 3$ puis on procédera par récurrence sur n).

Fin du Problème

A 2010 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2010

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Théorème de Rolle dans le cas complexe .

Dans ce problème on se propose de prouver l'analogue complexe suivant du théorème de Rolle :

Théorème 1. *Soient a et b deux nombres complexes distincts et n un entier $\geqslant 2$. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n tel que $P(a) = P(b)$. Le polynôme dérivé $P'(X)$ de P possède alors au moins un zéro z_0 (ie $P'(z_0) = 0$) dans le disque*

$$D_{a,b;n} = \Big\{ z \in \mathbb{C};\ |z - \frac{a+b}{2}| \leqslant R_n(a,b) \Big\},$$

où

$$R_n(a,b) = \frac{|a-b|}{2}\ \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Soit $P(X) = \sum_{l=0}^{N} u_l X^l \in \mathbb{C}[X]$, le polynôme dérivé $P'(X)$ de $P(X)$, est donné par :

$$P'(X) = \sum_{l=0}^{N-1} u_{l+1}(l+1)X^l\,.$$

Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

A. Définition de $A_z P(X)$.

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $z \in \mathbb{C}$. On définit le polynôme $A_z P \in \mathbb{C}[X]$ par la formule :

$$A_z P(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Cette définition de A_z dépend donc de l'espace de départ $\mathbb{C}_n[X]$.

1) Vérifier que A_z définit une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Prouver que :

$$A_{z_1}\Big(A_{z_2}P\Big)(X) = A_{z_2}\Big(A_{z_1}P\Big)(X),$$

où dans la composition $A_{z_1} \circ A_{z_2}$ (du membre de gauche), A_{z_2} est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_1} est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$. Pareillement, dans la composition

$A_{z_2} \circ A_{z_1}$ (du membre de droite), A_{z_1} est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et A_{z_2} est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$.

3) Pour $z \in \mathbb{C}$, déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que $A_z P(X)$ soit le polynôme nul. (On pourra utiliser la famille formée par les polynômes $(X-z)^k, 0 \leqslant k \leqslant n$). Déterminer alors l'image de l'application

$$A_z : \mathbb{C}_n[X] \mapsto \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres de l'endomorphisme $\widehat{A_z}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \widehat{A_z}(P)(X) = (z-X)P'(X) + nP(X).$$

Montrer que $\widehat{A_z}$ est diagonalisable.

5) On conserve les notations de la question précédente. Soit E un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ commutant avec $\widehat{A_z}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $Q(\widehat{A_z}) = E$. (On pourra utiliser un polynôme associé à une interpolation de Lagrange convenable).

B. Définition de δ_ξ.

On considère la bijection f :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \mapsto & \frac{1}{z} = f(z) \end{array}$$

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$. On désignera par $\mathcal{C}$ un cercle (de centre z_0 et de rayon R non nul) de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = R\}.$$

On notera respectivement $\mathcal{C}^-$ et $\mathcal{C}^+$ l'intérieur géométrique et l'extérieur géométrique de $\mathcal{C}$. Plus précisément :

$$\mathcal{C}^- = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\},\ \mathcal{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| > R\}.$$

6) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre z_0 et de rayon $R > 0$ tel que l'origine 0 appartient à $\mathcal{C}^+$. On pose $z_0 = re^{i\alpha}$ où $r \in]R, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouver que $f(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de r, α, R. Vérifier en outre que l'origine 0 appartient à $f(\mathcal{C})^+$. (On pourra partir de

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = z\overline{z} - z_0\overline{z} - z\overline{z_0} + z_0\overline{z_0} = R^2.)$$

7) On conserve les hypothèses et notations de la question précédente. Prouver que $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$. C'est à dire que f transforme l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ en la totalité de l'intérieur du cercle $f(\mathcal{C})$ (on pourra utiliser le fait *admis* suivant. Un point u de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ appartient à $\mathcal{C}^-$ si et seulement si la demi-droite D_u issue de 0 et passant par u rencontre $\mathcal{C}$ en deux points distincts A, B tels que u appartient au segment *ouvert* $]A, B[$. On pourra alors considérer $f(D_u)$).

Soient $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, non nécessairement deux à deux distincts.

Soit $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}$ tel que $\frac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}$ est *non nul*. On considère *alors* le nombre complexe δ_ξ défini par

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi} \ . \tag{1}$$

8) Soit $\mathcal{C}$ un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$. Montrer que si l'origine 0 appartient à $\mathcal{C}^+$ alors δ_0 est bien défini et appartient à $\mathcal{C}^-$ (on pourra commencer par prouver que $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(z_i)$ appartient à $f(\mathcal{C})^-$).

9) Soit $\mathcal{C}$ un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$. Montrer que si $\xi \in \mathcal{C}^+$ alors δ_ξ est bien défini et appartient à $\mathcal{C}^-$.

C. Condition d'apolarité.

Dans cette partie, $z_1, \cdots, z_n$ désigneront n nombres complexes non nécessairement deux à deux distincts.

10) Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ et

$$\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

Exprimer $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)}$ en fonction des $\dfrac{1}{\xi - z_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. En déduire que si $P'(\xi)$ est non nul alors

$$\delta_\xi = \xi - n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$$

où δ_ξ est défini par (1).

11) Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i) \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Montrer que l'ensemble des zéros $\xi \in \mathbb{C}$ de $A_z P(X)$ est la réunion des deux ensembles suivants :
– $\{z_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ P'(z_i) = 0\}$.
– $\{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\},\ \delta_\xi = z\}$, où δ_ξ est défini par (1).

12) On conserve les notations de la question précédente. Montrer que

$$z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j$$

si et seulement si le degré de $A_z P(X)$ est strictement inférieur à $n-1$.

13) On considère le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}_1$ tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}_1^-$ et $z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^+$. Prouver alors que $A_z P(X)$ est *exactement* de degré $n-1$. Puis prouver que les $n-1$ zéros de $A_z P(X)$ (en comptant les multiplicités) appartiennent tous à $\mathcal{C}_1^-$ (on pourra utiliser les questions 9 et 11).

On considère deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré n,

$$P(X) = u\prod_{i=1}^{n}(X - z_i),\ \text{et}\ Q(X) = v\prod_{i=1}^{n}(X - z_i'),$$

où $u, v \in \mathbb{C}^*$ et z_i, z_i' désignent respectivement les zéros de $P(X)$ et $Q(X)$.
On dira que P est *apolaire par rapport à* Q si $A_{z_1'} A_{z_2'} \cdots A_{z_n'} P(X) = 0$. Quand on écrit $A_{z_1'} A_{z_2'} \cdots A_{z_n'}$ dans cet ordre on utilise la convention décrite dans la question 2. Plus précisément, $A_{z_n'}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $A_{z_{n-1}'}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$, …, $A_{z_1'}$ est vu comme application de $\mathbb{C}_1[X]$ vers $\mathbb{C}$. Ainsi $A_{z_1'} A_{z_2'} \cdots A_{z_n'} P(X)$ est une constante.

14) On suppose que P est apolaire par rapport à Q. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle tel que $\{z_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$ alors il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $z_i' \in \mathcal{C}^-$ (on utilisera la question précédente).

Dans la suite, on fixe a, b deux points distincts de $\mathbb{C}$.

15) Montrer qu'il existe $b_0, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ que l'on calculera, tels que pour tout polynôme du type

$$T(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1},$$

on ait $\int_0^1 T(a + t(b-a))dt =$

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0.$$

Avec les notations de la question précédente, on fixe n un entier supérieur ou égal à deux et on pose

$$\Delta(X) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} b_{n-2} X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-1}.$$

16) Montrer que $\Delta(X) = C_n\big((X-a)^n - (X-b)^n \big)$ où C_n est une constante non nulle que l'on calculera.

Soit $P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$ de degré $n \geqslant 2$ tel que $P(a) = P(b)$. On écrit

$$P'(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1}.$$

On désigne par $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ les zéros (comptés avec multiplicité) de $P'(X)$. On admet que la constante $(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \ldots A_{t_{n-1}} \Delta(X)$ est égale à :

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0 \,.$$

17) Montrer que $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$ (on pourra utiliser la question 15). En déduire alors le **Théorème 1** (on pourra appliquer la question 14).

FIN DU PROBLÈME

A 2011 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $M_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice N de $M_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ on note :

- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\left(\left(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{\alpha_i}\right)$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie B, à l'exception de la question 11), est indépendante de la partie A.
La partie C est indépendante des parties précédentes.

A. Décomposition de Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \,.$$

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)

3) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A.

Un exemple pour $n = 3$:

5) Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

B. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \qquad \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

6) Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.

7) Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

8) En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

9) Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

10) Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

11) Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes* (et non sesquilinéaire par rapport à la deuxième) et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp_b} = \big\{x \in E\,;\ \forall\, y \in F,\ b(x, y) = 0\big\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp_b} = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :
(i) u est diagonalisable $\implies$ (ii) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ $\implies$ (iii) $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille libre en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base de E *antéduale* (dont $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ est la base duale).

14) Montrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_p)$, et en déduire la valeur de $\dim F + \dim(F^{\perp_b})$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}\big((\operatorname{comm}_A)^2\big)$.

15) Montrer que l'application φ de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

16) Établir l'égalité $\big(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A)\big)^{\perp_\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

17) En déduire que si A est nilpotente, il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

18) Démontrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

19) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

A 2011 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2011

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Sur le calcul des variations

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f \in E} J(f),$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum.

On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^k telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

A. Préliminaire

1) On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.

3) En déduire les solutions $X : I \to \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle

$$X' = AX. \tag{1}$$

4) Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \tag{2}$$

et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pourra considérer le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}.$$

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5) On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leqslant 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe C^3 sur $\mathbb{R}$?

6) Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.

7) Soit $F \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $u \in E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a,b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P\big(f(x)\big) + Q\big(f'(x)\big)\right] \mathrm{d}x,$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.

Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leqslant J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E^2_{0,0}$.

8) Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

9) On suppose que pour tout $f \in E$, $J(f_0) \leqslant J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0,1], \qquad P'\big(f_0(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Q'\big(f_0'(x)\big)\right]. \tag{Δ}$$

Exemples

Premier exemple. On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$.

10) Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.

11) Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Deuxième exemple. On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \big(f'(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^3 \, \mathrm{d}x.$$

12) Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.

13) Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$.)

D. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in C^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions $g \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.

Dans les deux questions suivantes, on considère $f \in E$.

14) Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend *pas* vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

15) En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right] \, \mathrm{d}x.$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie C, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E, alors f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (2) : $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16) Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à E. (On pourra d'abord étudier leur appartenance à L^2.)

On note e_1 et e_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par les formules

$$e_1(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\cos\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad e_2(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\sin\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels α et β,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}.$$

On pose également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \sin\Big(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\Big).$$

17) On suppose, dans cette question, que la fonction J présente un minimum en un élément f de E. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$. Montrer par ailleurs qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\psi$.

18) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\int_0^A \Big[\big(f(x)\big)^2 - \big(f'(x)\big)^2 + \big(f''(x)\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^A \big[f(x) + f'(x) + f''(x)\big]^2\,\mathrm{d}x + \big(f(0) + f'(0)\big)^2 - \big(f(A) + f'(A)\big)^2.$$

Quel est le comportement de $\big(f(A) + f'(A)\big)^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet effectivement un minimum au point $\lambda\psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

19) Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions $f_0 \in E$ telles que $J(f_0) = \min_{f\in E} J(f)$, sans passer par l'équation différentielle (2).

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}.$$

20) Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|^2 \leqslant 2\,\|f\| \cdot \|f''\|.$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f_\mu) \geqslant 0$, pour *tout* réel $\mu > 0$.

21) Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

FIN DU PROBLÈME

A 2011 MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PSI).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Inégalité de Prékopa et Leindler.

Notations.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ (resp. $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^*)$) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Pour tous réels a et b on notera $a\mathcal{A}+b\mathcal{B}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} = \{ax + by,\ x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{B}\}\,.$$

En particulier pour $a = -1$, on écrit $-\mathcal{A} = \{-x,\ x \in \mathcal{A}\}$.

Si f désigne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$ alors on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si:

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\,.$$

L'opposée d'une fonction convexe est une fonction concave. On rappelle que si g est de classe C^1 sur I, alors g est convexe si et seulement sa dérivée g' est croissante (au sens large) sur I.

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$, tous $x \in I$ et $\lambda \in]0,1[$, on écrira $f(x)^\lambda$ pour $(f(x))^\lambda$.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1) Soient λ un réel dans l'intervalle $]0,1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}\,,$$

(on pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité). Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u\,.$$

2) Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0,1[$. Montrer que

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda\,.$$

Dans toute cette partie λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et f, g, h sont des fonctions de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par "inégalité de Prékopa et Leindler", ou en abrégé "P-L":

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}\,. \tag{1}$$

Dans les questions 3), 4) et 5) on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3) On note $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0,1[$ il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)dx = t, \quad \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)dx = t\,.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction : $u \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)dx$).

4) Montrer que les applications u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0,1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.

5) Prouver que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)\,,$$

est égal à $\mathbb{R}$. Puis montrer que w définit un changement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité "P-L" (1).

On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u.

A partir de maintenant, on suppose que f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^{\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}\,.$$

Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On note $\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1-\lambda)$ et, $\widehat{M} = M\max(\lambda, 1-\lambda)$. Pour chaque réel u on pose:

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\Theta^2}(|u| - \widehat{M})^2), & \text{si } |u| > \widehat{M} \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M} \end{cases}$$

7) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$ alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.

8) Soit $\epsilon \in]0,1[$, $f_\epsilon = f + \epsilon\Psi$ et $g_\epsilon = g + \epsilon\Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x)^{\lambda} g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \epsilon^{\Lambda}(\|f\|_\infty^{\lambda} + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\,(\Psi_M(z))^{\Lambda} + \epsilon\Psi(z),$$

où $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$).

9) En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)\,.$$

11) Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Partie II. Fonctions log-concaves.

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}\,.$$

12) On note $\langle \cdot\,; \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soit $S \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot\,; \cdot \rangle)$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle S(x); x \rangle \geq 0$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp\left(-\langle S(x); x \rangle\right),$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$.

Partie III. Quelques applications géométriques.

Dans cette partie on admettra que l'inégalité "P-L" démontrée dans la partie I reste vraie dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ continues par morceaux et intégrables. C'est-à-dire que pour toutes fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,,$$

l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}.$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *à support borné* si il existe un réel $M > 0$ tel que f est nulle en dehors du carré $[-M, M]^2$, c'est à dire que $f(x, y) = 0$ si $|x| > M$ ou $|y| > M$.

On admettra que

$$\int_{-M}^{M} \Big(\int_{-M}^{M} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{-M}^{M} \Big(\int_{-M}^{M} f(x,y)dx\Big)dy\,,$$

et que cette valeur commune ne dépend pas du choix de M. On définit alors l'intégrale double $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$ de $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ comme la valeur commune des deux intégrales itérées écrites dans l'égalité précédente.

13) Soit $\lambda \in]0,1[$ et f, g, h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ continues à support borné et telles que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall Y \in \mathbb{R}^2, \quad h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}\,.$$

Montrer que

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy \geq \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy\right)^\lambda \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy\right)^{1-\lambda}.$$

Dans la suite on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique.

14) Soit $\mathcal{A}$ une partie ouverte bornée non vide de $\mathbb{R}^2$. On désigne par $C(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A},\ f(x,y) = 0$ (en d'autres termes f est nulle hors de $\mathcal{A}$). Montrer alors que la borne supérieure

$$\sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$$

existe et définit un réel strictement positif noté $V(\mathcal{A})$.

15) On considère un rectangle $]a,b[\times]c,d[$ du plan $\mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $c < d$. On désigne par $D(O,R)$ le disque ouvert de centre l'origine O et de rayon $R > 0$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Calculer alors les deux réels $V(]a,b[\times]c,d[)$ et $V(D(O,R))$. Que représentent-ils respectivement? (Dans le calcul de $V(]a,b[\times]c,d[)$ on pourra utiliser des fonctions du type $(x,y) \mapsto f(x,y) = \phi(x)\varphi(y)$, où ϕ et φ sont des fonctions continues et affines par morceaux bien choisies).

16) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties ouvertes bornées non vides de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0,1[$. Vérifier que $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Puis montrer que

$$V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geq V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}\,.$$

Pour démontrer cette inégalité, on utilisera le résultat *admis* suivant. Pour tout $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$, la fonction h déterminée par:

$$\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} /\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1-\lambda)Y\}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

17) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ une fonction continue et log-concave au sens de la partie II. Prouver que l'inégalité précédente reste vraie si on remplace l'application V par l'application γ définie pour toute partie ouverte bornée (non vide) $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$\gamma(\mathcal{A}) = \sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)u(x,y)dxdy\,.$$

Fin du Problème.

A 2011 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PSI).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

COURSE-POURSUITE.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs, et $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lambda(0) = 0$. L'objet du problème est l'étude de l'équation différentielle

$$E(\lambda) : x'(t) = \frac{2}{x(t) - \lambda(t)}.$$

On dira qu'une fonction ϕ de classe C^1 sur un intervalle non vide I est solution de $E(\lambda)$ si pour tout $t \in I, \phi(t) \neq \lambda(t)$ et $\phi'(t) = \dfrac{2}{\phi(t) - \lambda(t)}$.

Soit $x_0 > 0$ un réel strictement positif. On appelle solution de $E(\lambda, x_0)$ une fonction $\phi : [0, a[\to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$ ou $a = +\infty$) de classe C^1 telle que

$$\phi(0) = x_0, \text{ et } \forall t \in [0, a[\, , \, \phi(t) \neq \lambda(t) \text{ et } \phi'(t) = \frac{2}{\phi(t) - \lambda(t)}.$$

Une solution de $E(\lambda, x_0)$ est dite maximale si ou bien elle est définie sur $[0, +\infty[$ ou bien elle est définie sur un intervalle $[0, a[$ $(a > 0)$ et elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand $[0, a'[$ $(a' > a)$.

On admettra le résultat suivant :

Théorème 1.

1] Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in]\lambda(t_0), +\infty[$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$x(t_0) = y_0, \text{ et } \forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\, , \, x(t) \neq \lambda(t) \text{ et } x'(t) = \frac{2}{x(t) - \lambda(t)}$$

possède une unique solution ϕ définie sur $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$.

2] Soient I, J deux intervalles inclus dans $[0, +\infty[$. On considère deux solutions $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de $E(\lambda)$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $t_1 \in I \cap J$ tel que $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Alors, ψ et φ coincident sur $I \cap J$.

3] Pour tout $x_0 > 0$ il existe une unique solution maximale, notée $t \mapsto \phi(t, x_0)$, de $E(\lambda, x_0)$. Son domaine de définition est alors noté $[0, T(x_0)[$; $T(x_0)$ est appelé temps de vie de la solution maximale $t \mapsto \phi(t, x_0)$. Ou bien $T(x_0) \in \mathbb{R}^{+*}$, ou bien $T(x_0) = +\infty$.

Le problème de Cauchy $E(\lambda, x_0)$ représente une course poursuite entre λ le lièvre et x la tortue. Au temps $t = 0$, le lièvre est à l'origine $0 = \lambda(0)$ tandis que la tortue est en $x_0 > 0$. On verra que si $T(x_0) < +\infty$ alors le lièvre rattrape la tortue, on dit qu'il y a capture. Si $T(x_0) = +\infty$ alors la tortue parvient à s'échapper.

On pourra utiliser librement les résultats de la Partie 1 pour traiter la suite, même si on ne les a pas démontrés.

1 Généralités.

1) On fixe $x_0 > 0$. Soit $\phi(\cdot, x_0) : [0, T(x_0)[\to \mathbb{R}$ la solution maximale de $E(\lambda, x_0)$. Montrer que $\forall t \in [0, T(x_0)[\,,\ \phi(t, x_0) > \lambda(t)$. Préciser le sens de variation de la fonction $\phi(\cdot, x_0)$ et montrer qu'elle admet une limite réelle ou égale à $+\infty$ en $T(x_0)$.

2) Dans cette question et la suivante on suppose que $T(x_0) < +\infty$. Montrer que si

$$\lim_{t \to T(x_0),\ t < T(x_0)} \phi(t, x_0) = +\infty$$

alors la dérivée (par rapport à t) $\phi'(t, x_0)$ est bornée sur $[0, T(x_0)[$. Aboutir à une contradiction et conclure qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \to T(x_0),\ t < T(x_0)} \phi(t, x_0) = l$.

3) Montrer que $\lambda(T(x_0)) \leq l$. On suppose que $\lambda(T(x_0)) < l$. Prouver alors que $t \mapsto \phi(t, x_0)$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur le segment $[0, T(x_0)]$ solution de $E(\lambda)$. Puis, en appliquant les parties 1] et 2] du Théorème 1 avec $y_0 = l$, $t_0 = T(x_0)$ et $J =]t_0 - \epsilon, t_0]$, montrer que l'on contredit le caractère maximal de la solution $t \mapsto \phi(t, x_0)$. Conclure que $l = \lambda(T(x_0))$. On prolonge alors $t \mapsto \phi(t, x_0)$ par continuité en $T(x_0)$ en posant $\phi(T(x_0), x_0) = \lambda(T(x_0))$.

4) Soient deux réels x_0 et y_0 tels que $0 < x_0 < y_0$. On suppose qu'il existe $t_1 \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[$ tel que $\phi(t_1, x_0) = \phi(t_1, y_0)$. En appliquant les parties 1] et 2] du Théorème 1 montrer que cela entraîne l'égalité des deux solutions maximales $\phi(\cdot, x_0)$, $\phi(\cdot, y_0)$ et, aboutir à une contradiction. En déduire que pour tout $t \in [0, \min(T(x_0), T(y_0))[,\ \phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$.

5) On suppose toujours $0 < x_0 < y_0$. En déduire que $T(x_0) \leq T(y_0)$. (On pourra, en raisonnant par l'absurde, supposer que $T(x_0) > T(y_0)$ et utiliser les questions 4), 3) et 1)).

2 Etude de deux exemples.

6) Soient $x_0 > 0$ et λ_0 la fonction nulle : $\forall t \geq 0,\ \lambda_0(t) = 0$. Expliciter la solution maximale de $E(\lambda_0, x_0)$. Peut il y avoir capture ?

On considère la fonction $\lambda_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1],\ \lambda_1(t) = 4(1 - \sqrt{1 - t});\ \forall t \geq 1,\ \lambda_1(t) = 4.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ que l'on précisera, tel que la fonction ϕ_0 déterminée par

$$\forall t \in [0, 1],\ \phi_0(t) = a - (a - 2)\sqrt{1 - t},$$

définit la solution maximale de $E(\lambda_1, 2)$. Puis prouver que $T(2) = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie **2** on considère une autre solution de $E(\lambda_1)$, $\phi = \phi(\cdot, x_0)$, telle que : $\phi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{2\}$.

8) Pour chaque $t \in [0, \min(1, T(x_0))[$, donner une expression simple de $\frac{d}{dt}\big(\ln|\phi(t) - \phi_0(t)|\big)$ en fonction de

$$-\big(\phi(t) - \lambda_1(t)\big)\sqrt{1 - t}\,.$$

9) Montrer que la fonction

$$t \mapsto C(t) = \ln|\phi(t) - \phi_0(t)| - \frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t) - \phi_0(t)}$$

est bien définie sur $[0, \min(1, T(x_0))[$ et y est constante. (On pourra utiliser les questions 4 et 8).

10) On suppose que $x_0 \in]0, 2[$. Prouver que $C(0)$ est supérieur ou égal à $1+\ln 2$. En supposant $T(x_0) < 1$, calculer $C(T(x_0))$ et aboutir à une contradiction. En déduire que $T(x_0) = 1$.

Dans la question suivante on suppose $x_0 = \phi(0) > 2$.

11) Montrer que $T(x_0) \geq 1$. Puis montrer, en considérant $C(t)$ quand $t \to 1$ par valeurs inférieures, que $T(x_0)$ ne peut pas être égal à 1. Enfin montrer, en résolvant l'équation $E(\lambda_1)$ *pour* $t \geq 1$, que $T(x_0)$ ne peut pas être un nombre réel. Conclure. (On rappelle que $\forall t \geq 1,\ \lambda_1(t) = 4$).

3 Une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de capture.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. On rappelle que la fonction λ du problème $E(\lambda)$ vérifie ces deux hypothèses. On note

$$M(f) = \sup_{0<x<y;\ x,y\in\mathbb{R}^{+*}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\sqrt{y-x}} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

12) Soient $t, s \in [0, 1]$ tels que $0 \leq s < t$. Déterminer une fonction $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{|\lambda_1(1-s) - \lambda_1(1-t)|}{\sqrt{t-s}} = \frac{F(s/t)}{1+\sqrt{s/t}}.$$

En déduire que $M(\lambda_1) = 4$. On rappelle que λ_1 a été introduite juste avant la Question 7.

Dorénavant et jusqu'à la fin du problème, on suppose que la fonction λ intervenant dans l'équation différentielle $E(\lambda)$ vérifie $M(\lambda) < 4$. On se propose alors de montrer qu'il n'y a pas de capture, c'est à dire que pour tout $x_0 > 0,\ T(x_0) = +\infty$.

On raisonne par l'absurde, pour aboutir à une contradiction. Soit donc $x_0 > 0$ tel que la solution maximale, notée $t \mapsto x(t)$, de $E(\lambda, x_0)$ ait un temps de vie $T(x_0) < +\infty$ (fini).

13) Montrer que $M(\lambda)$ est strictement positif. (On pourra utiliser la question 6).

Soit un réel $r > 0$. On désigne par $\widehat{\lambda}_r$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \widehat{\lambda}_r(t) = \frac{1}{r}\lambda(r^2 t).$$

On admettra que $M(\widehat{\lambda}_r) = M(\lambda)$.

14) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^{+*}$, que l'on précisera, tel que la solution maximale $\widehat{x}$ de $E(\widehat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$ a un temps de vie égal à 1 et peut être prolongée par continuité en 1 en posant $\widehat{x}(1) = \lambda(1)$. (On pourra montrer que $\widehat{x}$ est de la forme $t \mapsto \frac{1}{r}x(bt)$ où b est une constante à préciser).

Quitte à remplacer (λ, x_0) par $(\widehat{\lambda}_r, \frac{1}{r}x_0)$, on peut donc supposer que la solution maximale $t \mapsto x(t)$ de $E(\lambda, x_0)$ a un temps de vie $T(x_0) = 1$ et peut être prolongée par continuité en 1 en posant $x(1) = \lambda(1)$.

15) Montrer que

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x(t) - \lambda(t) \leq M(\lambda)\sqrt{1-t},$$

et en déduire que

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x(1) - x(t) \geq \frac{4}{M(\lambda)}\sqrt{1-t}.$$

16) Montrer alors que

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{M(\lambda)})\sqrt{1-t}.$$

(On utilisera la deuxième inégalité de la question précédente et la définition de $M(\lambda)$).

17) Soit μ un réel > 0 tel que

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x(t) - \lambda(t) \leq \mu\sqrt{1-t}.$$

Montrer alors que

$$\forall t \in [0,1]\,,\ x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{\mu})\sqrt{1-t}.$$

Conclure que $M(\lambda) - \dfrac{4}{\mu}$ est strictement positif.

On rappelle que $M(\lambda) < 4$.

18) Déduire de ce qui précède l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant :

$$u_0 = M(\lambda), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = M(\lambda) - \frac{4}{u_n}\,.$$

Etudier la convergence de cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et aboutir à une contradiction. En déduire que pour tout réel $x_0 > 0$, $T(x_0) = +\infty$.

Fin du Problème

L'équation $E(\lambda)$ a été introduite par Loewner. Elle joue un rôle important dans diverses branches des mathématiques (analyse complexe, processus stochastiques...etc).

A 2011 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Inégalité de Prékopa et Leindler.

Notations.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ (resp. $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^*)$) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$).

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Pour tous réels a et b on notera $a\mathcal{A}+b\mathcal{B}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} = \{ax + by,\ x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{B}\}\,.$$

En particulier pour $a = -1$, on écrit $-\mathcal{A} = \{-x,\ x \in \mathcal{A}\}$.

Si f désigne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$ alors on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si:

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\,.$$

L'opposée d'une fonction convexe est une fonction concave.

On rappelle que si g est de classe C^1 sur I, alors g est convexe si et seulement sa dérivée g' est croissante (au sens large) sur I.

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$, tous $x \in I$ et $\lambda \in]0,1[$, on écrira $f(x)^\lambda$ pour $(f(x))^\lambda$.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1) Soient λ un réel dans l'intervalle $]0,1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}\,,$$

(on pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité). Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u\,.$$

2) Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0,1[$. Montrer que

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda\,.$$

Dans toute cette partie λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et f, g, h sont des fonctions de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par "inégalité de Prékopa et Leindler", ou en abrégé "P-L":

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}\,. \tag{1}$$

Dans les questions 3), 4) et 5) on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3) On note $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0,1[$ il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)dx = t, \quad \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)dx = t\,.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction : $u \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)dx$).

4) Montrer que les applications u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0,1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.

5) Montrer que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)\,,$$

est égal à $\mathbb{R}$. Puis prouver que w définit un changement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité "P-L" (1).

On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u.

A partir de maintenant, on suppose que les fonctions f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^{\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}\,.$$

Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On note $\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1-\lambda)$ et, $\widehat{M} = M\max(\lambda, 1-\lambda)$. Pour chaque réel u on pose:

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\Theta^2}(|u| - \widehat{M})^2), & \text{si } |u| > \widehat{M} \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M} \end{cases}$$

7) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$ alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.

8) Soit $\epsilon \in]0,1[$, $f_\epsilon = f + \epsilon\Psi$ et $g_\epsilon = g + \epsilon\Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x)^{\lambda} g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \epsilon^{\Lambda}(\|f\|_\infty^{\lambda} + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\,(\Psi_M(z))^{\Lambda} + \epsilon\Psi(z),$$

où $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$).

9) En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)\,.$$

11) Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Partie II. Fonctions log-concaves.

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}\,.$$

12) Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp\left(-N(x)^2\right),$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$. (On pourra observer que la fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$).

Partie III. Quelques applications géométriques.

Dans cette partie on admettra que l'inégalité "P-L" démontrée dans la partie I reste vraie dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ continues par morceaux et intégrables. C'est-à-dire que pour toutes fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\,,$$

l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda}.$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *à support borné* si il existe un réel $M > 0$ tel que f est nulle en dehors du carré $[-M, M]^2$, c'est à dire que $f(x, y) = 0$ si $|x| > M$ ou $|y| > M$.

On admettra que

$$\int_{-M}^{M} \Big(\int_{-M}^{M} f(x,y)dy\Big)dx = \int_{-M}^{M} \Big(\int_{-M}^{M} f(x,y)dx\Big)dy\,,$$

et que cette valeur commune ne dépend pas du choix de M. On définit alors l'intégrale double $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$ de $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ comme la valeur commune des deux intégrales itérées écrites dans l'égalité précédente.

13) Soit $\lambda \in]0,1[$ et f, g, h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ continues à support borné et telles que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall Y \in \mathbb{R}^2, \quad h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}\,.$$

Montrer que

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy \geq \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy\right)^\lambda \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy\right)^{1-\lambda}.$$

Dans la suite on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique.

14) Soit $\mathcal{A}$ une partie ouverte bornée non vide de $\mathbb{R}^2$. On désigne par $C(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A},\ f(x,y) = 0$ (en d'autres termes f est nulle hors de $\mathcal{A}$). Montrer alors que la borne supérieure

$$\sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$$

existe et définit un réel noté $V(\mathcal{A})$.

15) On considère un rectangle $]a,b[\times]c,d[$ du plan $\mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $c < d$. Calculer le réel $V(]a,b[\times]c,d[)$. Que représente-t-il? (On pourra utiliser des fonctions du type

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \phi(x)\varphi(y)\,,$$

où ϕ et φ sont des fonctions continues et affines par morceaux bien choisies).

16) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties ouvertes bornées non vides de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0,1[$. Vérifier que $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Puis montrer que

$$V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geq V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}\,.$$

Pour démontrer cette inégalité, on utilisera le résultat *admis* suivant. Pour tout $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$, la fonction h déterminée par:

$$\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} /\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1-\lambda)Y\}$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

17) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ une fonction continue et log-concave au sens de la partie II. Prouver que l'inégalité précédente reste vraie si on remplace l'application V par l'application γ définie pour toute partie ouverte bornée (non vide) $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$\gamma(\mathcal{A}) = \sup_{f \in C(\mathcal{A})} \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)u(x,y)dxdy\,.$$

Fin du Problème.

A 2011 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2011

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Oscillations linéaires et un théorème ergodique.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $C^k([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour chaque fonction $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, on notera $x'(t)$ la dérivée première de x au point t et $x''(t)$ sa dérivée seconde.

On désignera $C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont $2\pi-$périodiques ; $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t+2\pi) = h(t)$. Pour $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ on posera :

$$||h|| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| .$$

On désigne par $\langle ; \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$. On identifiera chaque vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur colonne, encore noté x, de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère deux matrices A et K de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ symétriques d'ordre n à coefficients réels. On suppose que pour tout vecteur colonne non nul x de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle Ax; x\rangle > 0,\ \langle Kx; x\rangle > 0 .$$

I. Oscillations d'un certain système linéaire.

❑ **Q1** – Prouver que la matrice symétrique réelle A est inversible. (On pourra considérer le noyau de l'application $x \mapsto Ax$).

❑ **Q2** – Prouver que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle A^{-1}x; y\rangle = \langle x; A^{-1}y\rangle$. En déduire que la matrice A^{-1} est symétrique.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose : $(x;y)_A = \langle Ax; y\rangle$. On désigne par E l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ défini par $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $E(x) = A^{-1}Kx$.

❑ **Q3** – Prouver que $(\,;\,)_A$ définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Puis montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (E(x); y)_A = (x; E(y))_A .$$

❑ **Q4** – Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^n$ et n réels strictement positifs $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$ $(1 \le i \le n)$ tels que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ A^{-1}Ke_i = \lambda_i e_i .$$

On considère l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ Ax''(t) = -Kx(t) \tag{1}$$

de fonction inconnue $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$.

❑ **Q5** – Montrer que $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si il existe $2n$ nombres réels $(a_i)_{1\leq i\leq n}, (b_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ x(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(a_i \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + b_i \sin(t\sqrt{\lambda_i})\,\big) e_i\,.$$

En déduire que l'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension finie dont on précisera la dimension.

❑ **Q6** – Soient $x, y \in C^1([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. Prouver que

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \frac{d}{dt}(\langle Ax; y\rangle)(t) = \langle Ax'(t); y(t)\rangle + \langle Ax(t); y'(t)\rangle\,.$$

❑ **Q7** – Soit $x \in C^2([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ une solution de l'équation différentielle (1). Pour chaque réel $t \geq 0$ on pose, $T(x')(t) = \frac{1}{2}\langle Ax'(t); x'(t)\rangle$ et $U(x)(t) = \frac{1}{2}\langle Kx(t); x(t)\rangle$. Montrer alors que la quantité $T(x')(t) + U(x)(t)$ ne dépend pas de $t \in [0,+\infty[$.

Les solutions de (1) interviennent en physique ; l'objet de la partie III est d'étudier leur comportement quand $t \to +\infty$ dans le cas $n = 2$. Les quantités $T(x')(t)$ et $U(x)(t)$ représentent respectivement une énergie cinétique et une énergie potentielle.

II. Résultats intermédiaires.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On désigne par c_k le réel positif tel que : $c_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(\frac{1+\cos t}{2}\big)^k dt = 1\,,$ et pour tout réel t on pose $R_k(t) = c_k\big(\frac{1+\cos t}{2}\big)^k$.

❑ **Q8** – Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k \sin t\, dt$. En déduire que $c_k \leq \frac{k+1}{4}$.

❑ **Q9** – Soit $\epsilon \in]0,\pi[$. On pose : $d_k(\epsilon) = \displaystyle\sup_{t\in[\epsilon,2\pi-\epsilon]} R_k(t)$. Prouver alors que

$$\lim_{k\to+\infty} d_k(\epsilon) = 0\,.$$

❑ **Q10** – Soit $\epsilon \in]0,\pi[$, et $k \in \mathbb{N}$. Prouver que pour toute $h \in C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tout réel u, on a :

$$\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt = \int_0^{2\pi} R_k(t_1)h(u-t_1)dt_1\,, \text{et}$$

$$\left|\int_0^{2\pi} R_k(u-t)h(t)dt - h(u)\right| \leq 2||h'||\epsilon + 4\pi||h||d_k(\epsilon)\,.$$

(On rappelle que $\int_0^{2\pi} R_k(t_1)dt_1 = 1$ et que $||h||$ est défini au début de l'énoncé. Pour établir l'inégalité, on pourra utiliser que $h(u-t_1) = h(u-t_1+2\pi)$ lorsque $t_1 \in [2\pi-\epsilon, 2\pi]$).

III. Un théorème ergodique.

Dans toute la suite on se limite au cas $n = 2$ de la partie I.

❑ **Q11** – Soit $x \in C^2([0, +\infty[; \mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation (1). Montrer qu'il existe quatre réels $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$ tels que :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ x(t) = \sum_{i=1}^{2} c_i \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i)\, e_i\,. \tag{2}$$

(On rappelle que les deux vecteurs e_1, e_2 sont introduits dans la Question 4).

Dans la suite on fixe deux réels φ_1, φ_2 et on pose :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \theta(t) = (t\sqrt{\lambda_1} + \varphi_1, t\sqrt{\lambda_2} + \varphi_2)\,. \tag{3}$$

Jusqu'à la fin de l'énoncé, on suppose que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}$ n'est pas un nombre rationnel. On suppose donc *qu'il n'existe pas* d'entiers naturels $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{m_1}{m_2}$.

On désigne par $C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2 + 2\pi)\,.$$

On désigne par $C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $f \in C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ telles que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2)$, $\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et définissent toutes deux des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

❑ **Q12** – Soit $f \in C_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Prouver que

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in[0,2\pi]^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)|.$$

En déduire que $(\theta_1, \theta_2) \mapsto |f\,(\theta_1, \theta_2)|$ est majorée sur $\mathbb{R}^2$ et atteint sa borne supérieure.

Avec les notations de la question précédente, on posera $||f|| = \sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2} |f\,(\theta_1, \theta_2)|$.

Soit $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. On sait que $\theta_2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1$ est continue sur $\mathbb{R}$. On pose alors :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2\,.$$

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *(Théorème Ergodique) Soit $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Alors,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \theta(t) dt = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2\,. \tag{4}$$

(On rappelle que $\theta(t)$ est défini dans (3) et que $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}$ n'est pas un nombre rationnel).

❑ **Q13** – Soit $j, l \in \mathbb{Z}$. Prouver le Théorème Ergodique dans le cas particulier de la fonction $(\theta_1, \theta_2) \mapsto f(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1 j} e^{i\theta_2 l}$. (Dans le cas où $(j, l) \neq (0, 0)$ on pourra vérifier que $j\sqrt{\lambda_1} + l\sqrt{\lambda_2}$ est non nul puis on pourra calculer séparément chaque membre de (4) dans ce cas particulier).

Dans les trois questions suivantes on fixe un élément quelconque $f \in C^1_{2\pi,2\pi}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ f_k(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_k(u - \theta_1) R_k(v - \theta_2) f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \,.$$

❑ **Q14** – Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver qu'il existe $(2k+1)^2$ nombres complexes $(a_{j,l})_{-k \leq j,l \leq k}$ tels que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $f_k(u, v) = \sum_{-k \leq j,l \leq k} a_{j,l} e^{iuj} e^{ivl}$. Justifier que la fonction f_k vérifie le Théorème Ergodique.

❑ **Q15** – Soit $\epsilon \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $f_k(u, v) - f(u, v)$ comme somme de deux termes et en appliquant la Question 10, prouver que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f_k(u, v) - f(u, v)| \leq 2\epsilon(||\frac{\partial f}{\partial \theta_1}|| + ||\frac{\partial f}{\partial \theta_2}||) + 8\pi ||f|| d_k(\epsilon) \,.$$

On rappelle que $||f||$ est défini juste après la Question 12.

❑ **Q16** – Prouver le Théorème Ergodique pour la fonction f. (On pourra poser $M = 2(||\frac{\partial f}{\partial \theta_1}|| + ||\frac{\partial f}{\partial \theta_2}||) + 8\pi ||f||$. Pour $\epsilon > 0$ donné, on pourra choisir $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_k(\epsilon) < \epsilon$. Ensuite, on pourra appliquer la Question 14 à f_k et considérer $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$:

$$|\frac{1}{T} \int_0^T f_k \circ \theta(t) dt - (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2| < \epsilon \,.)$$

Soient $a, b \in]0, 2\pi[$ tels que $a < b$. On désigne par $\phi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue $2\pi-$périodique définie comme suit. La fonction $\phi_{a,b}$ est nulle sur $[0, a]$ et $[b, 2\pi]$. Pour tout $t \in [a, b]$, $\phi_{a,b}(t) = \sin^2(\frac{\pi}{b-a}(t - a))$.

On rappelle que tout ouvert non vide de $]-1, 1[^2$ contient un pavé de la forme $]\cos b, \cos a[\times]\cos d, \cos c[$ où $0 < a < b < \pi$ et $0 < c < d < \pi$.

❑ **Q17** – On considère la solution $x(t) = \sum_{i=1}^2 \cos(t\sqrt{\lambda_i} + \varphi_i)\, e_i$ de (1) obtenue en prenant $c_1 = c_2 = 1$ dans (2). Soit Ω un ouvert non vide de $\{ue_1 + ve_2 /\ u, v \in]-1, 1[\}$. Prouver qu'il existe $t \in [0, +\infty[$ tel que $x(t) \in \Omega$. (On pourra raisonner par l'absurde et justifier alors l'existence d'une fonction du type $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \phi_{a,b}(\theta_1)\phi_{c,d}(\theta_2) = \Phi(\theta_1, \theta_2)$ telle que $\Phi(\theta(t))$ est nulle pour tout $t \in [0, +\infty[$).

Fin de l'épreuve.

Le Théorème 1 dit que la moyenne temporelle de la grandeur physique f coincide avec la moyenne spatiale de f. Il s'agit de l'hypothèse ergodique du physicien Boltzmann. La Question 17 est alors une illustration du fait que toute trajectoire du système (hamiltonien) ergodique rencontre tout ouvert de l'espace des phases.

A 2012 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2012

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Le but du problème est d'étudier la réduction de matrices définies à partir d'un résultat sur les dénombrements de certaines familles entières, en utilisant les propriétés des polynômes réciproques.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Équations algébriques réciproques

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.

1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule $u_n(P)(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ est bien définie, et que c'est une symétrie.

Un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ est dit *réciproque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciproque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathscr{P}$ (respectivement à $\mathscr{D}$).

3) Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathscr{D}$ admet 1 pour racine, et que tout polynôme de $\mathscr{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

4) Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.

5) Vérifier que $P \in \mathscr{P}$ implique $(X-1)P \in \mathscr{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathscr{D}$, il existe un unique $P \in \mathscr{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

6) Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathscr{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

Quel est le degré de P ?

Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8) Montrer que R est réciproque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence $R(x) = 0 \iff P(x + \frac{1}{x}) = 0$. Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

B. Un problème de dénombrement

Si i et j sont des entiers strictement positifs, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles $u = (u_k)_{k\in\{0,1,\dots,i\}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i \leqslant j$).

La notation $f|_E$ désigne la restriction d'une application f à une partie E de son ensemble de départ.

9) Vérifier que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis et montrer que l'application

$$\begin{aligned} S_{i+1,j} &\longrightarrow S'_{i,j} \\ u &\longmapsto u|_{\{0,1,\dots,i\}} \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Dans toute la suite du problème, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$.

10) Montrer que $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ et en déduire que $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

Si $p, q \in \mathbb{N}$, on note $\binom{p}{q}$ le nombre de parties à q éléments d'un ensemble à p éléments.

11) Prouver que $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$ et en déduire la valeur de $s_{i,j}$.

Tournez la page S.V.P.

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, d'élément neutre I_n pour la multiplication. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant et Φ_M son polynôme caractéristique.

Dans cette partie, on démontre que pour tous A, B dans $M_n(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

12) Établir le résultat lorsque A est inversible.

13) Conclure en considérant la suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

D. Etude spectrale de certaines matrices

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère désormais les matrices $S = (s_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n+1\}}$ et $S' = (s'_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$, où $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ ont été définis dans la partie B.

14) Montrer que S est diagonalisable. La diagonaliser pour $n = 0$ et 1, et calculer Φ_S pour $n = 0$, 1 et 2.

15) Montrer que l'application $\psi : (\mathbb{R}_n[X])^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\psi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On suppose désormais $\mathbb{R}_n[X]$ muni de celui-ci.

16) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ définie par $B_i = \frac{X^i}{i!}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et évaluer $\psi(B_i, B_j)$ pour $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En déduire que S est définie positive. Que peut-on en conclure sur les rangs de S et de S' ?

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par la formule $f_i(t) = t^i e^{-t}$. La notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

17) Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fixé, vérifier que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, $f_i^{(j)}(t) = o(t^{-k})$ quand $t \to +\infty$. Montrer que la formule suivante :

$$L_i(t) = (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

définit un polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$ dont on déterminera les coefficients.

18) Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. (On pourra au préalable calculer $\psi(L_i, B_j)$ pour $j \leqslant i$.)

On considère l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\tau(P)(X) = P(X-1)$. On note T sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $U = T^{-1}$ son inverse.

19) Expliciter T et U et les comparer à la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{L}$. En déduire S en fonction de U, puis les valeurs de $\det(S)$ et $\det(S')$.

On considère la matrice $D = (d_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{si } i = j\,; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

20) Calculer $(DU)^2$ et en déduire que S^{-1} est semblable à $U\,U^t$, où U^t désigne la transposée de U.

21) En conclure que Φ_S est un polynôme réciproque et préciser de quelle espèce.

FIN DU PROBLÈME

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis

A 2012 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2012

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Formule sommatoire de Poisson

L'objectif de ce problème est d'établir sous quelles conditions la formule sommatoire de Poisson est vraie et d'en étudier certaines applications.

Les fonctions considérées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}^*$ l'espace vectoriel des fonctions continues f telles qu'il existe $\alpha > 1$ pour lequel la fonction $x \mapsto |x|^\alpha f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

A. Préliminaires

La *transformée de Fourier* de $f \in \mathscr{L}$ est la fonction $\hat{f}$ définie par la formule :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

1) Justifier que pour tout $f \in \mathscr{L}$, $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathscr{W}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}$, et par $\mathscr{W}^*$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{L}^*$ telles que $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$.

2) Établir que $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, vérifiant l'inclusion $\mathscr{W}^* \subset \mathscr{W}$.

Étant donné $f \in \mathscr{L}$, $\alpha > 0$ et $y, v \in \mathbb{R}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ et $f_{y,v}(x) = f(x+y)e^{-2i\pi vx}$.

3) Déterminer les transformées de Fourier de f_α et $f_{y,v}$ en fonction de $\hat{f}$. Que peut-on en déduire sur les espaces $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}^*$?

4) Calculer les transformées de Fourier des fonctions s et t définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant \frac{1}{2}\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$t(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{pour } |x| < 1\,; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5) Montrer que $\mathscr{W}^*$ et $\mathscr{W}$ sont distincts de $\mathscr{L}$. On pourra pour cela s'aider de la fonction s définie à la question précédente.

