1

ANALYSE

Exercice 1-1

Pour effectuer certains calculs de probabilités, on a besoin de connaître certaines valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Le but de cet exercice est de faire calculer $\Phi(x)$ à 10^{-6} près à l'aide d'un ordinateur, pour toute valeur x demandée par l'utilisateur.

Pour cela on considère la fonction $x \mapsto f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour $x \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leq \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leq \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$$

En déduire que :

$$\left|\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leq \frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

2. Quelle inégalité doit vérifier n pour trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-6} près ?

3. On considère le programme suivant :

```
Program Loi_normale ;
Uses crt ;
Const e=0.00001 ;
```

```
Var  s,x : real ; i,n : integer ;
Function f(x : real) : real ;
Begin  ···  End ;

{ fonction f définie ci-dessus. }
Begin ······ ······ ······ End.
```

Compléter ce programme pour qu'il demande à l'utilisateur la valeur de x et affiche $\Phi(x)$ à 10^{-6} près.

Solution :

1. On utilise la méthode classique des rectangles. Si $t \in \left[\frac{kx}{n}, \frac{(k+1)x}{n}\right]$, la fonction f étant décroissante, on a :

$$f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{kx}{n}\right)$$

d'où, en intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{kx}{n}, \frac{(k+1)x}{n}\right]$,

$$\frac{x}{n} f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) \leq \int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)dt \leq \frac{x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)$$

Enfin, on somme ces inégalités pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Il vient :

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leq \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$$

L'inégalité précédente s'écrit $a_n \leq b_n \leq c_n$. Donc $|b_n - c_n| \leq c_n - a_n$, soit :

$$\left|\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leq \frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

2. On sait que pour tout $x \geq 0, \Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Ainsi $\dfrac{x}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$ sera une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-6} près si n vérifie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) < 10^{-6}.$$

La résolution de cette inéquation donne :

$$n > \frac{x}{\sqrt{2\pi}} 10^6 (1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

3. Nous allons suivre l'algorithme précédent pour écrire le programme demandé : calcul de n correspondant à la précision donnée, puis calcul de l'approximation.

```
Program Loi_normale ;
Uses crt ;
Const e=0.000001 ;
Var  s,x,u : real ;
k,n : integer ;
Function f(x :real) :real ;
Begin
f :=exp(-(x*x/2))
End ;
Begin
Write('x=') ; readln(x) ;
n :=1 ;
Repeat
n :=n+1 until (x*(1-f(x))/n)<e ;
For k :=1 to n do s :=s+x*f(x*k/n)/n ;
Writeln(n,'  ', 0.5+s/sqrt(2*pi))
End.
```

Exercice 1-2

Soit un entier naturel $n \geq 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4$$

Minimiser f sous les contraintes :

$$\{\forall\, i, x_i > 0,\ \text{ et } x_1 + \ldots + x_n = n\}.$$

Solution :

Sous les contraintes $\{\forall\, i, x_i > 0,\ \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = n\}$, on peut écrire f sous la forme :

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^4 + (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^4 \\ x_i > 0,\, \forall\, i \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

Cette fonction admet des dérivées partielles et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4\left(x_i^3 - (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^3\right)$$

La résolution du système d'équations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ donne alors :

$$\begin{cases} x_1 & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ x_2 & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{cases}$$

dont la seule solution est $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ (il suffit de sommer toutes les équations), donc $x_n = 1$.

Ce point critique constitue-t-il un minimum pour f ? On sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot u_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Posons $u_i = x_i$ puis $u_i = x_i^2$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \geq n$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \geq n$ et le point critique est un minimum pour f.

Notons d'ailleurs que l'étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne en une seule fois la totalité de la réponse.

Exercice 1-3

Soit a un nombre réel positif ou nul. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$ $(n \geq 1)$, où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \ldots x_n$.

1. On suppose que $a \in [0,1]$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente.

2. On suppose que $a > 1$ et on note $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, pour $n \geq 2$.

a) Etablir la relation : $\forall\, n \geq 2, S_{n-1} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{n+a}{a-1}\, u_n$.

b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Solution :

1. Si $a \in [0,1]$, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < k+a \leq k+1$ et $0 < \prod\limits_{k=1}^{n}(k+a) \leq (n+1)!$.

Ceci entraîne que :

$$u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

donc que la série $\sum u_n$ est divergente.

2. a) Montrons la relation : $\forall\, n \geq 2, S_{n-1} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{n+a}{a-1}\, u_n$, par récurrence sur n.

- pour $n = 2$, on a :

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1}u_2 = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{2}{a+1}\right) = \frac{1}{a+1}, \text{ et } S_1 = u_1 = \frac{1}{a+1}$$

- supposons la relation vérifiée pour tout $k \leq n-1$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n = S_{n-1} + u_n &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}u_n + u_n \\ &= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+a)u_n + (a-1)u_n\right) = \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)u_n\right) \\ &= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)\frac{(n+a+1)u_{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1} \end{aligned}$$

b) La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que la suite des sommes partielles (S_n) reste majorée par $\dfrac{1}{a-1}$. Cette série est donc convergente et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell \leq \frac{1}{a-1}$$

c) Supposons que $\ell < \dfrac{1}{a-1}$. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+a}{a-1} u_n = \frac{1}{a-1} - \ell = \alpha > 0$$

et $\dfrac{n+a}{a-1}u_n \sim \alpha$ ou $u_n \sim \dfrac{(a-1)\alpha}{n}$, ce qui entraînerait la divergence de la série $\sum u_n$. Ainsi $\ell = \dfrac{1}{a-1}$.

Exercice 1-4

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t}\, dt$, et pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

1. Etudier la parité de f.

2. Montrer que g est définie pour tout $x > 0$, dérivable et donner la valeur de $g'(x)$.

3. Donner une relation simple entre f et g. En déduire que f est définie pour tout $x \neq 0$, dérivable et calculer $f'(x)$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer la limite quand x tend vers 0, $x \neq 0$ de $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$. En déduire que f admet une limite quand x tend vers 0.

Solution :

1. La fonction f est bien définie pour tout $x \neq 0$, puisqu'alors $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est continue sur l'intervalle $[x, 3x]$.
On a :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-t)}{-t} d(-t) = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

2. La fonction g est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La fonction g y est donc dérivable, et pour tout $x > 0$: $g'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

3. On peut écrire :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = g(3x) - g(x)$$

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 3g'(3x) - g'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}.$$

Par parité, f est dérivable pour tout $x \neq 0$.

4. En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} \right| \leq \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{4}{3x} \right| = 0$$

et :

$$\left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{3x}$$

tend également vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Finalement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. Lorsque x est au voisinage de 0 ; on a $|\cos t - 1| \leq \frac{t^2}{2}$. Par suite :

$$|h(x)| \leq \int_x^{3x} \frac{|\cos t - 1|}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{t}{2} dt = 2x^2$$

Ainsi $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

On peut écrire $f(x) = h(x) + \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = h(x) + \ln 3$. Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 3$. Ceci permet de prolonger f en 0 en posant $f(0) = \ln 3$.

Exercice 1-5

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^{2n} x \, dx$.

1. a) Montrer que J_n existe.

   b) Calculer J_0.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}, et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que cette suite est convergente.

3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$.

b) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On se propose de retrouver le résultat précédent :

a) Montrer que l'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < J_n \leq \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi} \sin^{2n} x\, dx$$

b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, |e^{-x}\sin^{2n} x| \leq e^{-x}$, ce qui entraîne que J_n existe.

b) Trivialement $J_0 = 1$.

2. Soit $A > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{2n} t dt = \left[-e^{-t}\sin^{2n} t\right]_0^A + 2n\int_0^A e^{-t}\sin^{2n} t\cos t dt$$

d'où, lorsque A tend vers l'infini :

$$J_n = 2n\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n} t\cos t dt$$

On intègre de nouveau par parties :

$$\frac{J_n}{2n} = \left[-e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t\cos^2 t - \sin^{2n} t)dt$$

puis, quand A tend vers l'infini :

$$J_n = 2n((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n) \Rightarrow J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2}J_{n-1}$$

b) Il est évident que $J_n \geq 0$ pour tout n. La relation précédente montre que la suite (J_n) est décroissante. elle est donc convergente (décroissante et minorée).

3. a) On a :

$$\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \sim -\frac{1+2k}{1+4k^2} \sim -\frac{1}{2k}$$

La série $\sum \ln\left(\dfrac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$ est donc divergente et de limite $-\infty$.

b) On sait que $\ln\left(\dfrac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \ln\left(\dfrac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$. Donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$$

ou

$$\ln J_n - \ln J_0 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$$

cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln J_n = -\infty$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

4. a) Soit $k \geq 0$. Alors :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi} \sin^{2n} u du$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-u-k\pi}\right) \sin^{2n} u du \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1-e^{-(N+1)u}}{1-e^{-u}} e^{-u} \sin^{2n} u du \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \sin^{2n} u du \\
&\leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} u du
\end{aligned}$$

Ceci restant vérifié pour tout N, l'inégalité demandée en découle.

b) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 0$. On peut écrire :

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n} t dt$$

Le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale montre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{2n} t dt \leq \varepsilon$$

et, par croissance de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^{2n} t dt \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^{2n} \times \frac{\pi}{2}$$

Comme $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^{2n} < \varepsilon$. Ceci entraîne que lorsque n tend vers l'infini, J_n tend vers 0.

Exercice 1-6

Pour x et t réels, on pose

$$f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{t.(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Soit $x \neq 1$ fixé. Déterminer deux réels a_x et b_x, fonction de x uniquement tels que, pour tout t vérifiant $(x,t) \in D$, on ait :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{a_x}{1+x\,t} + \frac{b_x}{1+t}$$

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t.(1+t)} dt$$

3. Préciser le domaine de définition Δ de F.

4. En admettant que, pour $x > -1$,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

calculer explicitement $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F sur Δ.

5. Montrer que F' est continue en 1.

6. Déterminer la limite de F en $+\infty$ (on pourra faire un changement de variable).

Solution :

1. $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t\cdot(1+t)}$ est définie si et seulement si $\begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ 1+xt > 0 \end{cases}$ Ce qui donne :

- $x = 0, t \neq 0, 1$
- $x > 0, 1+xt > 0 \Leftrightarrow t > -1/x$
- $x < 0, 1+xt > 0 \Leftrightarrow t < -1/x$

2. Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(1+t)(1+xt)} = \frac{a_x}{1+t} + \frac{b_x}{1+xt}$$

En réduisant cette dernière expression au mme dénominateur et par identification avec l'expression précédente, il vient :

$$b_x = -\frac{x}{1-x}, \qquad a_x = \frac{1}{1-x}$$

Donc, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{1}{(1+t)(1+xt)} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{x}{1+xt}\right)$$

3. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1[$ si et seulement si $x \geq -1$.

- au voisinage de 0^+, $f(x,t) \sim x$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ admet un prolongement par continuité en $t = 0$.
- au voisinage de 1^-, si $x > -1$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en 1.

Si $x = -1$, $f(-1,t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t(1+t)} \sim \dfrac{\ln(1-t)}{2}$. Et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \ln(1-t)dt$ converge comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln u du$.

Finalement F est définie sur $\Delta = [-1, +\infty]$.

4. Si $x > -1, x \neq 1$:

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}\left[\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - x\int_0^1 \frac{dt}{1+xt}\right] = \frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

et $F'(x) > 0$ pour tout $x > -1, x \neq 1$. Ainsi la fonction F est croissante sur Δ.

5. On a :

$$F'(1) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}$$

et en posant $x = 1+h$, pour h au voisinage de 0 :

$$F'(x) = -\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{2}) \sim \frac{1}{2}$$

ce qui montre que F' est continue en $x = 1$.

6. Pour $x > 0$, posons $u = xt$. Il vient :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} \frac{x}{x+u} du \geq \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} du$ diverge, car $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \geq \dfrac{1}{u}$ dès que $u \geq e$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 1-7

1. Résoudre l'inéquation : $x^2 - 2x + \sqrt{x} > 0$, ainsi que le système :

$$\begin{cases} a &= 1 - \sqrt{b} \\ b &= 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

2. Étudier la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \sqrt{|u_n|}$ dans le cas où $u_0 \in [0, 1]$.

Solution :

1. On remarque que 0 n'est pas solution de cette inéquation, et on pose $X = \sqrt{x}$. L'inéquation devient $X^4 - 2X^2 + X > 0$. Comme $X > 0$, elle est équivalente à $X^3 - 2X + 1 > 0$. Or :

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(X - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

Donc :

$$x^2 - 2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$x \in \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1, +\infty[$$

Le système $\begin{cases} a &= 1 - \sqrt{b} \\ b &= 1 - \sqrt{a} \end{cases}$ admet comme solutions évidentes les couples $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Autrement il est équivalent au système $\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ a^2 - 2a + \sqrt{a} = 0 \\ b = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$, qui admet, par la question précédente, comme unique solution le couple $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \geq 0, u_n \in [0,1]$. La suite (u_n) est donc bornée. Si elle converge, elle converge vers le point fixe de l'application continue $x \mapsto 1-\sqrt{x}$ qui n'est autre que $\ell = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \in]0,1[$.

On remarque enfin que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées et qu'elles convergent vers les points a et b solutions du système d'équations de la question précédente.

- si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$. La suite (u_n) prend alternativement les valeurs 0 et 1 et ne converge pas.
- si $u_0 = \ell$, la suite (u_n) est constante égale à ℓ.
- si $0 < u_0 < \ell$, on considère les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On montre par récurrence que (u_{2n}) est croissante et majorée par ℓ, alors que (u_{2n+1}) est décroissante minorée par ℓ. Ces deux sous-suites convergent donc vers ℓ.
- si $\ell < u_0 < 1$, on considère les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On montre par récurrence que (u_{2n}) est décroissante et minorée par ℓ, alors que (u_{2n+1}) est croissante majorée par ℓ. Ces deux sous-suites convergent donc vers ℓ.

Exercice 1-8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. a) Calculer $f(0)$.

 b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt \neq 0$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner une relation simple entre f et sa dérivée f', puis exprimer f en fonction du nombre $f'(0)$.

(on rappelle que les solutions de l'équation différentielle $z' = \mu z$, où $\mu \in \mathbb{R}$, sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{\mu x}$, où C est une constante réelle).

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω, à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}$:

$$P\left[X > x+y\right) \ / \ X > x] = P(X > y)$$

Déterminer la loi de X.

Solution :

1. a) En posant $x = y = 0$ dans l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$, on obtient $f(0) = f^2(0)$, d'où $f(0) \in \{0,1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout x réel, $f(x) = 0$ (on prend $y = 0$), et f est la fonction identiquement nulle. Aussi $f(0) = 1$.

b) Supposons que pour tout x réel, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 0$. Alors, en dérivant, pour tout x réel $f(x) = 0$. On peut donc affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt \neq 0$.

2. Reprenons l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(x)f(y) &\Rightarrow \int_0^a f(x+y)dy = f(x)\int_0^a f(y)dy \\ &\Leftrightarrow \int_x^{x+a} f(t)dt = \lambda f(x), \quad (\lambda = \int_0^a f(t)dt \neq 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+a} f(t)dt$$

est une fonction de classe C^1 puisque f est continue.

Par dérivation, l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$ donne $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ et pour $x = 0$, pour tout y réel, $f'(y) = f'(0)f(y)$. Ainsi f vérifie l'équation différentielle $z' = \mu z$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\mu x}$. Ici, pour tout x réel :

$$f(x) = e^{f'(0)x}, \quad (f(0) = 1)$$

3. On sait que :

$$\begin{aligned} P(X > x+y | X > x) &= \frac{P((X > x+y) \cap (X > x))}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} \\ &= P(X > y) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(X > x+y) = P(X > x)P(X > y)$$

Posons $G(x) = P(X > x)$. La fonction G est continue et vérifie, pour tout $x > 0, y > 0, G(x+y) = G(x)G(y)$ et $G(0) = 1$. On sait alors qu'il existe un réel μ tel que pour tout $x > 0, G(x) = e^{\mu x}$, et $F(x) = P(X < x) = 1 - G(x) = 1 - e^{\mu x}$. Comme F est une fonction de répartition (pour tout $x, 0 \leq F(x) \leq 1$), $\mu < 0$ et X suit une loi exponentielle de paramètre $-\mu$.