6) Si f_n est une suite de fonctions de $\mathscr{W}$ convergeant en moyenne vers une fonction $f \in \mathscr{W}$, montrer que la suite $\hat{f}_n$ converge vers $\hat{f}$, uniformément sur $\mathbb{R}$.

B. Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in \mathscr{L}^*$. Sa *périodisée* $\tilde{f}$ est définie par la formule $\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.

7) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

8) Déterminer, en fonction de $\hat{f}$, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x)\, e^{-2i\pi nx}\, \mathrm{d}x.$$

On rappelle que si deux fonctions continues périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

9) Montrer que si $\hat{f} \in \mathscr{L}^*$, alors $\tilde{f}$ est égale à la somme de sa série de Fourier. En déduire, pour tout $f \in \mathscr{W}^*$, la *formule de Poisson* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Les parties suivantes donnent diverses applications de la formule de Poisson.

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathscr{W}^*$.

10) En appliquant la formule de Poisson à la fonction $f_{x,\xi}$ définie dans la partie A, établir la généralisation suivante, pour tous réels x et ξ :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\, e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+\xi)\, e^{2i\pi x(n+\xi)}.$$

Montrer que cette formule donne un développement en série de Fourier de la fonction périodisée $\widetilde{F_x}$, où F_x est la fonction définie par $F_x(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$.

11) En déduire la *formule d'inversion de Fourier* :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

On pourra pour cela interpréter le second membre comme un coefficient de Fourier particulier de $\widetilde{F_x}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$ s'il existe $f \in \mathscr{W}^*$ non nulle telle que $\hat{f} = \lambda f$.

12) Montrer qu'une telle valeur propre est une racine quatrième de l'unité, puis déterminer toutes les valeurs propres *réelles* de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$. On pourra s'aider de combinaisons linéaires des fonctions t et $\hat{t}$ où t est définie à la question 4).

Les parties suivantes sont indépendantes les unes des autres.

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

On considère, dans cette partie, une fonction $f \in \mathscr{W}^*$ telle que $\hat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

13) Montrer qu'alors f est déterminée de façon unique par la donnée de la suite des *échantillons* $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. (On pourra s'aider de la formule généralisée de Poisson établie à la question 10).)

14) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement que $\hat{f}$ s'annule en dehors d'un intervalle $[-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$? (On pourra considérer la fonction $\xi \mapsto t(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}) - t(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon})$, où t est la fonction définie à la question 4).)

E. Contre-exemple de Katznelson

Dans cette partie, on considère la fonction t définie à la question 4) et l'on pose, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et N entier > 0 :

$$u_k(x) = t(2^k x) - t(2^{k+1}x)$$

$$u_{k,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ |n|<N}} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big)\, u_k(x-n).$$

On pose enfin, pour une suite donnée $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs :

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,N_k}.$$

On pourra utiliser, sans les re-démontrer, les égalités suivantes concernant le *noyau de Fejér* K_N :

$$K_N(x) = \sum_{|n|<N} \big(1 - \frac{|n|}{N}\big)\, e^{2i\pi nx} = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\Big)^2$$

la deuxième égalité n'ayant lieu que si $x \notin \mathbb{Z}$.

15) Montrer que la fonction f est bien définie (on pourra distinguer les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \notin \mathbb{Z}$). La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$?

Bien que ce ne soit pas nécessaire, pour la conformité au programme, on pourra admettre dorénavant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

16) Montrer que f est intégrable et que la série de terme général u_{k,N_k} converge vers f en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$?

17) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\hat{u}_k|.$$

18) En déduire qu'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\hat{f}$ soit intégrable et que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge vers $\hat{f}$ en moyenne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la nature de la convergence de la série de terme général u_{k,N_k} ?

19) Examiner la validité de la formule de Poisson pour cette fonction f. Que peut-on en conclure ?

F. Application à la resommation d'Ewald

On note g la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-\pi x^2}$, et l'on admet que $\hat{g} = g$.

20) Donner une valeur approchée de la somme de la série :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{n}{100}\right)^2}$$

exacte à 10^{-10000} près.

FIN DU PROBLÈME

A 2012 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2012

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Le sinus lemniscatique

Dans ce texte on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1 La lemniscate de Bernoulli

La lemniscate de Bernoulli (voir la Figure 1) est une courbe elliptique particulièrement simple d'équation implicite

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2. \tag{1}$$

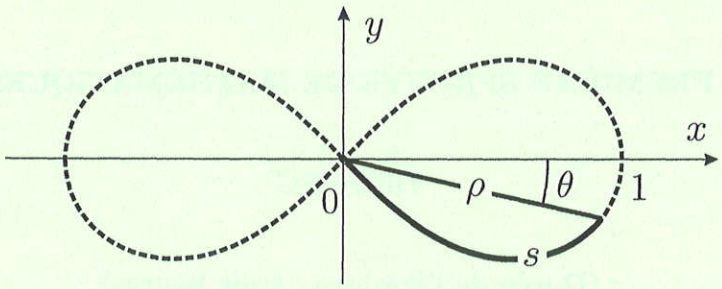


FIGURE 1 – La lemniscate de Bernoulli

Question 1 *Déterminer dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \leq 0$, une équation polaire de la lemniscate sous la forme $\rho = g(\theta)$ où la fonction g est définie sur l'intervalle $[-\pi/4, 0]$. Préciser les symétries permettant de recouvrer l'ensemble de la courbe.*

Question 2 *Montrer que g constitue une bijection de $[-\pi/4, 0]$ sur $[0, 1]$.*

Question 3 *Déterminer les tangentes à la lemniscate en $(0, 0)$*

Question 4 *Déterminer dans le demi-plan $x \geq 0$, une équation paramétrique de la lemniscate en fonction de ρ et en déduire que l'abscisse curviligne s vérifie l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:*

$$s'(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}. \tag{2}$$

2 Le sinus lemniscatique

Question 5 *Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ converge.*

On note

$$\sigma = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{3}$$

Question 6 *Que représente σ ?*

On définit la fonction F sur l'intervalle $[-1,1]$ par l'expression suivante :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{4}$$

Question 7 *Montrer que la fonction F est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.*

Question 8 *Dessiner le graphe de F et en préciser le tableau de variations.*

Question 9 *Montrer que F est développable en série entière sur $]-1,1[$.*

Question 10 *Donner l'expression des coefficients a_n de cette série.*

Question 11 *Montrer que la série de terme général a_n converge (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$) et a pour somme σ.*

Question 12 *Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1}, continue et impaire sur $[-\sigma,\sigma]$.*

Question 13 *Montrer que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\sigma,\sigma[$, calculer sa dérivée, en déduire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma,\sigma]$.*

On prolonge la fonction F^{-1} à $[-\sigma,3\sigma]$ en opérant sur son graphe une symétrie par rapport à la droite $x=\sigma$, puis on prolonge F^{-1} à $\mathbf{R}$ tout entier par périodicité, on note sl la fonction ainsi construite.

Question 14 *Montrer que* sl *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa fonction dérivée* sl' *en fonction de* sl.

Question 15 *Tracer le graphe de* sl *sur $[-3\sigma,3\sigma]$.*

3 Equation différentielle

Question 16 *Montrer que* sl *est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$.*

$$\mathrm{sl}''(x) + 2\,\mathrm{sl}^3(x) = 0. \tag{5}$$

Soit f une solution de (5) sur $\mathbf{R}$.

Question 17 *Montrer que la fonction H définie par*

$$H(x) = f'^2(x) + f^4(x) \tag{6}$$

est constante sur $\mathbf{R}$. On note encore H cette constante.

On choisit désormais de considérer le cas où $H>0$, et on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = F\left(H^{-1/4} f(x)\right), \tag{7}$$

où F a été définie à la formule (4).

Question 18 *Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ où f' ne s'annule pas et calculer alors sa dérivée. En déduire qu'il existe une constante $b \in \mathbf{R}$ telle que*

$$f(x) = H^{1/4}\mathrm{sl}\left(H^{1/4}x + b\right) \tag{8}$$

Tournez la page S.V.P.

pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.

Question 19 *En déduire que* f' *s'annule au moins une fois sur tout intervalle ouvert de longueur supérieure à* $2\sigma H^{-1/4}$.

Question 20 *Soit* x_0 *une racine de* f', *démontrer que* $f''(x_0) \neq 0$ *et en déduire l'existence de* u_1 *et* u_2, $u_1 < x_0 < u_2$, *tels que* f' *ne s'annule pas sur* $]u_1, x_0[\cup]x_0, u_2[$.

Question 21 *Démontrer l'existence de* $x_1 = \inf\{x > x_0 \,|\, f'(x) = 0\}$. *Montrer que* $x_1 > x_0$ *et* $f'(x_1) = 0$. *En déduire la valeur de* $x_1 - x_0$.

Question 22 *De même on pose* $x_{-1} = \sup\{x < x_0 \,|\, f'(x) = 0\}$. *Montrer que* f *vérifie* (8) *pour tout* $x \in]x_{-1}, x_1[$, *puis sur* $\mathbf{R}$ *tout entier.*

4 Le calcul trigonométrique généralisé

La fonction cl est définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\mathrm{cl}(x) = \frac{\mathrm{sl}'(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)}. \tag{9}$$

Question 23 *Montrer que pour tout* x *réel on a*

$$\mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{cl}^2(x) = 1 - \mathrm{sl}^2(x)\,\mathrm{cl}^2(x). \tag{10}$$

Question 24 *Calculer la fonction dérivée* cl' *de la fonction* cl *et en déduire que* cl *vérifie l'équation différentielle* (5).

Question 25 *Montrer que pour tout* x *réel on a*

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}(\sigma - x). \tag{11}$$

On définit la fonction G sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par

$$G(x, y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\,\mathrm{sl}'(y) + \mathrm{sl}(y)\,\mathrm{sl}'(x)}{1 + \mathrm{sl}^2(x)\,\mathrm{sl}^2(y)}.$$

Question 26 *Montrer que* G *vérifie l'équation*

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}\ ;$$

en déduire que pour tout a *dans* $\mathbf{R}$, G *est constante le long de la droite d'équation* $x + y = a$.

Question 27 *Montrer que*

$$\mathrm{sl}(x + y) = G(x, y).$$

et en déduire une formule d'addition pour la fonction sl, *c'est-à-dire une expression de* $\mathrm{sl}(x + y)$ *ne faisant intervenir que* $\mathrm{sl}(x)$, $\mathrm{sl}(y)$, $\mathrm{cl}(x)$ *et* $\mathrm{cl}(y)$.

Question 28 *Démontrer la formule de Fagnano, valable dans un intervalle* $[-\alpha, \alpha]$ *que l'on précisera :*

$$2\int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}. \tag{12}$$

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis

A 2012 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2012

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Fonctions d'endomorphismes

Dans ce texte on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nul et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$; l'identité de $\mathcal{L}_n$ est notée I. Le produit scalaire Euclidien de $\mathbf{R}^n$ est noté (x, y) et la norme associée $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(\mathrm{S})$. On définit la fonction $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q}_\mathrm{S}(x) = \frac{(\mathrm{S}(x), x)}{\|x\|^2} \ ; \tag{1}$$

c'est le quotient de Rayleigh de S.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$. Si $\mathrm{T}\in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$ le minimum et le maximum de $\sigma(\mathrm{T})$. On dit que $\mathrm{T}\in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, on a $(\mathrm{T}(x), x) \geq 0$ (resp. $(\mathrm{T}(x), x) > 0$). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie on considère $\mathrm{T}\in \mathcal{S}_n$.

Question 1 *Soient* T_1 *et* T_2 *appartenant à* $\mathcal{S}_n$, *démontrer que* $\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n$.

Question 2 *Montrer que* $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x) : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ *atteint les valeurs* $m(\mathrm{T})$ *et* $M(\mathrm{T})$.

Question 3 *Démontrer que l'on a*

$$m(\mathrm{T}) = \min_{x\in\mathbf{R}^n, x\neq 0} \mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x) \text{ et } M(\mathrm{T}) = \max_{x\in\mathbf{R}^n, x\neq 0} \mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x). \tag{2}$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T *à cet effet.*

Question 4 *Montrer que* $\mathrm{T}\in \mathcal{S}_n^+$ *(resp.* $\mathrm{T}\in \mathcal{S}_n^{+*}$*) si et seulement si* $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}^+$ *(resp.* $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}^{+*}$*).*

Soit J un intervalle contenant $\sigma(\mathrm{T})$ et f une fonction définie sur J, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Question 5 *Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire* U *telle que*

$$\mathrm{U}(y) = f(\lambda)\, y, \ \forall \lambda \in \sigma(\mathrm{T}), \ \forall y \in \ker(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}) \tag{3}$$

et que $\mathrm{U}\in \mathcal{S}_n$.

On notera $\mathrm{U} = f(\mathrm{T})$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

Question 6 *Soit* p *la restriction à* J *d'une fonction polynômiale à coefficients réels ; on note* $p(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$, *avec* $\alpha_j \in \mathbf{R}$ *pour tout* j *vérifiant* $0 \leq j \leq k$. *Démontrer que l'endomorphisme symétrique* $p(\mathrm{T})$ *est égal à* $\alpha_0 \mathrm{I} + \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathrm{T}^j$, *où*

$$\mathrm{T}^j = \underbrace{\mathrm{T}\circ\mathrm{T}\circ\cdots\circ\mathrm{T}}_{j \text{ fois}}.$$

Question 7 *Y-a-t-il des fonctions* $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que* $g(\mathrm{T})$ *ne soit pas égal à un polynôme de* T *?*

Question 8 *Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de* $f(\mathrm{T})$ *en fonction de ceux de* T.

Question 9 *Pour des fonctions* f *et* g *définies sur l'intervalle* J, *démontrer que* $(fg)(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T})$.

Question 10 *On considère* $\mathrm{S}\in \mathcal{S}_n^{+*}$ *et la fonction* f *définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(t) = \frac{1}{t}$. *Montrer que* $f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}^{-1}$, *où* S^{-1} *note l'inverse de l'endomorphisme* S.

Question 11 *On considère* $\mathrm{S}\in\mathcal{S}_n^+$. *Lorsque* $f(t)=\sqrt{t}$ *on note* $\sqrt{\mathrm{S}}$ *l'endomorphisme* $f(\mathrm{S})$. *Montrer que l'endomorphisme* $\sqrt{\mathrm{S}}$ *est bien défini et que* $\left(\sqrt{\mathrm{S}}\right)^2=\mathrm{S}$. *En admettant que toutes les valeurs propres de* S *sont simples, combien y-a-t-il de solutions* C *dans* $\mathcal{S}_n^+$, *puis dans* $\mathcal{S}_n$, *à l'équation* $\mathrm{C}^2=\mathrm{S}$?

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $\mathrm{T}_2\geq\mathrm{T}_1$ si et seulement si $\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_1\in\mathcal{S}_n^+$.

Question 12 *Démontrer que la relation* $\geq$ *définit une relation d'ordre dans* $\mathcal{S}_n$, *est-elle totale ?*

Question 13 *Soit* $\mathrm{U}\in\mathcal{S}_n$, *démontrer que si* $\mathrm{T}_2\geq\mathrm{T}_1$, *alors* $\mathrm{U}\circ\mathrm{T}_2\circ\mathrm{U}\geq\mathrm{U}\circ\mathrm{T}_1\circ\mathrm{U}$.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, on dit que la fonction $f:J\longrightarrow\mathbf{R}$ définit un opérateur croissant si pour tout T_1 et tout T_2, endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(\mathrm{T}_1)\subset J$, $\sigma(\mathrm{T}_2)\subset J$, alors

$$\mathrm{T}_2\geq\mathrm{T}_1\Longrightarrow f(\mathrm{T}_2)\geq f(\mathrm{T}_1). \tag{4}$$

Question 14 *Démontrer que l'application* $f:\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}$ *donnée par* $f(t)=t^2$ *ne définit pas un opérateur croissant.*

On pourra considérer à cet effet les endomorphismes T_1 *et* T_2 *de matrices respectives*

$$\mathrm{M}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{M}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \tag{5}$$

dans la base canonique.

Question 15 *Soient* T_1 *et* $\mathrm{T}_2\in\mathcal{S}_n^{+*}$ *tels que* $\mathrm{T}_2\geq\mathrm{T}_1$; *en s'aidant de la question* **13** *avec* $\mathrm{U}=\mathrm{T}_2^{-1/2}$, *montrer que les valeurs propres de* $\mathrm{U}\circ\mathrm{T}_1\circ\mathrm{U}$ *sont inférieures ou égales à* 1. *En déduire que* $\mathrm{U}^{-1}\circ\mathrm{T}_1^{-1}\circ\mathrm{U}^{-1}\geq\mathrm{I}$, *puis que l'application* $f:\mathbf{R}^{+*}\longrightarrow\mathbf{R}$ *donnée par* $f(t)=-1/t$ *définit un opérateur croissant.*

Question 16 *Soient* T_1 *et* $\mathrm{T}_2\in\mathcal{S}_n^+$, *tels que* $\mathrm{T}_2\geq\mathrm{T}_1$. *Démontrer que les valeurs propres de* $\mathrm{T}_2^{1/2}-\mathrm{T}_1^{1/2}$ *sont positives. En déduire que l'application* $f:\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}$ *donnée par* $f(t)=\sqrt{t}$ *définit un opérateur croissant.*

3 Inégalité de Löwner-Heinz

On va montrer que pour tout $a\in]0,1[$, la fonction $\varphi_a:\mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(t)=t^a$ définit un opérateur croissant. Pour $u\in\mathbf{R}^+$, on note $f_u:\mathbf{R}^{+*}\longrightarrow\mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f_u(t)=\frac{t}{t+u}.$$

Question 17 *Démontrer que* f_u *définit un opérateur croissant. On pourra à cet effet s'aider de la question* **15**.

Soient φ une application $: \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathcal{L}_n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi(s)$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\left(\Phi(s)_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ les applications coordonnées de $\Phi(s)$. On dira que φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ si les fonctions coordonnées $s \to \Phi(s)_{ij}$ le sont. Par définition on notera $\int_0^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{d}s$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a pour coefficients les $\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{ij}\mathrm{d}s$. Cette matrice sera notée $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\mathrm{d}s$.

Question 18 *Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.*

On considère $\mathrm{s} \in S_n^{+*}$ et $a \in]0,1[$.

Question 19 *Montrer que la fonction φ à valeurs dans $\mathcal{L}_n$ définie par $\varphi(u) = f_u(\mathrm{s})\, u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On pourra trouver utile de faire appel à une base orthonormée adaptée à s.*

On admet que

$$t^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(t)\, u^{a-1}\mathrm{d}u. \tag{6}$$

Question 20 *Montrer que*

$$\mathrm{s}^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{s})\, u^{a-1}\mathrm{d}u. \tag{7}$$

Question 21 *En déduire que la fonction φ_a définit un opérateur croissant.*

Fin de l'épreuve

A 2012 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2012

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Equation de la chaleur

Dans ce texte on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\setminus\{0\}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs et $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Le problème est consacré à l'équation de la chaleur monodimensionnelle ; la fonction inconnue u définie dans le domaine $[0,\pi]\times[0,+\infty[\ \subset \mathbf{R}^2$ à valeurs réelles est supposée continue, et de plus indéfiniment dérivable par rapport à x sur $]0,\pi[$ et par rapport à t sur $]0,+\infty[$. L'inconnue u est solution du système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \ \text{ sur } \ ]0,\pi[\times]0,+\infty[\tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \forall t \in [0,+\infty[\ : \ \text{conditions aux limites} \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) \ \ \forall x \in [0,\pi] \ : \ \text{condition initiale,} \tag{3}$$

où f désigne une fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$. Dans la suite on prendra comme condition initiale la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{4}$$

La variable x est la variable d'espace, t est la variable temporelle.

1 Un problème aux valeurs propres

On cherche ici à déterminer les valeurs de λ (valeurs propres) pour lesquelles il existe une solution non nulle de l'équation différentielle ordinaire

$$v'' + \lambda v = 0 \text{ sur } [0,\pi] \tag{5}$$
$$v(0) = v(\pi) = 0. \tag{6}$$

Question 1 *Montrer que si v est solution de* (5)-(6) *alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ et que*

$$\int_0^\pi v''(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^\pi \left(v'(x)\right)^2\ \mathrm{d}x\ ;$$

en déduire que si v n'est pas identiquement nulle, alors $\lambda \geq 0$.

Question 2 *Pour $\lambda \leq 0$, déterminer l'ensemble des solutions de* (5)*. En déduire que le système d'équations* (5)-(6) *n'a pas d'autre solution que la solution nulle.*

Question 3 *Montrer que* (5)-(6) *possède une solution non nulle si et seulement si $\exists n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\lambda = n^2$. Pour n fixé, déterminer la dimension de l'espace des solutions et en expliciter une base.*

2 La série de Fourier de la condition initiale

On note φ la fonction égale à f sur $[0,\pi]$, impaire et prolongée par 2π-périodicité à $\mathbf{R}$ tout entier.

Question 4 *Tracer la courbe représentative de φ sur $[-5\pi/2, 5\pi/2]$ et en préciser le tableau de variation.*

On note Φ' (dérivée généralisée), la fonction égale à la fonction dérivée φ' sur chaque intervalle de la forme $](2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2[$, $k \in \mathbf{Z}$ et prolongée par continuité sur chaque intervalle $](2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Question 5 *Dessiner le graphe de la fonction Φ'.*

Soit p une fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, continue par morceaux et périodique de période 2π ; on pose

$$c_n(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\, e^{-inx}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbf{Z} \tag{7}$$
$$b_n(p) = i\left(c_n(p) - c_{-n}(p)\right),\ n \in \mathbf{N}^* \text{ et } b_0(p) = c_0(p).$$

Question 6 *Démontrer que $c_n(\Phi') = inc_n(\varphi)$.*

Question 7 *Calculer* $c_n(\Phi')$, *en déduire que*

$$b_n(\varphi) = \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \ n \in \mathbf{N}^* \tag{8}$$

et donner l'expression de la série de Fourier de φ *en fonction des* $b_n(\varphi)$.

Question 8 *En déduire que la série de Fourier de* φ *converge normalement.*

3 Construction d'une solution de (1)-(2)-(3)

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n sur le domaine $[0,\pi] \times [0,+\infty[$ par

$$u_n(x,t) = b_n(\varphi) \sin(nx)\, e^{-n^2 t}, \ n \in \mathbf{N}^*, \tag{9}$$

et on note u la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, c'est-à-dire sous réserve de la convergence,

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(x,t). \tag{10}$$

Question 9 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, u_n *est continue sur* $[0,\pi]\times[0,+\infty[$, *indéfiniment dérivable par rapport à* x *sur* $]0,\pi[$ *et par rapport à* t *sur* $]0,+\infty[$, *et vérifie* (1).

Question 10 *Montrer que la série de fonctions* $\sum u_n$ *est convergente sur* $[0,\pi] \times [0,+\infty[$ *et que la somme* u *définit une fonction continue sur* $[0,\pi] \times [0,+\infty[$.

Question 11 *La série*

$$\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

converge-t-elle ?.

Question 12 *Soit* $\delta > 0$, *montrer que la série de fonctions* $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$ *converge normalement sur* $[0,\pi]\times[\delta,+\infty[$. *En déduire que la somme* u *définie selon* (10) *admet une dérivée partielle par rapport à* t *sur* $[0,\pi] \times [\delta,+\infty[$ *et que*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \ \text{ sur } \ [0,\pi] \times]0,+\infty[.$$

Question 13 *La série de fonctions* $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$ *converge-t-elle normalement sur* $[0,\pi]\times[0,+\infty[$? *Justifiez votre réponse.*

On admettra dans la suite (raisonnement analogue) que u admet des dérivées partielles de tous ordres sur $[0,\pi]\times]0,+\infty[$ et qu'elles s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

Question 14 *Montrer que* u *est solution de* (1)-(2)-(3).

4 Unicité de la solution

Soit h une fonction continue sur $[a,b] \subset \mathbf{R}$ et indéfiniment dérivable sur $]a,b[$.

Question 15 *Quel est le signe de* $h'(\alpha)$ *et* $h''(\alpha)$ *si* h *atteint son maximum en* $\alpha \in]a,b[$? *Justifiez votre réponse.*

On définit la dérivée à gauche $h'_g(b)$ de h en b selon la formule

$$h'_g(b) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{h(b) - h(b-\varepsilon)}{\varepsilon},$$

si la limite existe.

Question 16 *Quel est le signe de $h'_g(b)$ si h admet en b une dérivée à gauche et y atteint son maximum ?*

On choisit $T > 0$ et on note

$$\mathcal{D}_i =]0,\pi[\times]0,T[\,,\ \mathcal{C} = (]0,\pi[\times \{T\})\,,\ \mathcal{D} = [0,\pi] \times [0,T]$$
$$\mathcal{F} = ([0,\pi] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{\pi\} \times [0,T])\,,$$

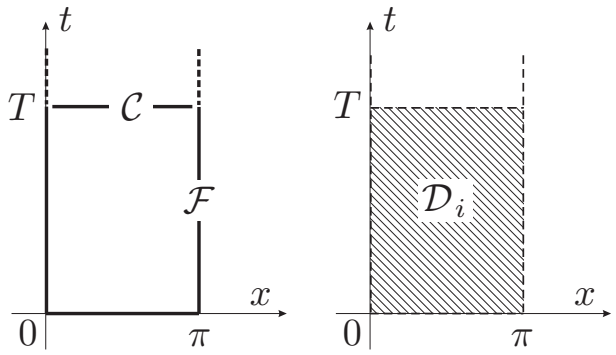


FIGURE 1 – Partition du domaine

Soit $\varepsilon > 0$, on définit la fonction v_ε par $v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$ où u est une solution de (1)-(2)-(3).

Question 17 *Montrer que v_ε ne peut atteindre son maximum sur $\mathcal{D}$ en aucun point de $\mathcal{D}_i \cup \mathcal{C}$.*

Notons $M = \max_{(x,t)\in\mathcal{F}} u(x,t)$.

Question 18 *Déduire de ce qui précède que u atteint son maximum sur $\mathcal{F}$.*

Question 19 *Conclure que la solution de (1)-(2)-(3) est unique.*

Si u est une solution de (1)-(2)-(3) on pose

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi (u(x,t))^2\,\mathrm{d}x,\ \forall t \geq 0. \tag{11}$$

Question 20 *Démontrer que $E'(t) \leq 0$, $\forall t > 0$. En déduire par un autre raisonnement l'unicité de la solution de (1)-(2)-(3).*

Fin de l'épreuve

A 2013 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2013

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et p est un entier supérieur ou égal à 1. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques, notés $\langle\cdot,\cdot\rangle$; en particulier pour $p=1$, c'est le produit usuel dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une application φ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est *bilinéaire* lorsque pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, les deux applications partielles $z\mapsto\varphi(z,y)$ et $z\mapsto\varphi(x,z)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ sont linéaires. L'application bilinéaire φ est dite *symétrique* si $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, lorsque $p=1$, on dit que φ est une *forme* bilinéaire symétrique.

Soit φ une application bilinéaire symétrique. On appelle *noyau* de φ et on note $\mathrm{Ker}\,\varphi$ l'ensemble des vecteurs $x\in\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $y\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=0$. On dit que φ est *diagonalisable* s'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous $i\neq j$, $\varphi(e_i,e_j)=0$. Enfin, on dit que φ est *plate* (relativement au produit scalaire de $\mathbb{R}^p$) si pour tous les vecteurs x, y, z, w de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle\varphi(x,y),\varphi(z,w)\rangle=\langle\varphi(x,w),\varphi(z,y)\rangle.$$

Le but du problème est d'établir, sous certaines conditions, qu'une application bilinéaire symétrique plate est diagonalisable.

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

A. Formes bilinéaires symétriques plates

Dans toute cette partie on pose $p=1$. Soit $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

1) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=\langle u(x),y\rangle$. Vérifier que u est symétrique et en déduire que φ est diagonalisable.

On note $\mathbb{R}^{n*}$ l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ constitué des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Si a et b sont dans $\mathbb{R}^{n*}$, on définit l'application $a\otimes b$ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, en posant $(a\otimes b)(x,y)=a(x)b(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que pour tous $a,b\in\mathbb{R}^{n*}$, $a\otimes b$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit symétrique.

On rappelle que le *rang* d'une forme bilinéaire symétrique $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est égal au rang de la matrice $\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$.

3) On suppose dans cette question que φ est de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in \mathbb{R}^{n*}$ telle que $\varphi = \pm f \otimes f$. (On pourra considérer la base duale d'une base qui diagonalise φ.)

4) En déduire qu'une forme bilinéaire symétrique de rang 1 est plate.

5) Réciproquement, soit φ une forme bilinéaire symétrique plate non nulle. Quel est le rang de φ ?

B. Diagonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E de dimension n, qui commutent deux à deux : $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous i, j dans I. On se propose de démontrer par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous ces endomorphismes. Le résultat étant évident pour $n = 1$, on suppose que $n > 1$ et que le résultat est vrai pour toute dimension strictement inférieure à n.

6) Soit $i_0 \in I$. Montrer que si u_{i_0} n'est pas une homothétie, les sous-espaces propres de u_{i_0} sont de dimension strictement inférieure à n. Montrer par ailleurs que ces sous-espaces sont stables par tous les endomorphismes u_i.

7) Conclure.

C. Vecteurs réguliers

Soit φ une application bilinéaire symétrique non nulle de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{\varphi}(x)$ l'application linéaire qui à tout $y \in \mathbb{R}^n$ associe $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^p$. On a donc $\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Le noyau et l'image de $\tilde{\varphi}(x)$ sont notés respectivement $\operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(x)$ et $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$.

On note q la dimension maximale de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}^n$, et on choisit un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tel que la dimension de $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$ soit égale à q. Un tel vecteur v est qualifié de *régulier* pour φ.

8) Dans cette question préliminaire, on se donne deux matrices carrées A, B d'ordre n à coefficients réels. Montrer que si A *ou* B est inversible, alors $A + tB$ l'est aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$ *sauf* éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

9) Soit r un entier naturel non nul et $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Montrer que si $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est libre, alors $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

En particulier $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ sera libre pour tout t dans un voisinage de 0.

10) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$, on a $\varphi(x,y) \in \operatorname{Im}\tilde{\varphi}(v)$.

On pourra raisonner par l'absurde en montrant l'existence de vecteurs $e_1,\dots,e_q$ de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $\big(\varphi(v,e_1),\dots,\varphi(v,e_q),\varphi(x,y)\big)$ soit libre.

11) Dans cette question, on suppose que φ est *plate*. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\tilde{\varphi}(v)$. Si de plus, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, en déduire que $p \geqslant n$.

On revient au cas général où φ est une application bilinéaire symétrique non nulle.

12) Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs réguliers pour φ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

13) Montrer que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul

Dans cette partie, φ désigne une application bilinéaire symétrique plate de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, dont le noyau est réduit à $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. On fixe un vecteur régulier v pour φ.

14) Montrer que $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'endomorphisme $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}$.

15) En utilisant la définition d'une application bilinéaire plate, montrer que $\psi(x)$ est auto-adjoint.

16) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x) \circ \psi(y) = \psi(y) \circ \psi(x)$. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

17) Construire à l'aide de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base qui diagonalise φ. On pourra utiliser la symétrie de φ.

FIN DU PROBLÈME

A 2013 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2013

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle *enveloppe convexe de* H, notée $\mathrm{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U\,{}^tU = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. On note $\|\ \|_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X\in\mathbb{R}^n,\,\|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i\rangle$.

2) Montrer que l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}({}^tA\,B)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\langle\ ,\ \rangle$.

On note $\|\ \|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. *L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.*

3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $\langle A, B\rangle \geqslant 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

4) Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.

5) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im} h$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im} h$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.

7) Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\operatorname{Ker} h$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.

9) En déduire que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.

On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

10) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leqslant 0$ pour tout $h \in H$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

12) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'*au plus* $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, \ldots, x_p \in H$ avec $p \geqslant n+2$.

13) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\text{conv}(H)$ est compacte.
On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{(t_1, \ldots, t_{n+1}), \text{ avec } t_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1\right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathscr{B}$ la boule unité fermée de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \| \ \|_2)$.

17) Montrer que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathscr{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{B}$ telle que M n'appartient pas à $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\| \ \|_1$, et on pose $A = {}^t(M - N)$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (question 9).

18) Montrer que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{tr}(AV) \leqslant \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$. En déduire que $\text{tr}(S) < \text{tr}(USM)$.

19) Montrer que $\text{tr}(MUS) \leqslant \text{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20) Conclure : déterminer $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathscr{B}$ est dit *extrémal* dans $\mathscr{B}$ si l'écriture $A = \dfrac{1}{2}(B+C)$, avec B, C appartenant à $\mathscr{B}$, entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$.

21) On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \dfrac{1}{2}(V+W)$, avec V, W appartenant à $\mathscr{B}$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathscr{B}$.

Soit A appartenant à $\mathscr{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

22) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont positifs ou nuls.

23) Montrer que $d_i \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathscr{B}$ telles que $A = \dfrac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.

FIN DU PROBLÈME

A 2013 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le flot de Toda

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, I la matrice unité d'ordre m et e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^m$ dont les composantes sont les δ_{ij}, $i = 1, m$. On rappelle que $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$.

On note $(u\,|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbf{R}$. Les vecteurs de $\mathbf{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes ; ${}^t u$ note le transposé du vecteur u.

L'expression : $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq m$."

1 Tridiagonalisation

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^m$; la matrice

$$\mathrm{H} = \mathrm{I} - 2u\,{}^t u, \tag{1}$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u.

Question 1 *Montrer que* $\mathrm{H}u = -u$ *et que* $\mathrm{H}v = v$ *dès que* v *est orthogonal à* u.

Question 2 *Démontrer que* H *est symétrique et orthogonale.*

Question 3 *Soit* $g \in \mathbf{R}^m$, *de composantes* γ_i, $1 \leq i \leq m$, *un vecteur unitaire non colinéaire à* e_1. *On pose* $u = (g - e_1)\,/\sqrt{2\,(1 - \gamma_1)}$, *montrer que* u *est unitaire et que* $\mathrm{H}g{=}e_1$.

Question 4 *En déduire que si* x *est un vecteur de* $\mathbf{R}^m$ *non colinéaire à* e_1, *il existe un vecteur unitaire* u *et une matrice de Householder associée* H *telle que* $\mathrm{H}x{=}\,\|x\|\,e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m-1$, q_{21} un vecteur de $\mathbf{R}^{m-1}$ et $\widehat{\mathrm{Q}}{=}\left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21} \\ \hline q_{21} & \mathrm{Q} \end{array}\right)$ une matrice définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m-1$; on pose $\widehat{\mathrm{H}_1}{=}\left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{H}_1 \end{array}\right)$, où ζ note le vecteur nul dans $\mathbf{R}^{m-1}$, ainsi que $\widehat{\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{H}_1}\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{H}_1} = (\widehat{\sigma}_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq m}$.

Question 5 *Montrer que* $\widehat{\mathrm{S}}$ *est semblable à* $\widehat{\mathrm{Q}}$ *et qu'on peut choisir* H_1 *de telle sorte que* $\widehat{\sigma}_{i1} = \widehat{\sigma}_{1i} = 0$ *pour* $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $\mathrm{T}{=}\,(\tau_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq m}$ est tridiagonale si $\tau_{ij} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

Question 6 *En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à* $\widehat{\mathrm{Q}}$.

2 Matrices de Jacobi

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$\mathrm{T}_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

une matrice de Jacobi d'ordre m. On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$. On note $\sigma(\mathrm{T}_0)$ le spectre de T_0, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Question 7 *Soit $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j, $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.*

Question 8 *Démontrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\sigma(\mathrm{T}_0)$?*

3 Paires de Lax

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions à valeurs réelles α_i et β_i de la variable réelle t. On pose alors

$$\mathrm{T}(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1}(t) & \beta_m(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ainsi que

$$\mathrm{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1(t) & 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{T}'(t) = \mathrm{U}(t)\,\mathrm{T}(t) - \mathrm{T}(t)\,\mathrm{U}(t), \ t \in \mathbf{R} \\ \mathrm{T}(0) = \mathrm{T}_0 \text{ donné par (2)}, \end{cases} \tag{5}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $\mathrm{T}(t)$ définie sur $\mathbf{R}$. Le couple $(\mathrm{T}(t), \mathrm{U}(t))$ constitue une *paire de Lax.*

Question 9 *Etant donnée* $\mathrm{T}(t)$ *solution de* (5), *et donc* $\mathrm{U}(t)$, *démontrer que le système différentiel*

$$\begin{cases} \mathrm{V}'(t) = \mathrm{U}(t)\,\mathrm{V}(t), \ t \in \mathbf{R} \\ \mathrm{V}(0) = \mathrm{I}, \end{cases} \tag{6}$$

admet une solution et une seule $\mathrm{V}(t)$ *sur* $\mathbf{R}$.

Question 10 *Montrer que pour tout* $t \in \mathbf{R}$, *la matrice* $\mathrm{V}(t)$ *solution de* (6) *est orthogonale.*

Question 11 *Montrer que* ${}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{T}(t)\mathrm{V}(t)$ *est une matrice constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de* $\mathrm{T}(t)$ *dépendent-elles de* t ?

On montre facilement, et on admettra, que le système différentiel (5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)\left(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)\right), \ i = 1, m-1 \\ \beta_i'(t) = 2\left(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)\right), \ i = 1, m \end{cases} \tag{7}$$

avec $\alpha_i(0) = a_i, \ i = 1, m-1$, $\beta_i(0) = b_i, \ i = 1, m$ et $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_m(t) \ \forall t \in \mathbf{R}$. C'est le système de Toda.

4 Etude asymptotique

Pour tout réel t, on pose

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2(t). \tag{8}$$

Question 12 *Montrer que la fonction* L *est constante. En déduire que les fonctions* β_i *sont bornées sur* $\mathbf{R}$, *soit par* D.

Question 13 *Pour* $1 \leq i \leq m-1$, *montrer que* $2\int_0^t \alpha_i^2(t)\,dt = \sum_{j=1,i}(\beta_j(t) - b_j)$ *et en déduire que les* α_i^2 *sont intégrables sur* $\mathbf{R}$.

Question 14 *En déduire que les* $\beta_i(t)$, $i = 1, m$ *possèdent une limite quand* $t \to \pm\infty$.

Question 15 *Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction* $\alpha_i\alpha_i'$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$. *En déduire la limite de* $\alpha_i(t)$ *lorsque* $t \to \pm\infty$.

On note $\chi_t(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}(t))$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{T}(t)$ et λ_i, $i = 1, m$ les valeurs propres de T rangées dans l'ordre décroissant.

Les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ seront respectivement notées β_i^+ et β_i^- ; l'ensemble des β_i^+, $i = 1, m$ sera noté B^+ et celui des β_i^- sera noté B^-.

Question 16 *Montrer que pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\chi_t(\lambda)$ *tend vers* $\prod_{i=1,m}\left(\lambda - \beta_i^+\right)$ *(respectivement vers* $\prod_{i=1,m}\left(\lambda - \beta_i^-\right)$*) lorsque* $t \to +\infty$ *(respectivement* $-\infty$*).*

Question 17 *En déduire que* $\sigma(\mathrm{T}) = B^+ = B^-$.

On rappelle que, par hypothèse, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$.

Pour i fixé compris entre 1 et $m-1$, on note $A^+ = \{t > 0 \,|\alpha_i(t) = 0\}$ et $A^- = \{t < 0 \,|\alpha_i(t) = 0\}$.

Question 18 *On suppose que* A^+ *n'est pas vide et on pose* $\tau = \inf\{t \,|t \in A^+\}$. *Déterminer la valeur de* $\alpha_i(\tau)$ *et montrer que pour* $t \in]0, \tau[$, $\alpha_i(t)$ *est du même signe que* a_i.

Question 19 *En supposant toujours que* A^+ *n'est pas vide, montrer que*

$$\forall t \in [0, \tau[\,, \quad \Big|\ln|\alpha_i(t)| - \ln|\alpha_i(0)|\Big| \leq 2D\tau.$$

En déduire que nécessairement $A^+ = \varnothing$, *puis que* α_i *ne s'annule en aucun point de* $\mathbf{R}$.

Question 20 *En raisonnant par l'absurde, montrer que* $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$, $i = 1, m-1$; *en déduire que* $\beta_i^+ = \lambda_i$, $i = 1, m$.

Question 21 *Montrer que si* δ *est choisi tel que* $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, $i = 1, m-1$, *alors il existe* S *et* C *strictement positifs tels que* $\forall s > S$, $|\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}$, $i = 1, m-1$. *En déduire que pour* $t > S$, $\exists C' > 0$ *tel que* $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$, $i = 1, m$.

Fin de l'épreuve

A 2013 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La formule du triple produit de Jacobi

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si a_n, $n \geq 1$ est une suite numérique, on note $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ la limite (si elle existe) de la suite $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$.

L'expression : $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq m$."

Soit $\zeta \in \mathbf{C}$, on rappelle que si $\mathfrak{Re}\,\zeta > 0$, alors $\operatorname{Arg}\zeta = \operatorname{Arc\,tg}\left(\mathfrak{Im}\,\zeta / \mathfrak{Re}\,\zeta\right)$.

Dans tout ce problème z notera un nombre complexe non nul et x un nombre réel tel que $|x| < 1$.

1 Préambule

Question 1 *Soient $(\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$, démontrer par récurrence que*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\xi_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|\xi_k|) - 1. \tag{1}$$

2 La formule de Jacobi

On pose

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{2k}\right) \quad \text{et} \quad H(x,z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k-1}\right). \tag{2}$$

Question 2 *Montrer que $Q(x)$ est bien défini, c'est-à-dire que la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k}\right)$ converge.*

Question 3 *Soit $\rho_k = \left|1+z^2x^{2k-1}\right|$, montrer que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k$ converge. On pourra utilement penser à l'utilisation du Logarithme pour transformer le produit infini en série.*

Question 4 *Soit $\theta_k = \operatorname{Arg}\left(1+z^2x^{2k-1}\right)$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k$ converge.*

Question 5 *En déduire que H est bien défini.*

Question 6 *A l'aide de l'inégalité (1) démontrer que $Q(x) \to 1$ quand $x \to 0$.*

On pose

$$F(x,z) = H(x,z)\,H\left(x,z^{-1}\right). \tag{3}$$

Question 7 *Montrer que*

$$F(x,xz) = \left(1+z^{-2}x^{-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k+1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right)$$

et en déduire que $xz^2F(x,xz) = F(x,z)$.

On admettra que $F(x,z)$ se décompose de façon unique sous la forme suivante :

$$F(x,z) = F_1(x,z) + F_2\left(x,z^{-1}\right),$$

où pour x fixé, $F_1(x,\xi)$ et $F_2(x,\xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini, soit

$$F_1(x,\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x)\,\xi^k \text{ et } F_2(x,\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(x)\,\xi^k \ ;$$

les fonctions $a_k, k = 0,+\infty$ et $a_{-k}, k = 1,+\infty$ de la variable réelle x étant à valeurs dans $\mathbf{C}$. On notera

$$F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(x)\,z^k,\ z \in \mathbf{C}^*. \tag{4}$$

Question 8 *On pose* $F_1^n(x,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,z^k$. *Démontrer que* $a_0(x) = F_1(x,0)$ *et que, pour* $n \geq 0$, $a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0}\left(F_1(x,z) - F_1^n(x,z)\right)/z^{n+1}$.

Question 9 *En déduire que si* $F(x,z)$ *vérifie à la fois* (4) *et* $F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(x)\,z^k$, *alors* $\forall k \in \mathbf{Z}$ *les fonctions* a_k *et* d_k *sont égales, c'est-à-dire que les coefficients* $a_k(x)$ *dans l'expression* (4) *de* $F(x,z)$ *sont déterminés de façon unique.*

Question 10 *Montrer qu'il existe des fonctions* b_m, $m \in \mathbf{Z}$, *de la variable réelle* x, *à valeurs dans* $\mathbf{C}$, *telles que*

$$\forall z \in \mathbf{C}^*,\ F(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(x)\,z^{2m}.$$

Question 11 *A l'aide de la question* **7**, *montrer que* $\forall m \in \mathbf{Z}$, $b_m(x) = b_{m-1}(x)\,x^{2m-1}$.

Question 12 *Montrer que* $\forall m \in \mathbf{N}$, $b_m(x) = b_{-m}(x)$ *et donner l'expression de* $b_m(x)$ *en fonction de* $b_0(x)$ *et* x.

Question 13 *A l'aide de l'inégalité* (1) *démontrer que* $H(x,z) \to 1$ *quand* $x \to 0$.

Question 14 *En déduire que* $b_0(x) \to 1$ *quand* $x \to 0$.

On pose

$$P(x,z) = Q(x)\,F(x,z) \text{ et } \eta = e^{i\pi/4}. \tag{5}$$

Question 15 *Montrer que*

$$P(x,\eta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k-2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{4k-2}\right).$$

Question 16 *En déduire que* $P(x,\eta) = P(x^4, i)$.

On pose $c_m(x) = Q(x)\, b_m(x)$.

Question 17 *A l'aide de la question* **16** *et de l'expression de* $b_m(x)$ *de la question* **12**, *montrer que* $c_0(x^4) = c_0(x)$.

Question 18 *En utilisant une récurrence et à l'aide des questions* **14** *et* **6**, *en déduire que pour tout* $x \in]-1,1[$, $c_0(x) = 1$ *et la* formule du triple produit

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{m^2}z^{2m}. \tag{6}$$

3 Le nombre de partitions d'un entier

Question 19 *En posant* $x = t^{3/2}$ *et par un choix judicieux de* z^2, *déduire la* formule des nombres pentagonaux *d'Euler :*

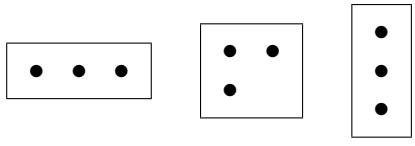
$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\, t^{\left(3m^2+m\right)/2},\ t \in \mathbf{R},\ 0 \le t < 1, \tag{7}$$

de celle du triple produit (6).

Si n est un entier positif, on note $p(n)$ et on appelle nombre de partitions de n le nombre de façons de représenter n comme une somme d'entiers positifs sans prendre en considération l'ordre des termes ; c'est encore le nombre de solutions $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = n,\ \text{telles que } r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n \ge 1. \tag{8}$$

On aura par exemple $p(3) = 3$ car $3 = 3 = 2+1 = 1+1+1$, partitions que l'on représente sous la forme des trois diagrammes de Ferrer suivants :



On note S_1 l'ensemble des solutions de (8). On note également S_2 l'ensemble des solutions $(q_1, q_2, \ldots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de

$$\sum_{j=1}^{n} j q_j = n. \tag{9}$$

On note f l'application $(\mathbf{N}^*)^n \longrightarrow (\mathbf{N}^*)^n$ définie par $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ où $r_j = \sum_{i=j}^{n} q_i$.

Question 20 *En s'aidant de l'application f, démontrer que S_1 et S_2 comportent le même nombre d'éléments.*

Question 21 *Démontrer que pour $n > 0$, $p(n)$ est le coefficient de t^n dans le développement de $\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)$.*

Question 22 *A l'aide de la formule d'Euler (7), démontrer que*

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k)\, t^k\right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m\, t^{\left(3m^2+m\right)/2}\right) = 1.$$

Question 23 *En déduire la valeur de $p(n)$, $n = 1, 7$.*

Fin de l'épreuve

A 2013 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le rayon de Bohr

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs. On note $\mathfrak{Re}\,(z)$ la partie réelle du nombre complexe z.