Exercice 1-9

Soit n un entier naturel non nul et (E_n) l'équation :

$$(E_n) \qquad 1 + \ln(x+n) = x$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour n assez grand, comparer les trois nombres $n, \ln(n)$ et a_n. En déduire la nature de la suite (a_n).

3. a) Déterminer une constante C telle que les suites (a_n) et $(C\ln(n))$ soient équivalentes.

b) Déterminer un équivalent simple de e^{a_n}.

4. a) Montrer que la suite $(a_n - C\ln(n))$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.

b) Quelle est la nature de la série $\sum(a_n - C\ln(n) - \ell)$?

Solution :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - \ln(n+x) - 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(x) = \dfrac{n+x-1}{n+x}$. Par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f(0) = -\ln n - 1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, la fonction continue f s'annule une fois (théorème des valeurs intermédiaires) et une seule (stricte monotonie).

2. $\star$ $f(n) = n - \ln(2n) - 1$, donc pour n assez grand $f(n) > 0$ et $a_n < n$.

$\star$ $f(\ln n) = \ln n - \ln(n + \ln n) - 1 = \ln\left(\dfrac{n}{n+\ln n}\right) - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$. Ainsi, pour n assez grand, on a $f(\ln n) < 0$ et $a_n > \ln n$.

$\star$ Pour n assez grand, on a $a_n > \ln n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3. a) On a $1 + \ln(a_n + n) = a_n$, donc $a_n = 1 + \ln n + \ln(1 + \frac{a_n}{n})$. Or, pour n assez grand, $0 < \frac{a_n}{n} < 1$, donc le terme prépondérant est $\ln n$ et $a_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$. On a donc $C = 1$.

b) On a : $\mathrm{e}^{a_n} = \mathrm{e}.\mathrm{e}^{\ln(n+a_n)} = \mathrm{e}(n+a_n)$, et comme a_n est négligeable devant n (il est équivalent à $\ln n$), il vient : $\mathrm{e}^{a_n} \underset{(\infty)}{\sim} n\mathrm{e}$.

4. a) On a : $a_n - \ln n = 1 + \ln(1 + \frac{a_n}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Enfin, $a_n - \ln n - 1 = \ln(1 + \frac{a_n}{n}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{a_n}{n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Par conséquent, pour n assez grand $a_n - \ln n - 1 > \dfrac{1}{n}$ et la divergence de la série harmonique donne par minoration la divergence de la série proposée.

Exercice 1-10

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante :

$$(\exists\ K_f \geq 0)\ (\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\forall\ y \in \mathbb{R}) \quad |f(y) - f(x)| \leq K_f\,|y - x| \qquad (1)$$

1. Vérifier que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donner un exemple de fonction (non nulle) de $\mathcal{L}$ et de fonction de $\mathcal{C}$ n'appartenant pas à $\mathcal{L}$.

Soit g une fonction de $\mathcal{L}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \left]-1, 1\right[$ fixés.

2. Montrer que, pour tout x réel, la série de terme général $\lambda^n\, g(x + n\,a)$ converge.
(on pourra chercher à majorer $g(x + n\,a)$ à l'aide de la propriété (1)).

On définit ainsi une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\, g(x + n\,a)$$

3. Montrer que $F \in \mathcal{L}$.

4. Montrer que F est l'unique fonction $f \in \mathcal{L}$ vérifiant :

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}) \qquad f(x) - \lambda\, f(x + a) = g(x)$$

Solution :

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est non vide, puisqu'il contient la fonction nulle. Pour chaque x fixé, la condition (1) donne la continuité de f en x, donc $\mathcal{L}$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$.
Enfin, si f et g appartiennent à $\mathcal{L}$, de constantes associées K_f et K_g, l'inégalité triangulaire montre que $f + \lambda g$ appartient à $\mathcal{L}$, une constante associée étant $K_f + |\lambda| K_g$.
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivée bornée est dans $\mathcal{L}$ (par exemple $x \mapsto x$) et toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivée non bornée n'appartient pas à $\mathcal{L}$ (par exemple $x \mapsto \mathrm{e}^x$).

2. D'après (1), $|g(x + na) - g(x)| \leq K_g |na|$ et, en particulier :

$$|g(x + na)| \leq |g(x)| + K_g n|a| \text{ et } |\lambda^n g(x + na)| \leq |\lambda|^n |g(x)| + n|\lambda|^n K_g |a|.$$

La série de terme général $|\lambda|^n$ est convergente, ainsi que la série de terme général $n|\lambda|^n$. Par majoration, la série proposée est absolument convergente.

3. Pour tout couple (x, y) :

$$|F(y)-F(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(y+na) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x+na)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n K_g |y-x|$$
$$= \frac{K_g}{1-|\lambda|}|y-x|$$

(écrire d'abord des sommes finies et prolonger les inégalités à la limite)

Donc F vérifie la condition (1).

4. $\star$ On a :

$$F(x) - \lambda F(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x+na) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x+(n+1)a)$$
$$F(x)-\lambda F(x+a) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n g(x+na) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} g(x+(n+1)a) = g(x)$$

$\star$ Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}$ vérifiant la condition de la question 4). On a :

$$\begin{cases} f(x) - \lambda f(x+a) = g(x) \\ f(x+a) - \lambda f(x+2a) = g(x+a) \\ \qquad\qquad \vdots \\ f(x+(n-1)a) - \lambda f(x+na) = g(x+(n-1)a) \end{cases}$$

D'où : $f(x) = \lambda^n f(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k g(x+ka)$

Or $|\lambda^n f(x+na)| \leq |\lambda|^n \big(|f(x)| + K_f.n|a|\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et, d'après la question précédente, $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k g(x+ka)$ converge vers F.

Soit $f(x) = F(x)$ et F est l'unique solution appartenant à $\mathcal{L}$.

Exercice 1-11

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$

2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge (on ne cherchera pas à calculer sa limite).

3. Montrer que :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n$$

4. En déduire une expression de I_n en fonction de I_1.

5. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{4n-1}{4n}\right)$.

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

6. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\, I_k$ et en déduire la nature et la somme, en fonction de I_1, de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\, I_k$.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{t^{4n}}$: la règle de Riemann montre que l'intégrale converge si et seulement si $4n > 1$, donc converge pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, (1+t^4)^{n+1} \geq (1+t^4)^n$, donc $I_{n+1} \leq I_n$ et la suite (I_n) est positive décroissante, donc convergente.

3. $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}\, dt$.

On effectue alors une intégration par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$ en $t \mapsto -\dfrac{1}{4n(1+t^4)^n}$, d'abord sur un segment $[0, X]$, puis en faisant tendre X vers $+\infty$, ce qui donne :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n}\, I_n$$

4. Ainsi $I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n}\, I_n$ et, par récurrence :

$$\forall\, n \geq 1, I_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4k-1}{4k}\right) I_1$$

5. $\ln\left(\dfrac{4n-1}{4n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right) \sim -\dfrac{1}{4n}$, qui est le terme général d'une série divergente. La série proposée étant à termes négatifs, elle est donc divergente vers $-\infty$.

Soit : $\ln I_n = \ln I_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{4k-1}{4k}\right) \longrightarrow -\infty$ et donc $\lim I_n = 0$.

6. $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{(1+t^4)^k}\Big]\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\big(-\frac{1}{1+t^4}\big)^n}{2+t^4}\, dt$
(identité géométrique, la raison étant différente de 1)

Soit : $$S_n = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^4}}_{J} + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n(2+t^4)}}_{R_n}$$

Comme $0 \le R_n \le I_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^4} = \ell$$

Le changement de variable $t = 2^{1/4}u$ donne : $\ell = 2^{-3/4} I_1$.

Exercice 1-12

On considère la fonction Φ définie sur $]1,+\infty[$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.
(La borne inférieure de l'intervalle d'intégration est le nombre « e » base des logarithmes népériens).

1. Etudier les variations de la fonction Φ sur $]1,+\infty[$.
Préciser le signe de Φ sur $]1,+\infty[$ et sa convexité éventuelle.
La fonction Φ admet-elle une limite en 1 ? en $+\infty$?

2. Montrer que pour tout $x > \mathrm{e}^2$, $\Phi(x) < \sqrt{x} + \dfrac{2x}{\ln x}$
(On pourra décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point $\sqrt{x}$).
En déduire la nature de la branche infinie de la courbe représentative de Φ, puis une allure de cette courbe.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur l'intervalle $]1,+\infty[$, donc pour $x > 1$, $\Phi(x)$ a bien un sens. De plus Φ est dérivable avec $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\ln x} > 0$. La fonction Φ est croissante sur $]1,+\infty[$.
Si $x > \mathrm{e}$, les bornes sont dans le sens croissant et la fonction à intégrer est positive, donc $\Phi(x) > 0$.
Si $1 < x < \mathrm{e}$, les bornes sont dans le sens décroissant et la fonction à intégrer est encore positive, donc $\Phi(x) < 0$.

Φ est deux fois dérivable et $\Phi''(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2} < 0$, la fonction Φ est donc concave.
Au voisinage de 1, on a $\dfrac{1}{\ln t} \sim \dfrac{1}{t-1}$. La règle de Riemann donne alors la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{dt}{\ln t}$ et Φ n'a pas de limite en 1. Comme elle est croissante, cela signifie que $\lim\limits_{1^+} \Phi = -\infty$.

Enfin, on a toujours $\ln t < t$, donc pour $t > 1$, $\dfrac{1}{\ln t} > \dfrac{1}{t}$, d'où, pour $x > \mathrm{e}$, $\Phi(x) > \ln x - 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \Phi = +\infty$.

2. Pour $x > \mathrm{e}^2$, on écrit $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

$\star$ La première intégrale est évidemment majorée par $\sqrt{x} - \mathrm{e}$, donc par $\sqrt{x}$.
$\star$ Pour la seconde intégrale, la fonction à intégrer est majorée par $\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, *i.e.* par $\dfrac{2}{\ln x}$ et donc l'intégrale est majorée par $(x - \sqrt{x})\dfrac{2}{\ln x}$ et *a fortiori* par $\dfrac{2x}{\ln x}$.
On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\Phi(x)}{x} = 0$ et la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. L'allure s'en déduit.

Exercice 1-13

On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_1^2 + u_2^2 + \cdot + u_n^2}{n}$$

1. Etudier la monotonie de cette suite et donner sa limite.

2. Construire une fonction Pascal nommée `u`, utilisant la récursivité, et permettant de calculer u_n (c'est-à-dire telle que $u(n) = u_n$).

3. On considère le programme informatique suivant :

```
Begin i :=0 ; p :=1 ;
repeat
   i :=i+1 ;
   p :=p*2
until u(i)>=p ; writeln(i)
End.
```

On suppose que les variables `i, p` et la fonction `u` ont été déclarées précédemment.

Ce programme affiche 7 lorsqu'on l'exécute.

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{2^n}$.

4. On considère le programme informatique suivant :

```
Var  s,a,n : integer ;
Begin n :=0 ; S :=1 ; a :=1 ;
repeat
   n :=n+1 ;
   s :=s+a*a ;
   a :=s div n
until (s mod n)<>0 ; writeln (n)
End.
```

On suppose que le type `Integer` est défini de façon à ce que ce programme puisse « tourner » . Il affiche 43 lors de son exécution. Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. On a $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ et $u_4 = 5$. Il semble donc que l'on ait $u_n \geq n$. Si cette propriété est vraie jusqu'à un rang n, alors :

$u_{n+1} \geq \dfrac{1}{n}(1 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \dfrac{1}{n}(1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = v_n$

et : $v_n \geq n + 1 \Longleftrightarrow 2n^3 - 3n^2 - 5n + 6 \geq 0 \Longleftrightarrow (n-1)(n-2)(2n+3) \geq 0$

Ainsi, on a bien $u_{n+1} \geq n + 1$, et on conclut par le principe de récurrence (fort, comme on dit parfois).

On remarque que l'on a $n.u_{n+1} = (n-1)u_n + u_n^2$, on peut donc écrire :

$$u_{n+1} = \frac{(n-1)u_n + u_n^2}{n}$$

et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n - 1)}{n} \geq 0$.

Par conséquent la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

(pour montrer la croissance, on pouvait se contenter de vérifier que $u_n \geq 1$, ce qui est évident sur la relation de récurrence).

2. On utilise la forme donnée en 1), plus commode pour le calcul :

```
Function u(n :integer) :real ;
Var S :integer ;
```

```
Begin if n=1 then u :=1 else u :=((n-1)*u[n-1]+sqr(u[n-1])/(n-1) ;
end ;
```

3. Ce programme dit que 7 est la première valeur de n, pour laquelle $u_n \geq 2^n$. Or, si cette propriété est vraie pour un certain rang n, alors :

$$u_{n+1} \geq \frac{(n-1)2^n + 2^{2n}}{n} = 2^n(1 + \frac{2^n - 1}{n})$$

et ce minorant est au moins égal à 2^{n+1} puisque $2^n - 1 \geq n$, pour $n \in \mathbb{N}$ (vérification facile).

Ainsi la propriété est héréditaire et donc :

$$\forall\, n \geq 7, u_n \geq 2^n$$

4. Le résultat signifie que le premier terme de la suite qui n'est pas un nombre entier est u_{43} (mais le programme nécessite de pouvoir considérer de très grands entiers).

Exercice 1-14

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{\sqrt{|x|}}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

1. Préciser le domaine de définition de F.

2. Soit G une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Exprimer F en fonction de G. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de F'.

3. Etudier le comportement de F au voisinage de 0 : F est-elle dérivable en 0 ? Dérivable à droite ? A gauche ?

4. Donner les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner le signe de $F(x)$ en fonction des valeurs de x.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(x) = G(x) - G(\sqrt{|x|})$, d'où :

$\star$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = G(x) - G(\sqrt{x})$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall\, x > 0, F'(x) = G'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} G'(\sqrt{x}) = \mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-x}$$

⋆ Sur $\mathbb{R}_-^*$, $F(x) = G(x) - G(\sqrt{-x})$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, avec :

$$\forall\, x < 0, F'(x) = G'(x) - \frac{1}{2\sqrt{-x}} G'(\sqrt{-x}) = \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\,\mathrm{e}^{x}$$

3. Clairement $\lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = -\infty$.

Comme F est continue en 0, on en déduit que F n'est pas dérivable en 0, ni dérivable à gauche ou à droite (conséquence du théorème des accroissements finis), la représentation graphique admettant des demi-tangentes verticales (point de rebroussement de première espèce).

4. Pour $x > 0$, on écrit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$, d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Pour $x < 0$, on écrit $F(x) = -\displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^{\sqrt{-x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$, et :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\sqrt{\pi}$$

Enfin, si $x > 1$ les bornes sont dans le sens croissant et comme la fonction à intégrer est strictement positive et continue, on a $F(x) > 0$. D'autre part $F(0) = F(1) = 0$ et dans les autres cas les bornes sont dans le sens décroissant, d'où $F(x) < 0$.

Exercice 1-15

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ les trois suites, définies pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$-1 \le a_0 \le b_0 \le c_0 \le 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \min(x, b_n, c_n)\,dx \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{med}(x, a_n, c_n)\,dx \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \max(x, b_n, a_n)\,dx \end{cases}$$

où $\mathrm{med}(x, y, z)$ désigne celui des trois réels qui est compris entre les deux autres.

1. Montrer que, pour tout n, $-1 \le a_n \le b_n \le c_n \le 1$.

2. Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.

3. Montrer que $b_{n+1}=\dfrac{1}{8}\,b_{n-1}(3-b_{n-1}^2)$. En déduire que $|b_{n+1}|\leq\dfrac{3}{8}|b_{n-1}|$.

4. En déduire la convergence des trois suites et préciser les valeurs des limites respectives.

Solution :

1. Par hypothèse la propriété est verifiée au rang 0. On suppose donc qu'elle est vraie pour un certain rang n et on a alors, pour tout x de $[0,1]$:

$$-1\leq \min(x,b_n,c_n)\leq \mathrm{med}(x,a_n,c_n)\leq \max(x,a_n,b_n)\leq 1$$

(il suffit de distinguer selon la position de x par rapport à a_n,b_n et c_n).

En intégrant ces inégalités sur le segment $[0,1]$, on obtient les inégalités voulues au rang $n+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

2. En suivant les valeurs de min, med et max, on a :

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{b_n}x\,dx+\frac{1}{2}\int_{b_n}^{1}b_n\,dx=-\frac{1}{4}(b_n-1)^2$$
$$b_{n+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{a_n}a_n\,dx+\frac{1}{2}\int_{a_n}^{c_n}x\,dx+\frac{1}{2}\int_{c_n}^{1}c_n\,dx=\frac{1}{4}(a_n+c_n)(2+a_n-c_n)$$
$$c_{n+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{b_n}b_n\,dx+\frac{1}{2}\int_{b_n}^{1}x\,dx=\frac{1}{4}(b_n+1)^2$$

3. On remarque que $a_{n+1}+c_{n+1}=b_n$ et $a_{n+1}-c_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(b_n^2+1)$. On en déduit, en décalant l'indice et en remplaçant dans la relation centrale :

$$b_{n+1}=\frac{1}{8}\,b_{n-1}(3-b_{n-1}^2)$$

Or $b_n\in[-1,1]$, donc $0\leq 3-b_{n-1}^2\leq 3$ et $|b_{n+1}|\leq\dfrac{3}{8}|b_{n-1}|$.

4. Ainsi, par récurrence $|b_{2p+1}|\leq\left(\dfrac{3}{8}\right)^p|b_1|$ et $|b_{2p}|\leq\left(\dfrac{3}{8}\right)^p|b_0|$.

Par conséquent $\lim\limits_{p\to\infty}b_{2p}=0$ et $\lim\limits_{p\to\infty}b_{2p+1}=0$.

Par recouvrement des cas possibles, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

En reportant, il vient : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{1}{4}$.

Exercice 1-16

Soit $f:x\mapsto\sqrt{|x^2-1|}$ et la suite $u=(u_n)$ définie par son premier terme $u_0\in\mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall\,n\in\mathbb{N},u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Donner une représentation graphique de la fonction f.

2. Soit f_1 la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que f_1 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et donner une expression de la bijection réciproque g.

3. Soit v la suite définie par $v_0 = 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$. Etudier la monotonie et la nature de la suite v.

4. A l'aide de la question 2), montrer que l'étude de la nature de la suite u se ramène au cas où $u_0 \in [0, 1]$.

5. Déterminer, en discutant selon les valeurs de u_0, la nature de la suite u.

Solution :

1.

La courbe est formée d'un demi-cercle et de deux demi-branches d'hyperbole.

2. Pour $x \geq 1$, on a : $y = \sqrt{x^2 - 1} \Longleftrightarrow [x = \sqrt{y^2 + 1}$ et $y \geq 0]$, donc f_1 réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, la bijection réciproque g étant définie par :

$$\forall y \geq 0, g(y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

3. Sur $\mathbb{R}_+$, on a $g(y) > y$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} > v_n$. La fonction g n'ayant pas de point fixe, la suite v ne peut converger et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = +\infty$.

4. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$. Quitte à décaler d'un rang, on peut donc supposer $u_0 > 0$.

Si $u_0 > 1$, il existe un rang p tel que $p \geq 1$ et $v_p \leq u_0 < v_{p+1}$, d'où :

$f(v_p) \leq u_1 < f(v_{p+1})$, soit $v_{p-1} \leq u_1 < v_p$, et on recommence jusqu'à :

$$v_1 < u_{p-1} \leq v_2 \text{ et enfin } v_0 < u_p \leq v_1$$

On a donc $0 < u_p \leq 1$, ce qui prouve que, quitte à décaler d'un certain nombre de rangs, on peut supposer $u_0 \in [0, 1]$.

5. Supposons donc $u_0 \in [0, 1]$.

$\star$ Si $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors la suite est constante et égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la convergence est banale.

$\star$ Sinon, comme on remarque que sur l'intervalle $[0, 1]$, on a $f \circ f(x) = x$, la suite (u_{2p}) est constante et égale à u_0, tandis que la suite (u_{2p+1}) est constante et égale à u_1. Comme $u_1 u_0$, la suite est divergente.

Exercice 1-17

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}.\ln(t)\, dt$ est convergente. On notera ℓ sa valeur.

2. Soit $x > 0$. Etablir que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$

(on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \Big(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt + \ln x \Big)$.

3. a) Soit a, b des nombres réels strictement positifs. Montrer que l'intégrale

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, dt$$

est convergente.

b) Etablir que pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$

En déduire la valeur de $I(a, b)$.

4. Montrer l'existence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$.

Solution :

1. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}.\ln t$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, équivalente à $t \mapsto \ln t$ au voisinage de 0 et dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de

l'infini. La convergence de $\int_0^1 \ln t\,dt$ est connue, donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et la règle de Riemann montre que $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ converge également. On conclut par disjonction des problèmes.

2. ⋆ L'existence de l'intégrale de gauche résulte encore de la règle de Riemann. L'intégrale de droite, ne pose pas de problème car la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0.

On intègre alors par parties, en dérivant $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et en intégrant $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ en $t \mapsto \ln t$ (en procédant d'abord sur un segment $[x, y]$, puis en faisant tendre y vers l'infini). On obtient :

$$I(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln x + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt = \ell - \mathrm{e}^{-x}\ln x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$$

On réintègre par parties, en intégrant cette fois $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-t}$:

$$I(x) = \ell - \ln x + \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ étant prolongeable par continuité en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = 0$ et donc :

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln x\right] = \ell$$

3. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 et est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de l'infini. L'intégrale existe bien.

b) Les intégrales écrites étant convergentes pour la borne infinie, on peut écrire, pour $x > 0$: $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt.$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $u = at$ et dans la seconde, le changement de variable $u = bt$. Il vient :

$$J_{a,b}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du$$

Soit : $J_{a,b}(x) = \ln \dfrac{b}{a} + \displaystyle\int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln(ax) - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \ln(bx)$

En appliquant deux fois le résultat précédent, ℓ disparaît et :

$$I(a,b) = \lim_{x\to 0} J_{a,b}(x) = \ln \frac{b}{a}$$

4. L'existence est acquise, car la fonction à intégrer est continue sur $]0,1[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. Le changement de variable (légitime, car de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) $u = \ln t$ donne :

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,du = \ln 2$$

Exercice 1-18

Pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel k et tout réel x, on pose :

$$T_k(g)\,(x) = \int_0^x (x-t)^k g(t)\,dt.$$

1. Montrer que $T_k(g)$ est de classe C^1, pour $k > 0$. Calculer alors $[T_k(g)]'$ en fonction de $T_{k-1}(g)$.
(On pourra utiliser la formule du binôme de Newton)

2. Montrer que T_k est une application linéaire injective.

3. Si g est une fonction polynôme de degré p, que peut-on dire de $T_k(g)$?

4. Soit a un réel strictement positif donné. Pour tout $u \in [-a, a]$, montrer que :

$$\left|\mathrm{e}^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} C_a$$

où C_a ne dépend que de a.

5. En déduire la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{T_k(g)\,(x)}{k!}$ lorsque x est fixé et n tend vers l'infini.
On notera $T(g)\,(x)$ cette limite

6. Montrer que $T(g)$ est de classe C^1. Calculer $[T(g)]'$.

7. La fonction g étant donnée, exprimer, à l'aide de $T(g)$, toutes les fonctions f de classe C^1 telles que :

$$\forall\, x, f'(x) - f(x) = g(x)$$

Indication : on pourra dériver $x \mapsto \big(f(x) - T(g)(x)\big)\mathrm{e}^{-x}$.

Solution :

1. En développant la puissance par la formule du binôme de Newton et en utilisant la linéarité de l'intégration, on peut écrire :

$$T_k(g)(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j \int_0^x (-t)^{k-j} g(t)\, dt$$

$t \mapsto (-t)^{k-j} g(t)$ étant continue, on en déduit que $T_k(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$[T_k(g)]'(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j j x^{j-1} \int_0^x (-t)^{k-j} g(t)\, dt + \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j (-x)^{k-j} g(x)$$

Dans la seconde somme, on reconnaît $(x-x)^k$ qui vaut 0, sauf pour $k=0$ et dans la première, la transformation $jC_k^j = kC_{k-1}^{j-1}$ permet de reconnaître $k(x-t)^{k-1}$, soit :

$$\forall\, k \geq 1, [T_k(g)]' = kT_{k-1}(g),\ [T_0(g)]' = g$$

2. La linéarité de T_k est banale. Soit alors g telle que $T_k(g) = 0$. En dérivant k fois, il vient $kT_0(g) = 0$, puis en dérivant une fois de plus : $g = 0$. Donc T_k est injective.

3. Si g est une fonction polynôme de degré p, alors $T_0(g)$ est une fonction polynôme de degré $p+1$ et en poursuivant $T_k(g)$ est une fonction polynôme de degré $p+k+1$.

4. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange, et on peut prendre $C_a = \mathrm{e}^a$.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^x \mathrm{e}^{x-t} g(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T_k(g)(x)\Big| &= \Big|\int_0^x \big[\mathrm{e}^{x-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-t)^k\big] g(t)\, dt\Big| \\ &\leq \sup_{[-a,a]} |g| \frac{\mathrm{e}^a}{(n+1)!} \Big|\int_0^x |x-t|^{n+1}\, dt\Big| \\ &\leq \frac{\mathrm{e}^a |x|^{n+2}}{(n+2)!} \sup_{[-a,a]} |g|\end{aligned}$$

Et en faisant tendre n vers l'infini : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T_k(g)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} g(t)\, dt$.

6. Ainsi, $T(g)(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\, dt$ et, en dérivant :

$$[T(g)]'(x) = g(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\, dt$$

7. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f'(x) - f(x) = g(x)$, en dérivant :

$$\frac{d}{dx}(f(x) - T(g)(x).\mathrm{e}^{-x}) = 0$$

Donc : $\exists\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = T(g)(x) + \alpha.\mathrm{e}^x$.

Exercice 1-19

On pose, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

1. Déterminer l'unique point critique de f.
(on rappelle qu'un point critique est un point où les dérivées partielles s'annulent)

2. A-t-on un extremum local en ce point ?

Solution :

1. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2}$ et, symétriquement :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$$
Comme $x>0$ et $y>0$, un point critique (x,y) vérifie $x=y^2$ et $y=x^2$, d'où $x=x^4$ et la seule solution strictement positive est $x=1$, d'où $y=1$.

2. On peut calculer les dérivées partielles secondes au point $(1,1)$, mais il est plus rapide de faire un développement limité à l'ordre 2, en posant $x=1+u$ et $y=1+v$. On trouve alors :
$$f(x,y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}(u^2-uv+v^2) + o(u^2+v^2)$$
Comme $u^2-uv+v^2 = (u-\frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2 > 0$, pour $(u,v)(0,0)$, il s'agit en ce point d'un minimum local.

Exercice 1-20

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,dt$

2. Comparer sa valeur avec celle de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t-1)^2}\,dt$

3. Vérifier que pour $t \in [0,1], 1-\cos t \leq \frac{1}{2}t^2$ et $\mathrm{e}^t - 1 \geq t$.

En déduire que : $0 < I < \dfrac{\mathrm{e}-1}{2} + \dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$

4. On pose pour tout entier n : $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,dt$,

Montrer que les suites $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

(on pourra ramener $I_{n+2} - I_n$ à une intégrale sur $[0, \pi]$)

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 par 1 (car $\sin t \underset{(0)}{\sim} t$ et $\mathrm{e}^t - 1 \underset{(0)}{\sim} t$). De plus, au voisinage de l'infini, la fonction est dominée en valeur absolue par $\dfrac{1}{t^2}$ (prépondérance classique de l'exponentielle) et la convergence (absolue) résulte de la règle de Riemann.

2. On intègre par parties sur un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1}$ en $t \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}$ et en intégrant $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto 1 - \cos t$. Ce choix permet de faire disparaître la limite du crochet de l'intégration par parties et il reste :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt = J$$

3. La seconde inégalité est connue (convexité de la fonction exponentielle). La première se démontre aisément en étudiant les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$.

On écrit alors : $I = J = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1 - \cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{(1 - \cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt$.

En utilisant les inégalités précédentes :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1 - \cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{2}\,dt = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1)$$

Pour la seconde intégrale, on se contente de $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$, et :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{(1 - \cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}\,dt = \frac{2}{\mathrm{e} - 1}$$

Ce qui donne l'encadrement voulu.

4 Le changement de variable $t = (2n + 1)\pi + u$ donne

$$I_{2n+2} - I_{2n} = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\mathrm{e}^{2n\pi + \pi + u} - 1}\,du$$

On partage alors cette intégrale en deux, en introduisant la borne intermédiaire 0, puis on fait le changement de variable $u \mapsto -u$ dans la première, il vient :

$$I_{2n+2} - I_{2n} = \int_0^{\pi} (\sin u) \Big[\frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi+\pi-u} - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi+\pi+u} - 1} \Big] \, du$$

L'expression placée entre crochets est clairement positive et donc la suite (I_{2n}) est croissante.

Un calcul similaire montre que la suite (I_{2n+1}) est décroissante.

2

ALGÈBRE

Exercice 2-1

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.
Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $(n+1)$ réels distincts ou non. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j du polynôme P.
Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(a_j) Q^{(j)}(a_j)$$

définit un produit scalaire sur E.

Solution :

On montre facilement que $(\ ,\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, grâce à la linéarité de la dérivation et la commutativité du produit. Elle est également positive, puisque $(P, P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (P^{(j)})^2(a_j)$.
Il reste à démontrer qu'elle est définie. Or :

$$(P, P) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (P^{(j)})^2(a_j) = 0 \Rightarrow P^{(j)}(a_j) = 0, \quad \forall j \in \{0, \ldots, n\}$$

Mais, P étant un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P^{(n)}(x)$ est une constante et $P^{(n)}(a_n) = 0$ entraîne que $P^{(n)}$ est identiquement nul. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Mais alors $P^{(n-1)}(x)$ est une constante et $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$ entraîne que $P^{(n-1)}$ est identiquement nul. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-2)$. On termine aisément ce raisonnement.

Exercice 2-2

Soit d un nombre entier strictement positif et soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$, des nombres réels deux à deux distincts, et différents de 1 et de -1.

On considère la fonction polynomiale $L : x \mapsto \prod_{k=1}^{d}(x-\tau_k)$, et la fonction rationnelle $R : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)L^2(x)}$.

On notera E, l'ensemble des nombres réels privé de $\{1, -1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d\}$.

On admet qu'il existe $2d+2$ nombres réels $\alpha, \beta, A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d$, tels que :

pour tout x appartenant à E,

$$R(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{A_k}{(x-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{x-\tau_k} \qquad (*)$$

1. Calculer α et β en fonction de $L(1)$ et de $L(-1)$.

2. Exprimer A_k en fonction de τ_k et de $L'(\tau_k)$.

3. On pourra admettre que $B_k = -\dfrac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2-1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)(L'(\tau_k))^3}$.

4. On définit la fonction polynôme S par : $S(x) = (x^2-1)L''(x) + 2xL'(x)$, pour tout réel x.

Prouver l'équivalence :

$$(\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, d\}, B_k = 0) \iff (\exists\, \mu \in \mathbb{R} \;/\; S = \mu L)$$

Exprimer μ , quand il existe, en fonction de d.