(H1) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse **(H1)** si elle possède un développement en série entière au voisinage de l'origine, de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1 Séries entières

Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ une série entière, où z ainsi que les coefficients a_n sont complexes. On pose

$$h\,(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n \text{ et } H_r\,(\theta) = h\left(re^{i\theta}\right), \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \operatorname{Arg} z. \tag{1}$$

On suppose désormais que la fonction h vérifie l'hypothèse **(H1).**

Soit $r \in]0,1[$.

Question 1 *Déterminer les coefficients de Fourier de H_r et $\overline{H_r}$ en fonction de r et des a_k.*

Question 2 *En fonction du signe de n, en déduire les différentes expressions de*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right) e^{-in\theta} d\theta. \tag{2}$$

On suppose que, outre **(H1),** la fonction h vérifie l'hypothèse suivante :

(H2) le coefficient a_0 du développement en série entière de h est réel, positif ou nul.

Question 3 *Montrer que*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right) d\theta. \tag{3}$$

On pose $a_n = |a_n|\, e^{i\varphi_n}$, et on choisit $\tau \in]0,1[$.

Question 4 *Montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|\, \tau^n r^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \tau^n \left(\cos\left(n\theta + \varphi_n\right)\right)\right) d\theta.$$

On choisit maintenant $\tau \in]0, 1/3]$

Question 5 *Déterminer le signe de* $1/2 + \sum_{n\geq 1} \tau^n (\cos(n\theta + \varphi_n))$. *Montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| \tau^n r^n \leq \max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|.$$

(H3) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse **(H3)** si, $\forall r \in [0, 1[$, $\max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(g\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| \leq 1$.

Question 6 *En admettant que* h *vérifie les hypothèses* **(H1)**, **(H2)** *et* **(H3)**, *montrer que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| |z|^n \leq 1$, *dès que* $|z| \leq 1/3$.

2 Le rayon de Bohr

On considère maintenant la fonction $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$, vérifiant l'hypothèse **(H1)** ainsi que

(H4) $|f(z)| \leq 1 \ \forall |z| < 1$.

Question 7 *A l'aide du résultat de la question* **6** *montrer que*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n| |z|^n \leq 1, \ \forall |z| < 1/3. \tag{4}$$

La valeur $|z| = 1/3$ constitue le *rayon de Bohr* de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n$.

On considère maintenant le cas particulier de la fonction f_λ donnée par

$$f_\lambda(z) = (z - \lambda) / (1 - \lambda z),$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Question 8 *Sous quelles conditions relatives à* λ, *la fonction* f_λ *vérifie-t-elle les hypothèses* **(H1)** *et* **(H4)** *?*

En admettant que λ vérifie ces conditions, on note $b_n(\lambda)$ les coefficients du développement en série entière de $f_\lambda : f_\lambda(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n(\lambda) z^n$.

Question 9 *Déterminer en fonction de* λ *les valeurs de* $|z|$ *telles que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)| |z|^n \leq 1$.

Question 10 *Démontrer que si* $|z| \in]1/3, 1[$, *alors il existe* $\lambda \in]0, 1[$ *tel que* $\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n(\lambda)| |z|^n > 1$.

Question 11 *En déduire que la constante* $1/3$ *obtenue à la question* **7** *ne peut être améliorée sans hypothèse supplémentaire sur* f.

3 Au-delà de $|z| = 1/3$ ...

Nous venons de démontrer que, sous les hypothèses **(H1) et (H4)** l'estimation (4) est optimale. Dans ce paragraphe on établit une estimation plus générale, valable au-delà du rayon de Bohr $r = 1/3$.

Question 12 *Montrer que si f et g vérifient* **(H1)**, *où*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n z^n, \tag{5}$$

alors $\forall r \in]0,1[$

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \overline{c_n} r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\overline{g\left(re^{i\theta}\right)}d\theta.$$

On pose

$$|||f||| = \left(\sup_{0\le r<1}\sum_{n\in\mathbf{N}} |b_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2} \tag{6}$$

sous réserve que cette dernière quantité soit finie.

L'ensemble des fonctions de $z \in \mathbf{C}$ qui vérifient **(H1)** et **(H4)** et, par souci de simplification, dont les coefficients du développement en série entière sont réels est noté $\mathcal{E}$.

On suppose désormais que $f \in \mathcal{E}$.

Question 13 *En s'aidant de la question* **12**, *montrer que* $|||f||| \le 1$.

On admettra que $|||f|||$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{V}_n$ l'espace vectoriel des fonctions de la variable complexe z de la forme $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à $\mathbf{R}$.

On note P_n, $n \ge 1$, l'application qui à $g = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n z^n$ vérifiant **(H1)** et dont les coefficients c_n sont réels, fait correspondre la fonction $g_n \in \mathcal{V}_n$ définie par
$g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

On note A_f l'application qui à $\psi \in \mathcal{V}_n$ fait correspondre la fonction $f\psi$; on rappelle que le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Question 14 *Démontrer que pour tout $\psi \in \mathcal{V}_n$, $|||A_f(\psi)||| \le |||\psi|||$ et en déduire que $|||P_n \circ A_f(\psi)||| \le |||\psi|||$.*

On note S la bijection de $\mathcal{V}_n$ dans $\mathbf{R}^2$, qui à ψ définie par $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ fait correspondre le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Question 15 *Déterminer la matrice* $\mathbb{D}$ *de l'application linéaire qui à* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *fait correspondre* $S \circ P_n \circ A_f(\psi)$ *où* $\psi = S^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta z^n$.

On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne : $\|\Psi\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, dérivant du produit scalaire $(\Psi\,|\Theta) = \alpha\gamma + \beta\delta$, où $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\Theta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$.

Question 16 *Montrer que pour tout* Ψ, *et pour tout* $\Theta \in \mathbf{R}^2$, $(\Psi\,|\mathbb{D}\Theta) = \left({}^t\mathbb{D}\,\Psi\,|\Theta\right)$.

On dit que la matrice $\mathbb{A}$ est positive si et seulement si $(\mathbb{A}\Psi\,|\Psi) \geq 0$ pour tout $\Psi \in \mathbf{R}^2$. On note $\mathbb{I}$ la matrice identité.

Question 17 *Déduire de la question* **14** *que* $\mathbb{A} = \mathbb{I} - {}^t\mathbb{D}\,\mathbb{D}$ *est positive. En déduire que* $b_0^2 \leq 1$ *et que les valeurs propres de* $\mathbb{A}$ *sont positives ou nulles.*

Question 18 *En déduire que* $|b_n| \leq 1 - b_0^2$. *On pourra s'aider du calcul du déterminant de* $\mathbb{A}$.

Pour $0 \leq r < 1$, on pose

$$M(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(t + \left(1 - t^2\right) \frac{r}{1 - r} \right). \tag{7}$$

Question 19 *Montrer que*

$$\forall\, |z| < 1,\ \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq M(|z|). \tag{8}$$

Question 20 *Déterminer* $M(r)$ *pour* $r \in [0, 1[$.

On pose

$$m(r) = \min\left(M(r), \left(1 - r^2\right)^{-1/2} \right). \tag{9}$$

Question 21 *Montrer que* $\forall \varepsilon \in]0, 1[$,

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n^2 \,|1 - \varepsilon|^{2n} \right)^{1/2} \left(1 - |z|^2 / |1 - \varepsilon|^2\right)^{-1/2}.$$

En déduire à l'aide de la question **13** *que*

$$\forall\, |z| < 1,\ \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n|\, |z|^n \leq m(|z|). \tag{10}$$

Fin de l'épreuve

A 2014 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel non nul et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\cdot$ On admet que si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1) Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = w$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) = \alpha - \theta \quad \text{(modulo } 2\pi\text{)}. \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\Big((\alpha - \theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big).$$

2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on en déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

Soit $D = \{Re^{i\theta}\ ;\ R > 0\ et\ 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et g l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3) Déduire de ce qui précéde que g est surjective.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $\{X, NX, \ldots, N^{n-1}X\}$ est libre.

5) En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

6) Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\widetilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \widetilde{N}e^{\widetilde{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ.

9) Montrer que $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

11) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la $i$ème ligne de X pour $i \in \{1,\dots,p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14) En déduire que lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, p_2, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

D. Représentation Ae^A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\big((f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\big)$ pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$.

15) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, N_2, \dots, N_s$ sont des matrices nilpotentes.

16) Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même est surjective.

FIN DU PROBLÈME

A 2014 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2014

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On considère un espace réel E de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme notée $\|\ \|$ et complet pour cette norme. Si A est une partie de E, on note $\overline{A}$ son adhérence, $\mathring{A}$ son intérieur, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ sa frontière, et $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$ sa distance à un point $x \in E$. On note respectivement $B(x,r) = \{\, y \in E\,;\, \|y-x\| < r\}$ et $\overline{B}(x,r) = \{\, y \in E\,;\, \|y-x\| \leqslant r\}$ les boules ouverte et fermée de centre x et de rayon r.

Étant données deux parties A et B de E, et une application $f : A \to B$, on rappelle que $x \in E$ est un *point fixe* de f si c'est une solution de l'équation $x = f(x)$. L'application f est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$, c'est-à-dire si pour tous $x, y \in A$, il existe un réel $k < 1$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|.$$

On rappelle qu'une application lipschitzienne est continue.

Dorénavant et dans tout le problème, A désigne une partie fermée non vide de E.

A. Théorème du point fixe

Dans cette partie préliminaire, on établit le

Théorème (Picard)**.** *Toute application contractante $f : A \to A$ admet un unique point fixe $x \in A$.*

Soit donc $f : A \to A$ une application contractante.

1) Montrer que si f admet un point fixe x, celui-ci est unique.

Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) Conclure.

B. Invariance par homotopie

Soit $f : A \to E$ et $g : A \to E$ deux applications contractantes. On suppose que f et g sont *homotopes*, c'est-à-dire qu'il existe une application $h : A \times [0,1] \to E$ telle que pour tout $x \in A$, on a $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$, et qui vérifie en outre les trois propriétés suivantes :

$\boxed{a}$ il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in A$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|h(x,t) - h(y,t)\| \leqslant k\|x - y\| ;$$

$\boxed{b}$ il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout $x \in A$ et tous $t, u \in [0,1]$,

$$\|h(x,t) - h(x,u)\| \leqslant k'|t - u| ;$$

$\boxed{c}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \partial A$, on a $x \neq h(x,t)$.

On suppose en outre que f admet un point fixe dans A et on pose

$$T = \big\{t \in [0,1] \,;\, \exists x \in A,\ x = h(x,t)\big\}.$$

4) Vérifier que T n'est pas vide.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T qui converge vers un réel $t \in [0,1]$. On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que pour tout entier naturel n, on a la relation $x_n = h(x_n, t_n)$.

5) Vérifier qu'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et que pour tous entiers naturels n et m, on a

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{k'}{1-k}\,|t_n - t_m|.$$

6) Montrer alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en déduire que T est fermée.

Soit encore $t \in T$ et $x \in A$ tels que $x = h(x,t)$.

7) Vérifier que $d(x, \partial A) > 0$.

Soit r et ε deux nombres réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leqslant \dfrac{(1-k)r}{k'}$ et $r < d(x,\partial A)$, et soit $u \in [0,1]$ tel que $|t-u| < \varepsilon$.

8) Montrer que pour tout $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$, on a $\|x - h(y,u))\| \leqslant r$.

9) En déduire, en utilisant le théorème de Picard ci-dessus, que l'application $y \mapsto h(y,u)$ possède un point fixe intérieur à A.

10) En déduire que T est un ouvert relatif à $[0,1]$. Conclure alors que g possède un unique point fixe intérieur à A (on pourra considérer une borne supérieure de T).

Une application. On ne suppose plus que l'application contractante $f : A \to E$ admet un point fixe, mais on fait les trois hypothèses suivantes :

$\boxed{d}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;

$\boxed{e}$ l'image $f(A)$ de A par f est bornée ;

$\boxed{f}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq t f(x)$.

11) Montrer que f possède un unique point fixe intérieur à A.

C. Étude de certains opérateurs à noyau

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et un réel $K_0 > 0$ vérifiant pour tous (t,u) et (t,v) dans $[a,b] \times D$,

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant K_0 |u - v|.$$

L'espace de Banach $C([a,b])$ des fonctions continues $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application F de $C([a,b])$ dans lui-même par la formule :

$$F(\varphi)(t) = \int_a^b K(t,x) f(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x$$

et on pose $\alpha = \sup\limits_{t\in[a,b]} \displaystyle\int_a^b |K(t,x)|\,\mathrm{d}x$.

12) Pour toutes fonctions $y, z \in C([a,b])$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, on a $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, démontrer l'inégalité

$$\|F(y) - F(z)\| \leqslant \alpha K_0 \|y - z\|.$$

Soit A une partie fermée et bornée de $C([a,b])$ contenant la fonction nulle dans son intérieur et telle que pour tous $\varphi \in A$ et $t \in [a,b]$, on a $\varphi(t) \in D$. On suppose en outre que $\alpha K_0 < 1$ et que pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.

13) Montrer que F admet un unique point fixe intérieur à A.

D. Une généralisation

Soit C une partie convexe fermée de E contenant A. On considère une application continue $f : A \to C$, *pas nécessairement contractante*, telle que

- $\boxed{g}$ le vecteur nul 0 est intérieur à A ;
- $\boxed{h}$ l'ensemble $\overline{f(A)}$ est compact ;
- $\boxed{i}$ pour tout $x \in \partial A$ et tout $t \in [0,1]$, on a $x \neq t f(x)$.

On pose

$$X = \big\{x \in A\,;\, \exists t \in [0,1]\,;\, x = t f(x)\big\}.$$

14) Montrer que X est non vide et fermé. En déduire que la fonction $\mu : A \to [0,1]$ définie par la formule

$$\mu(x) = \frac{d(x, \partial A)}{d(x, \partial A) + d(x, X)}$$

est bien définie et continue. Déterminer $\mu(x)$ lorsque $x \in X$ et lorsque $x \in \partial A$.

On définit une fonction $g : C \to C$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \mu(x) f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in C \setminus A. \end{cases}$$

15) Montrer que g est continue sur C et que $\overline{g(C)}$ est compact.

On admet le

Théorème (Schauder)**.** *Si C est une partie convexe fermée de E, toute application $f : C \to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact possède au moins un point fixe.*

16) Conclure, à l'aide du théorème de Schauder, que f admet un point fixe intérieur à A.

E. Application aux intégrales de Fredholm

On considère dans cette partie l'espace de Banach $E = C([0,1])$ des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|$. On note également L^2 l'espace des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues muni de la norme $\|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

Soit $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose, pour tout $\varphi \in E$ et $t \in [0,1]$:

$$F(\varphi)(t) = h(t) + \int_0^1 K(t,x) g(x, \varphi(x)) \, \mathrm{d}x.$$

On fait les hypothèses suivantes :

- $\boxed{j}$ pour tout réel $r \geqslant 0$, il existe $\mu_r \in L^2$ tel que $|y| \leqslant r$ implique $|g(x,y)| \leqslant \mu_r(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
- $\boxed{k}$ la fonction K_t définie pour tout $t \in [0,1]$ par la formule $K_t(x) = K(t,x)$ est dans L^2, et l'application $t \mapsto K_t$ est continue de $[0,1]$ dans L^2.

On suppose en outre qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et toute solution φ de l'équation $\varphi(t) = \lambda F(\varphi)(t)$, on a $\|\varphi\|_0 \neq M$.

17) Déterminer pour chaque $\varphi \in E$, une constante c_φ telle que pour tous $t, u \in [0,1]$,

$$\begin{cases} |F(\varphi)(t)| \leqslant \|h\|_0 + c_\varphi \cdot \sup_{s\in[0,1]} \|K_s\|_2 \\ |F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leqslant |h(t) - h(u)| + c_\varphi \cdot \|K_t - K_u\|_2. \end{cases}$$

18) En déduire que F est une application de E dans E.

On note $A = \overline{B}(0, M)$ et on considère une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.

19) Montrer que si $\varphi_n \to \varphi$ dans E quand $n \to +\infty$, on a la convergence simple $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ sur $[0,1]$.

20) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $t, u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$ implique $|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \varepsilon$.

On rappelle que pour tout $\delta > 0$, il existe une famille finie $t_1, t_2, \ldots, t_N \in [0,1]$ telle que le segment $[0,1]$ soit inclus dans la réunion des intervalles $]t_i - \delta, t_i + \delta[$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

21) Montrer que si la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, alors elle converge dans E. En déduire que F est continue sur A.

22) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. Montrer que la suite $(F(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $[0,1]$ (on pourra commencer par établir la convergence simple sur une partie dense de $[0,1]$).

23) Conclure : F admet un point fixe de norme strictement inférieure à M.

FIN DU PROBLÈME

A 2014 MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Somme de projecteurs orthogonaux

Notations

On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X **est un espace vectoriel de dimension** $n \geq 2$ **sur le corps des réels et** T **un endomorphisme de** X.

Si $\mathscr{B}$ est une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note N (T) le noyau de T et R (T) l'image de T, rg T le rang de T et σ (T) le spectre de T.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Trace

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr} \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Question 1 *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, *montrer que* $\operatorname{tr} \mathbb{A}\mathbb{B} = \operatorname{tr} \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Question 2 *Soit* T *un endomorphisme de* X, *montrer que la trace de la matrice* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *associée à* T *est indépendante de la base* $\mathscr{B}$.

On appelle trace de T, notée tr T, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

2 Projecteurs

Question 3 *Soit* P *un projecteur de* X, *démontrer que* $X = N(\mathrm{P}) \oplus R(\mathrm{P})$.

Question 4 *En déduire que* $\operatorname{rg} \mathrm{P} = \operatorname{tr} \mathrm{P}$.

Question 5 *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces* F *et* G *de* X *est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

Question 6 *Soit* S *un endomorphisme de* X. *Montrer que si* S *est une somme finie de projecteurs* P_i, $i = 1, \ldots, m$, *alors* $\operatorname{tr} \mathrm{S} \in \mathbf{N}$ *et* $\operatorname{tr} \mathrm{S} \geq \operatorname{rg} \mathrm{S}$.

3 Décomposition en somme de projecteurs orthogonaux

On considère maintenant le cas où X est un espace (pré)hilbertien. On dit que T est **symétrique positif** s'il est **symétrique** et si

$$(\mathrm{T}x\,|x\,) \geq 0\ \forall x \in X.$$

Question 7 *Montrer que* T*, supposé symétrique, est positif si et seulement si* $\sigma\,(\mathrm{T}) \subset \mathbf{R}_+$.

Question 8 *Montrer qu'un projecteur* P *est un projecteur orthogonal si et seulement si il vérifie*

$$\left(x - \mathrm{P}x\,\middle|\,y\,\right) = 0,\ \forall x \in X,\ \forall y \in R\,(\mathrm{P})\,.$$

Question 9 *Montrer qu'un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique ; montrer également qu'un projecteur orthogonal est positif.*

On suppose désormais que T **est symétrique positif et vérifie** $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$.

On note r le nombre de valeurs propres strictement positives de T, comptées avec leur multiplicité. On note e_i les vecteurs d'une base propre $\mathscr{B}$ de T orthonormée, ordonnés de telle façon que les valeurs propres associées soient strictement positives si et seulement si $i \leq r$. On note Y l'espace engendré par les e_i, $i = 1, \ldots, r$ et Z celui engendré par les e_i, $i = r+1, \ldots, n$.

Question 10 *Montrer que* $Y = R\,(\mathrm{T})\,,\ Z = N\,(\mathrm{T})\,,$ *ainsi que* $\mathrm{rg}\,\mathrm{T} = r$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, on note Q_i l'endomorphisme de X défini par

$$Q_i\left(e_j\right) = \delta_{ij} e_i, j = 1, \ldots, n$$

Question 11 *Montrer que* Q_i *est un projecteur orthogonal de rang* 1.

Question 12 *On se place dans le cas particulier où* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} > \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Montrer qu'on peut choisir* i *tel que* $\mathrm{T} - \mathrm{Q}_i$ *soit symétrique positif et vérifie* $\mathrm{rg}\left(\mathrm{T} - \mathrm{Q}_i\right) = \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Quelle est la valeur de* $\mathrm{tr}\left(\mathrm{T} - \mathrm{Q}_i\right)$?

Question 13 *On se place maintenant dans le cas général où* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *Déduire de la question* **12** *qu'il existe* S *symétrique positif tel que* Y *soit stable par* S, $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} = \mathrm{rg}\,\mathrm{S} = \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$ *et que* $\mathrm{T} - \mathrm{S}$ *soit la somme de* $k = \mathrm{tr}\,\mathrm{T} - r$ *projecteurs orthogonaux de rang* 1.

On note μ_i, $i = 1, \ldots, r$ les valeurs propres strictement positives de S.

Question 14 *Montrer que* $\mathrm{S}_{|Y}$ *est inversible.*

On pose $\mathrm{U} = \mathrm{S}_{|Y}$ et pour x et $y \in Y$, $\xi\left(x, y\right) = \left(\mathrm{U}^{-1}x\,\middle|\,y\right)$. On note ε_i, $i = 1, \ldots, r$ une base de vecteurs propres de U associés aux valeurs propres μ_i.

Question 15 *Démontrer que ξ constitue un produit scalaire sur Y.*

Question 16 *Déterminer $w \in Y$, tel que $\|w\| = 1$ et $\xi(w,w) = 1$. On pourra, si nécessaire, chercher w dans le sous-espace de dimension 2 engendré par deux vecteurs propres ε_i et ε_j bien choisis.*

Question 17 *Montrer que* P *est un projecteur orthogonal de rang* 1 *sur X si et seulement si il existe un vecteur z unitaire dans X, tel que pour tout $x \in X$, $\mathrm{P}(x) = (x\,|z\,)z$.*

On considère maintenant un w tel que défini à la question **16** et l'endomorphisme P_w défini sur X par la formule suivante :

$$\mathrm{P}_w(x) = (x\,|w\,)w.$$

Question 18 *Démontrer que $\mathrm{S} - \mathrm{P}_w$ est symétrique et positif.*

Question 19 *Démontrer que $N\left(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w\right) = N(\mathrm{S}) \oplus \mathrm{Vect}\left(\mathrm{U}^{-1}w\right)$, où $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{U}^{-1}w\right)$ note l'ensemble des vecteurs colinéaires à $U^{-1}w$. En déduire que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{S}) - 1$.*

Question 20 *Déduire des questions* **17** **18** *et* **19** *que* S *est la somme d'un nombre fini de projecteurs orthogonaux de rang* 1.

Question 21 *En déduire qu'un endomorphisme symétrique positif* T *est une somme finie de projecteurs orthogonaux si et seulement si* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \in \mathbf{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{T}$.

Fin de l'épreuve

A 2014 MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racine de l'opposé du Laplacien
et
Equation de la chaleur généralisée

Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, $\mathbf{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On note $\mathscr{C}^k_\#$ l'ensemble des fonctions $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$, de période 2π, où $k \in [0,\infty]$, et pour $f \in \mathscr{C}^0_\#$, on note $\left\|f\right\| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|f\,(x)\right|$.

On note e_n la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$, et pour $f \in \mathscr{C}^0_\#$,

$$c_n\left(f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(\theta)\, e_{-n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Lorsqu'une série est absolument convergente, on montre que sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes, ce qui justifie d'écrire

$$d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$$

et de dire que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$ converge absolument si et seulement si les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ convergent absolument.

1 Séries trigonométriques

Question 1 *Soit $f \in \mathscr{C}^0_\#$, démontrer que la suite des $c_n\left(f\right)$ où $n \in \mathbf{Z}$, est bornée.*

Question 2 *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty_\#$, donner l'expression de $c_n\left(f^{(k)}\right)$ en fonction de $c_n\left(f\right)$. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que, pour tout entier relatif non nul n*

$$\left|c_n\left(f\right)\right| \leq \frac{C_k}{|n|^k}. \tag{2}$$

Soit $\left(d_n\right)_{n\in\mathbf{Z}}$, une suite d'éléments de $\mathbf{C}$, telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n$ converge absolument.

Question 3 *Montrer que pour tout x réel la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n(x)$ converge et que sa somme $h(x)$ appartient à $\mathscr{C}^0_\#$. Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ $d_n = c_n(h)$.*

Réciproquement, on suppose pour cette question que quel que soit l'entier k, il existe $C_k > 0$ et $N_k \geq 1$ tels que

$$\left|d_n\right| \leq \frac{C_k}{|n|^k}\ \forall\, |n| \geq N_k.$$

Question 4 *Démontrer que pour tout ℓ entier, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n^{(\ell)}$ converge normalement ; en déduire que $h(x)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} d_n e_n(x)$ appartient à $\mathscr{C}^\infty_\#$.*

Un opérateur différentiel sur $\mathscr{C}^\infty_\#$ est une application linéaire B de $\mathscr{C}^\infty_\#$ dans lui-même de la forme suivante :

$$Bf=\sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)},$$

où les réels b_k sont tous nuls sauf un nombre fini. On appelle ordre de B l'entier K défini par $K=\max\left\{k\in\mathbf{N}\,\middle|\,b_k\neq 0\right\}$.

Question 5 *Démontrer qu'une application linéaire B de $\mathscr{C}^\infty_\#$ dans lui-même est un opérateur différentiel d'ordre K si et seulement si il existe un polynôme P_K d'ordre K tel que, pour tout entier relatif n, et pour tout $f\in\mathscr{C}^\infty_\#$, $c_n\left(Bf\right)=P_K(n)\,c_n\left(f\right)$.*

2 Equation de la chaleur généralisée

Soit ρ une fonction $:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, strictement croissante, telle qu'il existe $\ell\in\mathbf{N}^+$ avec

$$\forall y\geq 1,\ y\leq\rho\left(y\right)\leq y^\ell.$$

Question 6 *Soit $f\in\mathscr{C}^\infty_\#$, démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\rho\left(|n|\right)c_n\left(f\right)e_n$ converge normalement et que sa somme appartient à $\mathscr{C}^\infty_\#$.*

Question 7 *Soit $f\in\mathscr{C}^0_\#$, démontrer que pour tout $t>0$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-t\rho(|n|)}c_n\left(f\right)e_n$ converge normalement et que sa somme appartient à $\mathscr{C}^\infty_\#$.*

On définit l'opérateur $A:\mathscr{C}^\infty_\#\longrightarrow\mathscr{C}^\infty_\#$ par la formule

$$A\left(f\right)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\rho\left(|n|\right)c_n\left(f\right)e_n. \tag{3}$$

On suppose désormais que $t\in R^{+*}$,

et on définit l'opérateur Q_t sur $\mathscr{C}^0_\#$ par la formule suivante :

$$Q_t\left(f\right)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-t\rho(|n|)}c_n\left(f\right)e_n. \tag{4}$$

Question 8 *Montrer que pour x réel fixé et $f\in\mathscr{C}^0_\#$, la fonction $t\longmapsto Q_t\left(f\right)(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.*

Question 9 *Démontrer que, pour $f\in\mathscr{C}^0_\#$ et $t>0$,*

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t\left(f\right)(x)=-A\left(Q_t\left(f\right)\right)(x)\ \ \forall x\in\mathbf{R}. \tag{5}$$

On note I l'opérateur identité de $\mathscr{C}^\infty_\#$.

Question 10 *Soit $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \notin \mathbf{R}^-$. Montrer que pour tout $g \in \mathscr{C}^\infty_\#$ il existe un et un seul élément, noté u, appartenant à $\mathscr{C}^\infty_\#$ qui soit solution de l'équation $(A+\alpha I)u = g$.*

Question 11 *Montrer que pour $\mathfrak{Re}\,\alpha > 0$ et $g \in \mathscr{C}^\infty_\#$, et pour tout x réel,*

$$(A+\alpha I)^{-1}\big(g\big)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t\big(g\big)(x)\,\mathrm{d}t.$$

Question 12 *Déterminer les valeurs propres de A, c'est-à-dire les λ complexes tels qu'il existe $g \neq 0$ vérifiant $A\big(g\big) = \lambda g$.*

3 Représentations intégrales

Dans ce paragraphe on s'intéresse à deux occurences particulières de la fonction ρ : ρ_1 et ρ_2 définies sur $\mathbf{R}^+$ par $\rho_1\big(y\big) = y$ et $\rho_2\big(y\big) = y^2$. On pose

$$A^1\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\, c_n\big(f\big)\, e_n \text{ et } A^2\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n\big(f\big)\, e_n, \tag{6}$$

ainsi que

$$Q^1_t\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-t|n|} c_n\big(f\big)\, e_n, \text{ et } Q^2_t\big(f\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} c_n\big(f\big)\, e_n. \tag{7}$$

Question 13 *Démontrer que si $f \in C^\infty_\#$, $\big(A^1 \circ A^1\big)\big(f\big) = A^2\big(f\big)$.*

Question 14 *Démontrer que A^2 est un opérateur différentiel et en donner l'expression. En est-il de même pour A^1 ?*

Question 15 *En référence aux résultats des questions* **13** *et* **9***, justifier le titre du document.*

Si g est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, on pose

$$\mathscr{F}\big(g\big)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} g\,(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

où $\omega \in \mathbf{R}$; c'est la transformée de Fourier de f.

On admettra les formules suivantes :

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|} \text{ et } \mathscr{F}\left(e^{-x^2/2}\right)(\omega) = e^{-\omega^2/2}. \tag{9}$$

Question 16 *Déterminer le réel α tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty_\#$, pour tout y réel et tout $t \in \mathbf{R}^{+*}$,*

$$Q^1_t\big(f\big)\big(y\big) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f\,\big(y-x\big)\,\mathrm{d}x.$$

4 Données initiales continues

On suppose dans ce paragraphe que $f \in \mathscr{C}^0_\#$, et on se limite à l'étude de $Q^1_t\left(f\right)$.

On rappelle le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction f continue T-périodique et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p, soit

$$p\left(t\right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} c_n e^{2i\pi nt/T} \text{ où } c_n \in \mathbf{C}, \text{ et } \mathbf{Z}_N = \left\{n \in \mathbf{Z} \,|\, -N \leq n \leq N\right\},$$

tel que $\left\|f - p\right\| \leq \varepsilon$.

Question 17 *En s'aidant du théorème ci-dessus, montrer que pour tout y réel et tout t réel strictement positif*

$$Q^1_t\left(f\right)\left(y\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f\left(y-x\right)\mathrm{d}x.$$

Question 18 *En utilisant l'expression de $Q^1_t\left(f\right)$ sous forme de série, montrer que*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y\right) - Q^1_t\left(f\right)\left(y\right)\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{10}$$

Question 19 *En utilisant l'expression intégrale de Q^1_t obtenue à la question* **17***, montrer que pour tout y réel,*

$$f\left(y\right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} Q^1_t\left(f\right)\left(y\right). \tag{11}$$

5 Décroissance de l'énergie

Pour $f \in \mathscr{C}^0_\#$, on pose $Q^1_0\left(f\right) = f$ et

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|Q^1_t\left(f\right)\left(x\right)\right|^2 \mathrm{d}x,\ t \geq 0. \tag{12}$$

Question 20 *Montrer que E est une fonction décroissante de t et déterminer sa limite en $t = +\infty$.*

Fin de l'épreuve

A 2014 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Somme de projecteurs

Notations

On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **R** l'ensemble des réels et $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T **un endomorphisme non nul de X.**

Soit $\mathscr{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.

On note $N(\mathrm{T})$ le noyau de T et $R(\mathrm{T})$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.

On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

1 Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\operatorname{tr}\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Question 1 *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_n$, montrer que* $\operatorname{tr}\mathbb{AB} = \operatorname{tr}\mathbb{BA}$.

Question 2 *Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ associée à* T *est indépendante de la base $\mathscr{B}$.*

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr}\mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

Soit P un projecteur de X.

Question 3 *Démontrer que $X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P})$.*

Question 4 *En déduire que* $\operatorname{rg}\mathrm{P} = \operatorname{tr}\mathrm{P}$.

On pose $\mathrm{P}' = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.

Question 5 *Montrer que $R\left(\mathrm{P}'\right) = N(\mathrm{P})$ et que $R(\mathrm{P}) = N\left(\mathrm{P}'\right)$.*

Question 6 *Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.*

Question 7 *Montrer que si l'endomorphisme* S *est une somme finie de projecteurs* P_i, $i = 1, \ldots, m$, *alors* $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \in \mathbf{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{S}$.

2 Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P **est égal à** 1.

Question 8 *Démontrer qu'il existe* $\mu \in \mathbf{R}$ *tel que* $\mathrm{PTP} = \mu\mathrm{P}$.

Soit $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition

$$X = R(\mathrm{P}) \oplus N(\mathrm{P}).$$

Question 9 *Montrer que dans la base* $\mathscr{C}$ *la matrice représentant* T *s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & \times & \times \\ \hline \times & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbb{B}$}} \\ \times & & \end{array}\right], \tag{1}$$

où μ *est le nombre réel dont l'existence découle de la question* **8**, *et* $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

Question 10 *Montrer que si* $\mathrm{P'TP'}$ *n'est pas proportionnel à* $\mathrm{P'}$, *alors* $\mathbb{B}$, *défini en* (1), *n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que* $\mathrm{P'} = \mathrm{I} - \mathrm{P}$.

3 Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T **n'est pas une homothétie.**

Question 11 *Démontrer qu'il existe un vecteur* $x \in X$ *tel que* x *et* $\mathrm{T}x$ *ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).*

Question 12 *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *dans laquelle la matrice* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *est de la forme suivante :*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \times \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & \multirow{2}{*}{$\mathbb{A}$} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}.$$

Question 13 *En déduire que si* $\mathrm{tr}\,\mathrm{T}=0$, *il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle la diagonale de* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ *est nulle.*

Soit t_i, $i=1,\dots,n$ **une suite de** n **nombres réels vérifiant** $\mathrm{tr}\,\mathrm{T}=\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Question 14 *En dimension* $n=2$, *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i=1,2$.

Soit $t\in\mathbf{R}$, on admettra qu'en dimension $n\geq 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part LTL$=t$L et d'autre part L′TL′ ne soit pas proportionnel à L′ =I−L.

Question 15 *En dimension* $n\geq 3$, *à l'aide des questions* **9** *et* **10** *démontrer qu'il existe une base* $\mathscr{C}$ *dans laquelle la matrice représentant* T *s'écrit*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}}=\left[\begin{array}{c|cc} t_1 & \times & \times \\ \hline \times & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbb{B}$}} \\ \times & & \end{array}\right] \text{ où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

Question 16 *En dimension* $n\geq 3$, *démontrer par récurrence qu'il existe une base* $\mathscr{B}''$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ *ait pour éléments diagonaux les* t_i, $i=1,\dots,n$.

4 Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant tr T$\in\mathbf{N}$ et tr T$\geq$ rg T. On pose $\rho=\mathrm{rg}\,\mathrm{T}$ et $\theta=\mathrm{tr}\,\mathrm{T}$.

Question 17 *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *dans laquelle* $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ *est de la forme suivante :*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right],$$

où $\mathbb{T}_1$ *est une matrice de taille* $\rho\times\rho$.

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ **ne soit pas la matrice d'une homothétie**

Question 18 *A l'aide de la question* **16** *montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}'$ *dans laquelle*

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}=\left[\begin{array}{ccc|c} t_1 & \times & \cdots & \\ \times & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbb{O} \\ \times & \cdots & \cdots & \end{array}\right] \text{ où les } t_i,\ i=1,\rho \text{ sont des entiers non nuls.}$$

Question 19 *En déduire que* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.

Question 20 *Démontrer que là encore,* T *est la somme d'un nombre fini de projecteurs.*

Fin de l'épreuve

A 2014 MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2014

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Opérateur de moyenne

Notations

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbf{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbf{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

On note $\mathscr{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}_b^0$ l'ensemble des fonctions bornées appartenant à $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}_+^{0*}$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^0$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

On note $\|\cdot\|$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}_b^0$: si f est continue et bornée sur $\mathbf{R}$, $\left\|f\right\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|f\left(x\right)\right|$.

Dans tout le problème la fonction f est un élément de $\mathscr{C}^0$ et la fonction ω un élément de $\mathscr{C}_+^{0*}$.

1 L'opérateur de moyenne

Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose

$$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Question 1 *Montrer que la formule* (1) *définit une fonction φ_ω continue sur $\mathbf{R}^*$ et qu'elle se prolonge continûment à $\mathbf{R}$. Déterminer* $\lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$.

On notera encore φ_ω ce prolongement.

On note A_ω l'application qui à f fait correspondre φ_ω.

Question 2 *Montrer que A_ω définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$; est-ce également un endomorphisme de $\mathscr{C}_b^0$?*

Question 3 *Démontrer que A_ω est injectif.*

On dit que λ est une valeur propre de A_ω sur $\mathscr{C}_b^0$, s'il existe $u \in \mathscr{C}_b^0$ non identiquement nulle telle que $A_\omega(u) = \lambda u$. La fonction u est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Question 4 *Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la restrictions à* $\mathbf{R}_+^*$ *d'un vecteur propre u de* A_ω.

Question 5 *Résoudre cette équation différentielle dans* $\mathbf{R}_+^*$. *Montrer que sa solution ne peut se prolonger par continuité en* 0 *que si* $\lambda \in]0,1]$.

Question 6 *Dans le cas où* ω *est intégrable sur* $\mathbf{R}^+$ *déterminer l'ensemble des valeurs propres de* A_ω *et les sous-espaces propres associés (on pourra distinguer le cas* $\lambda = 1$*).*

2 Le cas périodique

On suppose désormais que ω **est** τ**-périodique et que** f **est** T**-périodique, où** τ **et** T **sont des réels strictement positifs**.

Question 7 *Montrer que* $\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $x \to +\infty$.

Question 8 *Montrer que* ω *admet un maximum et un minimum strictement positifs.*

Périodes commensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est rationnel.

Question 9 *Déterminer* $\theta > 0$ *tel que pour tout* x,

$$\omega(x+\theta) = \omega(x) \text{ et } f(x+\theta) = f(x).$$

On note E l'application partie entière de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, et pour $\theta \in \mathbf{R}_+^*$,

$$E_\theta(x) = \theta E(x/\theta), \text{ où } x \in \mathbf{R}.$$

Question 10 *Représenter graphiquement la fonction* E_θ *pour* $-2\theta \leq x \leq 3\theta$.

Question 11 *Déterminer* $A_\omega(f) \circ E_\theta$ *sur* $[k\theta, (k+1)\theta[$ *où* $k \in \mathbf{Z}^*$. *Démontrer que*

$$\left(A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x) = A_\omega(f)(\theta)$$

pour $x \in [0, \theta[$.

Question 12 *Montrer que* $\left|\int_{E_\theta(x)}^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \theta \left\|f\right\| \|\omega\|$.

Question 13 *Démontrer que, pour* $x \in \mathbf{R}_+^*$

$$\left|\left(A_\omega(f) - A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x)\right| \leq \frac{\theta \left\|f\right\| \|\omega\|}{x \min \omega}\left(\frac{\|\omega\|}{\min \omega} + 1\right).$$

Question 14 *En déduire que* $A_\omega(f) \in \mathscr{C}^0$ *et possède une limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *et en donner une expression. Qu'en est-il lorsque* x *tend vers* $-\infty$?

Périodes incommensurables

On suppose dans ce paragraphe que τ/T est irrationnel.

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{Z}_N = \{n \in \mathbf{Z} \,|-N \leq n \leq N\}$.

Question 15 *Pour $n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}$, on pose $S_n(\tau, T) = \{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z}\}$. Démontrer que $S_n(\tau, T)$ admet un minimum non nul.*

Question 16 *On pose $S(N, \tau, T) = \left\{|mT + n\tau| \text{ où } m \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{Z}_N \setminus \{0\}\right\}$. Démontrer que $S(N, \tau, T)$ admet un minimum non nul.*

On suppose à présent que ω est non seulement continue, mais de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Question 17 *Démontrer qu'il existe des nombres complexes γ_m, où $m \in \mathbf{Z}$, tels que $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \left|\gamma_m\right|$ converge et tels que pour tout $n \in \mathbf{Z}$,*

$$\int_0^x \omega(t)\, e^{2i\pi nt/T} \mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \gamma_m \int_0^x e^{2i\pi t(n/T+m/\tau)} \mathrm{d}t.$$

Question 18 *Soit $p(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{2i\pi nt/T}$, où les c_n appartiennent à $\mathbf{C}$, montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$*

$$\left| A_\omega\big(p\big)(x) - \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{K}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On rappelle le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction f continue, T-périodique et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p, soit

$$p(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}_N} c_n e^{2i\pi nt/T} \text{ où } c_n \in \mathbf{C},$$

tel que $\left\|f - p\right\| \leq \varepsilon/3$.

Question 19 *En déduire que $A_\omega\big(f\big)(x)$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$, et en donner une expression.*

Fin de l'épreuve

A 2015 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de l'espace E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle$ et si de plus, $\langle V(f), f\rangle > 0$ pour tout $f \in E$ non nul.

Les parties **A** *et* **B** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E défini par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$V^*(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a $\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle$.

2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \frac{1}{\lambda} y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

B. Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x. On note également $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E\big(f(Z_n)\big)$.

5) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |\frac{k}{n} - x| \geqslant \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big(f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) \Big)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine.

On a donc établi le *théorème d'approximation de Weierstrass* sur le segment $[0,1]$: toute fonction continue sur $[0,1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weierstrass sur un segment quelconque $[a,b]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans G par :

$$\langle f, g \rangle_G = \int_0^\pi f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

On note $\|f\|_G = \sqrt{\langle f, f \rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, ..., c_n)$ le sous-espace vectoriel de G engendré par $\{c_0, c_1, ..., c_n\}$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0,\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de Weierstrass que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

10) Soit $f \in G$. Démontrer que $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si, de plus, la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, montrer que $g = f$.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0,\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, ..., c_n)$ de F_n. En déduire que pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} \cos\big((2n+1)t\big).$$

12) Montrer que pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\Big) f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on a :

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos\big((2n+1)x\big).$$

D. Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$S \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\pi/2) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit $\varphi_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule $\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\big((2n+1)t\big)$.

13) Montrer que pour tous $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle S si et seulement si $g = \lambda \cdot V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\Big) \langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égal au carré d'un entier impair. Montrer que la série :

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de S.

On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$.

16) Montrer que si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$ alors S a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$?

FIN DU PROBLÈME

A 2015 MATH. II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** *et* **C** *sont mutuellement indépendantes.*

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{\|Mx\| \ ;\ x \in S^{n-1}\}.$$

2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\mathrm{op}}\, \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\mathrm{op}} = \max\{|\lambda| \ ;\ \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\mathrm{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\mathrm{op}} \geqslant \max\{|M_{i,j}| \ ;\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

6) Etablir que :

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leqslant 1$ pour tous i, j dans $\{1,\dots,n\}$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\text{op}} \leqslant n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\text{op}} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathsf{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \exp\Big(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\Big).$$

On rappelle la notation : $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(t) \leqslant \exp\Big(\dfrac{t^2}{2}\Big)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1,1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1,\dots,\mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\Big(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\Big)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\Big).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'*inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{\mathsf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5}.$$

C. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - a\| \leqslant r\right\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

16) Soit Λ un sous-ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction μ, appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $r > 0$, $\mu\big(B_{a,r}\big) = r^n$.

(ii) Pour toute famille finie $K_1, \dots, K_m$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints, on a :
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i).$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de $\mathbb{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leqslant \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x - y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\big(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\big)^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1}, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :
$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$, indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $\big(M_{i,j}^{(n)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \dots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

19) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α-sous-gaussienne. En déduire que $\mathsf{E}\big(\exp(\gamma\|y\|^2)\big) \leqslant 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:
$$P\big(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(5\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18)**. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\|M^{(n)}a\| \geqslant r\sqrt{n}$. En déduire que :
$$P\big(\|M^{(n)}\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\big) \leqslant \big(25\, e^{-\gamma r^2}\big)^n.$$

FIN DU PROBLÈME

A 2015 MATH. I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
CONCOURS D'ADMISSION 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

— On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

— On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n,\, n \geq 0) \text{ tel que } \forall n \geq 0, p_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

— Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

— Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

I Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\, \frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 0,$$

appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0,1]$. Calculer

$$\mathrm{dist}\Big((1-p, p, 0, \cdots),\ (1-q, q, 0, \cdots) \Big).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)\, p_n,\, n \geq 0)$ est convergente.

II Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\, n \in \mathbf{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)\,p_n^{(\lambda)},\, n \geq 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\, n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$, l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\,\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in \mathcal{S}_h$ est bornée.

IV Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\begin{aligned} \Delta f \ : \ \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ n &\longmapsto f(n+1) - f(n). \end{aligned}$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbf{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbf{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leq n \leq m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \, p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbf{N} \backslash \{0, m\}$.

Indication : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ *et* $n > m \geq 0$.

13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n\geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k).$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

V Application probabiliste

On considère $(X_k,\, k = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in \,]0,\, 1]$:

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbf{P}(X_k = 0).$$

On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ ainsi que

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et pour tout } k \in \{1, \cdots, n\},\ W_k = S - X_k.$$

On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbf{P}(S = k),\, k \in \mathbf{N})$ de $\mathcal{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

19. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que

$$X_k f(S) = X_k f(W_k + 1) \text{ et que } \mathbf{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbf{E}(f(W_k)).$$

20. Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{S}_h$, établir l'identité suivante.

$$\mathbf{E}\left(\lambda f(S+1) - S f(S)\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k\, \mathbf{E}\Big(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\Big).$$

21. Établir que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \Big|\mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right)\Big|,$$

où f_A est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$.

22. En déduire que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Fin du problème

A 2015 MATH. II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP,

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbf{N}^*$.

— Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ espace vectoriel réel de dimension n, on utilisera le produit scalaire canonique défini par :

$$\forall\, U, V \in \mathcal{E}_n, \qquad (U|V) = {}^tUV.$$

— On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\ker A$, le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.

— Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.

— $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}L_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n,\ {}^tMM = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n, formé des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$.

— On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$, on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}.$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(D).$$

I Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{bmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}.$$

On note

$$\mathcal{S}p_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ {}^tMJM = J\}.$$

1. Calculer J^2 et ${}^tJ$ en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.

2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}p_{2n}$ et que pour tout réel α,
$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathcal{S}p_{2n}.$$

3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}$ est dans $\mathcal{S}p_{2n}$.

4. Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$ est un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$.

6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}p_{2n}$.

7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$ alors ${}^tM \in \mathcal{S}p_{2n}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},\ \text{avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$

8. Déterminer des relations sur A, B, C et D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}p_{2n}$.

II Centre de $\mathcal{S}p_{2n}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}p_{2n}$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}p_{2n},\ \forall N \in \mathcal{S}p_{2n},\ MN = NM\}.$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$

10. En utilisant $L = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{bmatrix} U & 0_n \\ 0_n & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.

12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.

Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{ij}$ commutent avec A, où $(E_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

III Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{S}p_{2n}$ que l'on décompose sous forme de matrices blocs

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{1}$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{bmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det({}^tAD - {}^tCB) = 1.$$

Soit P, $Q \in \mathcal{M}_n$ telles que ${}^tPQ$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$(Q - s_1P)V_1 = (Q - s_2P)V_2 = 0.$$

15. Montrer que le produit scalaire $(QV_1|QV_2)$ est nul.

On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\ker B \cap \ker D = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soit $s_1, \cdots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \cdots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_iB)V_i = 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, m.$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i,\ i = 1, \cdots, m)$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.

18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}p_{2n}$ est de déterminant égal à 1.

Fin du problème

A 2015 MATH. I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
CONCOURS D'ADMISSION 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

— On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

— On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n,\, n \geq 0) \text{ tel que } \forall n \geq 0, p_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

— Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\mathrm{dist}(P,Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

— Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

I Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\, \frac{\lambda^n}{n!},\ n \geq 0,$$

appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0,1]$. Calculer

$$\mathrm{dist}\Big((1-p, p, 0, \cdots),\ (1-q, q, 0, \cdots) \Big).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)\, p_n,\, n \geq 0)$ est convergente.

II Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\, n \in \mathbf{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)\,p_n^{(\lambda)},\, n \geq 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\, n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$, l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\,\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in \mathcal{S}_h$ est bornée.

IV Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\begin{aligned} \Delta f \ : \ \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ n &\longmapsto f(n+1) - f(n). \end{aligned}$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbf{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbf{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leq n \leq m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \, p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbf{N} \backslash \{0, m\}$.

Indication : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ *et* $n > m \geq 0$.

13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n\geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k).$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

V Application probabiliste

On considère $(X_k,\, k = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in \,]0,\, 1]$:

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbf{P}(X_k = 0).$$

On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ ainsi que

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et pour tout } k \in \{1, \cdots, n\},\ W_k = S - X_k.$$

On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbf{P}(S = k),\, k \in \mathbf{N})$ de $\mathcal{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

19. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que

$$X_k f(S) = X_k f(W_k + 1) \text{ et que } \mathbf{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbf{E}(f(W_k)).$$

20. Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{S}_h$, établir l'identité suivante.

$$\mathbf{E}\left(\lambda f(S+1) - S f(S)\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k\, \mathbf{E}\Big(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\Big).$$

21. Établir que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \Big|\mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right)\Big|,$$

où f_A est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$.

22. En déduire que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Fin du problème

A 2015 MATH. II PC

ÉCOLES DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

CONCOURS D'ADMISSION 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Résultats admis

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbf{R}, \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0\}$ et l'on suppose que λ appartient à $\mathcal{C}$. Pour simplifier la rédaction, le candidat pourra utiliser la notation

$$\tilde{\lambda} = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Les suites de Fibonacci $(F_n,\, n \in \mathbf{Z})$ et de Lucas $(L_n,\, n \in \mathbf{Z})$ généralisées sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} &F_0(\lambda) = 0,\ F_1(\lambda) = 1, \\ &F_{n+1}(\lambda) = (1+2\lambda)F_n(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)F_{n-1}(\lambda),\ \text{pour tout } n \geq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &L_0(\lambda) = 2,\ L_1(\lambda) = 1+2\lambda, \\ &L_{n+1}(\lambda) = (1+2\lambda)L_n(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{n-1}(\lambda),\ \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$F_{-n}(\lambda) = \frac{-F_n(\lambda)}{(\lambda^2+\lambda-1)^n} \quad \text{et} \tag{3}$$

$$L_{-n}(\lambda) = \frac{L_n(\lambda)}{(\lambda^2+\lambda-1)^n}. \tag{4}$$

Elles vérifient les propriétés admises suivantes pour tout entier n :

$$F_{n+1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)F_{n-1}(\lambda) = L_n(\lambda), \tag{5}$$

$$L_{n+1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{n-1}(\lambda) = 5F_n(\lambda). \tag{6}$$

a) I représente la matrice identité dans $\mathbf{R}^2$,

b) $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients réels,

c) $J \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ représente une matrice non multiple de I et vérifiant $J^2 = \dfrac{5}{4}\ \mathrm{I}$,

d) On note $R(\lambda)$ la matrice définie par $R(\lambda) = J + (\lambda + \dfrac{1}{2})\,\mathrm{I}$.

Comme d'habitude, $R(\lambda)^n$ représente la puissance n-ième de la matrice $R(\lambda)$. A tout moment, le candidat peut utiliser la formule admise suivante, dite « formule de Moivre », valable pour tout entier naturel n :

$$R(\lambda)^n = F_n(\lambda)\, J + \frac{1}{2} L_n(\lambda)\, \mathrm{I}\,. \tag{7}$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser les propriétés des matrices $R(\lambda)$ pour en déduire des propriétés des suites de Fibonacci et Lucas.

I Préliminaires

1. Calculer $F_2(\lambda)$, $L_2(\lambda)$.

2. Exhiber une infinité de matrices J qui satisfassent c).

3. Montrer que les matrices I et J sont linéairement indépendantes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$.

Dans tout ce qui suit, J désigne une matrice quelconque vérifiant $J^2 = \frac{5}{4}\,\mathrm{I}$.

II Formule de Moivre généralisée

4. Trouver deux polynômes Q et T de $\mathbf{R}[X]$ tels que

$$(X + \lambda + \frac{1}{2})^2 = (X^2 - \frac{5}{4})Q(X) + T(X).$$

5. En déduire que $R(\lambda)$ vérifie l'équation suivante :

$$R(\lambda)^2 = (1 + 2\lambda)R(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\,\mathrm{I}\,. \tag{8}$$

6. Montrer que $R(\lambda)$ est inversible et montrer que

$$R(\lambda)^{-1} = -\frac{1}{(\lambda^2 + \lambda - 1)}\, J + \frac{1}{2}\frac{1 + 2\lambda}{(\lambda^2 + \lambda - 1)}\, \mathrm{I}\,. \tag{9}$$

7. En utilisant la formule de Moivre, établir que pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2F_{n+1}(\lambda) &= L_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_1(\lambda)F_n(\lambda) \\ 2L_{n+1}(\lambda) &= 5F_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_n(\lambda)L_1(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

8. Montrer que la formule de Moivre reste valable pour tout entier négatif.

III Quelques identités remarquables

9. Montrer l'identité suivante :

$$R(\lambda)^2 + (1 - \lambda - \lambda^2)\,\mathrm{I} = 2\,J\,R(\lambda). \tag{11}$$

10. Soit $W(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda - 1)R(\lambda)^{-2}$. Montrer que

$$I - W(\lambda) = 2JR(\lambda)^{-1} \quad \text{et} \quad (I - W(\lambda))^{-1} = \frac{2}{5}JR(\lambda).$$

11. Montrer alors que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2 + \lambda - 1)^k R(\lambda)^{n-2k} = F_{n+1}(\lambda)\ \mathrm{I}\,.$$

12. En déduire, pour $n \geq 0$, les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2 + \lambda - 1)^k F_{n-2k}(\lambda) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}(\lambda^2 + \lambda - 1)^k L_{n-2k}(\lambda).$$

Pour $k \geq 1$, on introduit

$$\Delta_k(\lambda) = \det \begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & L_k(\lambda) \\ L_k(\lambda) & L_{k+1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

On définit le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ par

$$P(X) = (1 - \lambda - \lambda^2)\,X^2 + (1 + 2\lambda)\,X - 1.$$

13. Montrer que $(\Delta_k(\lambda),\ k \geq 1)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

    Indication : on pourra utiliser la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.

14. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de

$$L_k(\lambda)^2\ P(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$F_n = F_n(0) \text{ et } L_n = L_n(0).$$

On a aisément les propriétés admises suivantes :

$$\begin{gathered} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ et } L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \\ F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,\ L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n \end{gathered}$$

---

15. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$R(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{2}{L_k}\ J\, R(0)^k. \tag{12}$$

16. Déduire des questions précédentes la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbf{Z}$, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{gathered} F_{2n}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{5^n}{{L_k}^{2n}}\ F_{2nk}, \\ L_{2n}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{5^n}{{L_k}^{2n}}\ L_{2nk}. \end{gathered} \tag{13}$$

Une démarche similaire permet de démontrer les identités suivantes que l'on admettra.

$$\begin{gathered} F_{2n+1}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{5^n}{{L_k}^{2n+1}}\ L_{k(2n+1)}, \\ L_{2n+1}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{5^n}{{L_k}^{2n+1}}\ F_{k(2n+1)}. \end{gathered} \tag{14}$$

IV Une touche de probabilités

Soit i un entier impair et $n \geq 0$, on pose

$$p_k = \frac{L_i \; L_{2i(n-k)}}{2\, L_{i(2n+1)}} \text{ pour } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

17. Montrer que la suite $(p_k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\})$ définit une probabilité.

    Indication : on pourra chercher à exprimer $L_{i(2n+1)}$ en utilisant les questions 12, 13 et les identités (14).

Fin du problème

A 2016 - MATH. I MP.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \implies A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

La partie A *n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.*

A Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* $\geqslant 3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;
- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k - 1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k + 1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice ***bistochastique*** $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *qui n'est* ***pas*** *une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$

d'indices distincts dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $A_{i_k,j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$.

10. En considérant la matrice $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k} = 1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}} = -1 & k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ B_{i,j} = 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet *un chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1} M_{\sigma(2),2} \cdots M_{\sigma(n),n} > 0$.

On démontre par récurrence sur n, et on *admet* le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \cdots A_{\sigma(n),n} > 0$ et on pose $\lambda_0 = \min_j (A_{\sigma(j),j})$ et $A_0 = \dfrac{1}{1 - \lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \ldots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_s M_s$$

où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1$.

14. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf_{M\in\mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf_{M\in\mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

Dans cette partie, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $O_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales.

15. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $\|PAQ\| = \|A\|$.

Dans la suite de cette partie, A et B désignent deux matrices ***symétriques réelles****.*

16. Montrer qu'il existe deux matrices diagonales réelles D_A,D_B, et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\|A - B\|^2 = \|D_AP - PD_B\|^2$.

17. Montrer que la matrice R définie par $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est bistochastique et que

$$\|A - B\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} R_{i,j}|\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

où $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ désignent les valeurs propres de A et $\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)$ celles de B.

18. En déduire que

$$\min_\sigma \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leqslant \|A - B\|^2$$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace probabilisé et V l'ensemble des variables aléatoires définies sur cet espace admettant un moment d'ordre 2. Pour tout X de V, on

note $X \sim P_X$ si X suit la loi P_X. Pour tout couple (P_1, P_2) de lois, on pose

$$d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X,Y \in V \\ X \sim P_1, Y \sim P_2}} \mathrm{E}(|X - Y|^2).$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels. On note P_1 la loi uniforme sur $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et P_2 la loi uniforme sur $\{b_1, \ldots, b_n\}$.

19. Montrer que

$$d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{(i)} - b_{(i)}|^2$$

où l'on a noté $a_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{(n)}$ et $b_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{(n)}$ les suites $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ ré-ordonnées par ordre croissant. En déduire que pour toutes matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$, on a l'inégalité :

$$n\, d^2(P_1, P_2) \leqslant \|A - B\|^2.$$

Fin du problème

A 2016 - MATH. II MP.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\, du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

1. Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.

5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge.

10. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}}\Big)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x\, f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

13. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\ \mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\ \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière. En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $A_2 \in S$, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x\to 0}\Big(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\Big) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que, pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x\to 0} x\,(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x\,(L(\psi))(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \ \|_\infty)$.

18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

20. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.

Fin du problème

A 2016 - MATH I PSI.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

Mathématiques I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

A Préliminaire

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.$$

B Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\; f(x) = \sqrt{\pi}.$$

2. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, déterminer :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.

4. Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\, Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1},\, 1]. \end{cases}$$

5. Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, h(e^{-t}) dt$$

et donner sa valeur.

6. Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k\, x^k\, h(x^k)$.

On admet l'égalité (dite de Karamata) :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\ h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, h(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt.$$

7. En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ 2\sqrt{n}.$$

C Théorème taubérien

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On fait l'hypothèse que

$$S_n \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ 2\sqrt{n}.$$

On va montrer qu'alors

$$a_n \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x .

8. Soit α, β un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ soient non nuls, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

9. Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux

$$\frac{n}{[\gamma n]} \text{ et } \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}.$$

10. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon.$$

11. En déduire que $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, a_n = 1$.

D Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbf{N}^*$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_i \,:\, \Omega &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) &\longmapsto \omega_i. \end{aligned}$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0,\ S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega).$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$T \,:\, \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{N}^*} = \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0,\ \forall n \geq 1, \\ \inf\{n \geq 1,\ S_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \geq 1 \text{ tel que } S_n(\omega) = 0. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\}.$$

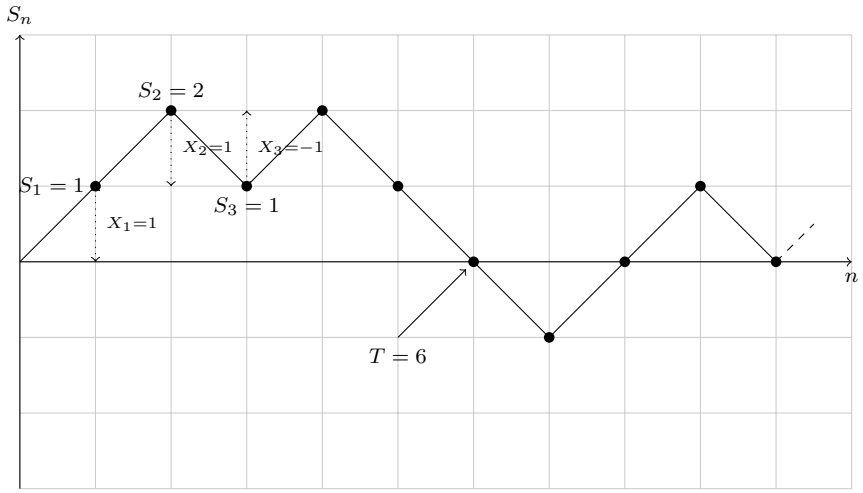


FIGURE 1 – Notations. Ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$. ω appartient à A_6^6 et A_8^8, ainsi qu'à A_0^1, A_0^2, ..., A_0^5, A_6^7, etc.

12. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \cdots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i_1, \cdots, X_n = i_{n-k}) = \mathbf{P}(X_1 = i_1, \cdots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

13. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \cdots, j_{n-k}) \in \mathbf{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbf{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \cdots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbf{P}(S_1 = j_1, \cdots, S_{n-k} = j_{n-k}).$$

Indication : on pourra considérer l'application

$$\theta : \mathbf{Z}^{n-k} \longrightarrow \mathbf{Z}^{n-k}$$
$$(z_1, \cdots, z_{n-k}) \longmapsto (z_1, z_1 + z_2, \cdots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j).$$

14. En déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$

$$\mathbf{P}(A_k^n) = \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k}).$$

15. Montrer l'égalité :
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0)\, \mathbf{P}(E_{n-k}).$$

16. Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :
$$\frac{1}{1-x} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\, x^n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n \Big).$$

17. Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbf{P}(S_n = 0)$.

    Indication : on discutera suivant la parité de n.

18. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

19. À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbf{P}(E_n)$.

20. Montrer que l'on a : $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$.

21. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité :
$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = n)\, x^n.$$

22. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\mathbf{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\, \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Fin du problème

A 2016 - MATH II PSI.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

Mathématiques II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$, et $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{K}$. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée ${}^tM$.

Une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ les sous-ensembles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ constitués, respectivement, des matrices symétriques, antisymétriques, et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1 *Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{C}_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ième.*

Pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$, $R(M) \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$, $L(M) \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $a(M) \in \mathbf{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right]. \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : V \to \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est* ***quasi-nilpotente*** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbf{K}$. Une partie V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ est dite* ***quasi-nilpotente*** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit :

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, on a*

$$\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_j(V) = \{0\}$.*

A Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la matrice $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$?

2. Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$.

3. Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que la dimension de $\mathrm{S}_n(\mathbf{K})$ est $n(n+1)/2$.

4. Montrer que $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. Vérifier que

$$\dim \mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ${}^tXAX = 0$. En déduire que $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

6. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\mathrm{A}_n(\mathbf{R}) = \{PMP^{-1} \mid M \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})\}.$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 1.

B Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

7. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathrm{S}_n(\mathbf{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Le résultat obtenu tient-il si l'on remplace $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$?

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Déduire de la question précédente que :

$$\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

C Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n - 1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathrm{C}_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs

comme suit :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right]$$

10. Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

11. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} \text{ pour tout } j \in [\![1, n]\!].$$

On considère la matrice P_σ de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

12. Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

13. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

14. Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.

    On pourra utiliser un changement de base.

15. Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \left\{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\right\}$$

    est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ et que $\mathrm{C}_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

16. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!].$$

17. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

18. Ecrire un algorithme qui permette d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f.

19. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$, et conclure.

D Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.

On rappelle qu'on peut écrire toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K : V \to \mathrm{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et $L : V \to \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}.$$

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $\mathrm{C}_n(V) = \{0\}$.

20. Montrer que : $\dim V \leqslant \dim K(W) + (n-1)$.

21. En déduire que : $\dim V \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $\mathrm{C}_n(V) = \{0\}$.

22. Démontrer que : $\dim V \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Fin du problème

A 2016 - MATH I PC.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

Mathématiques I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

A Préliminaire

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.$$

B Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\; f(x) = \sqrt{\pi}.$$

2. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, déterminer :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k}.$$

3. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.

4. Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\, Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [e^{-1},\, 1]. \end{cases}$$

5. Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, h(e^{-t}) dt$$

et donner sa valeur.

6. Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k\, x^k\, h(x^k)$.

On admet l'égalité (dite de Karamata) :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\ h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\, h(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt.$$

7. En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ 2\sqrt{n}.$$

C Théorème taubérien

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On fait l'hypothèse que

$$S_n \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ 2\sqrt{n}.$$

On va montrer qu'alors

$$a_n \ \underset{n\to\infty}{\sim}\ \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x .

8. Soit α, β un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ soient non nuls, justifier l'encadrement :

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

9. Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux

$$\frac{n}{[\gamma n]} \text{ et } \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}.$$

10. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n}\, a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon.$$

11. En déduire que $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, a_n = 1$.

D Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbf{N}^*$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_i \,:\, \Omega &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) &\longmapsto \omega_i. \end{aligned}$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0,\ S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega).$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$T \,:\, \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{N}^*} = \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0,\ \forall n \geq 1, \\ \inf\{n \geq 1,\ S_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \geq 1 \text{ tel que } S_n(\omega) = 0. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\}.$$

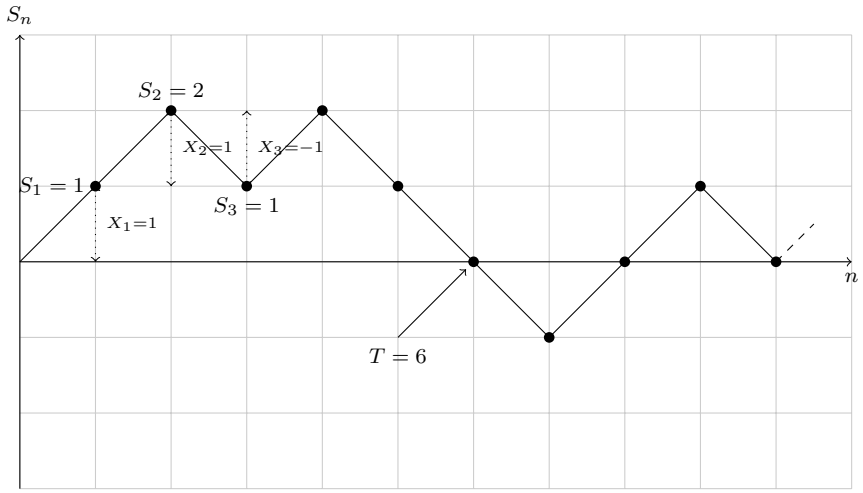


FIGURE 1 – Notations. Ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$. ω appartient à A_6^6 et A_8^8, ainsi qu'à A_0^1, A_0^2, ..., A_0^5, A_6^7, etc.

12. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \cdots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = i_1, \cdots, X_n = i_{n-k}) = \mathbf{P}(X_1 = i_1, \cdots, X_{n-k} = i_{n-k}).$$

13. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \cdots, j_{n-k}) \in \mathbf{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbf{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \cdots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbf{P}(S_1 = j_1, \cdots, S_{n-k} = j_{n-k}).$$

Indication : on pourra considérer l'application

$$\theta : \mathbf{Z}^{n-k} \longrightarrow \mathbf{Z}^{n-k}$$
$$(z_1, \cdots, z_{n-k}) \longmapsto (z_1, z_1 + z_2, \cdots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j).$$

14. En déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$

$$\mathbf{P}(A_k^n) = \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k}).$$

15. Montrer l'égalité :
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_k = 0)\, \mathbf{P}(E_{n-k}).$$

16. Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :
$$\frac{1}{1-x} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\, x^n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n \Big).$$

17. Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbf{P}(S_n = 0)$.

    Indication : on discutera suivant la parité de n.

18. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

19. À l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbf{P}(E_n)$.

20. Montrer que l'on a : $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$.

21. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité :
$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = n)\, x^n.$$

22. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\mathbf{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\, \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

Fin du problème

A 2016 - MATH II PC.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

Mathématiques II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Wronskien et problème de Waring

En 1770 Edward Waring, se basant sur des calculs empiriques, pose la conjecture suivante : pour un entier n naturel fixé, on peut exprimer tout entier naturel comme somme d'*au plus* $g(n)$ puissances n-ièmes d'entiers naturels, $g(n)$ ne dépendant que de n. Le cas $n = 2$ avait déjà été formulé par Fermat en 1640, Euler et Lagrange ont traité des cas particuliers et finalement en 1909 Hilbert a pu établir ce résultat (appelé parfois théorème de Hilbert-Waring).
On se propose ici de résoudre un problème analogue dans le cadre (algébrique) des polynômes à coefficients complexes. Plus précisément, on fixe un entier naturel n et on étudie les équations

$$X = f_1^n(X) + ... + f_k^n(X),$$

les inconnues $(f_1, ..., f_k)$ étant dans $\mathbf{C}[X]$. On s'intéresse particulièrement au *plus petit entier* $k = k(n)$ pour lequel cette équation possède des solutions. L'objectif de ce problème est de prouver que $k(2) = 2$ et que pour $n \geq 3$, on a l'inégalité

$$n < k^2(n) - k(n).$$

On considère dorénavant que n **est un entier naturel supérieur ou égal à** 2.

Soient $d_1, \cdots, d_n$ des nombres réels. On note

$$V(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \cdots & d_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde de $(d_1, \cdots, d_n)$. On rappelle que

$$V(d_1, \cdots, d_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i)$$

Pour tout $d \in \mathbf{R}$ et $k \geq 1$, on note

$$(d)_k = d(d-1)\cdots(d-k+1),$$

et on introduit le déterminant

$$D(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (d_1)_1 & (d_2)_1 & \cdots & (d_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1} & (d_2)_{n-1} & \cdots & (d_n)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

A Propriétés élémentaires du Wronskien

1. Montrer que $D(d_1, \cdots, d_n) = V(d_1, \cdots, d_n)$.

On fixe à présent un intervalle $\mathrm{I} =]a, b[$ de $\mathbf{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de I dans $\mathbf{R}$, $(n-1)$ fois dérivables sur I ; leur *Wronskien* $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction définie sur I par

$$W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le Wronskien des fonctions monômiales $(x \mapsto a_1 x^{d_1}), \cdots, (x \mapsto a_n x^{d_n})$ est égal à

$$V(d_1, \cdots, d_n)\ x^{d_1 + \cdots + d_n - \binom{n}{2}}\ \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

3. Soit g une fonction $(n-1)$ fois dérivable sur I, montrer que

$$W_n(f_1 g, f_2 g, \cdots, f_n g) = g^n\, W_n(f_1, \cdots, f_n).$$

4. Pour f_1 ne s'annulant pas sur I, montrer que

$$W_n(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n\ W_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

B Annulation du wronskien

On note $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $(n-1)$ fois dérivables de I dans $\mathbf{R}$.

5. Montrer que si $f_1, \cdots, f_n$ forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$ alors $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est identiquement nulle sur I.

6. Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$. On suppose que $W_2(f_1, f_2) = 0$ sur I et que $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur I. Montrer alors que f_1 et f_2 forment une famille liée de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I}; \mathbf{R})$.

7. Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 formant une famille libre dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbf{R})$ et telles que $W_2(f_1,f_2)=0$.

8. En utilisant la question 4 montrer que si $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est la fonction nulle sur I, alors il existe un sous-intervalle $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$, sur lequel les restrictions de $f_1,\cdots,f_n$ à J forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{J};\mathbf{R})$.

On suppose maintenant que $0\in\mathrm{I}$, que les fonctions $f_1,\ldots,f_n$ sont développables en séries entières au voisinage de 0, qu'elles coïncident avec leur développement sur I et qu'elles forment **une famille libre** de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\mathbf{R})$. On définit l'*ordre* d'une série entière non nulle $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ comme le plus petit entier naturel d tel que $a_d\neq 0$.

9. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$(f_1,\ldots,f_n)\mathrm{A}=(g_1,\ldots,g_n),$$

où les $g_1,\ldots,g_n$ sont des fonctions développables en série entière non nulles dont les ordres $d_1,\ldots,d_n$ sont deux à deux distincts. On commencera d'abord par le cas $n=2$.

On souhaite démontrer que pour ces fonctions $(g_1,\ldots,g_n)$, il existe un réel $C\neq 0$ tel que

$$W_n(g_1,\ldots,g_n)(x)=C\,x^{d_1+\ldots+d_n-\binom{n}{2}}\,(1+o(1)) \tag{1}$$

au voisinage de 0.

10. Traiter le cas où pour tout $i=1,\cdots,n$, on a $d_i\geq n-1$.

11. On choisit un entier a tel que pour tout $i=1,\cdots,n$, on ait $d_i+a\geq n-1$. En utilisant la question 3 avec $g(x)=x^a$, montrer (1).

12. En déduire que $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est non nulle au voisinage de 0.

C Problème de Waring sur $\mathbf{C}[X]$

Pour n fixé, on se propose d'étudier les équations

$$X=f_1^n(X)+\cdots+f_k^n(X),$$

en les inconnues $f_1(X), \cdots, f_k(X) \in \mathbf{C}[X]$ et plus particulièrement le plus petit entier k pour lequel cette équation possède des solutions. On notera ce plus petit entier $k(n)$. Si f appartient à $\mathbf{C}[X]$, on note

$$\Delta f(X) = f(X+1) - f(X) \text{ et } \Delta^p f = \Delta\Big(\Delta^{p-1} f\Big).$$

Lorsque cela est nécessaire, on identifie polynômes et fonctions polynomiales associées.

13. Montrer que $\Delta^{n-1}(X^n)$ est de la forme $aX + b$ avec $a \neq 0$, et en déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est non vide et que $k(n) \leq n$.
On notera en particulier que $k(n)$ est fini.

14. Montrer que tout $g \in \mathbf{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$g(X) = g_1^n(X) + \cdots + g_{k(n)}^n(X).$$

15. Montrer que $k(2) = 2$.

Nous allons maintenant montrer que pour $n \geq 3$, $n < k^2(n) - k(n)$.

Soit $X = f_1^n(X) + \cdots + f_{k(n)}^n(X)$ avec $f_i \in \mathbf{C}[X]$. On considère les Wronskiens

$$Z_1 = W_{k(n)}(f_1^n, \cdots, f_{k(n)}^n) \quad \text{et} \quad Z_2 = W_{k(n)}(X, f_2^n, \cdots, f_{k(n)}^n).$$

16. Montrer que $Z_1 = Z_2$ puis que Z_1 n'est pas le polynôme nul.

17. Montrer que Z_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1}$.

18. Montrer que

$$\deg Z_2 \leq 1 + n\Big(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i\Big) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

19. Déduire des questions 17 et 18 que

$$n \deg f_1 \leq (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1.$$

20. Montrer que $n < k^2(n) - k(n)$.

Fin du problème

A2017 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude d'un endormorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules :

$$(\forall x \in I) \qquad \begin{cases} u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x \sin t) \, \mathrm{d}t \\ \\ v(f)(x) = f(0) + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) \, \mathrm{d}t. \end{cases}$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et par v.

4. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même ?

8. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes M et N sont-elles équivalentes ?

9. Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.

11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?

12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

13. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan t$ et en déduire $u(\operatorname{argsh}'')$.

14. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (respectivement impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D Étude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

16. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

17. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{t\in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,

$$|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

18. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.

19. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? de v ? L'ensemble des valeurs propres de u (respectivement de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

Fin du problème

A2017 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\varnothing$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, ..., a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, ..., \lambda_p$ dont la somme égale 1, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A à coefficients réels est notée A^T. La trace de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{*+}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application ϕ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $\langle x, y\rangle = 0$ implique $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$.

   Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)

   En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)

   Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

C Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un en-

semble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ...\Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$.

10. Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ..., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \varnothing$.

D Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup_{u\in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que N_G est bien définie, et que c'est une norme sur E.

12. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

    - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
    - pour tous x, y dans E avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

    Pour la deuxième propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $||u(z)||$ est continue.

On considère un élément u de $L(E)$ et on suppose que K est stable par u, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le nombre réel $\delta(K) = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit r un entier $\geqslant 1$, $u_1, u_2, ..., u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\Big(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\Big) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G\Big(u_i(a)\Big)$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $N_G\Big(u_j(a) + \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big) = N_G\Big(u_j(a)\Big) + N_G\Big(\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\Big)$.

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.

18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$, $\Delta = \{A^T A \mid A \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.

20. Montrer que Δ est un compact contenu dans S_n^{++} et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N \ ; \ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

22. Montrer que $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Fin du problème

A2017 – MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

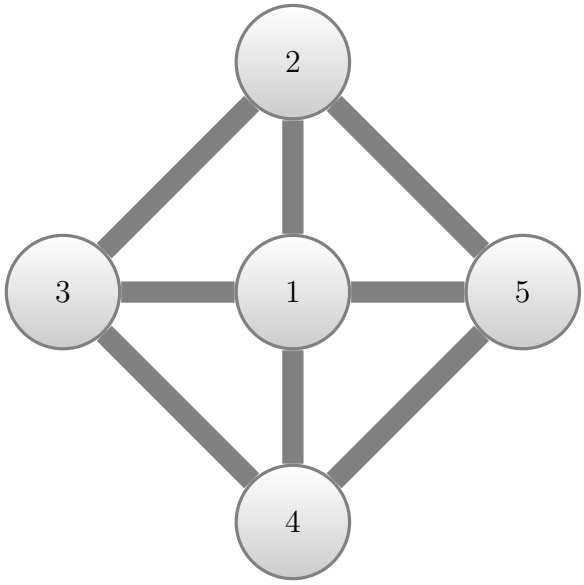
MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \cdots, k, \cdots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$\forall k \in \mathbf{N}$,

$$P(S_{k+1} = 1 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 \,|\, S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i),\ i = 1, \cdots, 5)$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.

3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k\to\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $\Big(r_k(x)\Big)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}\left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable par le produit matriciel.

13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

    Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, *soit* $s \in [\![1, n]\!]$ *un indice tel que* $x_s = \max_{1\leq j\leq n} x_j$, *on montrera que* $x_j = x_s$ *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$.

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.

22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A.

    On pourra utiliser le résultat de la question 8.

IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2) ?

24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants k, $k \in \mathbf{N}$).

Fin du problème

A2017 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Endomorphismes échangeurs

Durée prévue : 3 h

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbf{C}$, le corps des nombres complexes, pour corps de base.

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F.$$

Étant donné deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme u est échangeur.

(C2) Il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$.

(C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties **A** et **B** est indépendante des autres. Les résultats de la partie **D** sont essentiels au traitement des parties **E** et **F**.

A Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det u$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 \, \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres de u.

3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$, et en déduire que u est échangeur.

B La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice

$$M := \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}.$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$ de $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}.$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur, et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G. La famille $\mathbf{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de u dans $\mathbf{B}$.

7. Déduire des questions précédentes que u vérifie les conditions **(C2)** et **(C3)**.
   On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F et G est nul.

C La condition (C2) implique la condition (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un *automorphisme* d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\operatorname{Ker} f$ à $\operatorname{Im} f$ et en déduire
$$\dim \operatorname{Ker} f \geq \frac{\dim E}{2}.$$

9. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$, et que $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$.

10. En déduire que u est échangeur.

D Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe λ arbitraire. On pose $v := f - \lambda \operatorname{I}_E$.

11. Montrer que la suite $\left(\mathrm{Ker}(v^k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p,\ \mathrm{Ker}\, v^k = \mathrm{Ker}\, v^p.$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\mathrm{Ker}\, v^k$ *pour* k *dans* $\mathbf{N}$.
Montrer qu'alors

$$\mathrm{Ker}\, v^p = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}\, v^k$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question **12** et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) := \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}\, v^k = \mathrm{Ker}\, v^p.$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E_\lambda^c(f) = \mathrm{Ker}(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p).$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(v^p)$. Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.

15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
Montrer que $\mathrm{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$, puis que $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$.
On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f *sur* $\mathrm{Im}(v^p)$.

E La condition (C2) implique la condition (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant :

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E_0^c(u) = \operatorname{Ker} u^p$, donné par la question **12**.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G := \operatorname{Im} u^p$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

18. En déduire que u est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie* **C**.

F La condition (C3) implique la condition (C1)

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Un endomorphisme u de E est dit **indécomposable** lorsque :
(i) La condition **(C3)** est vérifiée par u.
(ii) Il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits respectifs u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question **21** incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}.$$

19. Montrer que φ^2 commute avec u.

20. Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.
On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions **13** *et* **14**.

21. En déduire que u est échangeur.
On pourra appliquer le résultat final de la question **15**.

22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition (**C3**) implique la condition (**C1**).

Fin du problème

A2017 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

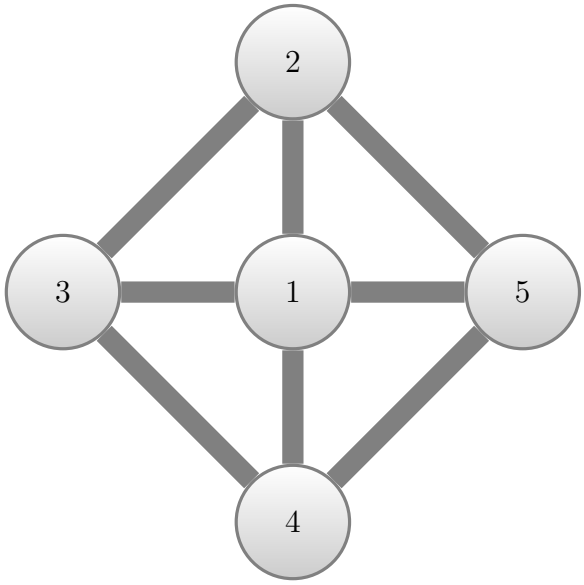
MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \cdots, k, \cdots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$\forall k \in \mathbf{N}$,

$$P(S_{k+1} = 1 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 \,|\, S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i),\ i = 1, \cdots, 5)$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.

3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k\to\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $\Big(r_k(x)\Big)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}\left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}\right), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable par le produit matriciel.

13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

    Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, *soit* $s \in [\![1, n]\!]$ *un indice tel que* $x_s = \max_{1\leq j\leq n} x_j$, *on montrera que* $x_j = x_s$ *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$.

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.

22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A.

    On pourra utiliser le résultat de la question 8.

IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2) ?

24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants k, $k \in \mathbf{N}$).

Fin du problème

A2017 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première répétition

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\, e^{-u})^n \, \mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\, e^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\, e^{-u})^n \, \mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1}\, u\, e^{-u}$ *pour* $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$*, pour* $x = 1$*, sera obtenue dans la suite du problème.*

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\backslash\{0\}$ $\qquad 0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\backslash\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\Big(f(x)\Big).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait
$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par
$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n,\, n \geq 1)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$,
$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

11. En déduire que
$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que
$$\int_{0}^{1} \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que
$$n! = n^{n+1}\, e^{-n}\, (I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx}\ \mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx}\ \mathrm{d}x.$$

13. Montrer que pour tout $x \geq 1,\ x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

15. En déduire que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\ \mathrm{d}t.$$

17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, e^n.$$

V Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. *Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.*

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \cdots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées $(U_1, \cdots, U_{n+1})$ définies par

$$\begin{aligned} U_j\ : \Omega &\longrightarrow \{1, \cdots, n\} \\ w = (w_1, \cdots, w_{n+1}) &\longmapsto w_j. \end{aligned}$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j-ième tirage. On suppose que la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j,\ j = 1, \cdots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.

18. Pour une entrée `liste`$= [w_1, \cdots, w_{n+1}]$, écrire un pseudo-code ou un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \cdots, w_{n+1})$.

    Si nécessaire, on admettra l'existence d'une fonction qui permet de tester l'appartenance d'un élément w à une liste L : (w in L) renvoie « True » si $w \in L$, « False » sinon.

19. Montrer que pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.

20. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}\Big(X > k+1 \;\Big|\; X > k\Big)\,\mathbf{P}(X > k).$$

21. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}\cdot$$

22. Etablir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k).$$

23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du problème

A2018 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Lemme de Fekete et théorème de Erdös-Szekeres

Le but de ce problème est d'étudier quelques applications probabilistes du lemme de sous-additivité de Fekete et du théorème de Erdös-Szekeres.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement A et on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

A. Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour toute variable aléatoire X réelle à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathrm{E}(X) \leqslant m - 1 + n\,P(X \geqslant m).$$

2) À l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k\,;\, k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

3) Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.

4) Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$

5) Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et de $\overline{v}$.

6) Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites u, $\overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans le reste de cette partie on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

7) Soit m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leqslant (q-1)\,u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

8) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

9) En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

C. Une application probabiliste

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

10) Montrer que si $P(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n < x) = 1$ et que si $P(X_1 \geqslant x) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

11) Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}$$

et en déduire l'inégalité

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x)P(Y_n \geqslant x).$$

12) Démontrer la convergence de la suite

$$\left(\left(P(Y_n \geqslant x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

Si r est un entier naturel non nul, on note $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r)$ une liste de nombres réels de longueur r ; cette liste est *croissante* si $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_r$, *décroissante* si $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_r$. Une liste ℓ' de longueur $p \in \{1, \ldots, r\}$ est *extraite* de ℓ s'il existe p indices strictement croissants $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ dans $\{1, \ldots, r\}$ tels que $\ell' = (\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p})$.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{pq+1})$ une liste de longueur $pq+1$ de nombres réels deux-à-deux distincts qui représentent les valeurs de $pq+1$ jetons numérotés $1, 2, \ldots, pq+1$.

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton n°1 de valeur a_1 débute la première pile ;
- *si* $a_2 > a_1$, alors on pose le jeton n°2 de valeur a_2 sur le jeton n°1 ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton n°2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton n°k de valeur a_k, on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que a_k est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1,4,2,3,7,6,5,9,10,8)$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes :

10		
9	8	
7	6	
4	3	
1	2	5

13) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre s de piles, montrer qu'à l'issue du processus, pour tout jeton de valeur z de la dernière pile, il existe une liste $b = (b_1, \ldots, b_s)$ de réels extraite de la liste a vérifiant :
- b est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ème pile en partant de la gauche ;
- $b_s = z$.

Par exemple, avec la liste $a = (1,4,2,3,7,6,5,9,10,8)$ on a une liste extraite $b = (7,6,5)$.

14) En déduire que la liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$ *ou* une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$. Chaque élément $\sigma \in S_n$ est noté par la liste de ses n images $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$.

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans S_n de loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $P(B = \sigma) = 1/\mathrm{Card}(S_n)$. On définit la variable aléatoire A à valeurs dans S_n en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$A(\omega) = \big(B(\omega)(1), \ldots, B(\omega)(n)\big).$$

On note également, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$. Enfin, on considère les variables aléatoires réelles C_n et D_n définies par :
- C_n est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de A ;
- D_n est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de A.

15) Les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

16) Soit $k \in \{1,\dots,n\}$ et $s = (s_1,\dots,s_k)$ une liste croissante de longueur k d'éléments de $\{1,\dots,n\}$. On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1},\dots,A_{s_k})$ est croissante ». Montrer que $P(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.

17) Démontrer que C_n et D_n ont la même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question 14, que :

$$\mathrm{E}(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18) Démontrer que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$,

$$P(C_n \geqslant k) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19) Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à 1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$. À l'aide du résultat de la question 2, déduire de la question précédente que

$$P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

20) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + n^{-1/4}\right) e + \varepsilon_n.$$

En conclure que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e$.

FIN DU PROBLÈME

A2018 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racines carrées de matrices complexes : existence et calcul numérique

---

Dans ce problème, on étudie l'existence de racines carrées d'une matrice complexe, puis on introduit l'algorithme de Newton pour calculer numériquement l'une de ces racines carrées, avec des considérations sur la convergence et la stabilité de l'algorithme.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n. On appelle *racine carrée* de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On note $\widetilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls qui ne sont pas des nombres réels négatifs.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie). Lesquelles sont des polynômes en A ?

2) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées et qu'aucune d'entre elles n'est un polynôme en A.

Dans la question suivante, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

3) Montrer que A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive.

(On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs et sous-espaces propres.)

B. Existence et calcul d'une racine carrée

Dans cette partie $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice *inversible* quelconque.

4) Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $U = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes triangulaires supérieures. On suppose que T est inversible. Mon-

trer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{cases}$$

Montrer que T étant donnée, on peut résoudre ce système en choisissant une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (On pourra considérer les parties réelles et imaginaires des $u_{i,i}$.)

5) En déduire que A admet une racine carrée. Si en outre, les valeurs propres de A appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$, montrer que A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

On admet qu'une telle racine carrée est unique et on la notera $\sqrt{A}$ dans toute la suite du problème.

C. Algorithme de Newton

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on pose

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

et on admet que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $B(X, r)$ et $\overline{B}(X, r)$ les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et de rayon r.

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

6) Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

On note m_A le polynôme minimal de A.

7) Montrer que la matrice $m_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

En déduire que s'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.

8) Réciproquement, si A et B ont au moins une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

(On pourra considérer une matrice de la forme XY^T où X et Y sont deux matrices colonnes bien choisies).

Soit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par la formule $F(X) = X^2 - A$.

9) Montrer que la différentielle $\mathrm{d}F_X$ de F en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{d}F_X(H) = XH + HX.$$

Déduire des deux questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible. Montrer que cette condition implique que X est inversible.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. On pose $X^* = \sqrt{A}$ (la matrice $\sqrt{A}$ a été définie à la question 5).

On définit, sous réserve d'existence, une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$(\mathbf{N}) \begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = X_k - (\mathrm{d}F_{X_k})^{-1}\big(F(X_k)\big). \end{cases}$$

Dans les questions suivantes, on étudie l'existence et la convergence de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

10) Montrer que $\mathrm{d}F_{X^*}$ est inversible et qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible pour tout $X \in \overline{B}(X^*, r)$.

Pour tout $Y \in \overline{B}(X^*, r)$ on pose $G(Y) = Y - (\mathrm{d}F_Y)^{-1}\big(F(Y)\big)$.

11) Calculer $G(X^*)$ et montrer que pour tout $H \in B(0, r)$,

$$G(X^* + H) - G(X^*) = (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

où

$$\big(\mathrm{d}F_{X^*+H}\big)^{-1} = \big(Id + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H\big)^{-1} \circ (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1}.$$

12) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout X de $B(X^*, r)$, $\|G(X) - X^*\| \leqslant C\|X - X^*\|^2$. (On pourra utiliser le résultat de la question 6.)

13) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leqslant \frac{(\rho\sqrt{C})^{2^k}}{C}.$$

Que peut-on en conclure ?

D. Forme équivalente

Dans cette partie, on étudie deux algorithmes équivalents à celui de Newton. On rappelle que A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$. Soit U_0 et V_0 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Sous réserve d'existence, on note $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{I})\begin{cases} U_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ U_{k+1} = U_k + H_k \text{ où } H_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie} \\ \qquad U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2 \qquad\qquad \text{pour tout } k \geqslant 0 \end{cases}$$

et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(\mathbf{II})\begin{cases} V_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1} A) \quad \text{pour tout } k \geqslant 0. \end{cases}$$

14) Si la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et $U_0 = X_0$, montrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et égale à $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Réciproquement si la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et $X_0 = U_0$, montrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**N**) et égale à $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On suppose dorénavant ces conditions vérifiées.

15) On suppose que $U_0 = V_0$ commute avec A. Montrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**II**) et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = V_k$ commute avec A. (On pourra d'abord montrer que U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ et considérer la matrice $G_k = \frac{1}{2}\left(U_k^{-1} A - U_k\right)$.)

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et qu'une telle matrice admet une unique racine carrée définie positive (question 3).

Dans la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive.

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On fixe une matrice orthogonale P de sorte que $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, ordonnées par ordre croissant. On note $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs propres correspondants.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ quelconques.

16) Montrer que V_k est symétrique réelle définie positive de mêmes vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ que A dont on notera $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes. Trouver une relation entre $\lambda_{k+1,\ell}$ et $\lambda_{k,\ell}$.

17) Montrer que

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}.$$

18) Déterminer la limite de la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

E. Stabilité

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation (**II**) avec $V_0 = \sqrt{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ et i, j deux indices distincts de $\{1, \dots, n\}$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice orthogonale P définie dans la partie précédente et on pose $\Delta = \varepsilon C_i C_j^T$.

Soit $\widehat{V_0} = V_0 + \Delta$. La matrice $\widehat{V_1}$ est calculée par la relation (**II**) à partir de $\widehat{V_0}$ et on pose $\Delta_1 = \widehat{V_1} - V_1$. Ensuite $\widehat{V_2}$ est calculé à partir de $\widehat{V_1}$ par la relation (**II**), puis $\widehat{V_3}, \widehat{V_4} \dots$ de la même manière.

19) Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} (V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} \\ \Delta_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} A\right). \end{cases}$$

20) Déterminer la valeur de $\eta \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k \Delta.$$

21) On appelle *conditionnement* de A le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite. Que doit vérifier le conditionnement de A pour que la suite $(\widehat{V_k})_{k\geqslant 0}$ converge ?

FIN DU PROBLÈME

A2018 – MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

— Si x est un nombre réel on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x.

— On appelle cardinal de l'ensemble fini E le nombre de ses éléments, que l'on note $|E|$.

— On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

— Dans tout le problème on identifiera $\mathbf{R}^n$ à l'espace des matrices lignes $M_{1,n}(\mathbf{R})$ et on notera $\langle x,\, y\rangle$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs, soit

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

les x_j, y_j étant les composantes de x, y respectivement.

— Si $\mathcal{V}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $\forall x \in \mathcal{V},\ \langle x, y\rangle = 0$.

— Si M est une matrice carrée de nombres réels, on note $\det(M)$ son déterminant.

Dans tout le problème on pourra utiliser librement la formule de Stirling que l'on rappelle :

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Définition 1 (Espace de Rademacher) *Si $n,\, q \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$\Omega_{q,n} = \Big\{\omega = (\omega_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n) \text{ tels que } \omega_{i,j} = \pm 1,\ \forall i, j\Big\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, on introduit la variable aléatoire $M_{i,j}$ telle que

$$\begin{aligned} M_{i,j} \,:\, \Omega_{q,n} &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega &\longmapsto \omega_{i,j}. \end{aligned}$$

On munit $\Omega_{q,n}$ de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$. Cela signifie que les variables aléatoires $(M_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n)$ sont indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(M_{i,j} = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(M_{i,j} = -1).$$

Si $q = n$, on note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note $L_1^{(n)}, \cdots, L_n^{(n)}$ les vecteurs lignes de $M^{(n)}$. Par construction, ce sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi.