5. Dans le cas où d est égal à 2, déterminer le polynôme L tel que :

$$\forall\, k \in \{1, 2\}, B_k = 0.$$

Solution :

1. On admet que :

$$R(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{A_k}{(x-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{x-\tau_k}$$

Multiplions cette expression par $(x-1)$. Il vient :

$$\frac{1}{(x+1)L^2(x)} = \alpha + (x-1)g(x)$$

où g est une fonction continue en $x=1$. En remplaçant x par 1, on obtient : $\frac{1}{2L^2(1)} = \alpha$.

De même, en multipliant l'expression par $(x+1)$, il vient :

$$\frac{1}{(x-1)L^2(x)} = \beta + (x+1)h(x)$$

où h est une fonction continue en $x=-1$. En remplaçant x par -1, on obtient : $-\frac{1}{2L^2(-1)} = \beta$.

2. Reprenons la même idée que précédemment. Multiplions l'expression de $R(x)$ par $(x-\tau_k)^2$. On obtient :

$$\frac{1}{(x^2-1)\prod_{i\neq k}(x-\tau_i)^2} = A_k + (x-\tau_k)^2 g_k(x)$$

où g_k est une fonction continue en $x=\tau_k$. En remplaçant x par τ_k, on obtient :

$$A_k = \frac{1}{(\tau_k^2-1)\prod_{i\neq k}(\tau_k-\tau_i)^2} = \frac{1}{(\tau_k^2-1)L'^2(\tau_k)}$$

En effet, si $L(x) = \prod_{i=1}^{d}(x-\tau_k)$, la formule de dérivation d'un produit de fonctions donne :

$$L'(x) = \sum_{k=1}^{d}\prod_{i\neq k}(x-\tau_i)$$

et :

$$L'(\tau_k) = \prod_{i\neq k}(\tau_k-\tau_i)$$

3. Obtenir B_k est un peu plus compliqué. Multiplions $R(x)$ par $(x-\tau_k)^2$, puis dérivons l'xpression obtenue. Il vient :

$$(x-\tau_k)^2R(x) = (x-\tau_k)^2\ell(x) + A_k + (x-\tau_k)B_k$$

où ℓ est une fonction continue et dérivable en $x=\tau_k$. En dérivant, il vient :

$$\left(\frac{1}{(x^2-1)L_k^2(x)}\right)' = (x-\tau_k)(2\ell(x) + (x-\tau_k)\ell'(x)) + B_k$$

avec

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} (x - \tau_i)$$

En posant dans cette dernière expression $x = \tau_k$, il vient :

$$B_k = \left(\frac{1}{(x^2 - 1)L_k^2(x)} \right)'_{x=\tau_k}$$

Enfin :

$$\left(\frac{1}{(x^2 - 1)L_k^2(x)} \right)' = -\frac{2xL_k^2(x) + 2(x^2 - 1)L_k(x)L_k'(x)}{(x^2 - 1)^2 L_k^4(x)}$$

Or :

$$L(x) = (x - \tau_k)L_k(x) \Rightarrow L'(\tau_k) = L_k(\tau_k), \quad L''(\tau_k) = 2L_k'(\tau_k)$$

Finalement :

$$B_k = \left(\frac{1}{(x^2 - 1)L_k^2(x)} \right)'_{x=\tau_k} = -\frac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2 - 1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2 - 1)(L'(\tau_k))^3}$$

4. Supposons que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, d\}, B_k = 0$. Il en résulte que le numérateur de l'expression qui définit B_k est nul, sans que le dénominateur le soit, et que le polynôme S admet $(\tau_k)_{1 \leq k \leq d}$ comme racines.

Ainsi S est de même degré que L et admet les même racines. Ces deux polynômes sont donc proportionnels.

Réciproquement, si S est proportionnel à L, il admet les (τ_k) comme racines et $B_k = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Pour déterminer μ lorsque la condition est remplie, il suffit de regarder les coefficients dominants de chacun des polynômes. Il vient $\mu = d^2 + d$, ou, bien sr, $\mu = 0$.

5. Dans le cas où $d = 2$, $\mu \in \{0, 6\}$.

• $\mu = 0$. Dans ce cas, L est un polynôme normalisé de degré 2 vérifiant $(x^2 - 1)L''(x) + 2xL'(x) = 0$. Or $(x^2 - 1)L''(x) + 2xL'(x) = ((x^2 - 1)L'(x))'$. Il existe donc une constante C réelle telle que $(x^2 - 1)L'(x) = C$. Ceci n'est pas possible, puisque $L'(x)$ est un polynôme de degré 1.

• $\mu = 6$. Dans ce cas, L est un polynôme normalisé de degré 2 vérifiant $(x^2 - 1)L''(x) + 2xL'(x) = 6L(x)$. Appelons Q une primitive de L. Il vient $(x^2 - 1)L'(x) = 6Q(x)$ ou $(x^2 - 1)Q''(x) = 6Q(x)$.

Si $L(x) = x^2 + ax + b$, alors $Q(x) = \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} + bx$ (par exemple) et notre équation se traduit par $(x^2-1)(2x+a) = 6\left(\dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} + bx\right)$, ce qui conduit, par identification des coefficients à : $a = 0, b = -1/3$. Le polynôme L ainsi obtenu est $L(x) = x^2 - 1/3$.

Exercice 2-3

On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad \text{et } \forall\, n \geq 2\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

Etudier la parité de T_n en fonction de n.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0, T_n(\cos x) = \cos(nx)$. En déduire que T_n admet n racines réelles distinctes. Les déterminer. Calculer $T_n(0), T_n(1), T_n(-1)$.

3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales. A tout $P \in E$, on associe la fonction $u(P)$ définie pour tout x réel par :

$$u(P)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer un développement limité de $u(T_n)$ en 0 à l'ordre 2.

c) Déterminer un équivalent de $u(T_n)(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

4. Déterminer le noyau de u. En déduire son image.

Solution :

1. Montrons les relations demandées par récurrence sur n. Pour $n = 0, T_0$ et T_1 sont des polynômes de degrés respectifs 0 et 1 et le coefficient dominant de T_1 est $1 = 2^0$.
Supposons que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, T_k soit un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1}. Comme $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, T_n est un polynôme de degré n (c'est $2xT_{n-1}(x)$ qui l'emporte) et de coefficient dominant $2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Montrons par récurrence que si n est pair T_n est pair, alors que si n est impair, T_n est impair.

Ceci est vrai pour T_0 et T_1. Supposons que ce soit vérifié pour tout $k \leq 2p-1$. Alors, comme $T_{2p}(x) = 2xT_{2p-1}(x) - T_{2p-2}(x)$, il vient :

$$T_{2p}(-x) = -2xT_{2p-1}(-x) - T_{2p-2}(-x) = 2xT_{2p-1}(x) - T_{2p-2}(x) = T_{2p}(x)$$

et :

$$T_{2p+1}(-x) = -2xT_{2p}(-x) - T_{2p-1}(-x) = -2xT_{2p}(x) + T_{2p-1}(x) = -T_{2p+1}(x)$$

2. Procédons là encore par récurrence. $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0x)$, $T_1(\cos x) = \cos x$. Supposons que pour tout $k \leq n-1, T_k(\cos x) = \cos(kx)$. Alors, en s'aidant de la formule trigonométrique $2\cos a \cos b = \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} T_n(\cos x) &= 2\cos x T_{n-1}(\cos x) - T_{n-2}(\cos x) \\ &= 2\cos x \cos((n-1)x) - \cos((n-2)x) = \cos(nx) \end{aligned}$$

Or $\cos(nx) = 0 \Rightarrow nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne que :

$$T_n(\cos x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

et :

$$T_n(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Nous avons ainsi déterminé n racines distinctes (car $0 < \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} < \pi$, pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$) de T_n qui est un polynôme de degré n. Ce sont donc toutes les racines de T_n. Enfin :

$$T_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k \end{cases} \quad \text{et} \quad T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n$$

3. a) La linéarité de u est évidente par linéarité de l'intégrale. Le fait que u soit un endomorphisme de E provient du fait que toute primitive d'un polynôme est un polynôme. Donc si Q est une primitive de P, alors $u(P)(x) = Q(x+1) - Q(x-1)$ est un polynôme.

b) On vient de voir que $u(T_n)$ est un polynôme. Il admet donc un développement limité en 0. On peut donc écrire, pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} u(T_n)(x) &= u(T_n)(0) + x(u(T_n))'(0) + \frac{x^2}{2}(u(T_n))''(0) + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_n(x)dx + \frac{x}{2}(T_n(1) - T_n(-1)) + \frac{x^2}{4}(T_n'(1) - T_n'(-1)) + o(x^2) \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \int_0^{\pi} T_n(\cos t)\sin t dt = \int_0^{\pi} \cos(nt)\sin(t)dt$$

et pour $n \geq 2$:

$$\int_0^{\pi} \cos(nt)\sin(t)dt = -\frac{1}{n^2-1}((-1)^n + 1)$$

De plus $-n\sin(nx) = (T_n(\cos x))' = -\sin(x)T_n'(\cos(x))$, entraîne que :

$$T_n'(\cos x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{\sin x} & \text{si } x \neq 0\ [2\pi] \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$T_n'(1) = n, \text{ et } T_n'(-1) = (-1)^{n+1}n$$

Finalement, pour x au voisinage de 0 :

$$u(T_n)(x) = -\frac{1}{n^2-1}((-1)^n+1) + \frac{x}{2}(1-(-1)^n) + \frac{x^2}{4}n(1-(-1)^{n+1}) + o(x^2)$$

c) On sait que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Or :

$$\begin{aligned} u(T_n)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} T_n(t)dt = \frac{2^{n-1}}{n+1}((x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}) + h_{n-1}(x) \\ &= 2^{n-1}x^n + h_{n-1}(x) \end{aligned}$$

où h_{n-1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Ainsi un équivalent de $u(T_n)$ au voisinage de l'infini est $2^{n-1}x^n$.

4. On montre, comme dans la question précédente, que si P est un polynôme de degré p, alors $u(P)$ est également de degré p. Ainsi $\ker u = \{0\}$. Pour la même raison $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}[X]$. En effet, la restriction de u à chaque $\mathbb{R}_p[X]$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_p[X]$, donc surjectif, ce qui entraîne que u est surjectif sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2-4

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit A et B les deux matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et B^2. En déduire les valeurs propres de A et de B.

2. Déterminer les sous-espaces propres des endomorphismes a et b canoniquement associés à A et B.

3. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle les matrices associées à a et b sont toutes deux diagonales.

Solution :

1. Un calcul immédiat donne $A^2 = 4A$ et $B^2 = 2B$. On sait alors que les valeurs propres de A sont contenues dans l'ensemble $\{0, 4\}$ et celles de B dans $\{0, 2\}$. Or, ces deux matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Elles n'ont donc pas qu'une seule valeur propre (car autrement ce seraient des matrices scalaires). Les valeurs propres de A sont donc $\{0, 4\}$ et celles de B $\{0, 2\}$.

2. On détermine les sous-espaces propres de a en résolvant le système d'équations $AX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On obtient :

- pour a :
  $F_0 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0\}$ de dimension 3.
  $F_4 = \{(x, y, z, t) \mid x = y = z = t\}$ de dimension 1.
- pour b :
  $E_0 = \{(x, y, z, t) \mid x = z, y = t\}$ de dimension 2.
  $E_2 = \{(x, y, z, t) \mid x = -z, y = -t\}$ de dimension 2.

3. On a $F_4 \subset E_0$ et $E_2 \subset F_0$. On peut ainsi choisir comme base commune de diagonalisation :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_4, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_0, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_0, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_0$$

Exercice 2-5

Soit (P_n) une suite de fonctions définie par $P_0(x) = 1, P_1(x) = -x$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - P_n(x)$$

1. a) Montrer que P_n est une fonction polynomiale. Déterminer son degré ainsi que son coefficient dominant.

b) Quelle est la parité de P_n ?

2. On se propose de déterminer une expression de $P_n(x)$.
a) Soit $x \in [-2, 2]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = 2\cos(\theta)$. En déduire l'expression de $P_n(x)$ en fonction de θ.

b) Montrer que l'on a déterminé ainsi complètement le polynôme P_n.

3. Déterminer l'ensemble des racines de P_n.

4. a) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)\sqrt{4 - t^2}\, dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) La famille $(P_n)_{n \geq 0}$ est-elle une famille orthonormale pour ce produit scalaire ?

Solution :

1. a) Effectuons une démonstration par récurrence. Pour $n = 0, 1$: P_0 et P_1 sont deux fonctions polynomiales de degrés respectifs 0 et 1 et de coefficient dominant $(-1)^n$. Supposons que pour tout $k \leq n + 1$, P_k soit un polynôme de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$.
L'équation $P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ donne immédiatement que P_{n+2} est un polynôme de degré $n + 2$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+2}$, (puisque c'est $-xP_{n+1}(x)$ qui est prépondérant).

b) On voit que P_0 est un polynôme pair, alors que P_1 est un polynôme impair. Supposons que pour tout $k \leq n + 1$, P_k possède la parité de k.
- si $n + 2$ est pair, $-xP_{n+1}$ est pair (produit de deux polynômes impairs), tout comme P_n.
- si $n + 2$ est impair, $-xP_{n+1}$ est impair (produit de P_{n+1} pair et de x impair) tout comme P_n.

et donc par récurrence, pour tout n, P_n a la parité de n.

2. a) Si $x \in [-2, 2]$, $\dfrac{x}{2} \in [-1, 1]$, et il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = 2\cos\theta$, puisque la fonction cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On a alors $P_0 = 1, P_1(\theta) = -2\cos\theta$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P_{n+2}(2\cos\theta) = -2\cos\theta P_{n+1}(2\cos\theta) - P_n(2\cos\theta)$$

Ceci est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :
$$X^2 + 2\cos\theta X + 1 = 0.$$
Ses racines sont $(-e^{i\theta}, -e^{-i\theta})$ et il existe deux constantes complexes λ et μ telles que pour tout $n \geq 0$:

$$P_n(2\cos\theta) = (-1)^n \left(\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}\right)$$

Pour $n = 0, 1$ il vient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = 2\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta} \\ \mu = \dfrac{-e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$:

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{2i\sin\theta}\left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}\right) = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

b) Le polynôme P_n est ainsi complètement déterminé sur $[-2, 2]$ donc sur tout $\mathbb{R}$ puisque c'est un polynôme.

3. Cherchons les racines de P_n qui appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.

$$0 = P_n(2\cos\theta) = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \neq 0 \quad [\pi] \end{cases}$$

Ainsi P_n admet sur $[-2, 2], n$ racines distinctes qui sont $\left(2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)_{1\leq k\leq n}$.
Or P_n est de degré n ; ce sont là toutes ses racines.

4. a) La bilinéarité, la symétrie et la positivité de l'application sont évidentes. De même,
$(P, P) = \displaystyle\int_{-2}^{2} P^2(t)\sqrt{4-t^2}dt = 0$ entraîne (car $t \mapsto P^2(t)\sqrt{4-t^2}$ est une fonction continue positive) que P est identiquement nul sur $]-2, 2[$, donc est le polynôme identiquement nul.

b) Calculons le produit scalaire (P_n, P_m) et pour cela, effectuons le changement de variable $t = 2\cos\theta$ dans l'intégrale. Il vient :

$$\begin{aligned}
(P_n, P_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P_n(t)P_m(t)\sqrt{4-t^2}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} P_n(2\cos\theta)P_m(2\cos\theta)(-2\sin\theta)2\sin\theta d\theta \\
&= (-1)^{n+m}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta d\theta \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 2-6

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.

3. Déterminer les valeurs propres de B. En déduire les sous-espaces propres associés.

4. Vérifier que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.

6. On s'intéresse maintenant aux puissances de B.
a) On pose, pour tout $n \geq 2, X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$ où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$.
On note $R_n(X) = a_nX + b_n$. Déterminer le couple (a_n, b_n).

b) En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geq 0$.

c) Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, de B et de n, qui a été obtenue pour $n \geqslant 0$, est encore valable pour les entiers négatifs.

Solution :

1. Un calcul élémentaire donne :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. Là encore, le calcul se fait immédiatement tout comme la vérification.

3. Le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de la matrice B. On sait alors que les valeurs propres de B sont parmi les racines de ce polynôme, soit $1, 2$. On vérifie que ces deux réels sont effectivement valeurs propres de B en déterminant les sous-espaces propres correspondants. On obtient :
- $E_{-1}(B) = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$
- $E_2(B) = \{(x, y, z) \mid x = -y = z\}$

4. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors :

$$AX = \lambda X \Rightarrow BX = (\lambda^2 + 2)X$$

et $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B, puisque $X \neq 0$. Ainsi $\lambda \in \{0, \pm i\sqrt{3}\}$.

La matrice A n'admet qu'une valeur propre réelle. Elle ne peut être diagonalisable car elle serait alors une matrice scalaire, ce qu'elle n'est point.

5. On a immédiatement :

$$B^2 - B = 2I \Rightarrow B\left(\frac{B - I}{2}\right) = I$$

ce qui signifie que B est inversible et que $B^{-1} = \dfrac{B - I}{2}$.

6. On pose pour tout $n \geq 2, X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + a_n X + b_n$. En substituant les réels -1 et 2 à X, il vient :

$$\begin{cases} (-1)^n & = -a_n + b_n \\ 2^n & = 2a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ b_n = \dfrac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{cases}$$

b) En substituant la matrice B à X, il vient $B^n = a_n B + b_n I$, puisque $X^2 - X - 2$ est annulateur de B, soit :

$$B^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)B + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)I$$

résultat qui reste valable pour $n = 0, 1$.

c) Pour montrer que cette expression reste valable pour n négatif, posons pour $n > 0$,

$$C_n = \frac{1}{3}(2^{-n} - (-1)^{-n})B + \frac{1}{3}(2^{-n} + 2(-1)^{-n})I$$

On vérifie alors que le calcul de $C_n B_n$ donne I (car $B^2 = B + 2I$). Donc $C_n = B^{-n}$ et la forme obtenue précédemment vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2-7

1. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que la matrice A est inversible (on pourra raisonner par l'absurde et considérer une colonne X non nulle telle que $AX = 0$).

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n quelconque. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que :

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|)$$

où pour $\alpha \in \mathbb{C}, R > 0$, $D(\alpha, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - \alpha| \leq R\}$.

3. Soit $n \geq 2$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| \leq 2$.
On pose alors $\lambda = 2\cos(\theta), \theta \in [0, \pi]$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Solution :

1. Soit $X \neq 0$ vérifiant $AX = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $|x_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

L'équation $AX = 0$ est équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Choisissons la k-ième équation. On obtient :

$$-a_{kk}x_k = \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j$$

donc, de par le choix de x_k :

$$|a_{kk}|\cdot|x_k| \leq \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\cdot|x_j| \leq |x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$$

ce qui contredit l'hypothèse $|a_{k,k}| > \sum_{j\neq k}|a_{k,j}|$. Ceci entraîne que $x_k = 0$, donc que $X = 0$.
Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Hadamard.

2. Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible c'est-à-dire si et seulement si, par la question précédente, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

ce qui signifie que $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|)$.
Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Gerchgorin.

3. a) D'après la question précédente, λ est une valeur propre de A entraîne que $\lambda \in D(0,1)\cup D(0,2)$, soit $\lambda \in D(0,2)$. On peut donc poser $\lambda = 2\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, puisque la fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

b) L'équation $AX = (2\cos\theta)X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} -2\cos\theta x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2\cos\theta x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\vdots \\ x_{n-1} - 2\cos\theta x_n = 0 \end{cases}$$

On pose alors $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. On obtient ainsi n équations du même type

$$x_i - 2\cos\theta x_{i+1} + x_{i+2} = 0,\ (0 \leq i \leq n-1)$$

Les scalaires $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$, dont les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On sait alors que pour tout $0 \leq k \leq n+1$, x_k s'écrit sous la forme :

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$$

les complexes α et β et θ étant ici déterminés par les conditions limites $x_0 = x_{n+1} = 0$. Soit :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i(n+1)\theta} + \beta e^{-i(n+1)\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha \sin(n+1)\theta = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, alors $\beta = 0$ ce qui est sans intérêt, et si $\alpha \neq 0$, alors $\sin(n+1)\theta = 0$ et :

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}$$

On obtient ainsi n valeurs propres distinctes données par $2\cos\theta_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, avec $1 \leq k \leq n$, et le sous-espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$

Exercice 2-8

1. Soit J la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer J^3. En déduire les valeurs propres complexes possibles de J. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

b) Soit (a, b, c) trois nombres complexes et A la matrice $aI_3 + bJ + cJ^2$. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

2. Un jeton est déplacé sur trois points A, B, C d'un cercle suivant les modalités suivantes :

une urne contient des boules rouges et blanches en proportions respectives p et $q = 1 - p$. On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est de couleur rouge, on avance le jeton d'un point dans le sens trigonométrique. Si la boule tirée est de couleur blanche, on avance le jeton de deux points, toujours dans le sens trigonométrique. On replace la boule dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.
Au départ le jeton se trouve en A.

Soit X_n la variable aléatoire représentant la position du jeton à l'issue du n-ième tirage.
Déterminer la loi de X_n en fonction de n.

Solution :

1. a) Un calcul élémentaire donne $J^3 = I$. On peut le montrer également en regardant l'endomorphisme associé à J (que l'on appellera J) qui vérifie dans la base (e_1, e_2, e_3) associée à la matrice J : $J(e_1) = e_2, J(e_2) = e_3, J(e_3) = e_1$. Ainsi J est une permutation circulaire sur (e_1, e_2, e_3) et vérifie $J^3 = I$.
Les valeurs propres possibles de J sont donc $1, j, j^2$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Pour vérifier si chacun de ces scalaires est effectivement valeur propre, il suffit de déterminer le sous-espace propre asssocié. Après calculs :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$.
- $\begin{pmatrix} j \\ 1 \\ j^2 \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = j$.
- $\begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = j^2$.

Ainsi J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

b) La matrice A étant un polynôme en J, on sait que ses valeurs propres sont :
$$a + b + c,\ a + bj + cj^2,\ a + bj^2 + cj$$
les vecteurs propres associés étant identiques à ceux trouvés ci-dessus. La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminons la matrice de passage de l'état n à l'état $(n + 1)$. Notons a_n, b_n, c_n les probabilités des événements « le jeton se trouve en A (respectivement B, C) à l'issue du n-ième tirage ».

Les modalités du jeu et la formule des probabilités totales (les trois événements ci-dessus forment un système complet d'événements) donnent :

$$\begin{cases} a_{n+1} = qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = (pJ + qJ^2) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Posons $A = pJ + qJ^2$. On sait que J est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, avec comme matrice de passage la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

On pourra ainsi écrire, pour tout $n \geq 0$, $A^n = P(pD + qD^2)^n P^{-1}$, ce qui donne après calculs :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+\alpha^n+\beta^n & 1+j\alpha^n+j^2\beta^n & 1+j^2\alpha^n+j\beta^n \\ 1+j^2\alpha^n+j\beta^n & 1+\alpha^n+\beta^n & 1+j\alpha^n+j^2\beta^n \\ 1+j\alpha^n+j^2\beta^n & 1+j^2\alpha^n+j\beta^n & 1+\alpha^n+\beta^n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = pj + qj^2$ et $\beta = pj^2 + qj$.

La loi de X_n est alors donnée par :

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+\alpha^n+\beta^n \\ 1+j^2\alpha^n+j\beta^n \\ 1+j\alpha^n+j^2\beta^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2-9

Soient n et p des éléments de $\mathbb{N}^*$. On désigne par $E_{n,p}$ le nombre de solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$ de l'équation :

$$(*) \quad \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = p.$$

1. Déterminer les nombres $E_{1,p}$ et $E_{2,p}$.

2. a) Déterminer, en fonction de n et p, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'inéquation :

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p.$$

b) En déduire l'expression de $E_{n,p}$ en fonction de n et p.

3. a) Développer $(a+b+c)^n$.

b) Déterminer en fonction des paramètres n, p et q dans $\mathbb{N}^*$, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ du système :

$$\begin{cases} \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = q \\ \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = p \end{cases}.$$

(On pourra commencer par les cas $n = 1, n = 2$, et dans le cas général raisonner sur le nombre de fois ou le min et le max sont atteints)

4. Déterminer une constante C telle que la suite de terme général $E_{n,n}$ soit équivalente à la suite de terme général $C(2n)^n$.

Solution :

1. Manifestement $E_{1,p} = 2, (|x_1| = p)$. Pour déterminer $E_{2,p}$, il faut déterminer le nombre d'éléments $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x_1|, |x_2|) = p$. Ces deux entiers jouant un rôle symétrique, on peut supposer $\max(|x_1|, |x_2|) = |x_1|$. Dans ce cas, $|x_2| \leq p$, ce qui donne $2(2p+1)$ possibilités (pour $x_1 = p$ et $x_1 = -p$). On multiplie par 2 ce résultat (rôle symétrique de x_1 et x_2) et on enlève 4 éléments qui ont été comptés 2 fois (les quatre couples $(\pm p, \pm p)$). Finalement $E_{2,p} = 8p$.

2. a) On a $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p$ si et seulement si pour chaque i appartenant à $\{1, \dots, n\}, |x_i| \leq p$. Cela donne pour chaque x_i, $(2p+1)$ possibilités et si $S_{n,p}$ est le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'inéquation $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p$, alors $S_{n,p} = (2p+1)^n$.

b) On a bien évidemment :

$$E_{n,p} = S_{n,p} - S_{n,p-1} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$$

3. a) Un calcul immédiat donne :

$$(a+b+c)^n = ((a+b)+c)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (a+b)^{n-p} c^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} C_n^p C_{n-p}^q a^q b^{n-p-q} c^p$$

b) Pour $n = 1$, il n'y a pas de solutions si $p \neq q$ et 1 solution si $p = q$.
Si $n \geq 2$, il n'y a pas de solutions si $p < q$, et 2^n solutions lorsque $p = q$.

Si $p > q$, on peut supposer que l'on atteint α fois le maximum parmi les (x_i) et β fois le minimum. On a alors :

$$S = \sum_{\alpha \geq 1} \sum_{\beta \geq 1} C_n^\alpha C_{n-\alpha}^\beta 2^{\alpha+\beta}(2(p-q-1))^{n-\alpha-\beta}$$

et d'après la question précédente :

$$S = (2(p-q+1))^n - 2\sum_{\beta=0}^{n} C_n^\beta 2^\beta (2(p-q-1))^{n-\beta} + (2(p-q-1))^n$$

(la seconde somme correspond aux cas $\alpha = 0, \beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0, \beta = 0$, et la troisième au cas $\alpha = \beta = 0$).

Après calculs, il vient :

$$S = (2p - 2q + 2)^n - 2(2(p-q))^n + (2(p-q-1))^n$$

4. On sait que $E_{n,n} = (2n+1)^n - (2n-1)^n$. Donc :

$$\begin{aligned}
E_{n,n} &= (2n+1)^n \left(1 - \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\right) \\
&= e^{n\ln(2n+1)}\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)}\right) \\
&= e^{n\ln 2n} e^{n\ln(1+\frac{1}{2n})}\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)}\right) \\
&\sim (2n)^n e^{1/2}(1-e^{-1}) = (e^{1/2} - e^{-1/2})(2n)^n
\end{aligned}$$

Exercice 2-10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Soit $a > 0$ un réel donné. A tout $f \in E$ on associe la fonction $T_a(f)$ définie pour tout x réel par :

$$T_a(f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $T_a(f)$ est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $T = 2a$.

3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau. T_a est-il surjectif ?

4. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que la restriction de T_a à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On notera encore T_a cette restriction.

5. a) Montrer que la matrice associée à T_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. En déduire les valeurs propres de T_a. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

b) Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si le degré de f est égal à 2, f n'est pas vecteur propre de T_a.

c) Montrer que si f est vecteur propre de T_a, sa dérivée f' l'est également. En déduire les sous-espaces propres de T_a.

Solution :

1. Comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $T_a(f)(x) = \dfrac{1}{2a}(F(x+a) - F(x-a))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. La question précédente permet d'écrire, pour tout x réel :

$$T_a(f)'(x) = \frac{1}{2a}(f(x+a) - f(x-a))$$

- si f est $2a$–périodique, alors $T_a(f)'(x) = 0$, pour tout x réel et $T_a(f)$ est constante.
- réciproquement, si $T_a(f)$ est constante, pour tout x réel, $f(x+a) - f(x-a) = 0$, et pour tout x réel $f(x+2a) = f(x)$.

3. L'application T_a est linéaire par linéarité de l'intégrale. Par la question 1, T_a est un endomorphisme de E qui n'est pas surjectif, puisque $\operatorname{Im} T_a \subset C^1(\mathbb{R})$. Déterminons le noyau $\ker T_a$.
- si $f \in \ker T_a$, alors par la question 2, f est $2a$–périodique et :

$$0 = T_a(f)(0) = \int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_0^{2a} f(t)dt$$

Donc : $\ker T_a \subseteq E_{2a}^0 = \left\{ f \in E | f \text{ est } 2a-\text{périodique et } \int_0^{2a} f(t)dt = 0 \right\}$.
- réciproquement, soit $f \in E_{2a}^0$. Alors, par la question 2, $T_a(f)$ est constante et $T_a(f)(0) = 0$ entraîne que $f \in \ker T_a$. Finalement :

$$\ker T_a = E_{2a}^0 = \left\{ f \in E | f \text{ est } 2a-\text{périodique et } \int_0^{2a} f(t)dt = 0 \right\}$$

4. Déterminons l'image du polynôme X^n par T_a.

$T_a(X^n)(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} t^n dt = \dfrac{1}{2a(n+1)}\left((x+a)^{n+1} - (x-a)^{n+1}\right) = x^n + \cdots$

qui est un polynôme de degré n. Ainsi $T_a(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

5. a) On vient de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, T_a(X^k) \in \text{Vect}(1, X, \ldots, X^k)$, ce qui signifie que la matrice associée à T_a est triangulaire supérieure, la diagonale étant exclusivement composée de 1. L'unique valeur propre est donc 1 et l'endomorphisme T_a n'est pas diagonalisable, car autrement il serait scalaire.

b) Supposons que $f = X^2 + \alpha X + \beta$. Alors $T_a(f)(x) = x^2 + \alpha x + \dfrac{a^2}{3} + \beta$, et l'équation $T_a(f) = f$ est impossible. Ainsi, un polynôme de degré 2 ne peut être vecteur propre de T_a.

c) Si $T_a(f) = f$, en dérivant $(T_a(f))' = f'$. Or :

$$(T_a(f))' = \frac{1}{2a}\left(f(x+1) - f(x-a)\right) = T_a(f')$$

Donc $T_a(f') = f'$.

Par une récurrence immédiate, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}, T_a(f^{(k)}) = f^{(k)}$. Or si f est un vecteur propre de degré $n \geq 3$, alors $f^{(n-2)}$ sera un vecteur propre de degré 2, ce qui est impossible.

Les seuls vecteurs propres possibles sont donc de degré 0 ou 1, et on vérifie que $T_a(1) = 1, T_a(X) = X$. Ainsi $E_1(T_a) = \text{Vect}(1, X)$ est de dimension 2.

Exercice 2-11

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $(3,3)$ à coefficients réels.

On définit la trace d'une matrice carrée par la somme de ses termes diagonaux. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on la notera $\text{tr}(A)$.

1. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \langle A, B\rangle = \text{tr}(A.{}^tB).$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

2. a) On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orthogonal de J.

b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par J, et $F^\perp$ son orthogonal.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de E. On note A' la projection orthogonale de A sur F et A'' sa projection orthogonale sur $F^{\perp}$.
Déterminer A' et A''.

c) Application. Déterminer les projections orthogonales sur F et $F^{\perp}$ de la matrice identité I_3.