Le but du problème est de démontrer, qu'ainsi construite, une matrice aléatoire est inversible avec forte probabilité quand n est grand :

Théorème 1 (Komlós) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) = 0.$

A Coefficients binomiaux

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$: montrer que l'application

$$k \longmapsto \binom{n}{k}$$

est croissante sur $\{0, \cdots, [n/2]\}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

2. Trouver un équivalent de $\binom{n}{[n/2]}$ quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

3. Montrer que pour tout entier non nul n et tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k.$$

On note $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. On identifie $\Omega_{1,n}$ et le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i \; e_i, \; (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega_{1,n} \right\}.$$

4. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, exprimer e_i en fonction de v et $v - 2e_i$. En déduire que $\mathrm{Vect}(\Omega_{1,n}) = \mathbf{R}^n$.

B Dimension 2

5. Déterminer l'espérance de $\det M^{(2)}$.

6. Montrer que la variance de $\det M^{(2)}$ est égale à 2.

7. Calculer $\mathbf{P}\Big(\det M^{(2)} = 0\Big)$.

C Quelques bornes

On suppose dorénavant $n \geq 2$.

8. Quelle est la probabilité que les deux premières lignes de $M^{(n)}$ soit égales ou opposées ?

   En déduire que $\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \geq 2^{1-n}$ si $n \geq 2$.

9. Soient $l_1, \cdots, l_n$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$. Montrer que ces vecteurs sont liés si et seulement si, il existe $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que

$$l_{j+1} \in \mathrm{Vect}(\{l_1, \cdots, l_j\}).$$

   En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \ \leq \ \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big). \tag{2}$$

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. On rappelle que $\mathcal{H}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et que $(\mathcal{H}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$.

10. Montrer alors qu'il existe des réels $(\alpha_{i,j},\ 1 \leq i \leq n-d,\ 1 \leq j \leq n)$ tels que

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant le pivot de Gauss, montrer qu'il existe $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tel que pour tout $(y_1, \cdots, y_d) \in \mathbf{R}^d$ il existe un unique $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $x_{i_k} = y_k$ pour $k = 1, \cdots, d$.

12. En déduire que

$$\mathbf{P}(L_1^{(n)} \in \mathcal{H}) \leq 2^{d-n},$$

    puis que pour tout $j \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq 2^{j-n}. \tag{3}$$

Indication : on pourra utiliser la conséquence suivante de la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big)$$
$$= \sum_{l_1,\cdots,l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(l_1, \cdots, l_j) \mid L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j\Big)$$
$$\times \mathbf{P}(L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j)$$

et l'indépendance des vecteurs lignes.

Soit $q < n$ et $\omega \in \Omega_{q,n}$. On note $l_1, \cdots, l_q$ ses vecteurs lignes.

13. Montrer que l'on peut trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathrm{Vect}(l_i, i = 1, \cdots, q)$ qui soit à coordonnées dans $\mathbf{Z}$.

D Théorème de Erdös-Littlewood-Offord

Définition 2 *Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\{1, \cdots, n\})$. On dit que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne si deux éléments distincts A, B quelconques de $\mathcal{A}$ sont incomparables, c'est-à-dire tels que A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A.*

Commençons par un exemple. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$ et $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$ de cardinal k.

14. Montrer que $\mathcal{A}_k$ est une anti-chaîne et que
$$|\mathcal{A}_k| \leq \binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}},$$
la deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Définition 3 *Soit $\mathcal{A}$ une anti-chaîne et $A \in \mathcal{A}$, de cardinal noté $|A|$. On note $\mathcal{S}_A$, l'ensemble des bijections σ de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même telles que la restriction de σ à $\{1, \cdots, |A|\}$ soit une bijection de $\{1, \cdots, |A|\}$ dans A.*

15. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_A$?

16. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $B \neq A$. Montrer que $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B = \emptyset$.

17. En déduire que si a_k désigne, pour $k \leq n$, le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de cardinal k, alors
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

18. Montrer que
$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $v_j \geq 1$, pour tout $j = 1, \cdots, n$. Si $A \subset \{1, \cdots, n\}$ on pose
$$s_A = \sum_{j \in A} v_j - \sum_{j \in A^c} v_j$$
où A^c est le complémentaire de A dans $\{1, \cdots, n\}$.

19. Montrer que si $A \subset B \subset \{1, \cdots, n\}$, $A \neq B$, alors
$$s_B - s_A \geq 2.$$

20. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ de longueur 2 : montrer que si n est assez grand alors
$$\mathbf{P}(< L_1^{(n)}, v > \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Montrer que cette propriété reste vraie si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $|v_j| \geq 1$.

Indication : construire une bijection entre $\Omega_{1,n}$ et l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$. Construire une anti-chaîne intéressante.

E Universalité

Dans tout ce qui suit, k est un entier inférieur à n.

Définition 4 *Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est dit k-universel si pour tous les $k-$uplets $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_k \leq n$ et tout $\omega \in \Omega_{1,n}$, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que*
$$v_{j_m} = \omega_{1,j_m}, \text{ pour tout } m = 1, \cdots, k.$$

21. Soit $d \in \{1, ..n\}$. Montrer l'inclusion
$$\left\{\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\right\} \subset \bigcup_{\substack{(j_1,\cdots,j_k)\in\{1,\cdots,n\}^k \\ j_1<\ldots<j_k}} \bigcup_{\omega\in\Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \{M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m}\}.$$
(On rappelle que $L_i^{(n)} = (M_{i,1}, \cdots, M_{i,n})$).

22. Montrer que la probabilité que $\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\}$ ne soit pas $k-$universel est majorée par
$$\binom{n}{k} 2^k (1 - 2^{-k})^d.$$

23. En déduire que si $d \geq n/2$ et $k \leq \ln n$, alors, pour n assez grand,

$$\mathbf{P}\Big(\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\Big) \leq \frac{1}{n}\cdot \tag{4}$$

24. Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$ un ensemble k-universel tel qu'il existe $v \in \mathcal{V}^{\perp}\backslash\{0\}$: montrer que v a au moins $k+1$ coordonnées non nulles.

En vertu de la question 13, on peut supposer que les coordonnées de v sont des entiers relatifs.

25. Montrer que si k est assez grand

$$\mathbf{P}\Big(L_1^{(n)} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V})\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\langle L_1^{(n)}, v\rangle = 0\Big) \leq k^{-1/2}. \tag{5}$$

Soit $(t_n,\, n \in \mathbf{N})$ une suite croissante d'entiers telle que $t_n/n \to 0$.

26. Montrer que si n est assez grand alors $n - t_n \geq n/2$ et

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq \frac{2\,t_n}{\sqrt{\ln n}}\cdot \tag{6}$$

Indication : on distinguera les cas selon que $\mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})$ *est* k*-universel ou pas et l'on prendra* $k = [\ln n]$.

F Théorème de Komlós

27. En déduire le théorème de Komlós.

Indication : on pourra partir de (2) *et choisir convenablement une suite* $(t_n,\, n \geq 1)$.

Fin du problème

A2018 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définition 1 (Fonctions dérivables) *Pour tout entier k, on notera $\mathcal{C}_b^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont aussi bornées. On note*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \text{ et } \|f\|_{k,\infty} = \sup_{j=0,\cdots,k} \|f^{(j)}\|_\infty,$$

où, comme d'habitude, $f^{(0)} = f$.

Définition 2 (Fonctions à croissance lente) *On dira qu'une fonction f est à croissance lente si et seulement si il existe $(A, m) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{N}$ tels que pour tout réel x,*

$$|f(x)| \leq A\left(1 + |x|^m\right).$$

On notera $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui sont à croissance lente.

On note $\mathcal{C}_l^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions à croissance lente, de classe $\mathcal{C}^k$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont à croissance lente.

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral : pour $k \geq 0$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$,

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

I Préliminaires

1. Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$,

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \frac{(b-a)^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-\theta)^k f^{(k+1)}(a+\theta(b-a))\, d\theta.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha > 0$, on définit

$$\begin{aligned} g_{n,\alpha} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x^n e^{-\alpha x^2}. \end{aligned}$$

2. Démontrer que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $n \geq 0$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 g_{n,\alpha}(x) = 0,$$

et en déduire que $g_{n,\alpha}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On admettra que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi}.$$

3. Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\, dt$$

en utilisant le changement de variables $\theta = \arcsin(e^{-t})$.

4. Démontrer que pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, la fonction

$$x \mapsto \frac{(1+|x|^m)(1+|x|^n)}{1+|x|^{n+m}},$$

est bornée sur $\mathbf{R}$. En déduire que $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel qui est stable par produit, puis que les fonctions polynomiales appartiennent à $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$.

II Transformation d'Ornstein-Uhlenbeck

Pour simplifier les notations, pour $t \geq 0$, on pose

$$\beta_t = \sqrt{1-e^{-2t}}.$$

5. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $t \geq 0$ la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ &y \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f\left(e^{-t}x + \beta_t\, y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $t \geq 0$, on définit alors la fonction $P_t f$ par $P_0 f = f$ et pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} P_t f\ :\ &\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ &x \longmapsto \int_{\mathbf{R}} f\left(e^{-t}x + \beta_t\, y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note h_x la fonction définie par

$$\begin{aligned} h_x\ :\ &\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ &t \longmapsto P_t f(x). \end{aligned}$$

6. Démontrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$, h_x est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant

$$\lim_{t\to\infty} P_t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Indication. On pourra utiliser, après l'avoir prouvée, l'inégalité suivante : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $t \geq 0$:

$$\left|e^{-t}x + \beta_t y\right| \leq |x| + |y|.$$

7. A l'aide d'un changement de variables, démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, tout x, $h \in \mathbf{R}$ et tout $t > 0$:

$$P_t f(x+h) = \int_{\mathbf{R}} f(e^{-t}x + \beta_t\, y) \exp\Big(-\frac{1}{2}(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}\, h)^2\Big) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour $\alpha > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ fixés, soit ψ_y la fonction définie par

$$\begin{aligned} \psi_y \,:\, [-1/\alpha,\, 1/\alpha] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ h &\longmapsto \exp(-\frac{1}{2}(y - \alpha h)^2). \end{aligned}$$

8. Montrer que

$$\sup_{h\in[-1/\alpha,\,1/\alpha]} |\psi_y'(h)| \leq \begin{cases} \alpha(|y|+1) & \text{si } |y| \leq 1, \\ \alpha(|y|+1)\exp(-\frac{1}{2}(|y|-1)^2) & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

9. Soit $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ et $t > 0$ fixé. Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_t f(x+h) - P_t f(x)}{h}.$$

En déduire que $P_t f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, sa dérivée est donnée par :

$$(P_t f)'(x) = \frac{e^{-t}}{\beta_t} \int_{\mathbf{R}} f(e^{-t}x + \beta_t\, y)\; y\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

10. Démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout $m \geq 0$:

$$|a+b|^m \leq 2^m \left(|a|^m + |b|^m\right).$$

En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, on a $x \mapsto P_t f(x) \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$.

On admet dorénavant le lemme suivant.

Lemme 1 *Si f appartient à $\mathcal{C}_l^k$ alors pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto P_t f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$(P_t f)^{(k)}(x) = e^{-kt} \int_{\mathbf{R}} f^{(k)}(e^{-t}x + \beta_t\, y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1}$$

III Générateur infinitésimal

Dans toute cette partie, on suppose que f appartient à $\mathcal{C}_l^2(\mathbf{R})$ et l'on fixe $x \in \mathbf{R}$.

11. Démontrer que h_x est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que pour tout $t_0 > 0$,

$$h_x'(t_0) = -e^{-t_0}\, x\ (P_{t_0} f')(x) + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \int_{\mathbf{R}} f'(e^{-t_0}\, x + \beta_{t_0}\, y)\ y\, e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

12. Soit $g \in \mathcal{C}_l^1(\mathbf{R})$, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} g(\beta_{t_0}\, y)\ y\, e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \beta_{t_0} \int_{\mathbf{R}} g'(\beta_{t_0}\, y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\ \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

13. Montrer que h_x est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ à l'aide du théorème de prolongement et que

$$h_x'(0) = f''(x) - x f'(x).$$

On notera L l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} L\ :\ \mathcal{C}_l^2 &\longrightarrow \mathcal{C}_l(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto Lf\ :\ \Big(x \mapsto f''(x) - x f'(x)\Big) \end{aligned}$$

ou de façon plus simple, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(Lf)(x) = f''(x) - x f'(x).$$

IV Théorème central limite

On admet le théorème de représentation suivant.

Théorème 1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_l^2(\mathbf{R})$, pour tout $y \in \mathbf{R}$,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-x^2/2}\, dx - f(y) = \int_0^\infty L(P_t f)(y)\, dt.$$

Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes et de même loi, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose de plus que $|X_1|^3$ a une espérance finie.

14. Montrer que X_1 et X_1^2 ont une espérance finie.

    Indication. On pourra découper l'espace probabilisé Ω selon la position de $|X_1(\omega)|$ par rapport à 1.

On suppose dorénavant que $\mathbf{E}\left[X_1^2\right] = 1$ et $\mathbf{E}\left[X_1\right] = 0$. On fixe $n \geq 1$ et l'on pose

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } S^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n X_i.$$

15. Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle des variables $X_1, \cdots, X_n$. En déduire que les variables X_1 et $(X_2, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.

16. Pour g fonction bornée, montrer que pour $m \in \{1, 2, 3\}$ et tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathbf{E}\left[X_i^m\, g(S^{(i)})\right] = \mathbf{E}\left[X_i^m\right] \mathbf{E}\left[g(S^{(i)})\right]. \tag{2}$$

Dans les questions suivantes, on suppose $g \in \mathcal{C}_b^3$.

17. Déduire de (2) l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[g''(S) - S\, g'(S)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[g''(S) - g''(S^{(i)})\right] \\ - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[X_i \, \left(g'(S) - g'(S^{(i)}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}}\, g''(S^{(i)})\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

18. En appliquant deux fois la formule de Taylor établie dans la question 1, établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}\left[Lg(S)\right] = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[X_i \int_0^1 g^{(3)}(S^{(i)} + \frac{\theta}{\sqrt{n}} X_i)\, d\theta\right] - \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[X_i^3 \int_0^1 (1-\theta)\, g^{(3)}(S^{(i)} + \frac{\theta}{\sqrt{n}} X_i)\, d\theta\right].$$

19. Montrer que

$$\left|\mathbf{E}\left[Lg(S)\right]\right| \leq \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{\sqrt{n}}\, \mathbf{E}\left[|X_1| + |X_1|^3\right].$$

20. En utilisant la question 9 et l'équation (1), montrer que pour $f \in \mathcal{C}_b^2$, pour tout $t > 0$, pour tout réel x,

$$(P_t f)^{(3)}(x) = \frac{e^{-3t}}{\beta_t} \int_{\mathbf{R}} f''(e^{-t}x + \beta_t y)\, y e^{-y^2/2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}},$$

puis que

$$\|(P_t f)^{(3)}\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\, \|f\|_{2,\infty}.$$

21. En déduire que

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_b^2} \left|\mathbf{E}\left[f(S)\right] - \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-y^2/2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, \frac{\|f\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}}\, \mathbf{E}\left[|X_1| + |X_1|^3\right].$$

On admet que l'expression suivante

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_b^2 \\ \|f\|_{2,\infty} \leq 1}} \left|\mathbf{E}\left[f(X)\right] - \mathbf{E}\left[f(Y)\right]\right|$$

définit une distance entre les lois de X et de Y. On a donc montré que la vitesse de convergence dans le théorème de la limite centrée est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$.

Fin du problème

A2018 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations :

— Si x est un nombre réel on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif qui est inférieur ou égal à x.

— On appelle cardinal de l'ensemble fini E le nombre de ses éléments, que l'on note $|E|$.

— On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

— Dans tout le problème on identifiera $\mathbf{R}^n$ à l'espace des matrices lignes $M_{1,n}(\mathbf{R})$ et on notera $\langle x,\, y\rangle$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs, soit

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

les x_j, y_j étant les composantes de x, y respectivement.

— Si $\mathcal{V}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{V}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $\forall x \in \mathcal{V}$, $\langle x, y\rangle = 0$.

— Si M est une matrice carrée de nombres réels, on note $\det(M)$ son déterminant.

Dans tout le problème on pourra utiliser librement la formule de Stirling que l'on rappelle :

$$n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Définition 1 (Espace de Rademacher) *Si $n,\, q \in \mathbf{N}^*$, on note*

$$\Omega_{q,n} = \Big\{\omega = (\omega_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n) \text{ tels que } \omega_{i,j} = \pm 1,\ \forall i, j\Big\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \cdots, q\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, on introduit la variable aléatoire $M_{i,j}$ telle que

$$\begin{aligned} M_{i,j} \,:\, \Omega_{q,n} &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ \omega &\longmapsto \omega_{i,j}. \end{aligned}$$

On munit $\Omega_{q,n}$ de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$. Cela signifie que les variables aléatoires $(M_{i,j},\ 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le n)$ sont indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}(M_{i,j} = 1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(M_{i,j} = -1).$$

Si $q = n$, on note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note $L_1^{(n)}, \cdots, L_n^{(n)}$ les vecteurs lignes de $M^{(n)}$. Par construction, ce sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi.

Le but du problème est de démontrer, qu'ainsi construite, une matrice aléatoire est inversible avec forte probabilité quand n est grand :

Théorème 1 (Komlós) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) = 0.$

A Coefficients binomiaux

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$: montrer que l'application

$$k \longmapsto \binom{n}{k}$$

est croissante sur $\{0, \cdots, [n/2]\}$. En déduire que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

2. Trouver un équivalent de $\binom{n}{[n/2]}$ quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

3. Montrer que pour tout entier non nul n et tout $k \in \{0, \cdots, n\}$,

$$\binom{n}{k} 2^{k-1} \leq n^k.$$

On note $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. On identifie $\Omega_{1,n}$ et le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i \ e_i, \ (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega_{1,n} \right\}.$$

4. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, exprimer e_i en fonction de v et $v - 2e_i$. En déduire que $\mathrm{Vect}(\Omega_{1,n}) = \mathbf{R}^n$.

B Dimension 2

5. Déterminer l'espérance de $\det M^{(2)}$.

6. Montrer que la variance de $\det M^{(2)}$ est égale à 2.

7. Calculer $\mathbf{P}\Big(\det M^{(2)} = 0\Big)$.

C Quelques bornes

On suppose dorénavant $n \geq 2$.

8. Quelle est la probabilité que les deux premières lignes de $M^{(n)}$ soit égales ou opposées ?

   En déduire que $\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \geq 2^{1-n}$ si $n \geq 2$.

9. Soient $l_1, \cdots, l_n$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$. Montrer que ces vecteurs sont liés si et seulement si, il existe $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que

$$l_{j+1} \in \mathrm{Vect}(\{l_1, \cdots, l_j\}).$$

   En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(\det M^{(n)} = 0\Big) \ \leq \ \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big). \tag{2}$$

Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. On rappelle que $\mathcal{H}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et que $(\mathcal{H}^\perp)^\perp = \mathcal{H}$.

10. Montrer alors qu'il existe des réels $(\alpha_{i,j},\ 1 \leq i \leq n-d,\ 1 \leq j \leq n)$ tels que

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant le pivot de Gauss, montrer qu'il existe $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tel que pour tout $(y_1, \cdots, y_d) \in \mathbf{R}^d$ il existe un unique $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{H}$ tel que $x_{i_k} = y_k$ pour $k = 1, \cdots, d$.

12. En déduire que

$$\mathbf{P}(L_1^{(n)} \in \mathcal{H}) \leq 2^{d-n},$$

    puis que pour tout $j \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq 2^{j-n}. \tag{3}$$

Indication : on pourra utiliser la conséquence suivante de la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big)$$
$$= \sum_{l_1,\cdots,l_j \in \Omega_{1,n}} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(l_1, \cdots, l_j) \mid L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j\Big)$$
$$\times \mathbf{P}(L_1^{(n)} = l_1, \cdots, L_j^{(n)} = l_j)$$

et l'indépendance des vecteurs lignes.

Soit $q < n$ et $\omega \in \Omega_{q,n}$. On note $l_1, \cdots, l_q$ ses vecteurs lignes.

13. Montrer que l'on peut trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathrm{Vect}(l_i, i = 1, \cdots, q)$ qui soit à coordonnées dans $\mathbf{Z}$.

D Théorème de Erdös-Littlewood-Offord

Définition 2 *Soit n un entier non nul. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\{1, \cdots, n\})$. On dit que $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne si deux éléments distincts A, B quelconques de $\mathcal{A}$ sont incomparables, c'est-à-dire tels que A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A.*

Commençons par un exemple. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$ et $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$ de cardinal k.

14. Montrer que $\mathcal{A}_k$ est une anti-chaîne et que
$$|\mathcal{A}_k| \leq \binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}},$$
la deuxième inégalité ayant lieu pour n assez grand.

Définition 3 *Soit $\mathcal{A}$ une anti-chaîne et $A \in \mathcal{A}$, de cardinal noté $|A|$. On note $\mathcal{S}_A$, l'ensemble des bijections σ de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même telles que la restriction de σ à $\{1, \cdots, |A|\}$ soit une bijection de $\{1, \cdots, |A|\}$ dans A.*

15. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_A$?

16. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $B \neq A$. Montrer que $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B = \emptyset$.

17. En déduire que si a_k désigne, pour $k \leq n$, le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$ de cardinal k, alors
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

18. Montrer que
$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

Soit $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $v_j \geq 1$, pour tout $j = 1, \cdots, n$. Si $A \subset \{1, \cdots, n\}$ on pose
$$s_A = \sum_{j \in A} v_j - \sum_{j \in A^c} v_j$$
où A^c est le complémentaire de A dans $\{1, \cdots, n\}$.

19. Montrer que si $A \subset B \subset \{1, \cdots, n\}$, $A \neq B$, alors
$$s_B - s_A \geq 2.$$

20. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ de longueur 2 : montrer que si n est assez grand alors
$$\mathbf{P}(< L_1^{(n)}, v > \in J) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Montrer que cette propriété reste vraie si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $|v_j| \geq 1$.

Indication : construire une bijection entre $\Omega_{1,n}$ et l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, n\}$. Construire une anti-chaîne intéressante.

E Universalité

Dans tout ce qui suit, k est un entier inférieur à n.

Définition 4 *Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est dit k-universel si pour tous les $k-$uplets $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_k \leq n$ et tout $\omega \in \Omega_{1,n}$, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que*
$$v_{j_m} = \omega_{1,j_m}, \text{ pour tout } m = 1, \cdots, k.$$

21. Soit $d \in \{1, ..n\}$. Montrer l'inclusion
$$\Big\{\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\Big\}$$
$$\subset \bigcup_{\substack{(j_1, \cdots, j_k) \in \{1, \cdots, n\}^k \\ j_1 < \ldots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \{M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m}\}.$$
(On rappelle que $L_i^{(n)} = (M_{i,1}, \cdots, M_{i,n})$).

22. Montrer que la probabilité que $\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\}$ ne soit pas $k-$universel est majorée par
$$\binom{n}{k} 2^k \, (1 - 2^{-k})^d.$$

23. En déduire que si $d \geq n/2$ et $k \leq \ln n$, alors, pour n assez grand,

$$\mathbf{P}\Big(\{L_1^{(n)}, \cdots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}\Big) \leq \frac{1}{n}\cdot \tag{4}$$

24. Soit $\mathcal{V} \subset \Omega_{1,n}$ un ensemble k-universel tel qu'il existe $v \in \mathcal{V}^{\perp}\backslash\{0\}$: montrer que v a au moins $k+1$ coordonnées non nulles.

En vertu de la question 13, on peut supposer que les coordonnées de v sont des entiers relatifs.

25. Montrer que si k est assez grand

$$\mathbf{P}\Big(L_1^{(n)} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V})\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\langle L_1^{(n)}, v\rangle = 0\Big) \leq k^{-1/2}. \tag{5}$$

Soit $(t_n,\, n \in \mathbf{N})$ une suite croissante d'entiers telle que $t_n/n \to 0$.

26. Montrer que si n est assez grand alors $n - t_n \geq n/2$ et

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \mathbf{P}\Big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})\Big) \leq \frac{2\,t_n}{\sqrt{\ln n}}\cdot \tag{6}$$

Indication : on distinguera les cas selon que $\mathrm{Vect}(L_1^{(n)}, \cdots, L_j^{(n)})$ *est* k*-universel ou pas et l'on prendra* $k = [\ln n]$.

F Théorème de Komlós

27. En déduire le théorème de Komlós.

Indication : on pourra partir de (2) *et choisir convenablement une suite* $(t_n,\, n \geq 1)$.

Fin du problème

A2018 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit U un ouvert du plan $\mathbf{R}^2$, soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Son **laplacien** Δf est alors défini sur U par

$$\forall (x,y) \in U \qquad \Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\ .$$

La fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est dite **harmonique** sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et de laplacien nul sur U, i.e. $\Delta f = 0$.

I Noyau de Dirichlet

Pour n entier naturel et t réel, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \ = \ \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}\ .$$

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$ et t réel non multiple entier de 2π, prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $h : [-\pi,\pi] \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\ \sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$

tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\ .$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\, D_n(u)\, \mathrm{d}u \ .$$

5. En déduire que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\, \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u \ ,$$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

On admettra que cette fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

6. À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$c_n(g) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \text{ et } c_{-n}(g) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\, e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\, e^{-int} \ .$$

II Coordonnées polaires

Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne canonique. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ harmonique sur U, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $m_0 = (x_0, y_0)$ un point de U, soit $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B(m_0, \delta)$ soit incluse dans U. Pour $(r, t) \in]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$, on pose

$$g(r,t) = f(x_0 + r\cos t\ ,\ y_0 + r\sin t) \ .$$

8. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$. Vérifier, sur $]-\delta, \delta[\times\mathbf{R}$, la relation

$$r^2\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\, \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

Cette relation pourra éventuellement être admise pour traiter la suite du problème.

Pour $r \in [0, \delta[$, on pose

$$J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos t\ ,\ y_0 + r\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que l'application J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, \delta[$. Prouver la relation

$$\forall r \in [0, \delta[\qquad r\,J''(r) + J'(r) = 0\ .$$

10. En déduire que l'application J est constante sur $[0, \delta[$.

III Problème de Dirichlet

Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction harmonique à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. On suppose que la fonction f admet un extremum global en un point m_0 de U.

11. En utilisant les résultats de la partie II, montrer que f est constante sur toute boule ouverte centrée en m_0 et incluse dans U.

Soit $f : K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré fermé $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, harmonique sur son intérieur $U = \overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, et nulle sur la frontière $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$ de ce carré.

12. Montrer que f est nulle sur K.

Dans la fin de cette section III, on cherche à construire une fonction $f : K \to \mathbf{R}$, avec $K = [0, 2\pi]^2$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1 f est continue sur le carré fermé K ;

2 f est harmonique sur le carré ouvert $\overset{\circ}{K} =]0, 2\pi[^2$;

3 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 0) = \sin(x)$;

4 $\forall x \in [0, 2\pi], \quad f(x, 2\pi) = 0$;

5 $\forall y \in [0, 2\pi], \quad f(0, y) = f(2\pi, y) = 0.$

13. Construire une fonction f_0 vérifiant ces conditions et qui soit de la forme $f_0(x, y) = \varphi(x)\, \psi(y)$, où φ et ψ sont deux fonctions continues de l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers $\mathbf{R}$. Montrer ensuite que cette fonction f_0 est l'unique solution du problème posé.

IV Développement en série

Soit $f : D(0, R) \to \mathbf{C}$ harmonique, où $D(0, R)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon R, avec $R \in]0, +\infty]$. On posera $D(0, +\infty) = \mathbf{R}^2$. Pour $r \in [0, R[$ et n entier relatif, on pose

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t \ .$$

14. En utilisant les calculs faits dans la question 8, montrer que la fonction v_n est solution sur $[0, R[$ de l'équation différentielle

$$(E_n) : \quad r^2\, v_n''(r) + r\, v_n'(r) - n^2\, v_n(r) = 0 \ .$$

15. Résoudre l'équation (E_n) sur $]0, R[$ en utilisant le changement de variable $r = e^s$.

16. En déduire, pour tout n entier relatif, l'existence d'un coefficient complexe a_n tel que l'on ait $v_n(r) = a_n\, r^{|n|}$ sur $[0, R[$.

17. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(r\, e^{it}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \left(r\, e^{-it}\right)^n .$$

18. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction harmonique bornée sur $\mathbf{R}^2$. Montrer que f est constante.

V Théorème de D'Alembert-Gauss

Dans cette dernière partie, on considère un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, supposé non constant. Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = P(x + iy) .$$

19. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ à l'aide des polynômes dérivés P' et P''. Montrer que la fonction f est harmonique sur $\mathbf{R}^2$.

20. Soit U un ouvert du plan sur lequel f ne s'annule pas. Montrer que la fonction $g = 1/f$ est harmonique sur U.

21. Montrer qu'il existe un réel positif A tel que, pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| \geq A$, on ait $\left|P(z)\right| \geq 1$.

22. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss dont on rappellera l'énoncé précis.

Fin du problème

A2019 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Comportement asymptotique de sommes de séries entières
et application à l'équation d'Airy

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel. On considère la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par la série entière

$$S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}.$$

L'objectif, dans les parties A et B du problème, est d'établir l'équivalence suivante quand $x \to +\infty$:

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^r\, e^x}{p}. \qquad (H_{r,p})$$

Cet énoncé est noté $(H_{r,p})$. Dans la partie C, on applique ce résultat à l'étude asymptotique d'une solution particulière de l'équation d'Airy.

1. **Question préliminaire**. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Qu'en est-il de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}$?

A Équivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

On suppose dans cette partie que $p \geqslant 2$ et $r > 0$, et on se propose de montrer que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

2. Pour $x > 0$ fixé, étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

En déduire que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on note t_x. Montrer que la suite finie $\Big(u_n(x)\Big)_{0\leqslant n\leqslant \lfloor t_x\rfloor}$ est croissante et que la suite infinie $\Big(u_n(x)\Big)_{n\geqslant \lfloor t_x\rfloor}$ est décroissante, où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.

L'ensemble $\{u_n(x)\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum égal à $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que $t_x - x - r$ tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$. (On pourra s'aider de la définition d'une limite.)

4. Montrer que pour tout entier relatif k, $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$,

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant n\, u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

5. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o(x^r e^x)$$

quand $x \to +\infty$. Montrer alors que

$$M_x = o(x^r e^x).$$

(On pourra d'abord démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.)

6. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Pour tout nombre réel $x > 0$, comparer $S_{r,1}(zx)$ à la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \Big(u_{n-1}(x) - u_n(x) \Big).$$

En déduire que pour tout x au voisinage de $+\infty$, $\Big| S_{r,1}(zx) \Big| \leqslant \dfrac{4\, M_x}{|1-z|}$ et conclure que lorsque $x \to +\infty$,

$$S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x).$$

7. On pose $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$

et en déduire que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents.

B Une démonstration probabiliste

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie.

Soit un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x = \frac{X_x}{x}$$

et on se propose de démontrer que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

8. Pour tout réel $\alpha > 0$, montrer que $\mathbf{P}\Big(|X_x - x| > \alpha\, x^{2/3}\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

9. Montrer que, pour tout réel $x > 1$, les variables aléatoires

$$A_x = \mathbf{1}_{(Z_x<1-x^{-1/3})}\, Z_x^r \quad \text{et} \quad B_x = \mathbf{1}_{(|Z_x-1|\leqslant x^{-1/3})}\, Z_x^r$$

sont d'espérance finie et trouver les limites de $\mathbf{E}(A_x)$ et de $\mathbf{E}(B_x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Soit N un entier naturel strictement positif.

10. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la variable aléatoire

$$Y_{N,x} = \mathbf{1}_{(X_x>x+x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k)$$

est d'espérance finie et que

$$x^N\, \mathbf{P}\Big(X_x > x + x^{2/3} - N\Big) = \mathbf{E}(Y_{N,x}).$$

Déduire alors de la question 8 que $\mathbf{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)$ quand $x \to +\infty$.

11. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que pour tout réel $x > 0$,

$$\mathbf{1}_{(X_x>x+x^{2/3})}\, X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{k,x}$$

et en déduire la limite de $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x>1+x^{-1/3})}\, Z_x^N\Big)$ lorsque $x \to +\infty$.

12. Démontrer que $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x>1+x^{-1/3})}\, Z_x^r\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ quand $x \to +\infty$ et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1.}$

En combinant les résultats des deux parties précédentes, nous concluons à la validité de $(H_{r,p})$ pour tout entier naturel $p > 0$ et tout réel $r > 0$. Dans la suite du sujet, nous aurons besoin du résultat classique suivant, que nous admettrons :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) la série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$;

(ii) les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes ;

(iii) il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $b_n > 0$.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Soit un entier naturel $p > 0$ et un nombre réel r.

13. En remarquant que pour tout réel $x > 0$,

$$S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}\, x^{np},$$

déduire du lemme de comparaison asymptotique des séries entières que

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^p\, S_{r-p,p}(x).$$

En déduire que $(H_{r,p})$ implique $(H_{r-p,p})$ et conclure à la validité de $(H_{r,p})$.

C Application à l'équation d'Airy

L'équation différentielle d'Airy (Ai) est définie par

$$x''(t) = t\, x(t). \tag{Ai}$$

14. **Question préliminaire**. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n > 0$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln k + x \ln n - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$. Établir la convergence de la série $\sum(v_n - v_{n-1})$, et en déduire l'existence d'un réel $\Gamma(x) > 0$ vérifiant la *formule d'Euler* :

$$\prod_{k=0}^{n} (x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x\, n!}{\Gamma(x)}.$$

15. Justifier qu'il existe une unique solution f de (Ai) sur $\mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

16. Expliciter une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pout tout réel t, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$.

17. Démontrer que $a_{3n}\sim\dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})\, n^{1/3}}{9^n\,(n!)^2}$ puis que $a_{3n}\sim n^{-1/6}\,\dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}\dfrac{1}{(2n)!}$ lorsque $n\to+\infty$.

18. En déduire une constante C, que l'on exprimera à l'aide de $\Gamma(\frac{2}{3})$, telle que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} C\, t^{-1/4}\, \exp\!\left(\frac{2}{3}\, t^{3/2}\right).$$

Fin du problème

A2019 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0 \ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \left(h_{j,k}^{(n)}\right)_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\widetilde{X}(t)\right)^2 dt$.

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\left|\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tX H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tX H_n X \leqslant \pi\|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \\ J_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t, \\ \Phi_n(x) &= \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x) && \text{pour tout } x>0. \\ \Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n>0. \\ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t && \text{pour tous réels } \alpha>0, \beta>0. \end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n = 0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x) = 0$ et où l'on montrera que $c = \varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0) = 1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n \geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\ \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leqslant 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \to +\infty$.

FIN DU PROBLÈME

A2019 – MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, x^r\, e^x \qquad (H_{r,p})$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geq 2$. Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{np}$.

2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x := \frac{X_x}{x}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_{x,N} := \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x - 1)\cdots(X_x - N + 1).$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.

4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq \mathbf{E}\big((Z_x)^r\big).$$

Montrer en outre que

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$

7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{x,k.}$$

On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbf{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1}(T - i),$$

où l'indéterminée est notée T.
En déduire que

$$\mathbf{E}\big((Z_x)^N\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0,\ (Z_x)^r \leq (1-s)\,(Z_x)^N + s\,(Z_x)^{N+1}.$$

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1.}$

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geq 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $\big(u_n(x)\big)_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}.$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \to +\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x \to +\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n\, u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4\,M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x\to+\infty}(x^r e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p\,S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

IV Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E): \quad t\,x''(t) - x(t) = 0.$$

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,t^n.$$

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}\,4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ b_n > 0$.

(iii) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r,p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}}.$$

Fin du problème

A2019 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire

$$\int_I f(x)dx = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité f est fini si

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)dx.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

   On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial "k parmi n".

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en

$$X = \left\{ k \in \{0,1,...,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \text{ et } Y = \left\{ k \in \{0,1,...,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que

$$\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I=[0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$m_n(f)=m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)dx=0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)dx=\int_0^1 (f(x)-g(x))^2dx.$$

14. Montrer alors que $f=g$ sur $[0,1]$.

IV Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour $\xi\in\mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\varphi(t)dt,$$

où φ est définie en (1).

15. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\widehat{\varphi}'(\xi)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}te^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

17. Montrer que $\widehat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi\in\mathbb{C}$.

V Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln x) dx.$$

20. Montrer que

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right),$$

où $\mathrm{Im}\,(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. A l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_\alpha(x) = f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln x)).$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fin du problème

A2019 – MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}\, x^r\, e^x \qquad (H_{r,p})$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geq 2$. Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{np}$.

2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

II Une démonstration probabiliste de $H_{r,1}$

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie, et l'on fixe un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x := \frac{X_x}{x}.$$

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$Y_{x,N} := \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) = X_x(X_x - 1)\cdots(X_x - N + 1).$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $(Z_x)^r$ admet une espérance, et exprimer $\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big)$ à l'aide de $S_{r,1}(x)$.

4. Pour $x > 0$, rappeler l'espérance et la variance de X_x. Déduire alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$$\mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \geq x^{-1/3}\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq \mathbf{E}\big((Z_x)^r\big).$$

Montrer en outre que

$$\left(1 - x^{-1/3}\right)^r \mathbf{P}(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

6. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $Y_{x,N}$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}(Y_{x,N}) = x^N.$$

7. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ (X_x)^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{x,k.}$$

On pourra introduire la famille $(H_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbf{N}^*,\ H_j = \prod_{i=0}^{j-1}(T - i),$$

où l'indéterminée est notée T.
En déduire que

$$\mathbf{E}\big((Z_x)^N\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

8. On pose $N := \lfloor r \rfloor$ et $s := r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0,\ (Z_x)^r \leq (1-s)\,(Z_x)^N + s\,(Z_x)^{N+1}.$$

9. En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$\mathbf{E}\big((Z_x)^r\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1.}$

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geq 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $\big(u_n(x)\big)_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m\, u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}.$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \to +\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x \to +\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |D_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n\, u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n\, u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \left(u_{n-1}(x) - u_n(x)\right) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4\,M_x}{|1-z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x\to+\infty}(x^r e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p\,S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

IV Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E): \quad t\,x''(t) - x(t) = 0.$$

18. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,t^n.$$

19. Démontrer que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{n}}{(2n)!}\,4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) La série entière $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ b_n > 0$.

(iii) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

20. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r,p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}\, e^{2\sqrt{t}}.$$

Fin du problème

A2019 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notations

— On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

— Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \, \mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} \, \mathrm{d}t \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbf{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi_h \,:\, \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5. Montrer que

$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\ \mathrm{d}t.$$

6. Montrer que, pour tous $h \in]0,1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7. En déduire que

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ quand } h \to 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$. Si u est un élément de $C_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt}\ \mathrm{d}t \text{ pour tout } p \in \mathbf{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $C_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2+1} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(2n\pi),$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2} - 1}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ \\ i \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.

14. Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.

15. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

16. Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

    $F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})$ quand $x \to 0$ par valeurs strictement positives.

    Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).

18. Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

19. Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

Fin du problème

A2020 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le sujet, on considère des **R**-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber
Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2. On fixe une base $\mathbf{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $\mathbf{B}$ une base de E. Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_\mathbf{B}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :
$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note
$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$
appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet entier est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

   Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **A**.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent

$\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, on a $\dim \mathcal{V}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose,

$$H := \mathrm{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} :\ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} :\ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Démontrer que
$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20. Démontrer que

$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.*

23. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. Conclure.

Fin du problème

A2020 – MATH II MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $E(N_n)$ de la variable aléatoire N_n.

La partie D est indépendante des parties précédentes.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n\,(X+1)^n,$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,\frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Si α est un élément de $]0,1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si α est un élément de $]1,+\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

4. Pour $x \in [2,+\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{\ln(t)}.$$

Justifier, pour $x \in [2,+\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{(\ln(t))^2}.$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{\mathrm{dt}}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(I(x)\right).$$

En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler, sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.

Justifier la formule :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)\; x^n;$$

$$\forall x \in [-1,1], \qquad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n)\; x^n.$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que

$$G(1) = P(R \neq +\infty).$$

7. Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que

$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k)\ P(S_{n-k} = 0_d).$$

   En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k)\ P(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x) = 1 + F(x)\ G(x).$$

   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1^-, en discutant selon la valeur de $P(R \neq +\infty)$.

9. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\ x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

   L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A.$$

10. Montrer que la série $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $P(R \neq +\infty) = 1$.

11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$\Big(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leq k \leq i-1\}\Big).$$

    Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y_i = 1) = P(R > i).$$

    En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i).$$

12. Conclure que

$$\frac{E(N_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(R=+\infty).$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$. Par ailleurs, p est un élément de $]0,1[$, $q = 1-p$ et la loi de X est donnée par

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=-1) = q.$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

14. Pour $x \in]-1,1[$, donner une expression simple de $G(x)$.

Exprimer $P(R=+\infty)$ en fonction de $|p-q|$.

Déterminer la loi de R.

15. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Donner un équivalent simple de $P(R=2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = 1.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

16. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leq \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leq a_n\, B_{m-n} + a_0\, (B_m - B_{m-n}).$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}.$$

18. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}.$$

En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\, \ln(n)}.$$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvoretzky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0_d)\; P(R > n - k).$$

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$P(X = (0,1)) = P(X = (0,-1)) = P(X = (1,0)) = P(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}.$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$P(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2.$$

21. Donner un équivalent simple de $E(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du problème

A2020 – MATH I PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le sujet, on considère des **R**-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on notera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$: on prendra garde au fait qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$!

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :

Théorème A.
Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème **A** est ici considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément, on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

Théorème B.
Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Il existe alors une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **C**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **D**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème **B** par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carrée M représentant l'endomorphisme u.

1. Démontrer que M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure, établir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, et en déduire que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

On fixe une base $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ un élément nilpotent de nilindice n. *On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et $u(e_1) = 0$.*

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Lorsque a désigne un vecteur de E, on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (a \mid x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ en fonction de celle de E. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera désormais $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien $(E, (- \mid -))$ de dimension $n > 0$. On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de $\mathcal{N}(E)$ est toujours inférieur ou égal à n. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$. On a donc $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme C. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme D. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.
Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.

9. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **C**.

11. Soit $y \in E$. En considérant, pour un $a \in K(\mathcal{V})^\perp$ quelconque, la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto (a \mid (u+tv)^{p-1}(y))$, démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \operatorname{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} :\ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} :\ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $(a \otimes x)$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **C** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Déduire des questions précédentes et du théorème **A** que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$
et
$$L^\perp = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

20. En appliquant, entre autres, l'hypothèse de récurrence et la question 19, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 20.

21. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 4 et 19.*

22. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
On pourra s'inspirer de la méthode de la question 11.

23. Conclure.

Fin du problème

A2020 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.

— $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.

— E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^tA$, la transposée de A.

— $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A{}^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.

— $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{\mathrm{S}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A{}^tA = {}^tAA$.*

Définition 2 *$A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)*

Objectifs

— Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.

($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in E_n,\ \|{}^tAX\| = \|AX\|$.

($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2,2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.*

I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_4})$.

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$.

6. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$.

IV. La condition $(\mathrm{C_3})$ implique la condition $(\mathrm{C_4})$

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *de E_2.*
   En déduire que A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

8. Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie $(\mathbf{C_3})$.

9. En déduire que A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathbf{C_3})$, avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $(\mathbf{C_3})$.

12. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

V. La condition $(\mathrm{C_4})$ implique la condition $(\mathrm{C_1})$

Soit $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$.
Lorsque $\sin\theta \neq 0$*, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.*

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$.

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :
$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \qquad \mathrm{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\,\mathrm{Exp}(A)Q$$
On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, *la série numérique* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ *est absolument convergente.*

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

20. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$.
En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$

— soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

— les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire

— il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :
$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

Fin du problème

A2020 – MATH I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.**

**Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.**

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le sujet, on considère des **R**-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on notera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$: on prendra garde au fait qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$!

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :

Théorème A.
Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème **A** est ici considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément, on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

Théorème B.
Soit E un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Il existe alors une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **C**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **D**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème **B** par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carrée M représentant l'endomorphisme u.

1. Démontrer que M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure, établir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, et en déduire que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

On fixe une base $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ un élément nilpotent de nilindice n. *On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et $u(e_1) = 0$.*

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Lorsque a désigne un vecteur de E, on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (a \mid x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ en fonction de celle de E. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera désormais $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien $(E, (- \mid -))$ de dimension $n > 0$. On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de $\mathcal{N}(E)$ est toujours inférieur ou égal à n. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$. On a donc $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme C. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme D. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.
Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.

9. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **C**.

11. Soit $y \in E$. En considérant, pour un $a \in K(\mathcal{V})^\perp$ quelconque, la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto (a \mid (u+tv)^{p-1}(y))$, démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \operatorname{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} :\ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} :\ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $(a \otimes x)$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **C** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Déduire des questions précédentes et du théorème **A** que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$
et
$$L^\perp = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

20. En appliquant, entre autres, l'hypothèse de récurrence et la question 19, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 20.

21. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 4 et 19.*

22. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
On pourra s'inspirer de la méthode de la question 11.

23. Conclure.

Fin du problème

A2020 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \to \mathbf{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

2) À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5) Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6) Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

7) Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

9) En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ est convergente.

10) En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

11) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12) Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

13) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx.$$

14) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \text{ pour tout } f \in E_\alpha.$$

15) Soit n un entier ≥ 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers 0 par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ quand } x \to +\infty.$$

16) Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

17) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \, \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19) En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0, 1] \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question **22)** à la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto h\left(\sqrt{x}\right) e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

*On peut montrer que le résultat de la question **23)** est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.*

Fin du problème

A2021 – MATH I MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations

Dans tout le problème :

- Par convention $0^0 = 1$.
- Si i et j sont des entiers naturels tels que $i \leq j$, on note $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$.
- a et b sont des réels tels que $a < b$.
- Si x est un réel, on définit :
$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z}\,,\, k \leq x\} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z}\,,\, x \leq k\}$$
- p est un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
- ζ est la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\zeta(x) = (x+1)\ln(x+1).$$
- Φ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.
- $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p, ce que l'on note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Résultats préliminaires

1 ▷ Rappeler la formule de Stirling. En déduire l'existence d'une suite réelle $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n (1 + \epsilon_n).$$

2 ▷ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Démontrer que :
$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x \quad \text{et} \quad \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x.$$

3 ▷ Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$ converge.

4 ▷ Démontrer que :

$$\zeta(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Étude asymptotique d'une suite

Dans cette partie, si $n \in \mathbf{N}^*$, on note x_n le nombre entier $\lceil np - q \rceil$ et p_n le réel $P(X_n = x_n)$.

5 ▷ Justifier que p_n est le plus grand élément de $\{P(X_n = k)\,,\, k \in [\![0, n]\!]\}$.

6 ▷ Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - x_n) = +\infty$.