Solution :

1. La trace étant une forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'application φ est bilinéaire. Comme $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tA)$, on a :

$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(B^tA) = \mathrm{tr}(A^tB) = \varphi(B,A)$$

Enfin $\varphi(A,A) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}^2 \geq 0$ et $\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0$. Donc φ est un produit scalaire.

2. a) La matrice J étant symétrique, un calcul immédiat montre que $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ est orthogonale à J si et seulement si $\mathrm{tr}(AJ) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} = 0$$

L'orthogonal de J est donc l'hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'équation $\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} = 0$.

b) A' est multiple de J. On écrit donc $A = \lambda J + (A - \lambda J)$, le scalaire λ étant déterminé par la condition $A - \lambda J \in F^{\perp}$ ou $\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} - 9\lambda = 0$. Ainsi :

$$A' = \frac{1}{9}\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}\right) J, \quad \text{et } A'' = A - \frac{1}{9}\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}\right) J$$

c) Dans le cas de la matrice identité I, il vient $I' = \dfrac{1}{3}J$ et $I'' = I - \dfrac{1}{3}J$.

Exercice 2-12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2. Montrer que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 3id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A'^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n.

Solution :

1. La réduction de A par la méthode du pivot de Gauss donne que $1, 3$ sont les deux valeurs propres de A, les sous-espaces propres associés étant :

$$E_1 = \ker(A - I) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \ker(A - 3I) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable, puisque $\mathbb{R}^3$ n'est pas la somme directe des sous-espaces propres de A.

2. On a $(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $F = \ker(A - 3I)^2$ est le plan d'équation $x = y$. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartenant pas à ce plan. compte tenu des dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels, on en déduit que E_1 et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

D'après la forme de la matrice que l'on souhaite obtenir, la base (v_1, v_2, v_3) recherchée vérifie $f(v_1) = 3v_1, f(v_3) = v_3$. On choisit donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur v_2 doit vérifier $(f - 3I)v_2 = v_1$ donc $(f - 3I)^2(v_2) = 0$. Il suffit donc de le choisir différent de v_1 et dans $\ker(A - 3I)$; par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, on en déduit immédiatement que le système (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut écrire :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + J$$

avec $DJ = JD$ et $J^2 = 0$. Le binôme de Newton donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A'^n = D^n + nD^{n-1}J = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^n se fait ensuite par changement de base en utilisant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2-13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) \ = \ P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $P(X+a)$ en fonction de $P(X)$ et des n premières dérivées de $P, P^{(i)}(X)$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Que peut-on dire de $\varphi(P) - P''$?

En déduire le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P puis le noyau et l'image de l'endomorphisme φ.

c) Soit $Q \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P_0) = Q$.
Déterminer, en fonction de P_0, tous les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = Q$.

3.a) On considère une suite de polynômes $P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n$ tels que :
$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X$ et
$\forall\ k \in \{2, \cdots, n\},\ \varphi(P_k) = P_{k-2},\ P_k(0) = P_k(1) = 0.$
Montrer que si cette suite existe elle est unique.

b) Vérifier que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

c) Montrer que les polynômes $P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ecrire la matrice de φ sur cette base. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. La formule de Taylor pour les polynômes est une formule «exacte», c'est-à-dire, pour tout polynôme P de degré n :

$$P(X+a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)a^i}{i!}$$

2. a) De façon évidente φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

b) En utilisant la question précédente, on peut écrire :

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)2^i}{i!} + P(X) - 2\sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)}{i!} = P''(X) + R(X)$$

où $R(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $(n-2)$. Donc :

- si $\deg(P) < 2$, on a $\varphi(P) = 0$,
- si $\deg(P) \geq 2$, on a $\deg(\varphi(P))=\deg(P) - 2$. On a alors $\ker\varphi = \mathbb{R}_1[X]$, et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

c) L'équation $\varphi(P) = Q$ est équivalente à $\varphi(P - P_0) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$P(X) = P_0(X) + \alpha X + \beta$$

3. a) Supposons qu'il existe deux suites (P_k) et (R_k) qui vérifient les conditions données.

Par la question précédente, il existe des réels (α_k, β_k) tels que $P_k = R_k + \alpha_k X + \beta_k$.

Les conditions $P_k(0) = P_k(1) = R_k(0) = R_k(1) = 0$ entraînent que $\alpha_k = \beta_k = 0$.

b) On a pour tout $k \geq 2, P_k(0) = P_k(1) = 0$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. On a alors $\varphi = T^2$. De plus :

$$\begin{aligned} T(P_k) &= \frac{(X+1)(X)\cdots(X-k+2)}{k!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}((X+1) - (X-k+1)) = P_{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(P_k) = T^2(P_k) = P_{k-2}$.

c) La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme φ n'est pas diagonalisable, puisque si P est un polynôme de degré $k \geq 2$, alors $\varphi(P)$ est de degré $k-2$. L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ n'est donc pas possible pour $\lambda \neq 0$. Seul $\mathbb{R}_1[X]$ (de dimension 2) est sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Exercice 2-14

Soit $n \geq 3$ un entier naturel et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{si } i = 1 \text{ ou } i = n, 1 \leq j \leq n \\ 1 & , \text{si } j = 1 \text{ ou } j = n, 1 \leq i \leq n \\ 0 & , \text{autrement} \end{cases}$$

Déterminer les éléments propres de A.

Solution :

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 2 (toutes les colonnes sont liées aux deux premières colonnes qui sont libres). On sait ainsi que 0 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est $\ker A$ de dimension $n-2$.

Soit $\lambda \neq 0$ une autre valeur propre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

L'équation $AX = \lambda X$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda x_n \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ x_1 + x_n = \lambda x_3 \\ \qquad\vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

Or, comme $\lambda \neq 0$, ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 = x_n = \frac{1}{\lambda}\sum x_i \\ x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = \frac{1}{\lambda}(x_1 + x_n) \end{cases}$$

donc $x_1 \neq 0$ et le couple (λ, x_1) vérifie l'équation $2x_1 + (n-2)\dfrac{2x_1}{\lambda} = \lambda x_1$ ou :

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Ainsi, $\lambda \in \{1+\sqrt{2n-3}, 1-\sqrt{2n-3}\}$ et un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs de λ est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 2-15

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire φ défini par :

$$\forall\ A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij})\ \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$$

On note $||A||$ la norme de A associée à ce produit scalaire.

Soit J la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On considère l'application f de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associe la matrice JM.

1. Déterminer l'image de f, $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que B n'est pas élément de $\mathrm{Im}(f)$.
Déterminer les matrices pour lesquelles la distance de B à $\mathrm{Im}(f)$ est atteinte.

Solution :

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$. Le calcul de JM donne :

$$JM = \begin{pmatrix} a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \\ a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \\ a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \end{pmatrix}$$

Ainsi si l'on pose :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$JM = (a+b+c)E_1 + (a'+b'+c')E_2 + (a''+b''+c'')E_3$$

et

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(E_1, E_2, E_3)$$

2. Trivialement $B \notin \operatorname{Im}(f)$. On sait que la distance de B à $\operatorname{Im}(f)$ est minimale lorsque $f(M)$ est la projection orthogonale de B sur $\operatorname{Im}(f)$. On sait alors que $f(M) - B$ est orthogonal à $\operatorname{Im}(f)$, donc à sa base, soit :

$$\varphi(E_1, f(M) - B) = \varphi(E_2, f(M) - B) = \varphi(E_3, f(M) - B) = 0$$

ou

$$\begin{cases} 3(a+b+c) - 3 = 0 \\ 3(a'+b'+c') - 3 = 0 \\ 3(a''+b''+c'') - 3 = 0 \end{cases}$$

Toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ telle que $a+b+c = a'+b'+c' = a''+b''+c'' = 1$ convient, la projection orthogonale $f(M)$ étant la matrice J.

Exercice 2-16

On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

1. Quelles sont les dimensions respectives du noyau et de l'image de φ ?

2. Donner une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ (on pourra chercher la forme générale des primitives qui s'annulent en 0 des polynômes P de $\operatorname{Ker}(\varphi)$).

Solution :

1) L'application φ est linéaire et différente de l'application nulle, puisque $\varphi(1) = 1$.

L'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non réduit au vecteur nul. Donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, qui est de dimension 1 et, par le théorème du rang, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension $(n+1) - 1 = n$.

2) Si $P = \sum a_k X^k$, notons Q la primitive de P nulle en 0.

(On a donc $Q = \sum \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$).

Alors $\varphi(P) = Q(1) - Q(0) = Q(1)$ et $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si Q (qui s'annule déjà en 0) s'annule aussi en 1. Par conséquent si et seulement si Q est de la forme :

$$Q = (X-1)\sum_{k=1}^{n} b_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_k (X^{k+1} - X^k)$$

Par dérivation, on en déduit que ceci se produit si et seulement si P est de la forme :

$$P = \sum_{k=1}^{n} b_k \big[(k+1)X^k - kX^{k-1}\big]$$

Les polynômes $(k+1)X^k - kX^{k-1}$, pour $1 \leq k \leq n$ forment une famille échelonnée en degrés, donc une famille libre, de cardinal n dont tous les éléments sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$. On a bien construit une base du noyau de φ.

Exercice 2-17

Soit A une matrice carrée d'ordre 3. On suppose que A admet trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3. Soient U_1, U_2 et U_3 des vecteurs colonnes propres de A respectivement associés à ces trois valeurs propres. On pose $V = U_1 + U_2 + U_3$.

1. Montrer que V, AV, A^2V forment un système libre.

2. Soit M une matrice vérifiant $AM = MA$.

Vérifier que $A^2M = MA^2$.

Montrer qu'il existe trois scalaires α, β et γ tels que $MV = \alpha V + \beta AV + \gamma A^2V$.

Exprimer MAV et MA^2V.

En déduire que $AM = MA$ si et seulement si M appartient au sous-espace vectoriel engendré par I_3, A, A^2.

Solution :

1. Soit $\alpha V + \beta AV + \gamma A^2V = 0$ une relation de dépendance entre ces trois vecteurs. Cela s'écrit :

$$(\alpha+\beta\lambda_1+\gamma\lambda_1^2)U_1+(\alpha+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_2^2)U_2+(\alpha+\beta\lambda_3+\gamma\lambda_3^2)U_3=0$$

Soit, par liberté de la famille (U_1,U_2,U_3) (vecteurs colonnes associés à des valeurs propres deux à deux distinctes) :

$$\begin{cases}\alpha+\beta\lambda_1+\gamma\lambda_1^2=0\\ \alpha+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_2^2=0\\ \alpha+\beta\lambda_3+\gamma\lambda_3^2=0\end{cases}$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sont trois racines du polynôme $\alpha+\beta X+\gamma X^2$, qui est donc le polynôme nul et $\alpha=\beta=\gamma=0$: la famille est libre.

2. $\star$ $AM=MA \implies A^2M=AAM=AMA=MAA=MA^2$.

$\star$ (V,AV,A^2V) est libre de cardinal 3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc est une base de cet espace et le vecteur colonne MV se décompose sur cette base.

$\star$ $MV=\alpha V+\beta AV+\gamma A^2V=(\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2)V$ donne successivement :

$MAV=AMV=A(\alpha V+\beta AV+\gamma A^2V)=(\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2)AV$

$MA^2V=A^2MV=A^2(\alpha V+\beta AV+\gamma A^2V)=(\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2)A^2V$

Ainsi, si $AM=MA$, les endomorphismes canoniquement associés à M et $\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2$ (où α,β,γ sont définis par la décomposition du vecteur colonne MV) concident sur une base. Donc ces endomorphismes sont égaux et l'on a : $M=\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2$.
Réciproquement, il est clair que $\alpha I_3+\beta A+\gamma A^2$ commute avec A et le commutant de A est $\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

Exercice 2-18

Soit $n\geq 2$ un entier naturel et E un espace vectoriel réel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres réelles distinctes.

1. Montrer que pour tout endomorphisme g de E, $f\circ g=g\circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g. En déduire alors que g est diagonalisable.

2. Montrer qu'il existe un endomorphisme h de E non nul tel que $h\circ f=-f\circ h$ si et seulement si f possède deux valeurs propres opposées.

Solution :

1. $\star$ Si $f\circ g=g\circ f$, soit e_i un vecteur propre de f et λ_i la valeur propre associée. On a :

$$f\circ g(e_i)=g\circ f(e_i),\text{ soit } f\big(g(e_i)\big)=g(\lambda_ie_i)=\lambda_ig(e_i)$$

Mais f admettant n valeurs propres, les sous-espaces propres associés sont des droites et $g(e_i)$ appartient à la droite engendrée par e_i : le vecteur e_i est propre pour g, associée à une valeur propre μ_i (mais on peut avoir $\mu_i = \mu_j$, avec ij). La base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ qui est propre pour f l'est aussi pour g et f et g sont (co)-diagonalisables.

$\star$ Réciproquement, si les vecteurs propres de f sont propres pour g, alors les matrices de f et g relativement à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont toutes deux diagonales et f et g commutent.

2. $\star$ Supposons qu'il existe h, non nul, tel que $h \circ f = -f \circ h$. Alors, il existe au moins un vecteur e_i de B tel que $h(e_i)0$ et on a :

$$-h\big(f(e_i)\big) = f\big(h(e_i)\big), \text{ d'où : } f\big(h(e_i)\big) = -\lambda_i h(e_i)$$

Le vecteur $h(e_i)$ étant non nul, $-\lambda_i$ est valeur propre de f.

$\star$ Supposons que f ait deux valeurs propres opposées.

S'il s'agit de la valeur propre 0, quitte à renuméroter les vecteurs de B, on peut supposer que $f(e_1) = 0$. On définit alors l'endomorphisme h par : $h(e_1) = e_1$ et pour $i \geq 2, h(e_i) = e_i$: on vérifie que h convient.

Sinon, quitte à renuméroter les vecteurs de B, on peut supposer que l'on a $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = -\lambda e_2$. On vérifie alors que l'endomorphisme h défini par : $h(e_1) = e_2$ et pour $i \geq 2, h(e_i) = 0$, convient.

Exercice 2-19

On considère l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire tel que la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ soit orthonormée.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que ${}^tAA = I_3$.

2. On pose $v = I - f$, où I désigne l'endomorphisme identité de E. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E. Donner une base orthogonale de chacun d'eux.

3. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que g est une projection orthogonale dont on déterminera le noyau et l'image.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f^k$, où f^k désigne la composée de f avec elle-même k fois (on pose $f^0 = I$).
Montrer que pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$ (la limite d'une suite de vecteurs s'entendant coordonnée par coordonnée).

Solution :

1. Il suffit de faire le calcul.

2. La matrice de v relativement à la base $\mathcal{B}$ est $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cette matrice est de rang 1, le noyau de v est le plan P d'équation $(1-\sqrt{2})x + y = 0$ et l'image est la droite D engendrée par le vecteur $(\sqrt{2}-1, -1, 0)$.
Une base orthogonale du plan P est, par exemple : $\big((1, \sqrt{2}-1, 0), (0,0,1)\big)$
3. On constate que $C^2 = C$, donc g est un projecteur. De plus l'image de g est P et son noyau est D. Ces deux sous-espaces étant supplémentaires orthogonaux, g est bien une projection orthogonale.
4. Dans la base $\big((1, \sqrt{2}-1, 0), (0,0,1), (\sqrt{2}-1, -1, 0)\big)$, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il suffit de déterminer, par exemple par un calcul direct, les images des vecteurs de cette nouvelle base)
Par conséquent, la matrice dans cette même base de f_n est :

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \end{pmatrix}$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut 0 ou 1, selon la parité, on en déduit que la limite de F_n est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est justement la matrice de g dans la nouvelle base. Donc, en revenant aux matrices associées, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

Exercice 2-20

Soit n un entier naturel, avec $n \geq 2$. On note $E = O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A telles que ${}^tAA = I_n$.

1. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Soit X la matrice à n lignes et une colonne définie par : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tXAX$.

2. Déterminer la valeur de $\sup\limits_{(a_{i,j}) \in E} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Solution :

1. On a ${}^tXAX = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}$.

2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour tout vecteur y, on a en notant Y sa matrice colonne relativement à la base canonique :

$$\|f(y)\|^2 = \langle f(y), f(y) \rangle = {}^t(AY))(AY) = {}^tY{}^tAAY = {}^tYY = \|y\|^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne donc, pour tout vecteur y :

$$\langle y, f(y) \rangle \leq \|y\|.\|f(y)\| = \|y\|^2$$

Et en appliquant ceci au vecteur $y = (1, 1, \ldots, 1)$ de matrice colonne X :

$${}^tXAX = \langle x, f(x) \rangle \leq \|x\|^2 = n$$

Par conséquent, d'après le résultat de la question 1) :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \sum_{i,j} a_{i,j} \leq n$$

L'égalité ayant lieu pour la matrice I_n (qui est bien dans $O_n(\mathbb{R})$), le sup est donc un max et vaut n.

Exercice 2-21

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$.

Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes de E.

1. En considérant la restriction de f_1 au noyau de $f_2 \circ f_1$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leq \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

2. Généraliser le résultat précédent à p endomorphismes de E, $f_1, \ldots, f_p$, avec $p \geq 2$.

3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^4 = id$, où id représente l'endomorphisme identité. Montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. Notons g la restriction de f_1 à $\mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1)$.

$\star$ $\mathrm{Ker}\, g = \{x \in \mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1) \mid f_1(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1) \cap \mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_1$, car l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f_1 \subset \mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1)$ est banale.

$\star$ $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f_2$, puisque pour tout x de $\mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1)$, $g(x) = f_1(x)$ est tel que $f_2\big(f_1(x)\big) = 0$.

Le théorème du rang indique que $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1)$, soit :

$$\dim \mathrm{Ker}(f_2 \circ f_1) = \dim \mathrm{Ker}\, f_1 + \dim \mathrm{Im}\, g \leq \dim \mathrm{Ker}\, f_1 + \dim \mathrm{Ker}\, f_2$$

2. Par une récurrence évidente, on a donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}\, f_k$$

3. E étant un espace vactoriel complexe, $f^4 - id = 0$ s'écrit :

$$(f - id) \circ (f + id) \circ (f - i.id) \circ (f + i.id) = 0$$

et, par application du résultat de la question 2) :

$$n = \dim E = \dim \mathrm{Ker}(f - id) \circ (f + id) \circ (f - i.id) \circ (f + i.id)$$

Soit :

$$n \leq \dim \mathrm{Ker}(f - id) + \dim \mathrm{Ker}(f + id) + \dim \mathrm{Ker}(f - i.id) + \dim \mathrm{Ker}(f + i.id)$$

Or les sous-espaces précédents qui ne se réduisent pas à $\{0\}$ sont des sous-espaces propres de f, ils sont donc en somme directe et :

$$n \leq \dim(\mathrm{Ker}(f - id) \oplus \mathrm{Ker}(f + id) \oplus \mathrm{Ker}(f - i.id) \oplus \mathrm{Ker}(f + i.id)) \leq n$$

La somme des dimensions de ces noyaux est donc exactement n, ce qui signifie que f est diagonalisable.

Exercice 2-22

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note E, l'espace vectoriel des applications continues de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$.

On note F, l'ensemble des applications f de E telles que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $[k, k+1]$ est affine.

1. a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que l'application

$$\theta : F \to \mathbb{R}^{n+1}, f \mapsto \big(f(0), f(1), \dots, f(n)\big)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Qu'en déduit-on pour F ?

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $n = 2$.

2. On note $f_0 = \theta^{-1}\big((1,0,0)\big), f_1 = \theta^{-1}\big((0,1,0)\big), f_2 = \theta^{-1}\big((0,0,1)\big)$.

a) Représenter graphiquement les applications f_0, f_1 et f_2.

b) Que peut-on dire de la famille (f_0, f_1, f_2) ?

3. On munit E du produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^2 f(t)g(t)\,dt$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

On note f l'élément de E défini par $\forall\, x \in [0,2], f(x) = x^2$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément g de F tel que :

$$\forall\, i \in [\![0,2]\!], \langle f - g, f_i\rangle = 0$$

et déterminer cette application g.

b) Que représente g vis-à-vis de f et quelle propriété a-t-on concernant $\|\cdot\|$?

Solution :

1. a) F est inclus dans E (les éléments de F sont continus aussi aux points entiers), est non vide car il contient la fonction nulle, et si f et g sont telles que chaque restriction à $[k, k+1]$ est affine, il en est de même de toute combinaison linéaire $f + \lambda g$.

b) L'application θ est linéaire, et un élément de F est parfaitement défini par ses valeurs aux points entiers. En d'autres termes θ réalise une bijection linéaire de F sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi F est de dimension $n+1$.

2. a)

b) La famille (f_0, f_1, f_2) est l'image par l'isomorphisme θ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est donc une base de F.

3. a) On cherche donc g sous la forme $g = x_0 f_0 + x_1 f_1 + x_2 f_2$ et, en calculant tous les produits scalaires, g est solution si et seulement si (x_0, x_1, x_2) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{6}x_1 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6}x_0 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{17}{12} \end{cases}$$

D'où l'unique solution : $x_0 = -\frac{1}{6}; x_1 = \frac{5}{6}; x_2 = \frac{23}{6}$

et g est définie par : $g(x) = x - \frac{1}{6}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) = 3x - \frac{13}{6}$ si $1 \leq x \leq 2$.

b) La fonction g est la projection orthogonale de la fonction f sur F, donc pour toute fonction h de F, on a : $\|f - h\| \geq \|f - g\|$, avec égalité seulement pour $h = g$.

Exercice 2-23

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

On note $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ la matrice de terme général :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, si } j = i + 1 \text{ ou si } (i,j) = (p,1) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

1. a) Si $r \in [\![0, p-1]\!]$, on pose $\omega_r = \mathrm{e}^{2ir\pi/p}$ et $X_r = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_r \\ \omega_r^2 \\ \vdots \\ \omega_r^{p-1} \end{pmatrix}$

Montrer que X_r est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre associée.

b) A_p est-elle diagonalisable ?

Dans la suite de l'exercice, on se donne un réel $c \in]0,1[$ et on considère trois suites de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = cu_n + (1-c)v_n \\ v_{n+1} = cv_n + (1-c)w_n \\ w_{n+1} = cw_n + (1-c)u_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

2. a) Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$.

   b) Montrer que 1 est valeur propre de M et préciser l'espace propre associé.

   c) Comparer le module des autres valeurs propres de M à 1.

3. a) Montrer que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note ℓ, ℓ' et ℓ'' leurs limites respectives et $X_\infty = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell' \\ \ell'' \end{pmatrix}$

   b) Montrer que $MX_\infty = X_\infty$. Qu'en déduit-on ?

   c) Généraliser le résultat obtenu.

Solution :

1. a) La matrice A_p est une matrice de «permutation circulaire» et on obtient facilement : $A_pX_r = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r^2 \\ \vdots \\ \omega_r^p \end{pmatrix} = \omega_r X_r$. Donc X_r est une colonne propre pour A_p, associée à la valeur propre ω_r.

   b) A_p possède p valeurs propres : $1 = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{p-1}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2. a) On a : $M = \begin{pmatrix} c & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1-c \\ 1-c & 0 & c \end{pmatrix}$.

   b) 1 est valeur propre de M, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c) On a $M = c.I_3 + (1-c)A_3$, d'après la première question, les valeurs propres de M sont donc : $c+(1-c) = 1$ (déjà vu) et les nombres $\mu = c+(1-c)j$ et $\overline{\mu} = c + (1-c)j^2$.

On a : $|\mu|^2 = |\overline{\mu}|^2 = 1 - \dfrac{3}{2}c(1-c) < 1$.

3. a) La matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que : $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix} P^{-1}$. D'où :

$$X_n = M^n X_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu}^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

La limite d'une suite de matrices s'entendant terme à terme, on obtient donc :

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

b) On a $X_{n+1} = MX_n$ et donc, par propriétés des limites (limites de sommes et produits) : $X_\infty = MX_\infty$. Ainsi X_∞ est une colonne propre de M pour la valeur propre 1, donc est colinéaire à la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\ell = \ell' = \ell''$.

c) Plus généralement, si on a p suites complexes $(z_n^{(1)}), \dots, (z_n^{(p)})$ telles que, pour tout $r \leq p-1$ et $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1}^{(r)} = cz_n^{(r)} + (1-c)z_n^{(r+1)}$ et $z_{n+1}^{(p)} = cz_n^{(p)} + (1-c)z_n^{(1)}$, alors ces suites sont convergentes de même limite, car les valeurs propres de $M_p = c.I_p + (1-c)A_p$ autres que 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1.

Exercice 2-24

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa structure euclidienne canonique (c'est-à-dire telle que la base canonique soit orthonormée).

On pose $F = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$.

1.) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminer une base de F.

3. Déterminer $d(X, F)$ (distance du polynôme X au sous-espace F, c'est-à-dire $\inf\limits_{P\in F} \|X - P\|$).

Solution :

1. F n'est pas vide, puisqu'il contient le polynôme nul (ou le polynôme $X-1$) et clairement : $P(1) = 0, Q(1) = 0 \implies, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, (P + \lambda Q)(1) = 0$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ appartient à F si et seulement si il est divisible par $X-1$. Une base de F est donc $\big(X-1, X(X-1)\big)$.

3. On cherche une base orthonormée de F et pour cela on orthonormalise la base précédente par le procédé de Gram-Schmidt, le produit scalaire étant $\langle \sum a_i X^i, \sum b_i X^i \rangle = \sum a_i b_i$ et donc $\| \sum a_i X^i \|^2 = \sum a_i^2$.

$e_1 = \dfrac{X-1}{\|X-1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$

$e_2 = \dfrac{X(X-1) - \langle X(X-1), e_1\rangle e_1}{\|X(X-1) - \langle X(X-1), e_1\rangle e_1\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2})$

On a alors : $d^2(X,F) = \|X\|^2 - \langle X, e_1\rangle^2 - \langle X, e_2\rangle^2 = \dfrac{2}{6}$ et donc :

$$d(X,F) = \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 2-25

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le plan d'équation : $x+y-z=0$.

Déterminer les matrices A et B, dans la base canonique, des projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$.

Solution :

Notons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\star$ Le plan F est normal au vecteur unitaire $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$. Si q désigne la projection orthogonale sur la droite $F^\perp$ (qui est engendrée par $\vec{n}$), on a :

$$q(\vec{e}_1) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$$

et de la même façon :

$$q(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3),\ q(\vec{e}_3) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{n})\vec{n} = -\frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

D'où : $M(q) = B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\star$ Si p est la projection orthogonale sur F, on a $p+q = id$, soit :

$$A = M(p) = I - B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2-26

I. Étude d'un exemple :

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice
$M = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de E. Montrer que : $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer le noyau et l'image de f et montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

4. Caractériser f et retrouver le résultat de la question 1).

II. Cas général :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et p un projecteur de E.

1. On suppose $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ orthogonaux. Montrer que pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

2. On suppose $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ non orthogonaux. Montrer que l'on peut trouver un vecteur x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.

3. En déduire qu'un projecteur p, non nul, est orthogonal si et seulement si :
$$\sup_{x0} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1.$$

Solution :

I. 1. On a : $f(x) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}(1, 1, \dots, 1)$ et donc :
$$\|f(x)\|^2 = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n}$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} 1.x_k\big)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, ce qui signifie exactement que $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

I. 2. On a $M^2 = M$, donc f est un projecteur.

I. 3. L'image de f est engendrée par le vecteur $u = (1, 1, \ldots, 1)$ et son noyau est le sous-espace d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Or un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonal à u si et seulement si $\sum x_k = 0$ (expression du produit scalaire, la base canonique étant orthonormée). Donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

I. 4. f est donc la projection orthogonale sur la droite engendrée par u et, par le théorème de Pythagore, pour tout vecteur x, on a : $\|f(x)\| \leq \|x\|$

II. 1. Pour tout x de E, on écrit $x = p(x) + (x - p(x))$ et comme $x - p(x)$ est orthogonal à x, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

II. 2. Si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ ne sont pas orthogonaux, on peut trouver un vecteur x non nul tel que x soit orthogonal à $\operatorname{Ker} p$ et $x \notin \operatorname{Im} p$. Alors $x - p(x)$ est non nul et orthogonal à x et le théorème de Pythagore donne ici :

$$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - x + x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|x\|^2 > \|x\|^2$$

II. 3. $\star$ Si p est un projecteur orthogonal non nul, on a, pour tout vecteur x de E : $\|p(x)\| \leq \|x\|$, avec égalité pour $x \in \operatorname{Im} p \setminus \{0\}$. Donc $\sup\limits_{x0} \dfrac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1$

$\star$ Si p est un projecteur non orthogonal, il existe x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$ et la borne supérieure précédente (si elle existe) ne peut être égale à 1.

D'où l'équivalence demandée.

Exercice 2-27

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel S des suites réelles, on considère :

$E = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\}$

$E_1 = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} + x_n = 0\}$

$E_2 = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S

2. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'eux.

3. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. En déduire une base de E.

Solution :

1. E est une partie non vide de S (elle contient la suite nulle), clairement stable par combinaisons linéaires : E est un sous-espace vectoriel de S.

2. $\star$ E_1 est l'ensemble des suites géométriques de raison -1, donc est la droite engendrée par la suite $a = (a_n)_n = \big((-1)^n\big)_n$. On vérifie que a est un élément de E, donc E_1 est un sous-espace vectoriel de E de base (a).

$\star$ E_2 est l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire à deux termes d'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

1 est racine double de cette équation et on sait alors que tout élément de E_2 est une suite de la forme $n \mapsto \lambda.1^n + \mu n.1^n = \lambda + n.\mu$, les paramètres λ et μ étant définis par les deux premiers termes de la suite. Tout élément de E_2 est donc combinaison linéaire des suites $b = (1)_n$ et $c = (n)_n$. L'ensemble E_2 est donc le sous-espace engendré par b et c et ces deux suites étant non proportionnelles elles forment une base de E_2.

(On peut aussi écrire la relation de définition sous la forme $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, ce qui caractérise les suites arithmétiques)

3. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi\big((x_n)_n\big) = (x_0, x_1, x_2)$ est clairement linéaire et bijective, puisque la relation de récurrence définit parfaitement (justement par ... récurrence !) une suite x de E à partir du triplet quelconque de ses trois premiers termes.

Donc E est un espace vectoriel de dimension 3 et comme on a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ (vérification facile), E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
Ainsi (a, b, c) est une base de E.

Exercice 2-28

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

1. Dire pourquoi il existe une matrice carrée d'ordre n inversible P, telle que ${}^tPSP$ soit diagonale, avec $P^{-1} = {}^tP$.

On note α la plus petite et β la plus grande valeur propre de S.

2. Soit λ une valeur propre réelle de A, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une colonne propre associée.

   a) Calculer ${}^tXSX$ en fonction de λ et des coefficients x_i.

b) Soit $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer ${}^tXSX$ à l'aide des valeurs propres de S et des coefficient y_i. En déduire que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution :

1. La matrice S est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on peut choisir la matrice de passage diagonalisante P telle que $P^{-1} = {}^tP$ (matrice de changement de bases orthonormées).

2. a) On a $AX = \lambda X$ et donc ${}^tX{}^tA = \lambda{}^tX$, d'où :

$$ {}^tXSX = \lambda{}^tXX = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 $$

b) Notons ${}^tPSP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont rangés par ordre croissant (au sens large). On a alors :

$$ {}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 $$

Et donc :

$$ \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 $$

Mais $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = {}^tYY = {}^tXP{}^tPX = {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, et comme X n'est pas la colonne nulle, il vient bien :

$$ \alpha = \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n = \beta $$

3. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $S = 2I$, d'où $\alpha = \beta = 2$ et la seule valeur propre réelle possible de A est $\lambda = 2$.

Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle serait semblable à $2I$, donc égale à $2I$, ce qui est évidemment faux.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2-29

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne.