Établir alors :

$$\sqrt{n\,p\,q}\,p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}}.$$

7 ▷ Montrer que, pour tout entier $n > \max\left\{\dfrac{p}{q}, \dfrac{q}{p}\right\}$:

$$\frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-npζ\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nqζ\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}.$$

8 ▷ Montrer que la suite $\left(\sqrt{n\,p\,q}\,p_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

Convergence en loi

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,p\,q}}(X_n - n\,p)$ et on définit les réels $\tau_{n,k}$ par la relation :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \tau_{n,k} = \frac{k - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}.$$

9 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la loi de Y_n et vérifier que Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10 ▷ Justifier l'existence d'un élément $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\text{pour tout entier } n \geq N, \quad [a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}} \leq b - a.$$

On définit les suites $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante : pour tout $n \in N^*$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}\, t + np \rfloor\,, \quad e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)}, \quad f_n(t) = \sqrt{n\,p\,q}\, P\big(Y_n = e_n(t)\big).$$

11 ▷ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, e_n est une fonction en escalier croissante vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot$$

Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction e que l'on précisera.

12 ▷ Montrer que :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis vérifier que

$$P\big(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)\big) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

13 ▷ Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k\,(n-k)}}\, \frac{p^k\, q^{n-k}}{\big(\frac{k}{n}\big)^k\, \big(\frac{n-k}{n}\big)^{n-k}}\, \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})},$$

où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la suite définie à la question 1.

14 ▷ Justifier que, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k_n(t)\,(n-k_n(t))}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_{k_n(t)})(1+\epsilon_{n-k_n(t)})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

15 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $\max\Big\{\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\Big\} \times |\tau_{n,k}| < 1$:

$$\frac{p^k\, q^{n-k}}{\big(\frac{k}{n}\big)^k\, \big(\frac{n-k}{n}\big)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}.$$

16 ▷ Démontrer que :

$$\frac{p^{k_n(t)}\, q^{n-k_n(t)}}{\big(\frac{k_n(t)}{n}\big)^{k_n(t)}\, \big(\frac{n-k_n(t)}{n}\big)^{n-k_n(t)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

17 ▷ En conclure que :

$$\forall\, t \in [a,b],\ f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(t),$$

puis que :

$$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

18 ▷ Déduire de tout ce qui précède que :

$$P\big(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis que :

$$P\big(a \leq Y_n \leq b\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

Applications

19 ▷ Montrer que :

$$\forall\, T \in \mathbf{R}_+^*,\ \int_{-T}^{T} \Phi(t)\mathrm{d}t \geq 1 - \frac{1}{T^2},$$

puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$.

20 ▷ Les suites $\big(P(Y_n \leq b)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\big(P(Y_n \geq a)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ? En préciser les limites éventuelles.

Généralisation

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

21 ▷ Montrer que, si $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, il existe une unique fonction Ψ continue sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\text{pour tout } (\alpha,\beta) \in \overline{\mathbf{R}}^2,\ \text{si } \alpha \leq \beta,\ \text{ alors } P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\alpha^\beta \Psi(t)\mathrm{d}t,$$

où $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble constitué des réels, de $-\infty$ et de $+\infty$.

Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$?

Fin du problème

A2021 – MATH II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul ;

— si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $[\![p, q]\!]$;

— si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;

— B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;

— I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;

— $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;

— une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;

— on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $||\cdot||$ et définie par :

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad ||M|| = \max\left\{\left|[M]_{i,j}\right|, 1 \leq i, j \leq n\right\} \ ;$$

— $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

— si $u = (u_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(i \leq j) \Longrightarrow (u_i \leq u_j)\ ;$$

— si $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1,n]\!]\ ;\ u_i = u_{i_0}\}$;

— enfin $\mathrm{Diag}((u_i)_{1\leq i\leq n})$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!]\,,\ [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, \sigma \in B_n,\, \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\,\omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\big((d_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\,\mathrm{Diag}\big((d_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}\big).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \,\mathrm{Diag}\big((s'_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega',$$

avec Ω, $\Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n}$, $(s'_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s'_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega' = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(f(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, S \in S_n(I),\ u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\Big(\big(\varphi(s_i)\big)_{1\leq i\leq n}\Big)\,\Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \,\mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)\,\Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{Diag}\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D\Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\mathrm{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

10 ▷ On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

11 ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ, alors les suites $\big(u(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ et $\big(v(\varphi_k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

12 ▷ On note $\Sigma = \Big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\,;\ {}^tX\,X = 1\Big\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \min\big\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\big\} \text{ et } \max\big(\mathrm{Sp}(S)\big) = \max\big\{\,{}^tX\,S\,X\,;\ X\in\Sigma\big\}.$$

13 ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max\big\{\,|\lambda|\ ;\ \lambda\in\mathrm{Sp}(M)\big\},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_\uparrow$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

14 ▷ Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue. À cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbf{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)$.

15 ▷ Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

16 ▷ Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

17 ▷ En déduire que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue.

18 ▷ Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Démontrer que, si $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

20 ▷ On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \{\, {}^t\Omega\, S\, \Omega\,;\, \Omega \in O_n(\mathbf{R})\}.$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[U]_{k,k} \in I$.

Démontrer alors que :

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} f\big([U]_{k,k}\big)\,;\, U \in \mathcal{U}_S\right\} = v(f)(S).$$

21 ▷ En déduire que, si f est convexe sur I, pour tout $(A, B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$v(f)\big((1-t)\,A + t\,B\big) \leq (1-t)\,v(f)(A) + t\,v(f)(B).$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbf{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall\,(A, B) \in S_n(I)^2,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \psi\big((1-t)A + tB\big) \leq (1-t)\psi(A) + t\psi(B).$$

22 ▷ Démontrer finalement que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si, et seulement si, f est convexe sur I.

Fin du problème

A2021 – MATH I PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbf{N}$ et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) *On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} \, \mathrm{d}u.$$

6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geq 1$.

7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t,u) & \longmapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad |1+ue^{it}| \geq m_{a.}$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi,\pi[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi,\pi[\,,\ F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{\theta}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}\Big(\cos(tX)\Big), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R},\ |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \Big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\Big].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\,\alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\,\alpha}{2}\, t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\, \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \Big(\Phi_{X_1}(t/n)\Big)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{\pi\alpha\,|t|}{2}\Big).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème

A2021 – MATH II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des opérateurs intégraux à noyau de type positif.

La partie préliminaire comporte des résultats utilisés par la suite et qui pourront éventuellement être admis.

La seconde partie définit les noyaux de type positif (en abrégé NTP) et en donne quelques exemples.

Enfin, la dernière partie étudie certaines propriétés d'un opérateur à NTP, et montre sur un exemple le lien avec la résolution d'une équation différentielle du second ordre ayant certaines conditions aux limites. On démontrera également, sur cet exemple, le théorème de Mercer (1909).

Notations

— L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On notera en particulier $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.

— La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ est notée $A^\top$.

— On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques réelles.

— On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est positive si :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ X^\top S X \geqslant 0\,,$$

et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

— Les intervalles de $\mathbf{R}$ qui interviennent dans le problème seront toujours supposés d'intérieur non vide.

Quelques résultats préliminaires

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Vérifier que pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a :

$$X^\top A X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j\,.$$

2 ▷ Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, les valeurs propres de A sont des réels positifs ou nuls.

Soit f une application continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour $(x,t)\in[a\,;b]\times[c\,;d]$ on pose : $\varphi(x,t)=\displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$.

3 ▷ Montrer que pour tout $x\in[a\,;b]$, l'application $t\mapsto\varphi(x,t)$ est continue sur $[c\,;d]$.

On pose alors, pour tout $x\in[a\,;b]$: $\psi(x)=\displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$.

4 ▷ Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$; préciser ψ'.

5 ▷ En déduire :

$$\forall\, x\in[a\,;b],\ \int_a^x\left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_c^d\left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

On a donc, en particulier : $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_c^d\left(\int_a^b f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$ (c'est le **théorème de Fubini**).
Cette quantité sera notée simplement :

$$\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

Soit f une application continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbf{R}_+$ tel que, pour tous (x,y), $(x',y')\in[a\,;b]\times[c\,;d]$:

$$|f(x,y)-f(x',y')|\leqslant M\Big(\,|x-x'|+|y-y'|\,\Big)\qquad\text{(condition }\mathcal{L}\text{)}.$$

n désignant un entier naturel non nul, on pose, pour tout entier $k\in[\![0\,;n]\!]$,

$$u_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

et pour tout entier $\ell\in[\![0\,;n]\!]$,

$$t_\ell=c+\ell\frac{d-c}{n}\cdot$$

Enfin, on définit la **somme de Riemann** :

$$S_n(f)=\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}f(u_k,t_\ell).$$

6 ▷ Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$.

Pour la suite, on **admettra** que ce dernier résultat reste valable pour toute application f continue sur $[a\,;b]\times[c\,;d]$.

Noyaux de type positif

Soit Ω un ensemble quelconque. Une application $K\colon \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}$ s'appelle un **noyau de type positif** (en abrégé NTP) si :

(i) K est symétrique, c'est-à-dire : $\forall\,(x,y) \in \Omega^2,\ K(x,y) = K(y,x)$;

(ii) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \Omega^n$, la matrice (appelée **matrice de covariance**) :

$$\mathrm{Cov}_K(x_1,\dots,x_n) = \Big(K(x_i,x_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

7 ▷ Soit H un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle_H$. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} K\colon H^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x\,|\,y\rangle_H \end{array}$ est un NTP.

Soit Ω un ensemble. On dit qu'une application K sur $\Omega\times\Omega$ vérifie la propriété $(\mathcal{R})$ s'il existe un espace préhilbertien H et une application $\varphi\colon \Omega \to H$ tels que :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega^2,\ K(x,y) = \langle \varphi(x)\,|\,\varphi(y)\rangle_H\,.$$

8 ▷ Montrer que si K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, alors K est un NTP.

9 ▷ Montrer que si $\Omega = \{x_1,\dots,x_n\}$ est un ensemble fini, et si K est un NTP sur Ω, alors K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Indication : on pourra diagonaliser la matrice $\mathrm{Cov}_K(x_1,\dots,x_n)$.

On considère ici l'espace vectoriel H des fonctions f continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur l'intervalle $[0\,;1]$, telles que $f(0) = 0$ (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel). Pour $(f,g) \in H^2$ on pose :

$$\langle f\,|\,g\rangle_H = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire sur H.

Soit le noyau

$$\begin{array}{rcl} K\colon [0\,;1]\times[0\,;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \min(x,y)\ . \end{array}$$

11 ▷ Montrer que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$.

Indication : pour tout $x \in [0\,;1]$, on pourra poser $\varphi(x) = K_x$, où K_x désigne l'application partielle $y \mapsto K(x,y)$.

Opérateurs à noyau

Soit $I = [a\,;b]$ un segment de $\mathbf{R}$. On notera E l'espace vectoriel $\mathscr{C}(I,\mathbf{R})$, que l'on munit du produit scalaire habituel : $\langle f \,|\, g\rangle = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et l'on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

Soit K une application symétrique et continue de $I \times I$ dans $\mathbf{R}$. On lui associe alors l'application u_K définie sur E par :

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in I,\ u_K(f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \langle K_x \,|\, f\rangle\,,$$

où K_x désigne l'application partielle $t \mapsto K(x,t)$.

12 ▷ Montrer que si K' est une autre application symétrique et continue de $I \times I$ dans $\mathbf{R}$ telle que $u_K = u_{K'}$, alors $K = K'$.

13 ▷ Montrer que u_K est un endomorphisme de E, puis que cet endomorphisme est une application continue de l'espace vectoriel normé $\left(E, \|\ \|_2\right)$ dans lui-même.

14 ▷ Montrer que u_K est un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien E.

En déduire que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u_K et si f_λ, f_μ en sont deux vecteurs propres associés, alors f_λ et f_μ sont orthogonaux.

On suppose désormais que K est un NTP.

15 ▷ Montrer que, pour toute $f \in E$, on a $\langle u_K(f) \,|\, f\rangle \geqslant 0$. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de u_K ?

Indication : utiliser la question 6 ▷.

On prend maintenant, $I = [0\,;1]$, et on note E l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0\,;1],\mathbf{R})$ que l'on munit du produit scalaire : $\langle f \,|\, g\rangle = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et l'on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

Soit $f \in E$ donnée. On cherche ici à déterminer les applications g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;1]$ qui satisfont au problème aux limites :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g'' & = & -f \\ g(0) & = & g'(1) \ = \ 0\,. \end{array} \right.$$

16 ▷ Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution unique g, donnée par

$$g = u_K(f)$$

où K est le NTP défini par :

$$\begin{aligned} K\colon I \times I &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,t) &\longmapsto \min(x,t)\,. \end{aligned}$$

17 ▷ Déterminer les valeurs propres de u_K (on les exprimera sous forme d'une suite strictement décroissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$).

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est de dimension 1, et déterminer un vecteur propre unitaire e_k qui l'engendre.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ et p_n la projection orthogonale sur F_n.

18 ▷ En admettant la relation :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\pi^4}{6}\,,$$

vérifier l'égalité :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2.$$

19 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

20 ▷ En déduire, pour toute $f \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k \right\|_2^2 = 0\,.$$

21 ▷ Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k$$

est uniformément convergente sur I, puis que

$$u_K(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \langle e_k \,|\, f\rangle\, e_k\,.$$

22 ▷ Démontrer que :

$$\forall\,(x,y)\in I^2, K(x,y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k e_k(x)e_k(y) \qquad (1)$$

Indication : poser $K'(x,y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k e_k(x)e_k(y)$ et montrer que $u_K=u_{K'}$.

23 ▷ En déduire la **formule de la trace** :

$$\int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_k \qquad (2)$$

puis la valeur de

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

Les relations (1) *et* (2) *se généralisent à tous les NTP ; il s'agit du théorème de Mercer (1909).*

Fin du problème

A2021 – MATH I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbf{N}$ et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) *On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} \, \mathrm{d}u.$$

6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geq 1$.

7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t,u) & \longmapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad |1+ue^{it}| \geq m_{a.}$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi,\pi[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi,\pi[\,,\ F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{\theta}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}\Big(\cos(tX)\Big), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R},\ |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \Big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\Big].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\,\alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\,\alpha}{2}\, t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\, \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \Big(\Phi_{X_1}(t/n)\Big)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{\pi\alpha\,|t|}{2}\Big).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème

A2021 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations

— Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1)\cdots 2.1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} Q(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée k-ème.

Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$;

— *log-concave* si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$;

— *ultra log-concave* si $(\frac{a_k}{\binom{n}{k}})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

1 ▷ Montrer que la suite binomiale $(\binom{n}{k})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

2 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

4 ▷ Montrer que P' est à racines toutes réelles.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

5 ▷ Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

6 ▷ Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1} Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave.

On considère comme précédemment un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n à racines toutes réelles.

7 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

8 ▷ Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)P(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Dans la question 27 ▷ , nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

Théorème 1 *Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de Q ont toutes le même signe. Alors le polynôme*

$$P \circ Q(X) := \sum_{k=0}^{\min(n,m)} a_k b_k (k!) X^k$$

est à racines toutes réelles.

Quelques exemples

Soit A une matrice symétrique réelle de taille n.

9 ▷ Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.

10 ▷ On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$.

11 ▷ Soit B une matrice symétrique et on suppose comme dans la question précédente que les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

On considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx. \end{array} \right.$$

12 ▷ Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

13 ▷ Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

— les L_i sont de degré i ;

— pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

14 ▷ Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme L_n est à racines toutes réelles.

Soit $\Big(B_i\Big)_{i=1,\cdots,n}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli $\mathcal{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs b_i, i.e. $\mathbf{P}(B_i = 1) = b_i$ et $\mathbf{P}(B_i = 0) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

15 ▷ Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.

16 ▷ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geqslant 0$ pour tout $k = 0, \cdots, n$. On suppose en outre que P est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernouilli indépendantes B_i telles que pour tout $k = 0, \cdots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n B_i = k)$.

Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré n. On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $\beta_1, \overline{\beta}_1 \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de β_i. On note m_i la multiplicité de α_i et n_j celle de β_j et $\overline{\beta}_j$.
Pour tout $k \geqslant 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^{s} n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_k^{i-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_k^{i-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\beta}_k^{i-1}$.

17 ▷ Montrer que $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \cdots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.
Indication : on pourra utiliser les matrices de Vandermonde.

18 ▷ Montrer que

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \Big(\psi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n)^2 \Big),$$

s'écrit sous la forme $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$.

19 ▷ Montrer que si P est à racines toutes réelles, alors $q : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$, est à valeurs positives.

On suppose à présent $r < n$ et on écrit pour tout $i = 1, \cdots, s$

$$\psi_i^2 + \overline{\psi}_i^2 = 2\,\mathrm{Re}(\psi_i)^2 - 2\,\mathrm{Im}(\psi_i)^2.$$

20 ▷ Montrer que les applications linéaires $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ suivantes sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendantes :

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \mathrm{Re}(\psi_1), \mathrm{Im}(\psi_1), \cdots, \mathrm{Re}(\psi_s), \mathrm{Im}(\psi_s).$$

21 ▷ Conclure que P est à racines toutes réelles si et seulement si q est à valeurs positives sur $\mathbf{R}^n$.
Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ *qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.*

Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \gamma_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur Γ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si P a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

22 ▷ Montrer que la suite définie par $\gamma_n = n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23 ▷ Montrer que si $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k \geqslant 0$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant k} = (\gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots)$ l'est aussi.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que P a toutes ses racines réelles : on les note $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et on admet que $\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} = a_n^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

24 ▷ Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1} = 0$ puis que $\gamma_m = 0$ pour tout $m \geqslant k$.
Indication : on pourra utiliser les expressions de $\Gamma((1+X)^{k+1})$ *et* $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$, *puis, pour* $m \geqslant k+2$, *raisonner sur les racines de* $\Gamma((1+X)^m)$.

25 ▷ On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.
Indication : on pourra utiliser encore l'expression de $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$.

Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

26 ▷ Montrer que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

Réciproquement supposons que $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x = z/n$, de sorte que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.

27 ▷ En utilisant le théorème 1, montrer que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28 ▷ Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2 \geqslant \gamma_{k+1}\gamma_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$.

29 ▷ En déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

30 ▷ En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

31 ▷ Réciproquement montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.
Indication : pour cette question, toute tentative de réponse, partielle ou purement qualitative, sera considérée par le Jury.

FIN DU PROBLÈME

A2022 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. L'étude de P au voisinage de 1 permet alors, dans les parties suivantes, de progresser vers l'obtention d'un équivalent simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (formule asymptotique de Hardy et Ramanujan).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} :\ |z| < 1\}.$$

Dans tout l'énoncé, on utilisera la dénomination « variable aléatoire réelle » pour signifier « variable aléatoire discrète réelle ».

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $t \in [0,1] \mapsto L(tz)$ est dérivable et donner une expression simple de sa dérivée. En déduire que $t \mapsto (1-tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$ et conclure que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

3 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ pour tout z dans D. Dans la suite, on notera, pour z dans D,

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

On remarque, en vertu de la question précédente et des propriétés de l'exponentielle, que

$$\forall z \in D,\ P(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}\cdot$$

B. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

4 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est fini pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N \geq 1}$.

5 ▷ Montrer par récurrence que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

6 ▷ Soit $z \in D$. On convient que $p_{n,0} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En examinant la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbf{N}^2}$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n x^n$.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, P(e^{-t+i\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

si bien que

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'obtenir un équivalent du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Cet équivalent sera obtenu via un choix approprié de t en fonction de n dans la formule (1).

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\,x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

9 ▷ Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

On fixe dans cette partie un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 1$. Sous réserve d'existence, on pose

$$S_{n,\alpha}(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}.$$

On introduit aussi la fonction

$$\varphi_{n,\alpha} : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\ ,$$

qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 ▷ Montrer que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$, sa positivité stricte, et l'identité

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\,\varphi'_{n,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{t^n}\Big) \quad \text{quand } t \to 0^+.$$

12 ▷ Démontrer, sans utiliser ce qui précède, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Dans le reste du problème, nous admettrons le résultat suivant (il peut être démontré par une méthode similaire) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}\cdot$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

Étant donné une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, ainsi qu'un réel θ, les variables aléatoires réelles $\cos(\theta X)$ et $\sin(\theta X)$ sont d'espérance finie puisque bornées : on introduit alors le nombre complexe

$$\Phi_X(\theta) := \mathbf{E}(\cos(\theta X)) + i\,\mathbf{E}(\sin(\theta X)).$$

13 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $|\Phi_X(\theta)| \leq 1$ pour tout réel θ.

Dans les questions 14 ▷ à 18 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle X suivant une loi géométrique, de paramètre $p \in]0,1[$ arbitraire. On pose $q = 1-p$.

14 ▷ Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout réel θ,

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{p\,e^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}\cdot$$

15 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie. Montrer que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbf{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbf{C}$, indépendante de p, telle que

$$\forall\theta \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = p\,i^k e^{i\theta}\,\frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}} \quad \text{et} \quad P_k(0) = 1.$$

17 ▷ En déduire qu'il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs, indépendante de p, telle que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \left|\mathbf{E}(X^k) - \frac{1}{p^k}\right| \leq \frac{C_k\, q}{p^k}.$$

18 ▷ En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ indépendant de p tel que

$$\mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^4\Big) \leq \frac{K\, q}{p^4}.$$

Dans les questions 19 ▷ à 21 ▷, on se donne une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

19 ▷ Montrer successivement que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie, et que

$$\mathbf{E}(Y^2) \leq (\mathbf{E}(Y^4))^{1/2} \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(|Y|^3) \leq \Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

20 ▷ Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$\left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{|u|^3}{6}.$$

En déduire que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\,\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4}.$$

21 ▷ Conclure que pour tout réel θ,

$$\left|\Phi_Y(\theta) - \exp\Big(-\frac{\mathbf{E}(Y^2)\,\theta^2}{2}\Big)\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\,\Big(\mathbf{E}(Y^4)\Big)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\,\mathbf{E}(Y^4).$$

F. Convergence vers une gaussienne

Étant donné un réel $t > 0$, on pose, suivant les notations de la partie **C**,

$$m_t := S_{1,1}(t) \quad \text{et} \quad \sigma_t := \sqrt{S_{2,1}(t)}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et θ, on pose

$$h(t,\theta) = e^{-im_t\theta}\,\frac{P\Big(e^{-t}e^{i\theta}\Big)}{P(e^{-t})}.$$

Étant donné des réels $t > 0$ et u, on pose

$$\zeta(t,u) = \exp\left(i\,\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t,u) = \zeta(t,u)\,h\Big(t, \frac{u}{\sigma_t}\Big).$$

22 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_n$ tous de module inférieur ou égal à 1. Montrer que

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - u_k|.$$

23 ▷ Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$, et on pose $Y_k = k(Z_k - \mathbf{E}(Z_k))$. Démontrer que

$$h(t,\theta) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21 ▷, l'inégalité

$$\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq K^{3/4}|\theta|^3\, S_{3,3/4}(t) + K\,\theta^4\, S_{4,1}(t). \tag{2}$$

On rappelle que la constante K a été introduite à la question 18 ▷, les quantités $S_{n,\alpha}(t)$ dans la partie **D**.

24 ▷ Montrer que $\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}\,t^{3/2}}$ quand t tend vers 0^+. En déduire, pour tout réel u, que

$$j(t,u) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}.$$

25 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi],\ 1 - \cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

À l'aide de la question 9 ▷, en déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in\,]0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t,\theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \leq e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}.$$

26 ▷ Conclure que

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

Dans cette dernière partie, on admet que $P(e^{-t}) \sim \sqrt{\dfrac{t}{2\pi}}\,\exp\left(\dfrac{\pi^2}{6t}\right)$ quand t tend vers 0^+.

27 ▷ En appliquant la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, démontrer que

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème

A2022 – MATH II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \ . \qquad (N_1)$$

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\right)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \ . \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \ .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A'(t) = A \, e^{tA} = e^{tA} \, A \ .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1} \, e^A \, P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A,B] = AB - BA \ .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 ▷ Montrer que les matrices A et e^B commutent.

On définit une application

$$g : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto g(t) = e^{t(A+B)}\, e^{-tB}.$$

2 ▷ Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} \ . \tag{1}$$

3 ▷ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 ▷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 ▷ Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} \right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \right)^k = \exp(A+B) \ . \tag{2}$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 ▷ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) .$$

On introduit la fonction

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$
$$t \longmapsto h(t) = e^{tA} e^{tB} - e^{t(A+B)}$$

7 ▷ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\Big(\frac{1}{k^2}\Big) \text{ lorsque } k \to +\infty \,.$$

8 ▷ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\big\} \,.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tM} \in G\big\} \,.$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 ▷ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 ▷ Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t &\longmapsto u(t) = e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 ▷ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G,\ \forall B \in \mathcal{A}_G,\ [A,B] \in \mathcal{A}_G\ .$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est **tangente** à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé **espace tangent** à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 ▷ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 ▷ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 ▷ Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 ▷ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_A(t) = e^{tA} = \left(v_{i,j}(t)\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ .$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right) \ .$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.

19 ▷ Montrer que, si $\lim_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 ▷ Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 ▷ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

$$\begin{aligned} P &\text{ est inversible,}\\ D &\text{ est diagonale,}\\ N &\text{ est nilpotente,}\\ ND &= DN,\\ A &= P(D+N)P^{-1},\\ \chi_A &= \chi_D. \end{aligned}$$

22 ▷ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p\, e^{\alpha t}) \text{ lorsque } t \to +\infty \ .$$

23 ▷ Étudier la réciproque de la question 19).

24 ▷ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \iff X = 0\,.$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)<0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)>0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$

$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)=0}} (X-\lambda)^{m_\lambda},$$

et les sous-espaces $E_s = \mathrm{Ker}\,\big(P_s(A)\big)$, $E_i = \mathrm{Ker}\,\big(P_i(A)\big)$ et $E_n = \mathrm{Ker}\,\big(P_n(A)\big)$ de $E = \mathbf{C}^n$. *Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 ▷ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \big\{X \in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\big\}\,.$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \big\{X \in E \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}X = 0\big\}.$$

26 ▷ Montrer que

$$E_n = \big\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^*\ \ \exists p \in \mathbf{N}\ \ \forall t \in \mathbf{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \le C\,\big(1+|t|\big)^p\big\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

Fin du problème

A2022 – MATH I PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. Dans la partie **B**, on étudie P au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie **D**, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite (p_n).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de **C** sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.

3 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

4 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D.

En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D.

Dans la suite, pour tout $z \in D$ on note

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5 ▷ Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6 ▷ Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8 ▷ Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$

9 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10 ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-u})\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

11 ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

12 ▷ Montrer que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$

puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geq 1$, et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}\cdot$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14 ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\ln(1-e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,\mathrm{d}u.$$

16 ▷ Conclure que

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0, n]\!]^N$ et non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geq 1}$.

18 ▷ Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D,\ \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19 ▷ On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration $\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n z^n$.

20 ▷ Soit $z \in D$. En examinant la différence $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\, x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

23 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et θ un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que si $x \geq \frac{1}{2}$ alors

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos\theta)$ *et* $(1-x)^2$.

24 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi],\ 1-\cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25 ▷ En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\,\mathrm{d}\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

E. Conclusion

26 ▷ En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème

A2022 – MATH II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $< .,. >$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ et $\|.\|$ sa norme associée :

$$< (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
- Pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$, sa partie réelle $Re(X) = \dfrac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $Im(X) = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (respectivement $\mathbf{C}^n$) canoniquement associé à M est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n \\ X & \mapsto & M\,X \end{array} \qquad \left(\text{respectivement} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & \mathbf{C}^n \\ X & \mapsto & M\,X \end{array} \right)$$

Rappels

1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice asssociée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence anoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 *Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.*

Définition 2 *Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :*

i) *deux entiers naturels p et q ;*
ii) *q réels $a_1, a_2, ..., a_q$;*
iii) *q réels non nuls $b_1, b_2, ..., b_q$;*
iv) *une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p+2q=n$ et M est la matrice bloc suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1,b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2,b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q,b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in [\![1\ ;\ q]\!]$: $M(a_j,b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p=0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q=0$, alors $M=D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = Re(V)$ et $W_2 = Im(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\overline{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;

ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathrm{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors

$$\mathcal{A} = \Big\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \Big\}$$

et

$$\mathcal{L} = \Big\{ p \in \mathbf{N}^* \ \exists H \in \mathcal{A} : p = \ \dim(H) \Big\}.$$

8 ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E, stable par u.

10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E, stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

3 Polynômes de Hurwitz

Définition 3 *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbf{C}$ appartiennent à* $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

Définition 4 *Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$*

11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in [\![1\ ;\ n]\!]^2} (X - z_k - z_l)$$

14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficents sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note (S) le système différentiel :

$$(S) \quad X' = MX$$

où X est une application de la variable t de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$, dérivable sur $\mathbf{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$ et on note (S^*) le système différentiel

$$(S^*) \quad Y' = TY$$

17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*).

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x\,;y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expresssion, en fonction de t, des coordonnées des solutions de (S).

Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M, pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

A$_1$ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

A$_2$ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

A$_3$ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S),

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leq ke^{-\alpha t}\|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$(C) \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n \ : \ < TX, X > \leq -\beta \|X\|^2.$$

20 ▷ Démontrer que A_3 est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*).
Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t}\|\Phi(t)\|^2$.

21 ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions A_1, A_2 et A_3 sont équivalentes.
Indication : on pourra commencer par A_3 *implique* A_2.

Fin du problème

A2022 – MATH I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. Dans la partie **B**, on étudie P au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie **D**, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite (p_n).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de **C** sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.

3 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

4 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D.

En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D.

Dans la suite, pour tout $z \in D$ on note

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5 ▷ Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6 ▷ Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8 ▷ Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$

9 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10 ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-u})\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

11 ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

12 ▷ Montrer que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$

puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geq 1$, et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}\cdot$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14 ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\,\ln(1-e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,\mathrm{d}u.$$

16 ▷ Conclure que

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0, n]\!]^N$ et non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geq 1}$.

18 ▷ Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D,\ \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19 ▷ On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration $\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n z^n$.

20 ▷ Soit $z \in D$. En examinant la différence $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\, \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\, x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

23 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et θ un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que si $x \geq \frac{1}{2}$ alors

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos\theta)$ *et* $(1-x)^2$.

24 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi],\ 1-\cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25 ▷ En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\,\mathrm{d}\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

E. Conclusion

26 ▷ En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème

A2022 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2022

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \longmapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \ ; \ \|X\| = 1\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{C})$ à $\mathbf{C}$. Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $X^T M Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M, $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M. Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| \leq 1\}.$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

1 ▷ Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \longmapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\text{op}}$.

Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \qquad \|M\|_{\text{op}} = \max\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|} \ ; \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}\right\},$$

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \qquad \|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longmapsto \|M\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2 ▷ Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, montrer que

$$\max\{|V^T U| \ ; \ V \in \Sigma_n\} = \|U\|.$$

En déduire que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors

$$\max\{|X^T M Y| \ ; \ (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\} = \|M\|_{\text{op}}.$$

2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que la suite $\left(\|M^k\|_{\text{op}}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup\{\|M^k\|_{\text{op}} \ ; \ k \in \mathbf{N}\}.$$

3 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Montrer que la suite $(\|M^k X\|)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Si $\lambda \in \sigma(M)$, si X est un vecteur propre de M associé à λ, exprimer pour $k \in \mathbf{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de λ, k et X. En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.

4 ▷ On suppose que $n \geq 2$. Indiquer, avec justification, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à $\mathcal{B}_n$.

3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

On dit que l'élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$ si, pour tout (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \qquad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \tag{$\mathcal{P}$}$$

5 ▷ Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifient $\mathcal{P}$. On commencera par le cas des matrices diagonales.

6 ▷ On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$. En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(M), \qquad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}.$$

7 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \dfrac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.

On admettra le fait suivant : soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie ; si $(v_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans E.

Si $m \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $(zI_n - M) \sum_{j=0}^{m} \dfrac{M^j}{z^{j+1}}$.

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}.$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M \ : z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D} \longmapsto (|z| - 1) \, \|R_z(M)\|_{\mathrm{op}}.$$

8 ▷ Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \qquad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}, \qquad \varphi_M(z) \leq b(M).$$

Soit $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \, e^{-i(j+1)t}.$$

9 ▷ Justifier l'existence et la continuité de la fonction u.

Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \, e^{i(k+1)t} \, \mathrm{dt} = c_k.$$

10 ▷ Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

Si $k \in \mathbf{N}$, en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

4 Variation totale et norme uniforme

Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des fonctions de classe C^1 de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbf{C}$. Pour $f\in\mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(t)|\ ;\ t\in[-\pi,\pi]\}\quad\text{et}\quad V(f)=\int_{-\pi}^{\pi}|f'|.$$

11 ▷ En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément C de $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall f\in\mathcal{C}^1,\qquad V(f)\leq C\ \|f\|_\infty.$$

Soit $f\in\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $]-\pi,\pi[$ en lesquels la fonction f' s'annule est fini. On note ℓ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell\geq 1$, on désigne par $t_1<\cdots<t_\ell$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0=-\pi$ et $t_{\ell+1}=\pi$.

12 ▷ Montrer que

$$V(f)=\sum_{j=0}^{\ell}|f(t_{j+1})-f(t_j)|.$$

Pour $0\leq j\leq\ell$, soit ψ_j la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\{0,1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j),f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbf{R}\setminus[f(t_j),f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f)=\sum_{j=0}^{\ell}\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty}\psi_j.$$

13 ▷ Si $y\in\mathbf{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell+1$; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y\in\mathbf{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y),\ldots,\psi_\ell(y)$. En déduire l'inégalité

$$(2)\qquad V(f)\leq 2\ \max\{N(y)\ ;\ y\in\mathbf{R}\}\ \|f\|_\infty.$$

5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F=\dfrac{P}{Q}$ où $P\in\mathbf{C}[X]$ et $Q\in\mathbf{C}[X]\setminus\{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que P et Q n'aient pas de racine commune dans $\mathbf{C}$; si tel est le cas, les racines de Q dans $\mathbf{C}$ sont, par définition, les pôles de F. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\mathbb{U}$ de la forme $\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F \in \mathcal{R}_n$, P et Q deux éléments de $\mathbf{C}_n[X]$ vérifiant $F = \dfrac{P}{Q}$ et

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad Q(z) \neq 0.$$

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + ih(t) \quad \text{où} \quad (g(t), h(t)) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour $u \in [-\pi, \pi]$, on définit une fonction f_u de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_u(t) = g(t)\cos(u) + h(t)\sin(u) = \mathrm{Re}(e^{-iu}F(e^{it})) = \mathrm{Re}(e^{-iu}f(t)).$$

14 ▷ Dans cette question, on fixe $u \in [-\pi, \pi]$ et on suppose que f_u n'est pas constante. On fixe également $y \in \mathbf{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu}F(e^{it})$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S \in \mathbf{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f_u(t) = y \iff S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble ${f_u}^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

15 ▷ En observant que la fonction $|\cos|$ est 2π-périodique, calculer, pour $\omega \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| \, \mathrm{d}u.$$

En déduire que, si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a\cos(u) + b\sin(u)| \, \mathrm{d}u = 4\sqrt{a^2 + b^2}.$$

16 ▷ Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \, \mathrm{d}u \right) \, \mathrm{d}t$$

en fonction de $V(f)$.

17 ▷ On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \, \mathrm{d}u \right) \, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |{f_u}'(t)| \, \mathrm{d}t \right) \, \mathrm{d}u.$$

On admet aussi que, pour $u \in [-\pi, \pi]$ tel que f_u ne soit pas constante, l'ensemble des points de $]-\pi, \pi[$ en lesquels la fonction ${f_u}'$ s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14 ▷).

En déduire l'inégalité

$$(3) \qquad V(f) \leq 2\pi\, n\, \|f\|_\infty.$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M \in \mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M) = \sup\left\{\varphi_M(z)\ ;\ z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}\right\}.$$

et entraîne que $b'(M) \leq b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.

Dans les questions 18 ▷ et 19 ▷ , on fixe $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in {\Sigma_n}^2$. Pour $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$, on note

$$\mathbb{D}_\rho = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leq \rho\}.$$

18 ▷ Montrer qu'il existe un élément F_r de $\mathcal{R}_n$ dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}, \qquad |F_r(z)| \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t}\ \mathrm{d}t.$$

19 ▷ En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17 ▷, montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad |X^T M^k Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)\ (r-1)}\ n\ b'(M).$$

20 ▷ Démontrer finalement l'inégalité

$$(4) \qquad b(M) \leq en\ b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante en est asymptotiquement optimale.

Fin du problème

A2023 – MATH I MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}\|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 $\triangleright$ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 ▻ On note $|||u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 ▻ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 ▻ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1;r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 ▻ Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 ▻ Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7 ▻ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 ▻ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 ▻ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 ▻ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{ta_i}|||_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i id_{E_i}|||_i^k.$$

11 ▻ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 ▻ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|||.|||_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|||.|||_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{tu_A}|||_r \leqslant C |||e^{tv_A}|||_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\begin{cases} y' &= u(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}.$$

13 ▻ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 ▻ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 ▷ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 ▷ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 ▷ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 ▷ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 ▷ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0,\ q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 ▻ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0,\tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|,$$

où $B(0,\tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème

A2023 – MATH II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \, \mathrm{d}t = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,.$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \ \mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \ \mathrm{d}t.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u,$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}\cdot$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Psi(x) = \ln(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\,\rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}\cdot$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de $]0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)\cdot$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

21 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T).$$

22 ▷ Existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$

A2023 – MATH I MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}\|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 $\triangleright$ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2 ▻ On note $|||u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 ▻ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 ▻ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1;r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 ▻ Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 ▻ Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7 ▻ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 ▻ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 ▻ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 ▻ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{ta_i}|||_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i id_{E_i}|||_i^k.$$

11 ▻ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 ▻ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|||.|||_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|||.|||_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |||e^{tu_A}|||_r \leqslant C |||e^{tv_A}|||_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\begin{cases} y' &= u(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}.$$

13 ▻ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 ▻ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 ▷ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 ▷ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 ▷ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 ▷ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 ▷ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0,\ q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 ▻ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0,\tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|,$$

où $B(0,\tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème

A2023 – MATH II MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \, \mathrm{d}t = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,.$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \ \mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \ \mathrm{d}t.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u,$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}\cdot$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Psi(x) = \ln(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\,\rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}\cdot$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de $]0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)\cdot$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}\cdot$$

21 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in]-T, +\infty[,\ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T).$$

22 ▷ Existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$

A2023 – MATH I PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Notations et résultats admis

— Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.

— La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n.

— Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\mathrm{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.

— On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels de taille $n \times n$.

— Sur $M_{n,1}(\mathbf{R})^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

— On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.

— On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \ (\text{resp.} > 0).$$

— Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$.

— On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in C$.

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

E est dite convexe si

$$\forall\,(x,y)\in C^2,\ \forall t\in[0,1]\,,\quad f\left((1-t)\,x+ty\right)\leq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)\,.$$

— Une application $f:C\to\mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire

$$\forall\,(x,y)\in C^2,\ \forall t\in[0,1]\,,\quad f\left((1-t)\,x+ty\right)\geq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)\,.$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1 ▷ Montrer qu'une matrice $S\in S_n\,(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+\,(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}\,(S)\subset\mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S\in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S)\subset\mathbf{R}_+^\star$.

2 ▷ Montrer que $S_n^+\,(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}\,(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n\,(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n\,(\mathbf{R})$?

3 ▷ Montrer que, si $A\in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S\in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A=S^2$.

4 ▷ Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f:I\to\mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p\in\mathbf{N}^\star$, pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in(\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1$ et pour tout $(x_1,\ldots,x_p)\in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f\,(x_i)\,.$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur p.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M\in S_n^+\,(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5 ▷ Montrer l'inégalité $\dfrac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} \geq \det{}^{1/n}(M)$.

Indication : On pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^\star$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous

$$\forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n\,,$$
$$2\max\{x_1,\ldots,x_n\}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n}\right)^2.$$

6 ▷ Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M.

7 ▷ En déduire que

$$\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} - \det{}^{1/n}(M) \geq \frac{\left\|M - \det{}^{1/n}(M)\, I_n\right\|_2^2}{2n\,\|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8 ▷ Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : On pourra utiliser la question 3.

9 ▷ Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^t)$.

10 ▷ Montrer l'inégalité

$$\forall (A,B) \in S_n^{++}(\mathbf{R})^2, \quad \det{}^{1/n}(A+B) \geq \det{}^{1/n}(A) + \det{}^{1/n}(B)\,.$$

11 ▷ Montrer que, si A et B appartiennent $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad \det\left((1-t)\,A + tB\right) \geq \det(A)^{1-t}\det(B)^t\,.$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $S_n^+(\mathbf{R})$.

12 ▷ Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et soit $g : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(I_n + tA)$.

13 ▷ Exprimer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t)$ à l'aide des valeurs propres de A. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

14 ▷ Soit $f : t \mapsto \ln(\det(I_n + tA))$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \mathrm{Tr}(A)\, t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in S_n(\mathbf{R})$. Soit l'application f_A définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15 ▷ Montrer que f_A est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

17 ▷ Montrer que $f_A(t) \underset{t\to 0}{=} \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)$.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$.

18 ▷ Déterminer $f_A'(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

19 ▷ On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$, montrer que

$$\Phi(t) \underset{t\to 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

Soit $\alpha \in \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[,\ \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

20 ▷ Montrer que φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = -\mathrm{Tr}\left((A + tM)^{-1}M\right) \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

21 ▷ Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi''_\alpha(0) = \det{}^{-\alpha}(A)\left(\alpha \mathrm{Tr}^2(A^{-1}M) + \mathrm{Tr}\left((A^{-1}M)^2\right)\right).$$

22 ▷ Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.

Indication : On pourra utiliser la question 3.

23 ▷ En déduire que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

24 ▷ Montrer que, si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$,

$$\frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM) \geq \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A) - \mathrm{Tr}(A^{-1}M) \det{}^{-\alpha}(A)t.$$

Fin du problème

A2023 – MATH II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

1 Nombre de points fixes d'une permutation.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$.

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.

On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$ est notée s :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\, x^n \ .$$

1 ▷ Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geq 1$.

2 ▷ Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\displaystyle\binom{n}{k} d_{n-k}$.

En déduire que $P_n(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

3 ▷ Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad s(x)\, e^x = \frac{1}{1-x} \ .$$

En déduire que $R = 1$.

4 ▷ En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.

5 ▷ Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \ .$$

6 ▷ Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que, si $i \neq j$, la variable U_iU_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

7 ▷ Exprimer X_n à l'aide des U_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8 ▷ Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer

$$y_k = \lim_{n \to +\infty} P_n(X_n = k) \ .$$

Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$, et vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad P(Y = k) = y_k \ .$$

Reconnaître la loi de Y.

9 ▷ On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que

$$\forall s \in \mathbf{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s) \ .$$

2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités) sur N** toute application $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1 \ .$$

On note $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbf{N}$.

Si x et y sont deux distributions sur $\mathbf{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre x et y par

$$d_{VT}(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \big|x(k) - y(k)\big| \ .$$

10 ▷ Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbf{N}$. Prouver les propriétés :

$$0 \le d_{VT}(x,y) \le 1 \ ;$$

$$d_{VT}(x,y) = 0 \iff x = y \ ;$$

$$d_{VT}(y,x) = d_{VT}(x,y) \ ;$$

$$d_{VT}(x,z) \le d_{VT}(x,y) + d_{VT}(y,z) \ .$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note p_X la distribution de probabilités de X. Ainsi, p_X est l'application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad p_X(k) = P(X = k) \ .$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_{\mathbf{N}}$.

En particulier, si λ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** λ l'application $\pi_\lambda\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!} \ .$$

11 ▷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in]0,1[$ et $\mu \in]0,1[$. Calculer $d_{VT}(p_X, p_Y)$.

12 ▷ Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda \left(1 - e^{-\lambda}\right) .$$

En déduire que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2 .$$

On considère de nouveau les variables aléatoires X_n introduites dans la partie 1. Les questions **8.** et **9.** semblent montrer une certaine "convergence" des lois des variables X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

et que cette convergence est assez rapide.

13 ▷ Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul,

$$2\, d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} .$$

14 ▷ Pour n entier naturel, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} .$$

En déduire un équivalent simple de r_n lorsque n tend vers $+\infty$.

15 ▷ En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question **13.**, établir l'estimation

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\frac{2^n}{(n+1)!}\Big) .$$

On pourra faire intervenir des coefficients binomiaux.

3 Autres estimations de distances en variation totale

Si x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbf{N}$, on définit l'application $x * y \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ par

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad (x*y)(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)\, y(k-i) = \sum_{i+j=k} x(i)\, y(j) .$$

16 ▷ Montrer que $x * y$ est une distribution sur $\mathbf{N}$.

17 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver la relation

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y .$$

18 ▷ Soient $(x, y, u, v) \in (\mathcal{D}_{\mathbf{N}})^4$. Montrer que, pour tout k entier naturel,

$$\big|(x*y)(k) - (u*v)(k)\big| \leq \sum_{i+j=k} y(j)\, \big|x(i) - u(i)\big| + \sum_{i+j=k} u(i)\, \big|y(j) - v(j)\big| .$$

19 ▷ Avec les notations de la question précédente, établir l'inégalité

$$d_{VT}(x*y, u*v) \leq d_{VT}(x,u) + d_{VT}(y,v) .$$

20 ▷ Soit U une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in]0,1[$. Prouver l'inégalité

$$d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\,\lambda^2 \ .$$

21 ▷ Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n tel que $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on note B_n une variable binomiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$. Pour tout k entier naturel, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) \ .$$

On pourra utiliser la question précédente.

22 ▷ Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant les résultats et les méthodes qui précèdent, montrer que

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha| \ .$$

Fin du problème

A2023 – MATH I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Quelques inégalités de convexité autour du déterminant

Notations et résultats admis

— Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.

— La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n.

— Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\mathrm{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.

— On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels de taille $n \times n$.

— Sur $M_{n,1}(\mathbf{R})^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbf{R})^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

— On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.

— On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \ (\text{resp.} > 0).$$

— Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$.

— On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout $p \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in C$.

— Une application $f : C \to \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel

E est dite convexe si

$$\forall\,(x,y)\in C^2,\ \forall t\in[0,1]\,,\quad f\left((1-t)\,x+ty\right)\leq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)\,.$$

— Une application $f:C\to\mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire

$$\forall\,(x,y)\in C^2,\ \forall t\in[0,1]\,,\quad f\left((1-t)\,x+ty\right)\geq(1-t)\,f\,(x)+tf\,(y)\,.$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1 ▷ Montrer qu'une matrice $S\in S_n\,(\mathbf{R})$ appartient à $S_n^+\,(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}\,(S)\subset\mathbf{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S\in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S)\subset\mathbf{R}_+^\star$.

2 ▷ Montrer que $S_n^+\,(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}\,(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n\,(\mathbf{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $M_n\,(\mathbf{R})$?

3 ▷ Montrer que, si $A\in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $S\in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A=S^2$.

4 ▷ Soit I intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f:I\to\mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p\in\mathbf{N}^\star$, pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in(\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1$ et pour tout $(x_1,\ldots,x_p)\in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f\,(x_i)\,.$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur p.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M\in S_n^+\,(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5 ▷ Montrer l'inégalité $\dfrac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} \geq \det{}^{1/n}(M)$.

Indication : On pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^\star$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous

$$\forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n\,,$$
$$2\max\{x_1,\ldots,x_n\}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n}\right)^2.$$

6 ▷ Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M.

7 ▷ En déduire que

$$\frac{\mathrm{Tr}\,(M)}{n} - \det{}^{1/n}(M) \geq \frac{\left\|M - \det{}^{1/n}(M)\, I_n\right\|_2^2}{2n\,\|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8 ▷ Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Indication : On pourra utiliser la question 3.

9 ▷ Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^t)$.

10 ▷ Montrer l'inégalité

$$\forall (A,B) \in S_n^{++}(\mathbf{R})^2, \quad \det{}^{1/n}(A+B) \geq \det{}^{1/n}(A) + \det{}^{1/n}(B)\,.$$

11 ▷ Montrer que, si A et B appartiennent $S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors :

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad \det\left((1-t)\,A + tB\right) \geq \det(A)^{1-t}\det(B)^t\,.$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $S_n^+(\mathbf{R})$.

12 ▷ Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln \circ \det$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et soit $g : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(I_n + tA)$.

13 ▷ Exprimer, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g(t)$ à l'aide des valeurs propres de A. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

14 ▷ Soit $f : t \mapsto \ln(\det(I_n + tA))$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \mathrm{Tr}(A)\, t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in S_n(\mathbf{R})$. Soit l'application f_A définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15 ▷ Montrer que f_A est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

16 ▷ Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

17 ▷ Montrer que $f_A(t) \underset{t\to 0}{=} \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + o(t)$.

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$.

18 ▷ Déterminer $f_A'(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

19 ▷ On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = I_n$, montrer que

$$\Phi(t) \underset{t\to 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

Soit $\alpha \in \left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[,\ \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

20 ▷ Montrer que φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) = -\mathrm{Tr}\left((A + tM)^{-1}M\right) \det{}^{-\alpha}(A + tM).$$

21 ▷ Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que

$$\varphi''_\alpha(0) = \det{}^{-\alpha}(A)\left(\alpha \mathrm{Tr}^2(A^{-1}M) + \mathrm{Tr}\left((A^{-1}M)^2\right)\right).$$

22 ▷ Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.

Indication : On pourra utiliser la question 3.

23 ▷ En déduire que $\varphi''_\alpha(0) \geq 0$.

24 ▷ Montrer que, si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$,

$$\frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A + tM) \geq \frac{1}{\alpha} \det{}^{-\alpha}(A) - \mathrm{Tr}(A^{-1}M) \det{}^{-\alpha}(A)t.$$

Fin du problème

A2023 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le sujet on se fixe un entier naturel $N \geq 2$.

— Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, p]\!] \times [\![1\,;\, q]\!]$, on note $A[i,j]$ le coefficient à la ligne i et la colonne j de A. Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$) on note $A[i]$ pour $A[i,1]$. De même si A est une matrice ligne ($p = 1$) on note $A[i]$ pour $A[1,i]$.

— On identifie $\mathbf{R}^N$ avec $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$. Pour tout $k \in [\![1\,;\, N]\!]$ on note $E_k \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf la k-ième qui vaut 1. On rappelle que $(E_1, \ldots, E_N)$ est une base de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

On note $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On a donc pour tout $i \in [\![1\,;\, N]\!]$, $U[i] = 1$.

— On appelle noyau de Markov une matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ telle que

(M_1) $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, K[i,j] \geq 0$

(M_2) $\forall i \in [\![1\,;\, N]\!], \sum_{j=1}^{N} K[i,j] = 1$

— On appelle probabilité un vecteur ligne $\mu \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ tel que

(P_1) $\forall i \in [\![1\,;\, N]\!], \mu[i] \geq 0$

(P_2) $\sum_{j=1}^{N} \mu[j] = 1$

— On notera $I_N \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice identité.

Préliminaires

1 ▷ Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov alors AB est encore un noyau de Markov.

On se fixe un noyau de Markov K.

2 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}$ et $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$, justifier que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$ converge.

On notera $H_t \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$$

4 ▷ Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Montrer que pour $(t,s) \in \mathbf{R}_+^2$, $H_{t+s} = H_t H_s$.

On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N. À l'instant initial le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i, il se retrouve dans l'état j avec une probabilité p_{ij} qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;\, N]\!]$ qui correspond à l'état du sytème après k impulsions. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ et tout $k \in \mathbf{N}$ tels que $P(Z_k = i) \neq 0$ on a donc $P(Z_{k+1} = j | Z_k = i) = p_{ij}$. En particulier, cela ne dépend pas de k. De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbf{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, K[i,j] = p_{ij}$$

6 ▷ Justifier que K est un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $j \in [\![1\,;\, N]\!]$ montrer que $P(Z_n = j) = K^n[1,j]$.

On pourra procéder par récurrence.

8 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t. Pour tout $j \in [\![1\,;\, N]\!]$ on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $P(A_{t,j}) = H_t[1,j]$.

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire et $||\ ||$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On pose $q_u : E \to \mathbf{R}$ défini par $q_u : x \mapsto (u(x)|x)$ et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geq 0$.

9 ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u. Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u. On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\ker(u)$.

10 ▷ Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 ||x - p(x)||^2$.

Partie 3 - Convergence de $H_t[i,j]$

On considère un noyau de Markov K. On suppose que 1 est une valeur propre simple de K.

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbf{R})$ telle que :

(a) Pour tout $j \in [\![1\,;\, N]\!]$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, \pi[i]K[i,j] = K[j,i]\pi[j]$; on dit que K est π-reversible.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel t positif H_t est aussi un noyau de Markov π-réversible c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2, \pi[i]H_t[i,j] = H_t[j,i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, pour $X, Y \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})^2$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer pour $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ la limite de $H_t[i,j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11 ▷ Montrer que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Montrer que $(X,Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$.

Dans la suite on note E l'espace l'espace euclidien $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire.

13 ▷ On considère l'endomorphisme de E défini par $u : X \mapsto (I_N - K)X$. Montrer que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$ et que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

On admet que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_t X$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E.

14 ▷ Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i] - X[j])^2 K[i,j]\pi[i]$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$, on note ψ_X la fonction définie de $\mathbf{R}$ dans E par $\psi_X : t \mapsto H_t X$ et φ_X la fonction définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $\varphi_X : t \mapsto ||H_t X||^2$

15 ▷ Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$\psi'_X(t) = -(I_N - K)H_t X$$

16 ▷ En déduire que φ_X est dérivable et exprimer $\varphi'_X(t)$ à l'aide de q_u.

On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur $\ker(u)$.

17 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18 ▷ On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u.

Montrer que pour tout réel $t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)$.

En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ ||H_t X - p(X)||^2 \leq e^{-2\lambda t}||X - p(X)||^2$.

19 ▷ Soit $i \in [\![1\,;\, N]\!]$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $||H_t E_i - \pi[i]U|| \leq e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$H_t[i,j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k] - \pi[k])(H_{t/2}[k,j] - \pi[j])$$

On pourra utiliser la question 5.

21 ▷ En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|H_t[i,j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim_{t\to+\infty} H_t[i,j]$.

Fin du problème

A2024 – MATH I MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :]0\,;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\ \mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :]-\pi;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{aligned} h\ :]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}. \end{aligned}$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi;\pi[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\Big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\Big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0;1[$ fixé.

8 ▷ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

10 ▷ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

11 ▷ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

12 ▷ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 ▷ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

16 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 ▷ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E\Big(|S_n|\Big)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19 ▷ Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 ▷ Montrer que :

$$E\Big(\cos(S+T)\Big) = E\Big(\cos(S)\Big)\, E\Big(\cos(T)\Big).$$

21 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$E\Big(\cos(tS_n)\Big) = \Big(\cos(t)\Big)^n.$$

22 ▷ Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \text{signe}(a)\ b$$

où $\text{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big).$$

23 ▷ Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$E\Big(|S_n|\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

25 ▷ Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\Big((n-1)!\Big)^2}.$$

Fin du problème

A2024 – MATH II MP

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 9\}, \{2, 8\}\Big\}$$

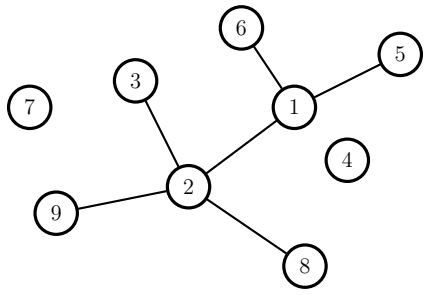


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \Big\{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\Big\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \Big\{\Big\{s, s_1\Big\}, \Big\{s, s_2\Big\}, \ldots, \Big\{s, s_d\Big\}\Big\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \Big\{1, 3, 4, 5, 6, 8\Big\}$.

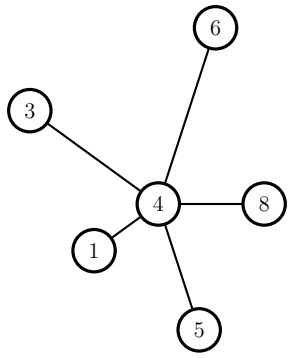


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \Big\{s', t'\Big\} \in A' \iff \Big\{\sigma(s'), \sigma(t')\Big\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la FIGURE 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

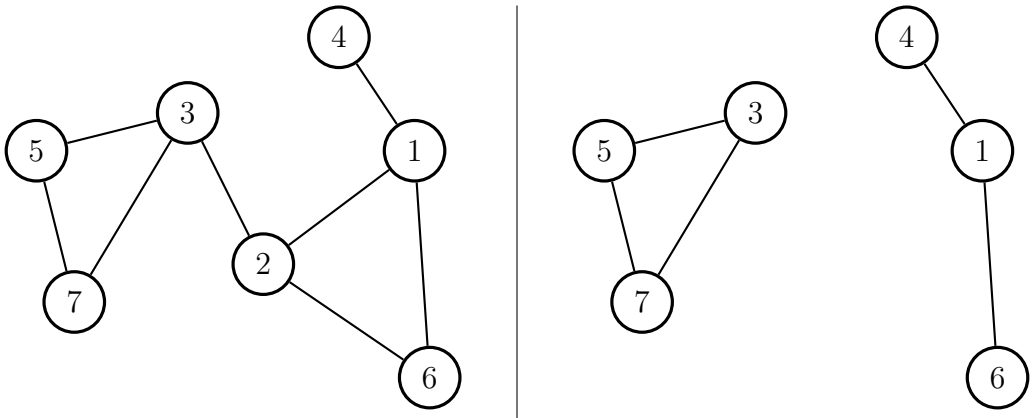
6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G (b) Le graphe $G \setminus 2$

FIGURE 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \left\{\left\{s_1, s_2\right\}\right\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\Big\{0, 1\Big\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \in A \\ 0 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \Big\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\Big\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\Big\{i, j\Big\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)\Big)$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = \Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P}\Big)$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\Big\{i, j\Big\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\Big\{G\Big\})$ de l'événement élémentaire $\Big\{G\Big\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \text{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0
- si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 ▷ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 ▷ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 ▷ Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 ▷ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!]\Big\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 ▷ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 ▷ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 ▷ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim_{n\to+\infty}\Big(n^{\omega_0}p_n\Big) = +\infty$.

21 ▷ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 ▷ Montrer que $\Sigma_0 \le \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 ▷ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \le \sum_{H\in\mathcal{C}_0}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}c_0 p_n^{2a_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 ▷ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\le q\le r$, on a :

$$\binom{r}{q}r^{-q} \ge \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k = \mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0\Big)^2\Big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 ▷ Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = 0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 ▷ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\ge2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 ▷ Retrouver le résultat de la question 16 ▷ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin du problème

A2024 – MATH I MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f\ :]0\,;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$\begin{aligned} r\ :]-\pi\,;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi\,;\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{\mathrm{i}\theta})^2}\ \mathrm{d}t.$$

Indication : soit $\beta \in]0;\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$, $|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g\ :]-\pi;\pi[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ \theta &\longmapsto e^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\ \mathrm{d}t,$$

où h est la fonction définie par

$$\begin{aligned} h\ :]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto \frac{t^x}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}. \end{aligned}$$

Calculer $h(0)$ et

$$\lim_{t\to+\infty} h(t).$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi;\pi[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(g(-\theta)e^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)e^{-\mathrm{i}x\theta}\Big) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{\Big(u\sin(\theta)-\cos(\theta)\Big)^x}{1+u^2}\ \mathrm{d}u,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0;1[$ fixé.

8 ▷ Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t.$$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\cdot$$

10 ▷ Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\cdot$$

11 ▷ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}\cdot$$

12 ▷ En déduire enfin que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}\cdot$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 ▷ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

16 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 ▷ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 ▷ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}.$$

Partie IV : Calcul de $E\Big(|S_n|\Big)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19 ▷ Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 ▷ Montrer que :

$$E\Big(\cos(S+T)\Big) = E\Big(\cos(S)\Big)\, E\Big(\cos(T)\Big).$$

21 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$E\Big(\cos(tS_n)\Big) = \Big(\cos(t)\Big)^n.$$

22 ▷ Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \text{signe}(a)\ b$$

où $\text{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big).$$

23 ▷ Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

24 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$E\Big(|S_n|\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^n}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

25 ▷ Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad E\Big(|S_{2n}|\Big) = E\Big(|S_{2n-1}|\Big) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}\Big((n-1)!\Big)^2}.$$

Fin du problème

A2024 – MATH II MPI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.
On désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
Le groupe symétrique des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.
Un **graphe** G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés **arêtes** du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets *distincts* de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit **isolé**.
Par convention, le **graphe vide** est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1, 9]\!] \quad \text{et} \quad A = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 9\}, \{2, 8\}\Big\}$$

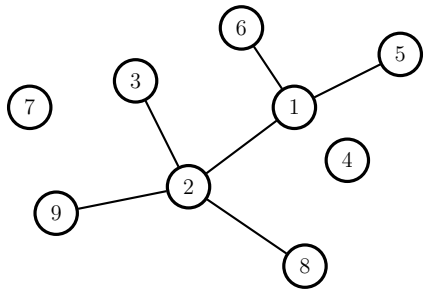


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de «boucles» reliant un sommet à lui-même.
De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \Big\{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\Big\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \Big\{\Big\{s, s_1\Big\}, \Big\{s, s_2\Big\}, \ldots, \Big\{s, s_d\Big\}\Big\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \Big\{1, 3, 4, 5, 6, 8\Big\}$.

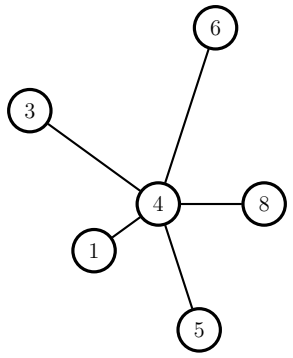


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est **inclus** dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une **copie** de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \qquad \Big\{s', t'\Big\} \in A' \iff \Big\{\sigma(s'), \sigma(t')\Big\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la FIGURE 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires.

Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi **indexation**) σ entre $[\![1, n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \Big\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i.

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\Big\{i, j\Big\} = \Big\{j, i\Big\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le **polynôme caractéristique du graphe** G.

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

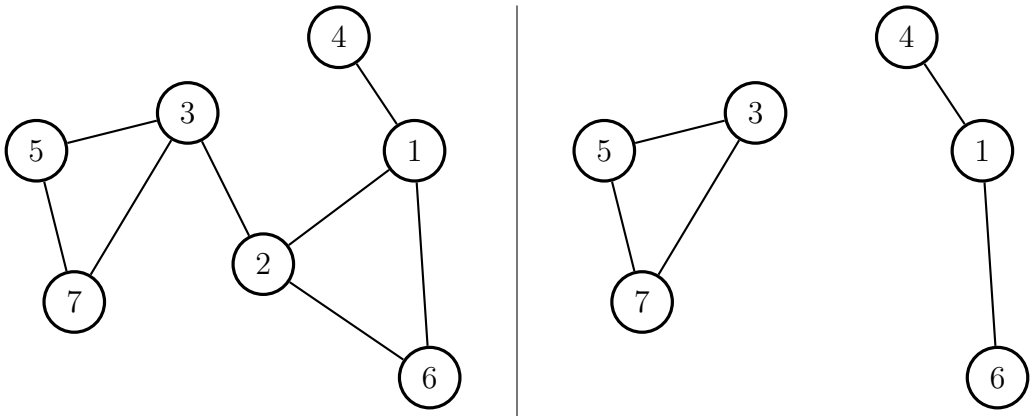
6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n-1$.

Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:



(a) Un graphe G (b) Le graphe $G \setminus 2$

FIGURE 3 – un graphe G, et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \left\{\left\{s_1, s_2\right\}\right\}$.

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles.

Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1, n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\Big\{0, 1\Big\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \in A \\ 0 & \text{si } \Big\{i, j\Big\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \Big\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\Big\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\Big\{i, j\Big\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0). \tag{1}$$

On *admet* l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n)\Big)$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = \Big(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P}\Big)$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\Big\{i, j\Big\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

10 ▷ Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\Big\{G\Big\})$ de l'événement élémentaire $\Big\{G\Big\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \text{card}(A)$.

Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une **fonction de seuil** pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k\geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0

- si $t_n = \mathrm{o}(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$.

12 ▷ Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\Big(\mathbf{E}(X)\Big)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset \Big(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X)\Big)$.

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

14 ▷ Montrer que si $p_n = \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

15 ▷ Montrer que si $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

16 ▷ En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geq 2$ et que $a_0 \geq 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: «contenir une copie de G_0».

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \Big\{H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1, n]\!]\Big\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \qquad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}.$$

17 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

18 ▷ Soit S_0' un ensemble *fixé* de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

19 ▷ Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

20 ▷ En déduire que si $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$.

Indication : on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim_{n\to+\infty}\Big(n^{\omega_0}p_n\Big) = +\infty$.

21 ▷ Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0-a_{H\cap H'}}.$$

Pour $k\in[\![0,s_0]\!]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2\\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}(H\cup H'\subset G).$$

22 ▷ Montrer que $\Sigma_0 \le \Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2$.

23 ▷ Soit $k\in[\![1,s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \le \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 ▷ Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1\le q\le r$, on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \ge \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q.$$

et en déduire que pour $k\in[\![1,s_0]\!]$, on a $\Sigma_k = \mathrm{o}\Big(\Big(\mathbf{E}(X_n^0\Big)^2\Big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

25 ▷ Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\Big(\mathbf{E}(X_n^0)\Big)^2} = 0$ où $\mathbf{V}(X_n^0)$ désigne la variance de X_n^0.

26 ▷ Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\ge2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

27 ▷ Retrouver le résultat de la question 16 ▷ et déterminer une fonction de seuil pour la propriété «contenir une copie de l'étoile à d branches» avec d entier fixé supérieur à 1.

Fin du problème

A2024 – MATH I PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

— Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

— On note $CL(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :

$$CL(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbf{R},\ |f(x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right) \right\}.$$

— On note $L^1(\varphi) = \{ f \in C^0(\mathbf{R}),\ f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbf{R} \}$.

— Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$.

— Soient $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = \ell$.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbf{R})$ est stable par produit.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$.

5 ▷ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors $P_t(f) \in C^0(\mathbf{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note, si cela a un sens, $\dfrac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} y \right) f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Montrer aussi que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)''(x) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

10 ▷ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x)) f(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f, f', f'' et $\dfrac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

12 ▷ Justifier que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Indication : On pourra utiliser la question 11.

13 ▷ Pour $t \in \mathbf{R}_+$, on pose $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

14 ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

15 ▷ Vérifier que l'on a $S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

16 ▷ On **admet** que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L\left(P_t(f)\right)(x)\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

17 ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

19 ▷ En déduire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

20 ▷ Établir l'inégalité suivante

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fin du problème

A2024 – MATH II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations

On rappelle l'expression des coefficients binomiaux. Lorsque k et n sont deux entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} \text{ , si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases} .$$

On pourra utiliser sans démonstration l'équivalent de Stirling, valable lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour tous réels $a < b$, on note $\mathscr{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ continues sur l'intervalle $]a,b[$, intégrables sur $]a,b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a,b[$ appartient à l'ensemble $\mathscr{D}_{a,b}$.

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall k \geqslant k_0,\ b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (t - a_k), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right] \\ k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (b_k - t), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}, b_k\right] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0,1[$, intégrable sur $]0,1[$ et que cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{D}_{0,1}$.

Dans la suite, on définit la fonction :

$$h : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{array} \right. .$$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis montrer que la fonction φ appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

4 ▷ On note $\tilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Vérifier que la fonction $\tilde{h}$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, puis montrer que la fonction $\tilde{h}$ appartient à $\mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 h(t)\ dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(t)\ dt.$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)\ dt.$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\ dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)\ dt.$$

8 ▷ Déduire des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)\ dt = \pi.$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim}\ \lambda\sqrt{n},$$

où la constante λ est à préciser.

11 ▷ En déduire la limite :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1, convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}=0.$$

13 ▷ En déduire que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}\cdot\left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n}-1\right)=0.$$

2 Une étude de marche aléatoire

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $\Big(X_n:\Omega\longrightarrow\{-1,1\}\Big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1,1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

14 ▷ Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $\dfrac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l'entier $n\geqslant 1$. On appelle chemin, tout $2n$-uplet $\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1.
Si $\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle indice d'égalité, tout entier $k\in[\![1,2n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i=0$. On remarquera alors qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le k-uplet $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales à -1.

On note $N_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $\Big(X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega)\Big)$.
On note pour tout entier i entre 1 et n, l'événement A_i défini par

$$A_i = \Big\{\omega,\ \text{2i est un indice d'égalité de } \Big(X_1(\omega), \cdots, X_{2n}(\omega)\Big)\Big\}.$$

15 ▷ Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_i)$, pour tout entier i entre 1 et n.

16 ▷ Soit $\ell \in \mathbf{Z}$ un entier et $n \geqslant 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell - n$ est pair ou impair, calculer $\mathbf{P}(S_n = \ell)$.

On admet sans démonstration le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $a_n = o(b_n)$ au voisinage de $+\infty$ et la série $\sum_n |b_n|$ est divergente. Alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

17 ▷ Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} d_n$ et la série $\sum_n c_n$ diverge.

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, montrer que la série $\sum_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

18 ▷ Montrer que la variable aléatoire N_n admet une espérance finie et que son espérance $\mathbb{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}.$$

[indication : on pourra exprimer la variable N_n à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements A_i.]

19 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\simeq} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu'à vider complètement l'urne. Les tirages sont équiprobables à chaque pioche.

Pour tout entier k entre 1 et $2n$, on dit que l'entier k est un indice d'égalité si dans l'expérience de pioche précédemment décrite, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne après avoir pioché les k premières boules sans remise. On remarque que l'entier $2n$ est toujours un indice d'égalité.

On note M_n, la variable aléatoire comptant le nombre aléatoire d'indices d'égalité k entre 1 et $2n$.

20 ▷ En utilisant par exemple les événements B_i : « *l'entier i est un indice d'égalité* », montrer que la variable M_n admet une espérance finie égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i} \cdot \binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.$$

21 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\simeq} \sqrt{\pi\, n}.$$

Fin du problème

A2024 – MATH I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

— Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

— On note $CL(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :

$$CL(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbf{R},\ |f(x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right) \right\}.$$

— On note $L^1(\varphi) = \{ f \in C^0(\mathbf{R}),\ f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbf{R} \}$.

— Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$.

— Soient $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = \ell$.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbf{R})$ est stable par produit.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$.

5 ▷ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors $P_t(f) \in C^0(\mathbf{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note, si cela a un sens, $\dfrac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} y \right) f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Montrer aussi que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)''(x) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}} y \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

10 ▷ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x)) f(x) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f, f', f'' et $\dfrac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

12 ▷ Justifier que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Indication : On pourra utiliser la question 11.

13 ▷ Pour $t \in \mathbf{R}_+$, on pose $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

14 ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

15 ▷ Vérifier que l'on a $S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

16 ▷ On **admet** que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L\left(P_t(f)\right)(x)\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

17 ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

19 ▷ En déduire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

20 ▷ Établir l'inégalité suivante

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fin du problème

A2024 – MATH II PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

— On note (x, y) (resp. $X^T Y$) le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$ (resp. X et Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $||x||$ la norme de x (resp. $||X||$ la norme de X) associée au produit scalaire.

— Etant donnés deux points P et P' de $\mathbf{R}^n$, on note $d(P, P')$ la distance entre P et P' associée à la norme euclidienne usuelle :

$$d(P, P') = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}||$$

où O est le point origine.

— Un endomorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est dit *positif* si

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, (x, f(x)) \geq 0$$

Une matrice symétrique A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0.$$

— Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Un endormorphisme symétrique f de $\mathbf{R}^n$ est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.

— On appelle *matrice de distance euclidienne* (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points A_1, ... A_n de $\mathbf{R}^m$ tels que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a :

$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2.$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels λ_1, ..., λ_n, une MDE de spectre $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

1 Matrices de Hadamard

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 et telle que $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

2 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de H par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.

3 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geq 2$ alors n est pair.

4 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$. On note $\lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérés).

5 ▷ Justifier l'existence d'une base $(e_1, ..., e_n)$ orthonormée de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On garde par la suite cette base.

6 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension k. On pose $T_k = \text{Vect}(e_k, ..., e_n)$.
Justifier que $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.

7 ▷ En considérant $x \in S_k \cap T_k$, justifier que :

$$\max_{x \in S_k, ||x||=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

8 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide de $S = \text{Vect}(e_1, ..., e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, ||x||=1} (x, f(x)) \right)$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

9 ▷ Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = B^T.B$. En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = \lambda u.u^T - B^T.B$.

3 Caractérisation des MDE

On note $\mathbf{e}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $M.\mathbf{e} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par

$$P = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{e}.\mathbf{e}^T$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à D associe

$$T(D) = -\frac{1}{2}PDP$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à une matrice A associe

$$K(A) = \mathbf{e}.\mathbf{a}^T + \mathbf{a}.\mathbf{e}^T - 2A$$

où $\mathbf{a}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

10 ▷ Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.

11 ▷ Soit $D \in \Delta_n$. Soient A_1, ... , A_n des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i. Soit M_A la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $||x_i||^2$. Ecrire D comme combinaison linéaire de $C\mathbf{e}^T$, $\mathbf{e}C^T$ et $M_A^T.M_A$. En déduire que pour toute matrice D de Δ_n on a $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ Montrer que pour toute matrice A de Ω_n on a $K(A) \in \Delta_n$.

13 ▷ Montrer que les applications $T : \Delta_n \to \Omega_n$ et $K : \Omega_n \to \Delta_n$ vérifient :

$$T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}.$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $K \circ T = Id_{\Delta_n}$ et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.

14 ▷ Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si $-\frac{1}{2}PDP$ est positive.

15 ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ est MDE.

4 Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

16 ▷ Préciser la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n.

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e})^{\perp}$, on a

$$x^T D x \leqslant 0.$$

18 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient λ_1, ... ,λ_n ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer

$$\lambda_{n-1} \leqslant 0$$

et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient λ_1 , ..., λ_n des réels tels que

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. On note enfin $D = U^T \Lambda U$.

19 ▷ Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres λ_1, ..., λ_n, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1.

20 ▷ Montrer que D est MDE.

21 ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$.

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair...

Fin du problème

A2025 – MATH I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = (\mathbf{E}(|X|^p))^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 ▷ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 ▷ On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^4\right) \leq 8\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

11 ▷ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 ▷ à 15 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 ▷ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 ▷ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 ▷ Montrer que l'application φ définie sur $\left(L^0(\Omega)\right)^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 ▷ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n \, \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i \right| \leq \beta_1 n \, \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k} .$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n} .$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1, 1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1, \ldots, a_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k}$.

Fin du problème

A2025 – MATH II MP

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \text{ (symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 ▷ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 ▷ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1$.

6 ▷ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 ▷ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 ▷ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right)$.

9 ▷ En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 ▷ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1-\alpha_j^2) U U^\top$.

13 ▷ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1-{\alpha_j}^2)_{1\leq j\leq n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = V D V^\top.$$

14 ▷ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\, U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 ▷ Montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 ▷ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 ▷ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 ▷ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 ▷ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 ▷ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1')), \ldots, \pi(J(g_\ell'))$.

Fin du problème

A2025 – MATH I MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et résultats admis

— Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.

— Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.

— On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles definies sur Ω. On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.

— Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

— Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

— Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^0(\Omega)$, on note $\|X\|_p = (\mathbf{E}(|X|^p))^{1/p}$. On admet que l'application $X \mapsto \|X\|_p$ est alors une norme sur $L^0(\Omega)$.

— Si $m \in \mathbf{N}^\star$, $p \in [1, +\infty[$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on définit la quantité $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ par :

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

On admet que l'application $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mapsto \|(x_1, \ldots, x_m)\|_p^{\mathbf{R}^m}$ est une norme sur $\mathbf{R}^m$.

— On note $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites de $\mathbf{R}$ nulles à partir d'un certain rang. On admet alors que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$.

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathbf{E}\left(Y^q\right)\right)^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}\left(X^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^q\right) = 1$.

3 ▷ Quelle inégalité retrouve-t-on lorsque $p = q = 2$? En donner alors une preuve directe.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

4 ▷ Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

5 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\,\mathrm{e}^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

7 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

8 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

9 ▷ On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^4\right) \leq 8\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

11 ▷ En déduire qu'il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Dans les questions numérotées de 13 ▷ à 15 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

13 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{4}$.

14 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

15 ▷ Montrer qu'il existe $\widetilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\widetilde{\alpha}_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

16 ▷ En déduire qu'il existe un réel α_p tel que

$$\alpha_p \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq \mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}.$$

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

17 ▷ Montrer que l'application φ définie sur $\left(L^0(\Omega)\right)^2$ par

$$\forall X, Y \in L^0(\Omega), \quad \varphi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$$

est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$. Montrer que ψ prend ses valeurs dans $L^0(\Omega)$, puis que ψ conserve le produit scalaire.

19 ▷ On note $R = \psi\left(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\right)$. Montrer que pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R.

Une deuxième conséquence

Dans cette partie, on suppose que n est une puissance de 2 : on écrit $n = 2^k$ avec $k \in \mathbf{N}^\star$.

20 ▷ Soit $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$. Montrer que

$$\alpha_1 n \, \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i \right| \leq \beta_1 n \, \|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k} .$$

On pourra utiliser les questions 11 et 16.

21 ▷ En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \, \|x\|_2^{\mathbf{R}^n} .$$

En ordonnant les n éléments de $\{-1, 1\}^k$ de manière arbitraire, on pourra utiliser l'application T définie sur $\mathbf{R}^k$ par $T(a_1, \ldots, a_k) = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k}$.

Fin du problème

A2025 – MATH II MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \ \text{ (symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 ▷ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 ▷ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1$.

6 ▷ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 ▷ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 ▷ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right)$.

9 ▷ En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0\leq i\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 ▷ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1-\alpha_j^2) U U^\top$.

13 ▷ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1-{\alpha_j}^2)_{1\leq j\leq n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = V D V^\top.$$

14 ▷ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\, U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 ▷ Montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 ▷ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 ▷ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 ▷ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 ▷ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 ▷ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1')), \ldots, \pi(J(g_\ell'))$.

Fin du problème

A2025 – MATH I PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P(\frac{1}{X}).$$

1 ▷ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.

Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier k, $0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2 ▷ Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

Ecrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P(\frac{1}{X})$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier i, $1 \leq i \leq d$, λ_i est non nul et $\dfrac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3 ▷ Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

$$Q(X) = -X^p Q(\frac{1}{X}).$$

Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4 ▷ Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1. *On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1$ ou -1.*

5 ▷ En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6 ▷ Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x, $\det A$ et $\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1})$.

7 ▷ On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

8 ▷ Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9 ▷ Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-\frac{1}{2})^2$ soit réciproque).

On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2.

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10 ▷ Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1 S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11 ▷ Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}.$$

12 ▷ Soit S_1 la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix},$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$.

Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1 A$ soient des matrices de symétries.

13 ▷ En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$.

14 ▷ Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

15 ▷ Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$.

Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$

16 ▷ Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n(\frac{1}{\lambda})$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X), \\ s_2(P) = P(1 - X), \\ g(P) = P(X + 1) - P(X). \end{cases}$$

On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

17 ▷ Calculer s_1^2 , s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $Id_{\mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

18 ▷ Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

19 ▷ Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :

A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et r ainsi que les $n_i, 1 \leq i \leq r$, des entiers naturels non nuls.

De plus la matrice A' est unique à l'ordre près des blocs.

20 ▷ Démontrer que A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}(\frac{1}{\lambda_1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\frac{1}{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}(\frac{1}{\lambda_r}) \end{pmatrix}$.

21 ▷ En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.

Fin du problème

A2025 – MATH II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(J, \mathbf{R})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.

- L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables sur J.

- Si $f : J \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup\{|f(x)|,\, x \in J\}.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On montrera en Partie V que cette équation peut-être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C) : \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I : Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \approx 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell) : \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé

$$(C_\ell) : \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases} .$$

1 ▷ Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variation.

2 ▷ Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbf{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma.$$

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

- y est décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
- $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

3 ▷ Montrer que c est une solution constante de (E), puis que (E) admet exactement deux solutions constantes notées c_1 et c_2 telles que $c_1 < 0 < c_2$. En déduire la valeur de c en fonction de c_1 et c_2.

Partie II : Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 *Une série de fonctions* $\sum_{n \geq 0} f_n$ *est dite de Dirichlet si*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x},$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour une valeur donnée $M \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n},$$

et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad et \qquad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

4 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les réels b_k sont bien définis.

5 ▷ Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 ▷ Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

7 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

8 ▷ Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une série de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en Définition 1. On introduit également la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad g(x) = \mathrm{e}^{y(x)}.$$

9 ▷ Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie I.

10 ▷ En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

11 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k,$$

où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

12 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

Partie IV : Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes les sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la Partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n.$$

On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N. On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N.$$

13 ▷ Montrer que

$$\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M}{2^N},$$

et déduire que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbf{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty,J}$ serait plus fine.

14 ▷ Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

15 ▷ Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbf{R}^N$.

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \quad \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0, 1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 *Pour (S_0, I_0, R_0) fixés, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0})$, alors*

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq \left(\widetilde{S}(x), \widetilde{I}(x), \widetilde{R}(x)\right).$$

16 ▷ Supposons que $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

17 ▷ Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

18 ▷ Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = 1/2$, $I_0 = 1/2$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h(x) = \ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \ln\left(2S(x)\right).$$

19 ▷ Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 \mathrm{e}^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right).$$

20 ▷ Montrer que S_N converge uniformément vers S sur $\mathbf{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}}.$$

Partie VI : Modèle probabiliste

Toutes les variables aléatoires que l'on sera amené à considérer dans la suite sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On rappelle que $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$.

Pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 0}$, on note :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \Delta U_n = U_{n+1} - U_n.$$

Dans tout ce qui suit, on considère une population $\mathcal{P}$ de $M \geq 1$ individus, et l'on fixe $K \in \{0, \ldots, M\}$. On note

$$E = \{(s, i, r) \in \mathbf{N}^3,\ s + i + r = M\}.$$

On considère maintenant un autre modèle de propagation de la même épidémie non létale pendant plusieurs jours au sein de la population $\mathcal{P}$.

Chaque matin, la population se répartit en trois classes distinctes : les personnes susceptibles (jamais infectées), les personnes infectées, et les personnes rétablies (et désormais immunisées). On note $\tilde{S}_n, \tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ les effectifs des trois classes au matin du n-ième jour et l'on convient que

$$\tilde{S}_0 > 0, \tilde{I}_0 \geq 1,$$

de sorte que l'on ne soit pas dans un cas trivial où l'épidémie est finie ou ne peut pas commencer.

Lorsqu'au matin du n-ième jour, $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \in E$, l'évolution quotidienne est la suivante :

— dans la journée, chacune des s personnes saines rencontre, indépendamment des autres, K personnes au hasard parmi les M personnes de la population totale. Dès que l'une au moins des rencontres se fait avec une personne infectée, la personne saine en question devient infectée le lendemain matin ;

— dans le même temps, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité ρ fixée dans $]0, 1[$.

21 ▷ Soit $(s, i, r) \in E$. Conditionnellement à l'événement $\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big)$, quelle est la probabilité, notée $p(i)$, pour une personne susceptible d'être infectée lors de cette journée ?

22 ▷ Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, M\}$, montrer que :

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\, \mathbf{P}\Big(Z = k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big) \right) \mathbf{P}\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big). \tag{1}$$

23 ▷ Justifier que pour tout $n \geq 0$, les variables aléatoires $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ ainsi que les variables aléatoires $\Delta\tilde{S}_n$, $\Delta\tilde{I}_n$ et $\Delta\tilde{R}_n$, ont une espérance finie.

24 ▷ Établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \rho\mathbf{E}\left[\tilde{I}_n\right].$$

25 ▷ Établir l'identité suivante : pour $(s,i,r) \in E$, pour tout $k \in \{0,\cdots,s\}$,

$$\mathbf{P}\Big(\Delta\tilde{S}_n = -k \,\Big|\, (\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\Big) = \binom{s}{k}\Big(p(i)\Big)^k\Big(1-p(i)\Big)^{s-k}.$$

26 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right] = -\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n\, p(\tilde{I}_n)\right],$$

puis en déduire l'équation satisfaite par $\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{I}_n\right]$.

Fin du problème

A2025 – MATH I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Notations et définitions.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathbf{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathbf{M}_n$ sont semblables si

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P(\frac{1}{X}).$$

1 ▷ Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.

Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier k, $0 \leq k \leq p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

2 ▷ Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.

Ecrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P(\frac{1}{X})$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier i, $1 \leq i \leq d$, λ_i est non nul et $\dfrac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.

3 ▷ Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est antiréciproque si

$$Q(X) = -X^p Q(\frac{1}{X}).$$

Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4 ▷ Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1. *On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1$ ou -1.*

5 ▷ En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Le cas diagonalisable.

Soit A une matrice appartenant à $\mathbf{GL}_n$.

6 ▷ Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x, $\det A$ et $\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1})$.

7 ▷ On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

8 ▷ Soit $B \in \mathbf{M}_n$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9 ▷ Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-\frac{1}{2})^2$ soit réciproque).

On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2.

Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème se propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

On dit qu'un endomorphisme f d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est une symétrie si $f \circ f = Id_E$. On dit qu'une matrice $S \in \mathbf{M}_n$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

10 ▷ Démontrer que si S_1 et S_2 sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1 S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11 ▷ Si une matrice A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même de toute matrice semblable à A ?

Soit B et C deux matrices de $\mathbf{GL}_n$. Soit $A \in \mathbf{M}_{2n}$ la matrice définie par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}.$$

12 ▷ Soit S_1 la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix},$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathbf{GL}_n$.

Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices S_1 et $S_2 = S_1 A$ soient des matrices de symétries.

13 ▷ En déduire que si C est semblable à B^{-1}, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$.

14 ▷ Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice N ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

15 ▷ Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$.

Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de λ la matrice N' telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$

16 ▷ Calculer $(N')^n$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n(\frac{1}{\lambda})$.

Pour tout polynôme $P = P(X) \in \mathbf{C}_{n-1}[X]$ on pose

$$\begin{cases} s_1(P) = P(-X), \\ s_2(P) = P(1 - X), \\ g(P) = P(X + 1) - P(X). \end{cases}$$

On définit ainsi trois endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

17 ▷ Calculer s_1^2 , s_2^2 et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de g et $Id_{\mathbf{C}_{n-1}[X]}$.

18 ▷ Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

19 ▷ Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice $J_n(-1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

Soit A une matrice de $\mathbf{GL}_n$ semblable à son inverse. On admet le résultat suivant :

A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et r ainsi que les $n_i, 1 \leq i \leq r$, des entiers naturels non nuls.

De plus la matrice A' est unique à l'ordre près des blocs.

20 ▷ Démontrer que A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}(\frac{1}{\lambda_1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\frac{1}{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}(\frac{1}{\lambda_r}) \end{pmatrix}$.

21 ▷ En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que A est un produit de deux matrices de symétries.

Fin du problème

A2025 – MATH II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Étude des séries congruo-harmoniques alternées

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Notations

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

— $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

— $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Si $z \in \mathbf{C}$, on notera $\overline{z}$ le conjugué de z.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ avec $a < b$, on pose $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbf{N}$.

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

— Pour tout couple $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p|q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1 *Soit $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On appelle série* congruo-harmonique *de paramètres p et q, la série de terme général u_k défini pour tout $k \geq 0$ par*

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk + q} \ ,$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série.

Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbf{N} \to & \mathbf{R} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk + q} \end{cases} .$$

Préliminaires

1 ▷ Justifier que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.

2 ▷ Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt.$$

3 ▷ En déduire la valeur de $S_{1,1}$.

4 ▷ Montrer alors que, pour tout $q \geq 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2\right).$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}dx.$$

5 ▷ Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 ▷ Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

7 ▷ Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\sum_{k=0}^{n}(-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}dx + (-1)^n I_{p,q}(n)\right).$$

8 ▷ Montrer alors que, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p = q\}, \\ E_2 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p < q,\ p|q\}, \\ E_3 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p > q\}. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout couple $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) := \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

9 ▷ Montrer que, pour tout $(p,q) \in E_1$,

$$S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}. \tag{F1}$$

10 ▷ Pour tout couple $(p,q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p,q)$ que l'on déterminera, telle que

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right). \tag{F2}$$

Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p,q) \in E_3$.

11 ▷ Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \ldots, b_{\lfloor p/2 \rfloor - 1}) \in \mathbf{C}^{\lfloor p/2 \rfloor + 1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right),$$

où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.

Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12 ▷ Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2 \rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k},$$

où l'on a posé $\theta_k := (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

13 ▷ En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbf{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0,1]$ et que pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$\int_0^1 F_k(t)dt = \cos(q\theta_k) \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k).$$

14 ▷ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

15 ▷ Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p,q) \in E_3$,

$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} (p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) \ln\left(\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)\right). \qquad \text{(F3)}$$

16 ▷ En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

3 Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entier $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.

On fixe pour cela $n \in \mathbf{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$. On définit alors les événements suivants, où E_1, E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

E_n : " On obtient $(p,q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ".
A_n : " On obtient $p = q$ ".
B_n : " On obtient $q > p$ et q est divisible par p ".
C_n : " On obtient $p > q$ ".

17 ▷ Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.

18 ▷ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ puis $\mathbf{P}(C_n)$.

19 ▷ Montrer que

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor - \frac{1}{n},$$

et en déduire $\mathbf{P}(A_n \cup B_n)$.

20 ▷ En notant $H_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que

$$H_n \sim \ln n \qquad (n \to +\infty).$$

21 ▷ Montrer alors que

$$\mathbf{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \qquad (n \to +\infty).$$

22 ▷ En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n).$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle l telle que $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la* vitesse de convergence V *de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par*

$$V = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|.$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selon la valeur de V :

— *Si $V = 0$: la convergence sera qualifiée de* supra-linéaire.

— *Si $V \in]0,1[$: la convergence sera qualifiée de* linéaire.

— *Si $V = 1$: la convergence sera qualifiée d'*infra-linéaire.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.

On définit enfin, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} := \frac{1}{q}I_{p,q}$ où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23 ▷ À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \qquad (n \to +\infty).$$

24 ▷ En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\phi_{p,q}(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Fin du problème

A2026 – MATH I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

— Les lettres $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres réels.

— Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Soit $T : A \to \mathbf{R}$ une application. Soit $x_0 \in A$. On dit que T admet un minimum local (resp. un maximum local) en x_0 si :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in A, \quad (\|x - x_0\| \leq r) \implies (T(x) \geq T(x_0) \ \text{ (resp. } T(x) \leq T(x_0))).$$

Un minimum ou un maximum local sera appelé un extremum local de T.

— Dans tous les espaces fonctionnels rencontrés dans le sujet, la norme utilisée est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

I - Lemme fondamental du calcul variationnel

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbf{R})$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Le but de cette partie est de montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1 ▷ Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

2 ▷ En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

3 ▷ Soient $c < d$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{c,d}$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\psi_{c,d}(x) > 0$ pour tout $x \in]c,d[$ et $\psi_{c,d}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash]c,d[$.

4 ▷ En déduire que f est nulle sur $[a,b]$.

II - Équation d'Euler-Lagrange

Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}$ non vides. Soient x_A et x_B deux réels tels que $x_A < x_B$. Soit $f : [x_A, x_B] \times U \times V \to \mathbf{R}$ une fonction, continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]x_A, x_B[\times U \times V$. Soient y_0 et y_1 deux réels fixés de U.

On introduit également l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions $y : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ telles que $y(x_A) = y_0$, $y(x_B) = y_1$ et

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y(x) \in U \quad \text{et} \quad y'(x) \in V.$$

Soit enfin l'application T définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$\forall y \in \mathcal{C}, \quad T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x)) \mathrm{d}x.$$

5 ▷ Justifier que $T(y)$ existe bien pour tout $y \in \mathcal{C}$.

On suppose que T admet un extremum local en $z_0 \in \mathcal{C}$. Soit $\eta : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbf{R}$, on introduit la fonction y_ε définie sur $[x_A, x_B]$ par $y_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon\eta(x)$.

6 ▷ Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

On introduit sur $]-\alpha, \alpha[$ la fonction φ par

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \quad \varphi(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f\left(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)\right) \mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et que

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \ \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

8 ▷ Montrer alors que

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) \eta(x) \mathrm{d}x = 0.$$

9 ▷ En déduire la relation suivante, appelée équation d'Euler-Lagrange :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) = 0.$$

10 ▷ Montrer que si pour tout $(x, y, z) \in]x_A, x_B[\times U \times V$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$, alors on a l'égalité suivante, appelée identité de Beltrami :

$$\exists C \in \mathbf{R},\ \forall x \in]x_A, x_B[, \quad f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)) = C.$$

III - Le chemin le plus court est la ligne droite !

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. On se donne deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de $\mathbf{R}^2$ avec $x_A < x_B$. Pour toute fonction $g : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(x_A) = y_A$ et $g(x_B) = y_B$, on définit la longueur du graphe de g, noté $\mathcal{L}(g)$, par :

$$\mathcal{L}(g) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + g'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$. Soit T l'application définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On suppose que T admet un extremum en $y_0 \in \mathcal{C}$.

11 ▷ En utilisant l'identité de Beltrami, montrer que y_0 est une fonction affine.

IV - Le chemin le plus rapide est la cycloïde

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. Le but de cette partie est de préciser la trajectoire d'un point M minimisant le temps entre deux points A et B tous les deux fixés. Le point M est uniquement soumis au champ de pesanteur et on néglige les frottements. Le point M est initialement en A et la vitesse est supposée nulle.

Ls points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $y_A > 0$ et $y_B > 0$. On note $y_0 : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}_+^\star$ la courbe minimisant le temps de trajet que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$.

Les lois de la mécanique montrent que y_0 minimise l'application

$$y \in \mathcal{C} \mapsto T(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}} \mathrm{d}x$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$ et telle que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y(x) > 0$ et pour tout $x \in]x_A, x_B]$, $y'(x) < 0$.

12 ▷ Montrer qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0(x)\left(1 + y_0'(x)^2\right) = C.$$

Dans la suite de cette partie, on supposera, pour simplifier, $C = 2$.

13 ▷ On définit la fonction cotan par $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Préciser le domaine de définition de la fonction cotan. Montrer que sa restriction à l'intervalle $]0, \pi[$ est bijective sur un intervalle que l'on précisera. On notera arccotan sa bijection réciproque. Calculer $\mathrm{arccotan}'$ lorsque cela est possible.

On pose pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\theta(x) = 2\,\mathrm{arccotan}(y_0'(x))$.

14 ▷ Montrer que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))$.

15 ▷ Montrer alors qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.$$

L'arc paramétré par $\theta \mapsto (\theta - \sin(\theta) + c, 1 - \cos(\theta))$ est appelé une cycloïde : c'est la trajectoire suivi par un point fixe sur une roue de vélo en translation uniforme.

V - Une application à une structure optimale : la caténoïde

$\mathbf{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ pour le produit scalaire usuel. Dans cette partie, nous nous intéressons à la forme qu'adopte un film de savon s'appuyant sur deux cercles définissant un cylindre droit ; la forme adoptée par le film de savon est appelée caténoïde. Sans perte de généralité, on suppose que le premier cercle a pour système d'équation $\begin{cases} y^2+z^2 &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$ et le second cercle $\begin{cases} y^2+z^2 &= 1 \\ x &= 1 \end{cases}$. On peut montrer que $y_0 : [0,1] \to \mathbf{R}$ paramétrant l'ordonnée du film de savon, que l'on suppose être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, minimise la fonctionnelle

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x,$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions $y : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant $y(0) = y(1) = 1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ muni de la norme infini.

16 ▷ Montrer qu'il existe un réel c non nul tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2.$$

17 ▷ Montrer que la restriction de la fonction $\mathrm{ch}(x) = (e^x+e^{-x})/2$ à $\mathbf{R}_+$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Calculer argch' lorsque cela est possible.

On suppose en outre que pour tout $x \in [0,1]$, $y_0'(x) > 0$ et $c^2 y_0(x)^2 > 1$.

18 ▷ Donner une expression explicite de y_0 (dépendant éventuellement d'une constante d'intégration).

Fin du problème

A2026 – MATH II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

Soit $n \geq 2$ un entier, on note :

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), M^\top M = I_n\} \text{ et } \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \det(M) = 1\}.$$

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Par la suite, on notera $E = \mathbf{R}^n$ et $\|x\|$ la norme euclidienne usuelle d'un vecteur $x \in E$. On rappelle que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif et que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ en est un sous-groupe. La notation $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

En dehors des notations, les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes.

I. Quelques propriétés de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$

1 ▷ Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Examiner sa diagonalisabilité sur $\mathbf{R}$, puis sur $\mathbf{C}$.

2 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$, autrement que par une simple référence au cours.

3 ▷ Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un ensemble compact et non connexe par arcs.

4 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

5 ▷ Prouver que, si H est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, alors $H = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ ou $H = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

6 ▷ Soient $p \in]0,1[$, $Y = (Y_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et de même loi donnée par $Y_{1,1} \sim \mathcal{B}(p)$. On définit alors la matrice à coefficients aléatoires :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = (Y_{i,j}(\omega))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Calculer les probabilités : $P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$, $P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}))$, puis $P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}))$.

7 ▷ Soient x, y dans E tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une matrice de réflexion A telle que $Ax = y$.

8 ▷ Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$, tel que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$. Soient $G \in \mathcal{G}$ et $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Prouver que, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que :

$$G_p x = \|Gx\|^p \cdot x$$

(on pourra tout d'abord traiter le cas $p = 1$).

9 ▷ Conclure que $\mathcal{G} = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

II. Calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

10 ▷ On note $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto M^\top M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa différentielle $\mathrm{d}f(M)$ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ On note T l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ en I_n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Montrer que T est inclus dans l'ensemble des matrices antisymétriques.

12 ▷ Prouver que T est stable par somme, puis qu'il possède une structure d'espace vectoriel.

13 ▷ Déterminer l'ensemble T.

14 ▷ On introduit g (carré de la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) :

$$g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top M) \in \mathbf{R}.$$

Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ ne possède pas de maximum global.

15 ▷ Prouver que g et l'application $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbf{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer leur gradient en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (en particulier, on justifiera que $\nabla \det(M) = \mathrm{Com}(M)$: comatrice de M).

16 ▷ On suppose que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ admet un extremum local en M. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $M = \lambda \cdot \mathrm{Com}(M)$, puis que $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

17 ▷ Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum global, puis calculer ce minimum ainsi que les points où il est atteint.

III. Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$, on pourra utiliser librement le fait que $\mathbf{U}$ est un groupe multiplicatif compact. Dans tout ce qui suit, φ désignera un morphisme de groupes continu du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ dans le groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

18 ▷ Déterminer les sous-groupes bornés du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$. En déduire que $\varphi(\mathbf{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Soit $z \in \mathbf{U}$. Prouver que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbf{U}$.

20 ▷ On note $\Psi : x \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(e^{ix})$. Prouver que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x + y) = \Psi(x)\Psi(y).$$

Le but de ce qui suit est de donner (question **29** ▷) une forme générale pour Ψ, impliquant l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

21 ▷ On introduit :

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \int_0^x \Psi(t)dt \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Prouver que F est une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x)$ est inversible si $x \in [-\alpha; \alpha]\backslash\{0\}$ — on pourra, en justifiant, utiliser le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

22 ▷ Prouver que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)dt\right) (F(\alpha))^{-1},$$

en déduire que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

23 ▷ On pose $M = \Psi'(0)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM).$$

IV. Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

On reprend les notations de la section précédente, dont on pourra admettre le résultat de la question **23** ▷.

24 ▷ Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

25 ▷ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente et non nulle. Montrer que $\ker(N) \neq \ker(N^2)$.

26 ▷ Calculer $\exp(2\pi M)$, en déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset \{ik, k \in \mathbf{Z}\}$.

27 ▷ Justifier que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une matrice de la forme $D+N$ avec : D diagonale, N nilpotente, $DN = ND$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

28 ▷ Calculer $\exp(2\pi D)$ et $\exp(2\pi N)$, puis montrer que N est nulle.

29 ▷ Prouver qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $p \in \mathbf{N}$, $k_1, \ldots, k_p$ dans $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = Q \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & & & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{xk_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

la matrice du milieu étant diagonale par blocs et la notation R_θ ayant été définie à la question 1.

30 ▷ Réciproquement, prouver que la définition précédente fait de Ψ un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

Fin du problème

A2026 – MATH I MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

— Les lettres $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres réels.

— Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$ espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. Soit $T : A \to \mathbf{R}$ une application. Soit $x_0 \in A$. On dit que T admet un minimum local (resp. un maximum local) en x_0 si :

$$\exists r > 0,\ \forall x \in A, \quad (\|x - x_0\| \leq r) \implies (T(x) \geq T(x_0) \ \text{ (resp. } T(x) \leq T(x_0))).$$

Un minimum ou un maximum local sera appelé un extremum local de T.

— Dans tous les espaces fonctionnels rencontrés dans le sujet, la norme utilisée est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

I - Lemme fondamental du calcul variationnel

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbf{R})$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Le but de cette partie est de montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1 ▷ Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^\star$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}.$$

2 ▷ En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

3 ▷ Soient $c < d$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{c,d}$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\psi_{c,d}(x) > 0$ pour tout $x \in]c,d[$ et $\psi_{c,d}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash]c,d[$.

4 ▷ En déduire que f est nulle sur $[a,b]$.

II - Équation d'Euler-Lagrange

Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{R}$ non vides. Soient x_A et x_B deux réels tels que $x_A < x_B$. Soit $f : [x_A, x_B] \times U \times V \to \mathbf{R}$ une fonction, continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]x_A, x_B[\times U \times V$. Soient y_0 et y_1 deux réels fixés de U.

On introduit également l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions $y : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ telles que $y(x_A) = y_0$, $y(x_B) = y_1$ et

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y(x) \in U \quad \text{et} \quad y'(x) \in V.$$

Soit enfin l'application T définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$\forall y \in \mathcal{C}, \quad T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x)) \mathrm{d}x.$$

5 ▷ Justifier que $T(y)$ existe bien pour tout $y \in \mathcal{C}$.

On suppose que T admet un extremum local en $z_0 \in \mathcal{C}$. Soit $\eta : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbf{R}$, on introduit la fonction y_ε définie sur $[x_A, x_B]$ par $y_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon\eta(x)$.

6 ▷ Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

On introduit sur $]-\alpha, \alpha[$ la fonction φ par

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \quad \varphi(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f\left(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)\right) \mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et que

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \ \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

8 ▷ Montrer alors que

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) \eta(x) \mathrm{d}x = 0.$$

9 ▷ En déduire la relation suivante, appelée équation d'Euler-Lagrange :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) = 0.$$

10 ▷ Montrer que si pour tout $(x, y, z) \in]x_A, x_B[\times U \times V$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$, alors on a l'égalité suivante, appelée identité de Beltrami :

$$\exists C \in \mathbf{R},\ \forall x \in]x_A, x_B[, \quad f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)) = C.$$

III - Le chemin le plus court est la ligne droite !

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. On se donne deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de $\mathbf{R}^2$ avec $x_A < x_B$. Pour toute fonction $g : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(x_A) = y_A$ et $g(x_B) = y_B$, on définit la longueur du graphe de g, noté $\mathcal{L}(g)$, par :

$$\mathcal{L}(g) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + g'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$. Soit T l'application définie sur $\mathcal{C}$ par :

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

On suppose que T admet un extremum en $y_0 \in \mathcal{C}$.

11 ▷ En utilisant l'identité de Beltrami, montrer que y_0 est une fonction affine.

IV - Le chemin le plus rapide est la cycloïde

$\mathbf{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le produit scalaire usuel. Le but de cette partie est de préciser la trajectoire d'un point M minimisant le temps entre deux points A et B tous les deux fixés. Le point M est uniquement soumis au champ de pesanteur et on néglige les frottements. Le point M est initialement en A et la vitesse est supposée nulle.

Ls points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $y_A > 0$ et $y_B > 0$. On note $y_0 : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}_+^\star$ la courbe minimisant le temps de trajet que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$.

Les lois de la mécanique montrent que y_0 minimise l'application

$$y \in \mathcal{C} \mapsto T(y) = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{y(x)}} \mathrm{d}x$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ vérifiant $y(x_A) = y_A$ et $y(x_B) = y_B$ et telle que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y(x) > 0$ et pour tout $x \in]x_A, x_B]$, $y'(x) < 0$.

12 ▷ Montrer qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0(x)\left(1 + y_0'(x)^2\right) = C.$$

Dans la suite de cette partie, on supposera, pour simplifier, $C = 2$.

13 ▷ On définit la fonction cotan par $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Préciser le domaine de définition de la fonction cotan. Montrer que sa restriction à l'intervalle $]0, \pi[$ est bijective sur un intervalle que l'on précisera. On notera arccotan sa bijection réciproque. Calculer $\mathrm{arccotan}'$ lorsque cela est possible.

On pose pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\theta(x) = 2\,\mathrm{arccotan}(y_0'(x))$.

14 ▷ Montrer que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))$.

15 ▷ Montrer alors qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.$$

L'arc paramétré par $\theta \mapsto (\theta - \sin(\theta) + c, 1 - \cos(\theta))$ est appelé une cycloïde : c'est la trajectoire suivi par un point fixe sur une roue de vélo en translation uniforme.

V - Une application à une structure optimale : la caténoïde

$\mathbf{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ pour le produit scalaire usuel. Dans cette partie, nous nous intéressons à la forme qu'adopte un film de savon s'appuyant sur deux cercles définissant un cylindre droit ; la forme adoptée par le film de savon est appelée caténoïde. Sans perte de généralité, on suppose que le premier cercle a pour système d'équation $\begin{cases} y^2+z^2 &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$ et le second cercle $\begin{cases} y^2+z^2 &= 1 \\ x &= 1 \end{cases}$. On peut montrer que $y_0 : [0,1] \to \mathbf{R}$ paramétrant l'ordonnée du film de savon, que l'on suppose être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, minimise la fonctionnelle

$$T : y \in \mathcal{C} \mapsto 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x,$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions $y : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant $y(0) = y(1) = 1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ muni de la norme infini.

16 ▷ Montrer qu'il existe un réel c non nul tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2.$$

17 ▷ Montrer que la restriction de la fonction $\mathrm{ch}(x) = (e^x+e^{-x})/2$ à $\mathbf{R}_+$ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. On note argch sa bijection réciproque. Calculer argch' lorsque cela est possible.

On suppose en outre que pour tout $x \in [0,1]$, $y_0'(x) > 0$ et $c^2 y_0(x)^2 > 1$.

18 ▷ Donner une expression explicite de y_0 (dépendant éventuellement d'une constante d'intégration).

Fin du problème

A2026 – MATH II MPI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

Soit $n \geq 2$ un entier, on note :

$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), M^\top M = I_n\} \text{ et } \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \det(M) = 1\}.$$

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Par la suite, on notera $E = \mathbf{R}^n$ et $\|x\|$ la norme euclidienne usuelle d'un vecteur $x \in E$. On rappelle que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif et que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ en est un sous-groupe. La notation $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

En dehors des notations, les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes.

I. Quelques propriétés de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$

1 ▷ Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Examiner sa diagonalisabilité sur $\mathbf{R}$, puis sur $\mathbf{C}$.

2 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$, autrement que par une simple référence au cours.

3 ▷ Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est un ensemble compact et non connexe par arcs.

4 ▷ Prouver que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

5 ▷ Prouver que, si H est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$, alors $H = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ ou $H = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

6 ▷ Soient $p \in]0,1[$, $Y = (Y_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et de même loi donnée par $Y_{1,1} \sim \mathcal{B}(p)$. On définit alors la matrice à coefficients aléatoires :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = (Y_{i,j}(\omega))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Calculer les probabilités : $P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$, $P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}))$, puis $P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}))$.

7 ▷ Soient x, y dans E tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une matrice de réflexion A telle que $Ax = y$.

8 ▷ Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$, tel que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$. Soient $G \in \mathcal{G}$ et $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Prouver que, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que :

$$G_p x = \|Gx\|^p \cdot x$$

(on pourra tout d'abord traiter le cas $p = 1$).

9 ▷ Conclure que $\mathcal{G} = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

II. Calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

10 ▷ On note $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto M^\top M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa différentielle $\mathrm{d}f(M)$ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

11 ▷ On note T l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ en I_n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Montrer que T est inclus dans l'ensemble des matrices antisymétriques.

12 ▷ Prouver que T est stable par somme, puis qu'il possède une structure d'espace vectoriel.

13 ▷ Déterminer l'ensemble T.

14 ▷ On introduit g (carré de la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) :

$$g : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top M) \in \mathbf{R}.$$

Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ ne possède pas de maximum global.

15 ▷ Prouver que g et l'application $\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbf{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer leur gradient en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (en particulier, on justifiera que $\nabla \det(M) = \mathrm{Com}(M)$: comatrice de M).

16 ▷ On suppose que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ admet un extremum local en M. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $M = \lambda \cdot \mathrm{Com}(M)$, puis que $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

17 ▷ Prouver que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum global, puis calculer ce minimum ainsi que les points où il est atteint.

III. Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$, on pourra utiliser librement le fait que $\mathbf{U}$ est un groupe multiplicatif compact. Dans tout ce qui suit, φ désignera un morphisme de groupes continu du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ dans le groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

18 ▷ Déterminer les sous-groupes bornés du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$. En déduire que $\varphi(\mathbf{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Soit $z \in \mathbf{U}$. Prouver que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbf{U}$.

20 ▷ On note $\Psi : x \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(e^{ix})$. Prouver que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x + y) = \Psi(x)\Psi(y).$$

Le but de ce qui suit est de donner (question **29** ▷) une forme générale pour Ψ, impliquant l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

21 ▷ On introduit :

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \int_0^x \Psi(t)dt \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Prouver que F est une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x)$ est inversible si $x \in [-\alpha; \alpha]\backslash\{0\}$ — on pourra, en justifiant, utiliser le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

22 ▷ Prouver que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)dt\right) (F(\alpha))^{-1},$$

en déduire que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

23 ▷ On pose $M = \Psi'(0)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM).$$

IV. Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

On reprend les notations de la section précédente, dont on pourra admettre le résultat de la question **23** ▷.

24 ▷ Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

25 ▷ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente et non nulle. Montrer que $\ker(N) \neq \ker(N^2)$.

26 ▷ Calculer $\exp(2\pi M)$, en déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset \{ik, k \in \mathbf{Z}\}$.

27 ▷ Justifier que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une matrice de la forme $D+N$ avec : D diagonale, N nilpotente, $DN = ND$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

28 ▷ Calculer $\exp(2\pi D)$ et $\exp(2\pi N)$, puis montrer que N est nulle.

29 ▷ Prouver qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $p \in \mathbf{N}$, $k_1, \ldots, k_p$ dans $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = Q \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & & & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{xk_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

la matrice du milieu étant diagonale par blocs et la notation R_θ ayant été définie à la question 1.

30 ▷ Réciproquement, prouver que la définition précédente fait de Ψ un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

Fin du problème

A2026 – MATH I PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

Ce problème est consacré aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont décomposables en la somme d'endomorphismes de carré nul.

Dans tout le problème, on considère uniquement des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et de dimension finie. Pour un tel espace vectoriel E, on note

$$\mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E de carré nul ; pour tout $p \geqslant 1$, on note

$$\Sigma_p\mathcal{C}(E) = \{u_1 + \cdots + u_p \mid (u_1, \ldots, u_p) \in \mathcal{C}(E)^p\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme de p endomorphismes de carré nul. On note enfin

$$\Sigma_\infty\mathcal{C}(E) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Sigma_p\mathcal{C}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme (d'un nombre arbitrairement grand) d'endomorphismes de carré nul.

Diverses caractérisations ont été données pour l'appartenance d'un endomorphisme de E à $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$, autrement dit pour sa décomposabilité en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Un des objectifs de ce problème est d'étudier la situation pour d'autres tailles de décomposition, notamment les cas $p = 3$ et $p = 4$.

Les cinq parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres, à l'exception de la partie E qui utilise pleinement les résultats de la partie D. Dans la partie A, on étudie la réduction des endomorphismes de carré nul. Dans la partie B, on caractérise l'appartenance à $\Sigma_\infty\mathcal{C}(E)$ de manière simple. Dans la partie C, on exhibe un endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul mais n'est pas somme de trois endomorphismes de carré nul. Dans la partie D, on définit les matrices de Hessenberg et quelques propriétés. Dans la partie E, on établit enfin que tout endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul est somme de quatre endomorphismes de carré nul.

Dans le sujet, on note 0_n la matrice nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n sa matrice identité.

A Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$. On se donne un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On note r le rang de u.

1. Déterminer les valeurs propres possibles pour u et en déduire que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

2. En comparant noyau et image de u pour l'inclusion, montrer que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Justifier qu'il existe une famille libre $(e_1, \ldots, e_r)$ de vecteurs de E telle que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = E$; démontrer alors que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

5. Montrer qu'il existe un unique entier $m > 0$ tel que u soit représenté dans une base par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix}.$$

B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On se propose de démontrer que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$ est égal à l'ensemble
$$\mathcal{H}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \ \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$
Pour i, j dans $[\![1, n]\!]$, on rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ possédant exactement un coefficient non nul, valant 1 et situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. Pour i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$, on pose
$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

6. Parmi les matrices de la forme $E_{i,j}$, lesquelles sont de carré nul ? Calculer $(F_{i,j})^2$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$.

7. On pose $\mathcal{H}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Montrer que tout élément de $\mathcal{H}_n$ est une combinaison linéaire de matrices ayant l'une des formes suivantes :

- $E_{i,j}$ avec i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$;
- $F_{i,n}$ avec $i \in [\![1, n-1]\!]$.

8. Conclure que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)$.

Le résultat que l'on vient d'établir sera considérablement raffiné dans la partie E.

C Somme de trois endomorphismes de carré nul

On fixe dans cette partie un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 5$. On a démontré dans la partie précédente que tout endomorphisme de E de trace nulle est une somme d'endomorphismes de carré nul. L'objectif est ici de mettre en évidence un endomorphisme de E qui est de trace nulle mais n'est pas la somme de trois endomorphismes de carré nul.

On admet dans cette partie (et seulement dans cette partie !) le résultat suivant :

Théorème de Wang et Wu. Soit u un endomorphisme de E. Pour que u appartienne à $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$, il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$.

On se donne un endomorphisme u de E de trace nulle. On suppose que 1 est valeur propre de u et que le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est de dimension $d > \dfrac{3n}{4}$.

9. Démontrer qu'il existe effectivement un endomorphisme de E vérifiant les contraintes imposées à u.

On va établir que u ne peut pas se décomposer comme la somme de trois éléments de $\mathcal{C}(E)$. Pour cela, on pose $w = u - \mathrm{id}_E$. Soit $v \in \mathcal{C}(E)$.

10. En développant $(w - v)^2$, établir que $\mathrm{rg}\Big((w-v)^2\Big) < \dfrac{n}{2}$.

11. En remarquant que $\mathrm{Ker}\Big((w-v)^2\Big)$ est stable par $w - v$, démontrer que 1 est valeur propre de $u - v$, de multiplicité au moins $n - \mathrm{rg}\Big((w-v)^2\Big)$.

12. En déduire que s'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-(u-v) = \varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}$, alors 1

et -1 sont valeurs propres de $u - v$ de multiplicité strictement supérieure à $\dfrac{n}{2}$.

13. Conclure que $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$.

D Intermède : matrices de Hessenberg

On fixe ici un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **de Hessenberg** lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j+1 \Rightarrow a_{i,j} = 0,$$

et on dit alors qu'une telle matrice est **régulière** lorsque

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ a_{i+1,i} \neq 0.$$

Pour un vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$, on introduit la matrice par blocs

$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et un couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\widetilde{B}^{(k,l)}$ la sous-matrice de B obtenue en lui retirant sa k-ième ligne et sa l-ième colonne. On note enfin

$$J_n = (\delta_{i,j+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

une matrice dont les seuls coefficients non nuls, tous égaux à 1, sont situés immédiatement sous la diagonale. C'est bien entendu un cas particulier de matrice de Hessenberg régulière.

14. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $k-1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \det\left(\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}\right) = P_k(x).$$

Présiser en outre le coefficient dominant de P_k. *On pourra représenter* $\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}$ *par blocs.*

15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et dont le coefficient sur X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + E_C$ ait P pour polynôme caractéristique.

16. Expliciter l'unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $J_n + E_C$ ait X^n pour polynôme caractéristique.

17. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est une matrice de Hessenberg régulière, et l'on fixe une telle base. Montrer que $(u^k(e_1))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de E.
On pourra examiner la matrice de cette famille de vecteurs dans $(e_1, \ldots, e_n)$.

18. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est X^n. Montrer que A est semblable à J_n.

E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On conserve ici les notations de la partie précédente. On fixe un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **presque triangulaire supérieure** lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$, *sauf* pour le couple $(n, n-1)$, pour lequel $a_{n,n-1} \neq 0$.

On considère la matrice

$$V = (\delta_{i,j+1} 1_{i \neq n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

autrement dit la matrice ayant les mêmes lignes que J_n, à l'exception de la dernière ligne, qui est nulle.

19. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice presque triangulaire supérieure. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Justifier qu'il existe $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + V + E_{C_0}$ soit semblable à J_n.

20. Montrer que J_n est la somme de deux matrices de carré nul. *On pourra chercher les termes* B_1 *et* B_2 *d'une décomposition en imposant la contrainte qu'en toute position* (i, j) *on ait* $(B_1)_{i,j} = 0$ *ou* $(B_2)_{i,j} = 0$.

21. Soit $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ quelconque. Construire deux matrices B_1 et B_2 de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

telles que $V + E_C = B_1 + B_2$ et $(B_1)^2 = 0 = (B_2)^2$.

22. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un plan vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par v et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de v. *On pourra s'aider d'une base de trigonalisation.*

23. En déduire que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} B & (?) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$
où $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $b_{2,1} \neq 0$ et où la matrice $C \in \mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

24. Montrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.

25. On se donne un espace vectoriel E de dimension finie ainsi qu'un endomorphisme u de E, supposé de trace nulle. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer que $u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E)$.

Fin du problème

A2026 – MATH II PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $[\![1;n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

---

La partie 1 permet d'obtenir un développement en série utilisé dans la partie 2.

La partie 2 n'utilise que le développement en série obtenu à la dernière question de la partie 1 et en est donc indépendante exceptée cette question. Cette partie 2 permet un calcul effectif de proche en proche des valeurs de la fonction zêta en un entier pair non nul à partir des nombres de Bernoulli.

La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2. La partie 4 utilise les valeurs obtenues à la dernière question de la partie 2 et est donc indépendante des parties 1 et 2 exceptée cette question.

Dans les parties 3 et 4, on se donne un entier naturel non nul n et un entier naturel k vérifiant $k \geq 2$. On s'intéresse au tirage uniforme d'un entier dans $[\![1;n]\!]$ et on détermine la probabilité $q_n(k)$ que cet entier soit sans facteur à la puissance k.
On montre enfin que à k fixé, la suite $(q_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et on détermine sa limite.

Partie 1 : Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

1 ▷ Soit $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}\ \mathrm{d}t.$$

2 ▷ En déduire que pour $\theta \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$, la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}\ \mathrm{d}t.$$

3 ▷ En déduire que pour $\theta \in]0;\pi[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Indication : Pour $\theta \in]0;\pi[$, on pourra introduire la fonction $u_\theta : [0;1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$u_\theta(t) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{t\sin(\theta)}{1-t\cos(\theta)}\right),$$

et vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 u'_\theta(t)\mathrm{d}t.$$

4 ▷ Soit S la fonction numérique définie pour tout t réel par $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.
Justifier que S est bien définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que S est également continue sur $\mathbf{R}$.

5 ▷ En déduire que pour tout $\theta \in [0;\pi[$, on a :

$$S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).$$

6 ▷ Pour tout x réel, on introduit la fonction numérique g_x bien définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)}.$$

Justifier que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g_x(t)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g''_x(t) - x^2 g_x(t) = -S(t).$$

7 ▷ Pour un réel x non nul fixé, déterminer une solution polynomiale $t \mapsto P(t)$ de degré 2 de l'équation différentielle :

$$(E_x) : \forall t \in \mathbf{R}, \quad y''(t) - x^2 y(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0).$$

8 ▷ Pour tout réel x, calculer $g'_x(0)$ et $g'_x(\pi)$. Pour x réel non nul, montrer que :

$$g''_x(0) = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}.$$

9 ▷ En déduire que pour tout réel x non nul :

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x}-1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2+x^2}.$$

Partie 2 : Développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ et applications

On introduit la fonction h, définie sur $\mathbf{R}$, par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On rappelle également que la fonction zêta de Riemann est définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

10 ▷ Soient $x \in]-1;1[$ et deux entiers naturels N et n avec $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\frac{1}{x^2+n^2} = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{-x^2}{n^2}\right)^k\right) + R_{N,n}(x),$$

où $R_{N,n}(x) = (-1)^{N+1}\dfrac{1}{x^2+n^2} \times \dfrac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}$, et justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \zeta(2N+2)|x|^{2N+2}.$$

11 ▷ Après avoir justifié que $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$, en déduire que pour $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(2k)x^{2k}.$$

12 ▷ En déduire que la fonction h est développable en série entière, et que pour tout $x \in]-2\pi;2\pi[$:

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}x^{2k}.$$

Pour tout k entier naturel, on pose : $b_k = h^{(k)}(0)$.
Déterminer alors b_0 et b_1. De plus, si k est un entier naturel non nul, déterminer b_{2k} ainsi que b_{2k+1}.

13 ▷ Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = 0$.

Indication : On pourra remarquer que pour x réel non nul : $\dfrac{x}{e^x-1} \times \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

14 ▷ À l'aide des valeurs de b_0 et b_1 calculées précédemment et de la question 13 ▷, calculer b_2 et b_4.
En utilisant la question 12 ▷, déterminer les valeurs $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Partie 3 : Probabilité qu'un entier naturel choisi au hasard et uniformément dans $[\![1;n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

* On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On ordonne $\mathcal{P}$ par ordre croissant, et on note p_n le n-ième nombre premier. Ainsi, par exemple, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et $p_7 = 17$.

* Soit k un entier naturel non nul tel que $k \geq 2$.
On dit qu'un entier naturel n non nul est sans facteur à la puissance k si :

$$\{p \in \mathcal{P}, p^k | n\} = \emptyset.$$

Lorsque $n \neq 1$, cela revient à dire que si n s'écrit $n = \prod_{k=1}^{r} q_i^{\alpha_i}$ avec des facteurs premiers q_i tous distincts, alors pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, on a $\alpha_i \leq k-1$.

15 ▷ Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout r-uplet de réels $(x_1, x_2, ..., x_r)$:

$$\prod_{i=1}^{r}(1+x_i) = 1 + \sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{1\leq i_1<...<i_m\leq r} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}\right),$$

où la notation $\sum_{1\leq i_1<...<i_m\leq r}$ désigne la somme sur tous les m-uplets $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ de $\mathbf{R}^m$ qui vérifient $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r$.

Pour les deux prochaines questions 16 ▷ et 17 ▷, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

16 ▷ Soient $A, A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$, où $\mathbf{1}_A$ désigne l'indicatrice de A.
De même, montrer que $\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}\cdots\mathbf{1}_{A_m} = \mathbf{1}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m}$.

17 ▷ En déduire que si $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_r) = \sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant r} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_m})\right)$$

Indication : On pourra utiliser les questions 15 ▷ et 16 ▷ et se souvenir que pour un événement A, on a $P(A) = E(\mathbf{1}_A)$.

Pour toute la suite de cette partie, on se donne un entier naturel n non nul et **on note p_r le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n.**
On a donc $p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq n$ et $p_{r+1} > n$.

On se donne également un entier k tel que $k \geq 2$.

On s'intéresse au tirage d'un entier au hasard dans $[\![1; n]\!]$ selon la loi uniforme.
On munit $[\![1; n]\!]$ de la probabilité uniforme P_n et on note :

$$S_n(k) = \{m \in [\![1; n]\!] : \forall j \in [\![1; r]\!], p_j^k \nmid m\}.$$

On pose $q_n(k) = P_n(S_n(k))$ qui représente donc la probabilité que l'entier choisi soit sans facteur à la puissance k.

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on pose $A_n(d) = \{j \in [\![1; n]\!] : d \mid j\}$.

18 ▷ Justifier que : $q_n(k) = 1 - P_n\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_n\left(p_i^k\right)\right)$. En déduire que :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^{r} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_m \leqslant r} (-1)^m \; P_n\left(A_n\left(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \ldots p_{i_m}^k\right)\right)$$

La fonction de Möbius $\mu : \mathbf{N}^* \to \{-1; 0; 1\}$ est la fonction définie par

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ (-1)^q & \text{si } m \text{ est le produit de } q \text{ nombres premiers distincts avec } q \in \mathbf{N}^* \\ 0 & \text{sinon, c'est à dire si } m \text{ contient au moins un facteur carré} \end{cases}.$$

19 ▷ Justifier que :

$$q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

20 ▷ Montrer que la suite $(q_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et qu'elle converge vers $\ell = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$.

Indication : on pourra introduire la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où chaque f_n est constante par morceaux sur $[1;+\infty[$ et définie par :

$$\forall d \in \mathbf{N}^*, \forall t \in [d; d+1[,\ f_n(t) = \frac{1}{n}\mu(d)\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor,$$

et chercher à utiliser le théorème de convergence dominée.

Partie 4 : Calcul de la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

Pour les questions 21 ▷ et 22 ▷, on se donne un réel $s > 1$ et on pose pour $i \in \mathbf{N}^*$:

$$u_i = \frac{\mu(i)}{i^s}, \quad v_i = \frac{1}{i^s}.$$

De plus, pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose $E_N = [\![1; N]\!]^2$ et $F_N = \{(i,j) \in E_N, ij \leq N\}$ et on définit

$$w_N = \sum_{d|N} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \quad \text{et} \quad S_N = \sum_{m=1}^{N} w_m.$$

21 ▷ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que $F_N \subset E_N \subset F_{N^2}$, et montrer que la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge.
En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{m}{d}} \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right),$$

où $\sum_{d|m}$ désigne la somme sur tous les entiers naturels divisant m.

22 ▷ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que :

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \right) - \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) \right| \leq \sum_{(i,j)\in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j)\in F_N} |u_i| v_j.$$

En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \left(\sum_{d|m} \mu(d) \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

23 ▷ Pour $m \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

24 ▷ En utilisant les questions 22 ▷ et 23 ▷, en déduire que pour $s > 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

25 ▷ Montrer que $\lim_{n \to +\infty} q_n(k) = \frac{1}{\zeta(k)}$.
En particulier, préciser les valeurs de $\lim_{n \to +\infty} q_n(2)$ et $\lim_{n \to +\infty} q_n(4)$.

Fin du problème

A2026 – MATH I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Préambule

Ce problème est consacré aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont décomposables en la somme d'endomorphismes de carré nul.

Dans tout le problème, on considère uniquement des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et de dimension finie. Pour un tel espace vectoriel E, on note

$$\mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E de carré nul ; pour tout $p \geqslant 1$, on note

$$\Sigma_p\mathcal{C}(E) = \{u_1 + \cdots + u_p \mid (u_1, \ldots, u_p) \in \mathcal{C}(E)^p\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme de p endomorphismes de carré nul. On note enfin

$$\Sigma_\infty\mathcal{C}(E) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Sigma_p\mathcal{C}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme (d'un nombre arbitrairement grand) d'endomorphismes de carré nul.

Diverses caractérisations ont été données pour l'appartenance d'un endomorphisme de E à $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$, autrement dit pour sa décomposabilité en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Un des objectifs de ce problème est d'étudier la situation pour d'autres tailles de décomposition, notamment les cas $p = 3$ et $p = 4$.

Les cinq parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres, à l'exception de la partie E qui utilise pleinement les résultats de la partie D. Dans la partie A, on étudie la réduction des endomorphismes de carré nul. Dans la partie B, on caractérise l'appartenance à $\Sigma_\infty\mathcal{C}(E)$ de manière simple. Dans la partie C, on exhibe un endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul mais n'est pas somme de trois endomorphismes de carré nul. Dans la partie D, on définit les matrices de Hessenberg et quelques propriétés. Dans la partie E, on établit enfin que tout endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul est somme de quatre endomorphismes de carré nul.

Dans le sujet, on note 0_n la matrice nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n sa matrice identité.

A Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$. On se donne un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On note r le rang de u.

1. Déterminer les valeurs propres possibles pour u et en déduire que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

2. En comparant noyau et image de u pour l'inclusion, montrer que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Justifier qu'il existe une famille libre $(e_1, \ldots, e_r)$ de vecteurs de E telle que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = E$; démontrer alors que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

5. Montrer qu'il existe un unique entier $m > 0$ tel que u soit représenté dans une base par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix}.$$

B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On se propose de démontrer que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$ est égal à l'ensemble
$$\mathcal{H}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \ \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$
Pour i, j dans $[\![1, n]\!]$, on rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ possédant exactement un coefficient non nul, valant 1 et situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. Pour i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$, on pose
$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

6. Parmi les matrices de la forme $E_{i,j}$, lesquelles sont de carré nul ? Calculer $(F_{i,j})^2$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$.

7. On pose $\mathcal{H}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Montrer que tout élément de $\mathcal{H}_n$ est une combinaison linéaire de matrices ayant l'une des formes suivantes :

- $E_{i,j}$ avec i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$;
- $F_{i,n}$ avec $i \in [\![1, n-1]\!]$.

8. Conclure que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)$.

Le résultat que l'on vient d'établir sera considérablement raffiné dans la partie E.

C Somme de trois endomorphismes de carré nul

On fixe dans cette partie un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 5$. On a démontré dans la partie précédente que tout endomorphisme de E de trace nulle est une somme d'endomorphismes de carré nul. L'objectif est ici de mettre en évidence un endomorphisme de E qui est de trace nulle mais n'est pas la somme de trois endomorphismes de carré nul.

On admet dans cette partie (et seulement dans cette partie !) le résultat suivant :

Théorème de Wang et Wu. Soit u un endomorphisme de E. Pour que u appartienne à $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$, il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$.

On se donne un endomorphisme u de E de trace nulle. On suppose que 1 est valeur propre de u et que le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est de dimension $d > \dfrac{3n}{4}$.

9. Démontrer qu'il existe effectivement un endomorphisme de E vérifiant les contraintes imposées à u.

On va établir que u ne peut pas se décomposer comme la somme de trois éléments de $\mathcal{C}(E)$. Pour cela, on pose $w = u - \mathrm{id}_E$. Soit $v \in \mathcal{C}(E)$.

10. En développant $(w - v)^2$, établir que $\mathrm{rg}\Big((w-v)^2\Big) < \dfrac{n}{2}$.

11. En remarquant que $\mathrm{Ker}\Big((w-v)^2\Big)$ est stable par $w - v$, démontrer que 1 est valeur propre de $u - v$, de multiplicité au moins $n - \mathrm{rg}\Big((w-v)^2\Big)$.

12. En déduire que s'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-(u-v) = \varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}$, alors 1

et -1 sont valeurs propres de $u - v$ de multiplicité strictement supérieure à $\dfrac{n}{2}$.

13. Conclure que $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$.

D Intermède : matrices de Hessenberg

On fixe ici un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **de Hessenberg** lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j+1 \Rightarrow a_{i,j} = 0,$$

et on dit alors qu'une telle matrice est **régulière** lorsque

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ a_{i+1,i} \neq 0.$$

Pour un vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$, on introduit la matrice par blocs

$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et un couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\widetilde{B}^{(k,l)}$ la sous-matrice de B obtenue en lui retirant sa k-ième ligne et sa l-ième colonne. On note enfin

$$J_n = (\delta_{i,j+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

une matrice dont les seuls coefficients non nuls, tous égaux à 1, sont situés immédiatement sous la diagonale. C'est bien entendu un cas particulier de matrice de Hessenberg régulière.

14. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $k-1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \det\left(\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}\right) = P_k(x).$$

Présiser en outre le coefficient dominant de P_k. *On pourra représenter* $\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}$ *par blocs.*

15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et dont le coefficient sur X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + E_C$ ait P pour polynôme caractéristique.

16. Expliciter l'unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $J_n + E_C$ ait X^n pour polynôme caractéristique.

17. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est une matrice de Hessenberg régulière, et l'on fixe une telle base. Montrer que $(u^k(e_1))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de E.
On pourra examiner la matrice de cette famille de vecteurs dans $(e_1, \ldots, e_n)$.

18. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est X^n. Montrer que A est semblable à J_n.

E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On conserve ici les notations de la partie précédente. On fixe un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **presque triangulaire supérieure** lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$, *sauf* pour le couple $(n, n-1)$, pour lequel $a_{n,n-1} \neq 0$.

On considère la matrice

$$V = (\delta_{i,j+1} 1_{i \neq n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

autrement dit la matrice ayant les mêmes lignes que J_n, à l'exception de la dernière ligne, qui est nulle.

19. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice presque triangulaire supérieure. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Justifier qu'il existe $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + V + E_{C_0}$ soit semblable à J_n.

20. Montrer que J_n est la somme de deux matrices de carré nul. *On pourra chercher les termes* B_1 *et* B_2 *d'une décomposition en imposant la contrainte qu'en toute position* (i, j) *on ait* $(B_1)_{i,j} = 0$ *ou* $(B_2)_{i,j} = 0$.

21. Soit $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ quelconque. Construire deux matrices B_1 et B_2 de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

telles que $V + E_C = B_1 + B_2$ et $(B_1)^2 = 0 = (B_2)^2$.

22. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un plan vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par v et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de v. *On pourra s'aider d'une base de trigonalisation.*

23. En déduire que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} B & (?) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$
où $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $b_{2,1} \neq 0$ et où la matrice $C \in \mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

24. Montrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.

25. On se donne un espace vectoriel E de dimension finie ainsi qu'un endomorphisme u de E, supposé de trace nulle. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer que $u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E)$.

Fin du problème

A2026 – MATH II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines-Ponts.

Solutions périodiques d'équations différentielles

Notations et définitions.

On note $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On désigne par $\mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles bornées sur $\mathbf{R}$ et par $\mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ celui des fonctions deux fois continûment dérivables sur $\mathbf{R}$.

Dans tout le problème, (E) désigne l'équation différentielle :

$$y'' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où b, c sont deux fonctions continues et 2π périodiques sur $\mathbf{R}$.

On note (EH) l'équation homogène associée :

$$y'' + b(x)y = 0 \qquad (EH)$$

On appellera solutions de (E) ou de (EH) les fonctions satisfaisant ces équations différentielles et qui sont définies sur $\mathbf{R}$ tout entier.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions de (E), autrement dit :

$$\mathcal{S}(E) = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, f''(x) + b(x)f(x) = c(x)\}$$

De même on note $\mathcal{S}(H)$ l'espace vectoriel des solutions de (EH).

Le problème se propose d'étudier l'existence de solutions bornées ou de solutions périodiques à l'équation (E).

On admettra que toute fonction continue et périodique sur $\mathbf{R}$ est bornée.

Pour toute fonction $f \in \mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, la norme infinie de f est :

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$$

On rappelle qu'on définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel $\mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Enfin, on note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des solutions bornées de (E) et $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des solution bornées de (EH).

Partie 1. Résultats généraux.

1 ▷ Démontrer que $\mathcal{B}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(H)$.

2 ▷ Lorsque l'équation (E) possède une solution bornée f_0, vérifier que les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont les fonctions de la forme $f_0 + g$ où g est un élément de $\mathcal{B}(H)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On note $T(f)$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T(f)(x) = f(x + 2\pi)$$

3 ▷ Démontrer que si f est une solution de (E) alors $T(f)$ est aussi solution de (E)

4 ▷ On suppose que f est une solution de (E) qui vérifie les deux conditions :

$$f(0) = f(2\pi) \text{ et } f'(0) = f'(2\pi)$$

Démontrer que la fonction f est 2π périodique.

Indication : considérer la fonction h définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = T(f)(x) - f(x)$

Partie 2 : Un exemple d'équation à coefficients constants.

Dans cette partie , ω est un réel strictement positif et différent de 1.
On fait les hypothèses : $\forall x \in \mathbf{R},\ b(x) = \omega^2$ et $c(x) = \cos x$.

L'équation (E) s'écrit donc :

$$y'' + \omega^2 y = \cos x$$

5 ▷ Déterminer un nombre réel d tel que la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_0(x) = d \cos x$$

soit solution de (E) et déterminer les solutions u et v de (EH) satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} u(0) = 1 & v(0) = 0 \\ u'(0) = 0 & v'(0) = 1 \end{cases}$$

6 ▷ Expliciter les ensembles $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}(E)$.

Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f est une solution périodique de (E). On note T une période de f.

7 ▷ Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $T = 2k\pi$

8 ▷ Soient A, B les deux réels tels que $f = f_0 + Au + Bv$.

Démontrer que A, B sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (\cos(2k\pi\omega) - 1)A + \dfrac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0 \\ -\omega\sin(2k\pi\omega)A + (\cos(2k\pi\omega) - 1)B = 0 \end{cases}$$

9 ▷ En calculant le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2k\pi\omega) - 1 & \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega} \\ -\omega\sin(2k\pi\omega) & \cos(2k\pi\omega) - 1 \end{pmatrix}$$

démontrer que si ω n'est pas un nombre rationnel, la seule solution périodique de (E) est f_0.

10 ▷ Déterminer une période commune à toutes les solutions lorsque ω s'écrit sous la forme $\omega = \frac{p}{q}$ pour $p, q \in \mathbf{N}^*$.

Partie 3 : Unicité lorsque la fonction b est négative.

Dans cette partie on suppose que $\forall x \in \mathbf{R}$, $b(x) = -(1 + \cos x)$ et c est une fonction continue 2π périodique quelconque. L'équation (EH) s'écrit donc :

$$y'' - (1 + \cos x)y = 0$$

11 ▷ Soit g une solution de (EH). Établir que g^2 est une fonction convexe.

12 ▷ En déduire que la fonction nulle est la seule solution bornée de (EH)

On pourra admettre qu'une fonction convexe non constante n'est pas majorée sur $\mathbf{R}$

13 ▷ Démontrer que l'équation (E) possède au plus une solution bornée.

14 ▷ Prouver que si (E) possède une solution bornée, alors elle possède une solution 2π périodique.

Partie 4 : Existence d'une solution périodique.

Dans cette partie on suppose toujours que $\forall x \in \mathbf{R}$, $b(x) = -(1+\cos x)$.
L'équation (E) est donc :

$$y'' - (1+\cos x)y = c(x)$$

On se propose d'établir l'existence d'une solution périodique à l'équation (E) pour une grande classe de fonctions c continues et 2π périodiques.

On **admet** qu'il existe une suite réelle bornée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\},\ (n^2+1)a_n + \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_{n-1}) = 0 \\ 4a_1 + a_2 = -2 \end{cases}$$

Soit M un nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on ait : $|a_n| \leq M$.

15 ▷ Démontrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum n^2 a_n$ sont absolument convergentes.

On pose pour tout x réel

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

16 ▷ Démontrer que g est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - (1+\cos x)y = \sin x$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note s_n la fonction $x \mapsto \sin nx$. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{P}_N$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ engendré par les fonctions $s_1,\ldots,s_N$. C'est l'ensemble des fonctions de la forme

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin kx$$

avec $\beta_1,\ldots,\beta_N$ réels.

On note $\mathcal{P}$ la réunion des espaces vectoriels $\mathcal{P}_N$ pour $N \in \mathbf{N}^*$. $\mathcal{P}$ est donc l'espace vectoriel engendré par la famille $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

17 ▷ Démontrer que pour tout entier $N \in \mathbf{N}^*$, la famille $(s_1, \ldots, s_N)$ est une base de $\mathcal{P}_N$.

Une méthode possible, mais non imposée, consiste à calculer pour $n, m \in \mathbf{N}^*, n \neq m$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} s_n(t)s_m(t)dt$

On note L l'application linéaire définie sur $\mathcal{P}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall p \in \mathcal{P},\ L(p)(x) = p''(x) - (1 + \cos x)p(x)$$

18 ▷ Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $L(s_n)$ en fonction de s_n, s_{n+1} et s_{n-1} (par convention $s_0 = 0$).

19 ▷ Démontrer que L est un endomorphisme injectif de $\mathcal{P}$ et que la fonction s_1 n'est pas dans l'image de L.

20 ▷ Déduire des questions précédentes que l'on a pour tout $N \geq 1$ l'égalité :

$$L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{N+1}$$

21 ▷ On suppose que la fonction c, second membre de l'équation (E), est un élément de $\mathcal{P}$.

Démontrer que (E) possède une solution périodique.

Partie 5 : Un théorème général.

Dans cette partie on revient au cas général où les fonctions b et c sont deux fonctions 2π périodiques continues sur $\mathbf{R}$. On fait l'hypothèse que la fonction c n'est pas identiquement nulle. On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème : *Si l'équation (E) possède une solution f_0 telle que les deux fonctions f_0 et f_0' soient bornées sur $\mathbf{R}$, alors elle possède une solution périodique.*

On fait donc l'hypothèse que (E) possède une telle solution f_0.

On pose $M_0 = \|f_0\|$ et $M_1 = \|f_0'\|$

On rappelle que $\mathcal{B}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les solutions bornées de (E). On définit l'ensemble $\mathcal{A}$ suivant :

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{B}(E), \|f\| \leq M_0\}$$

22 ▷ Préciser un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathbf{B}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ de dimension finie contenant $\mathcal{A}$. Démontrer que $\mathcal{A}$ est une partie fermée bornée non vide de $\mathcal{H}$.

23 ▷ On note α la borne inférieure du sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{I} = \{|f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|, f \in \mathcal{A}\}$$

Démontrer que α est bien défini et qu'il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\alpha = |f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)|$$

24 ▷ Démontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'inégalité $\alpha \leq \dfrac{2(M_0 + M_1)}{n+1}$

Indication : on utilisera la fonction g_n définie pour tout x réel par

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}(f_0(x) + f_0(x+2\pi) + \ldots + f_0(x+2n\pi)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(f_0)(x)$$

25 ▷ En utilisant les résultats précédents, démontrer que (E) possède une solution périodique.

Fin du problème