Trois réels a, b, c étant donnés tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $c \neq 0$, on pose :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

1.Montrer que pour tous vecteurs U et V de $\mathbb{R}^3$, on a : $\langle MU, V \rangle = -\langle MV, U \rangle$.

2. En déduire la seule valeur propre réelle possible de M et le sous-espace propre associé.

3. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (U, V, W)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $MW = 0$.

4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$: $X \mapsto MX$ dans cette base $\mathcal{B}$ (on la notera A dans la suite de cet exercice).

5. On définit sur $\mathbb{R}^3$ la fonction $f : X \mapsto {}^tXM^2X$, où ${}^tX$ désigne la matrice transposée de X.

Rechercher ses extremums locaux. (Il n'est pas nécessaire de dériver)

6. Calculer A^2, en déduire une relation entre M^2X et X lorsque $\langle \Omega, X \rangle = 0$.

7. M^2 est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. On a :

$$\langle MU, V \rangle = {}^t(MU)V = {}^tU{}^tMV = -{}^tUMV = -\langle U, MV \rangle$$

On conclut par symétrie du produit scalaire.

2. Soit X un vecteur quelconque, on a : $\langle MX, X \rangle = -\langle MX, X \rangle$, c'est-à-dire : $\langle MX, X \rangle = 0$, et si X est propre pour la valeur propre réelle λ : $\lambda \|X\|^2 = 0$.

Comme X n'est pas la colonne nulle, il reste $\lambda = 0$.

La matrice M est de rang 2, donc son noyau est de dimension 1. On voit que $\Omega \in \operatorname{Ker} M$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite engendrée par Ω.

3. On prend $W = \Omega$ (on pourrait prendre $-\Omega$). Tout vecteur de la forme $\begin{pmatrix} kc \\ 0 \\ -ka \end{pmatrix}$ est orthogonal à Ω et pour prendre U unitaire, on peut choisir $k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$.
Enfin, MU est orthogonal à U et aussi à Ω, puisque

$$\langle MU, \Omega\rangle = -\langle U, M\Omega\rangle = -\langle U, 0\rangle = 0.$$

On peut donc prendre V colinéaire à $MU = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} -ab \\ a^2+c^2 \\ -bc \end{pmatrix}$ et ce vecteur étant unitaire, on prend $V = MU$.

4. On a déjà $M\Omega = 0$ et $MU = V$, on calcule alors MV et on trouve $-U$. Ainsi la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme canoniquement associé à M est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Comme M est antisymétrique : ${}^tXM^2X = -{}^t(MX)(MX) = -\|MX\|^2$. Il est alors clair que le *maximum* de f vaut 0 (et il est atteint pour les colonnes X colinéaires à Ω), tandis que f n'a pas d'extremum en un point X tel que $f(X)0$, puisque $f(tX) = t^2 f(X)$, qui n'a pas d'extremum au voisinage de $t = 1$.

6. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $M^2U = -U$ et $M^2V = -V$ (ce sont les deux premiers vecteurs de la nouvelle base, à un coefficient multiplicatif près), donc tout vecteur orthogonal à Ω est transformé par M^2 en son opposé.

7. A et M sont semblables, donc A^2 et M^2 aussi et M^2 est diagonalisable (on peut aussi remarquer que M^2 est symétrique réelle).

Exercice 2-30

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, avec $n > 0$.

1. Soient f et g deux endomorphismes de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$, pour que $f \circ g$ soit l'endomorphisme nul de l'espace E.

2. Soit F un sous-espace de E et p sa dimension.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_F$ des endomorphismes g de E tels que $\operatorname{Im} g$ est incluse dans F est un espace vectoriel réel de dimension np.

3. Soit u un endomorphisme quelconque de E.
On considère l'application φ_u de $\mathcal{L}(E)$ (ensemble des endomorphismes de E) dans lui-même définie par la relation : $\varphi_u(f) = u \circ f$.

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que si le réel λ est valeur propre de u, alors λ est valeur propre de φ_u, et que la dimension du sous-espace propre de φ_u associé à λ est égale à $n.d_\lambda$, où d_λ est la dimension du sous-espace propre de u associé à cette valeur propre λ.

c) En déduire que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.

d) **Application** : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels) défini par la relation : $\psi(M) = AM$ est-il diagonalisable ?

e) Montrer que si le réel λ est valeur propre de φ_u, alors λ est valeur propre de u.
Montrer que si φ_u est diagonalisable, alors u est diagonalisable.

Solution :

1. On a :
$$f \circ g = 0 \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, f\big(g(x)\big) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f.$$

2. L'ensemble $\mathcal{E}_F$ n'est pas vide, car il contient l'endomorphisme nul, et est stable par combinaisons linéaires (car $\operatorname{Im} f_1 \subset F$ et $\operatorname{Im} f_2 \subset F \implies \operatorname{Im}(f_1 + \lambda f_2) \subset F$), donc $\mathcal{E}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

D'autre part, l'application $j : \mathcal{E}_F \to \mathcal{L}(E, F)$, qui à un endomorphisme g dont l'image est incluse dans F associe l'unique application linéaire $\widehat{g}$ de E vers F définie par : pour tout x de E, $\widehat{g}(x) = g(x)$, est clairement linéaire et bijective (opération de restriction à l'arrivée), donc est un isomorphisme de $\mathcal{E}_F$ sur $\mathcal{L}(E, F)$. Ces deux espaces ont donc la même dimension, ce qui donne la conclusion.

3. a) Déjà φ_u applique bien $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même et la linéarité découle facilement de la linéarité de u.

b) $\mathrm{Ker}(\varphi_u - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ est l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $\varphi_u(f) = \lambda f$, c'est-à-dire tels que $(u - \lambda Id_E) \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
D'après le résultat de la première question, ceci a lieu si et seulement si l'image de f est contenue dans $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$. Cet espace est de dimension $d_\lambda \geq 1$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi_u - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ est de dimension $n.d_\lambda > 0$. Ce qui prouve que λ est effectivement valeur propre de φ_u et donne en prime la dimension du sous-espace propre associé.

c) Si u est diagonalisable, alors $\sum d_\lambda = n$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs propres de u. Par conséquent $\sum n.d_\lambda = n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$, ce qui signifie que φ_u est diagonalisable ($\mathcal{L}(E)$ est somme directe de sous-espaces propres pour l'endomorphisme φ_u de $\mathcal{L}(E)$, sans qu'il soit nécessaire de savoir si l'on connaît toutes les valeurs propres de φ_u).

d) Des calculs simples montrent que A admet trois valeurs propres : $0, 1$ et 2. Ainsi A est diagonalisable et, en confondant matrice et application linéaire canoniquement associée, les résultats précèdents montrent que ψ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

e) Si λ est valeur propre de φ_u, il existe f non nulle telle que $u \circ f = \lambda f$. Pour tout vecteur x tel que $y = f(x)0$ (il en existe !), on a alors $u(y) = \lambda y$ et λ est valeur propre de u. Ainsi il y a égalité entre l'ensemble des valeurs propres de u et l'ensemble des valeurs propres de φ_u. On peut donc maintenant écrire :

$$\sum_{\lambda \in spec(\varphi_u)} n.d_\lambda = n. \sum_{\lambda \in spec(u)} d_\lambda$$

Ainsi u est diagonalisable ($\sum_{\lambda \in spec(u)} d_\lambda = n$) si et seulement si φ_u est diagonalisable ($\sum_{\lambda \in spec(\varphi_u)} n.d_\lambda = n^2$).

3

PROBABILITÉS

Exercice 3-1

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, au hasard et sans remise, n boules de l'urne. On note X_i la variable aléatoire associée au numéro de la boule obtenue au i-ème tirage, ceci pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

1. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i. Préciser son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi du n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

A l'issue du n-ième tirage les numéros obtenus sont classés par ordre croissant. On note Y_j la variable aléatoire associée au j-ième numéro, classé par ordre croissant, obtenu parmi les n numéros.
Ainsi Y_1 est la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, Y_2 est le nombre aléatoire venant juste après Y_1, par ordre croissant, etc. et Y_n est la variable aléatoire $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. a) Déterminer la loi du n-uplet $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

b) Déterminer la loi de Y_j , pour $j = 1, 2, \ldots, n$.

c) Déterminer la loi du couple (Y_j, Y_k), pour $1 \leq j < k \leq n$.

On conserve les notations précédentes, en se restreignant au cas où $n = 3$.

3. a) Préciser la loi du couple (Y_1, Y_3). En déduire la loi de $D = Y_3 - Y_1$. Calculer l'espérance de D.

b) Déterminer la loi de Y_2. Que peut-on remarquer ?

c) Déterminer deux estimateurs sans biais de N, l'un défini comme fonction de D, l'autre comme fonction de Y_2.

Solution :

1. a) La variable aléatoire X_i prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$, ou $X_i(\Omega)=\{1,2,\dots,N\}$.

L'événement $(X_i=k)$ correspond à $\cap_{j=1}^{i-1}(X_j\neq k)\cap(X_i=k)$. Par la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(X_i=k)=\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1}\times\cdots\times\frac{N-i+1}{N-i+2}\times\frac{1}{N-i+1}=\frac{1}{N}$$

Ainsi, X_i suit une loi uniforme sur $\{1,2,\dots,N\}$. On a alors :

$$E(X_i)=\frac{N+1}{2},\qquad V(X_i)=\frac{N^2-1}{12}$$

b) Pour tout $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ distinct de $(\{1,2,\dots,N\})^n$, on a :

$$P(X_1=i_1,X_2=i_2,\dots,X_n=i_n)=\frac{1}{A_N^n}$$

En effet, il y a A_N^n n-uplets possibles, et 1 seul favorable à la réalisation de cet événement (le décompte se fait sans répétition, puisque les (i_k) sont distincts).

2. a) Pour tout $(j_1,j_2,\dots,j_n)$ de $(\{1,2,\dots,N\})^n$, avec $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n\leq N$, on a :

$$P(Y_1=j_1,Y_2=j_2,\dots,Y_n=j_n)=\frac{1}{C_N^n}$$

En effet, il y a C_N^n n-uplets possibles, et 1 seul favorable à la réalisation de cet événement (le décompte se fait sans ordre et sans répétition, puisque les (j_k) sont distincts).

b) Pour tout $j\in\{1,2,\dots,n\}$, on a $Y_j(\Omega)=\{j,\dots,N-n+j\}$. Pour tout $k\in Y_j(\Omega)$:

$$P(Y_j=k)=\frac{C_{k-1}^{j-1}C_1^1C_{N-k}^{n-j}}{C_N^n}$$

En effet, l'événement $(Y_j=k)$ correspond à l'événement « les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_{j-1}$ occupent un $(j-1)$-uplet sans ordre et sans répétition avant k, $Y_j=k$, les variables aléatoires $Y_{j+1},\dots,Y_n$ occupent un $(n-j)$-uplet sans ordre et sans répétition après k ».

c) Pour les mêmes raisons que ci-dessus, pour $1\leq j<k\leq n$,

$$(Y_j,Y_k)(\Omega)=\{(m,p)\in(\{1,\dots,N\})^2\mid j\leq m\leq p-k+j\leq N-n+j\}$$

et

$$P(Y_j = m, Y_k = p) = \frac{C_{m-1}^{j-1} C_1^1 C_{p-m-1}^{k-j-1} C_1^1 C_{N-p}^{n-k}}{C_N^n}$$

3. a) En reprenant la question précédente :

$$\begin{cases} (Y_1, Y_3)(\Omega) = \{(m,p) \in (\{1,\dots,N\})^2 \mid 1 \leq m \leq p-2 \leq N-2\} \\ P(Y_1 = m, Y_3 = p) = \dfrac{C_{p-m-1}^1}{C_N^3} \end{cases}$$

La variable aléatoire D est à valeurs dans $\{2,\dots,N-1\}$, et :

$$\begin{aligned} P(Y_3 - Y_1 = k) &= \sum_{j=1}^{N-k} P[(Y_3 = j+k) \cap (Y_1 = j)] = \sum_{j=1}^{N-k} \frac{C_{k-1}^1}{C_N^3} \\ &= \frac{(N-k)(k-1)}{C_N^3} \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance de D se fait alors aisément :

$$E(D) = \sum_{k=2}^{N-1} \frac{k(N-k)(k-1)}{C_N^3} = \frac{1}{C_N^3} \sum_{k=2}^{N-1} ((N+1)k^2 - Nk - k^3) = \frac{N+1}{2}$$

b) Déterminons la loi de Y_2. Par les questions précédentes, on a :

$$Y_2(\Omega) = \{2,\dots,N-1\}, \quad \text{et } P(Y_2 = k) = \frac{(k-1)(N-k)}{C_N^3}$$

On remarque que D et Y_2 suivent la même loi d'où $E(Y_2) = \dfrac{N+1}{2}$.

c) $D' = 2D - 1$ et $Y' = 2Y_2 - 1$ sont deux estimateurs sans biais de N. Ils ont de plus même variance ; on ne peut donc préférer l'un à l'autre.

Exercice 3-2

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p (avec $p \in]0,1[$) et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1. Donner la loi de Y_k, ainsi que l'espérance et la variance de Y_k.

2. Soient i et j deux entiers naturels distincts.
Discuter, suivant les valeurs de i et de j, de l'indépendance de Y_i et de Y_j.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\big(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon\big) = 0$$

Solution :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(Y_k = 1)$. Or

$$(Y_k = 1) = (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1).$$

Par l'indépendance des (X_k), $p(Y_k = 1) = p^2$. Finalement :

$$E(Y_k) = p^2, \qquad V(Y_k) = p^2(1 - p^2)$$

2. Si $j \neq i-1$ ou $j \neq i+1$, les variables aléatoires Y_i et Y_j sont indépendantes commes fonctions de variables aléatoires indépendantes.
Par contre, $P(Y_iY_{i+1} = 1) = P(X_iX_{i+1}^2X_{i+2} = 1) = p^3$,
alors que $P(Y_i = 1)P(Y_{i+1} = 1) = p^2$. Les variables Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

3. Calculons l'espérance et la variance de Z_n.

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = p^2$$

et

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)\right)\\
&\frac{1}{n^2}\left(np^2(1-p^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(np^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\big(np^2(1-p^2) + 2(n-1)(p^3 - p^4)\big)
\end{aligned}$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebicheff à Z_n, soit :

$$p(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} V(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(np^2(1-p^2) + 2(n-1)(p^3 - p^4)\big) = 0$$

Exercice 3-3

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$, et b un nombre réel strictement positif.

1. On pose $Y = -b\ln(X)$. Déterminer une densité de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y.
On pose : $U = Y_1 + Y_2, V = Y_1/Y_2$ (quotient de Y_1 par Y_2), $S = \ln(V)$.

2. a) Déterminer une densité de U.

b) Déterminer une densité de S (on déterminera au préalable une densité de $T = -\ln Y_2$).

c) En déduire une densité de V, puis une densité de la variable aléatoire W définie par $W = \dfrac{1}{1+V}$.
Préciser l'espérance et la variance de W.
d) En exprimant W en fonction de Y_1 et de Y_2, montrer que la valeur de l'espérance de W était prévisible.

e) Calculer $E(UW) - E(U)E(W)$. Quelle remarque peut-on faire ?

Solution :

1. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout $y > 0$:

$$P(Y < y) = P(X > e^{-\frac{y}{b}}) = 1 - e^{-\frac{y}{b}}$$

Aussi la densité de Y est définie par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}e^{-y/b} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que Y suit une loi $\Gamma(b,1)$, donc que $E(Y) = b, V(Y) = b^2$.

2. a) Les variables Y_1 et Y_2 suivant toutes deux une loi $\Gamma(b,1)$ et étant indépendantes, le cours nous dit que $U = Y_1 + Y_2$ suit une loi $\Gamma(b,2)$.

b) Soit $T = -\ln Y_2$. Alors $T(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout t réel :

$$P(T < t) = P(-b\ln X > e^{-t}) = P(X < \exp(-\frac{e^{-t}}{b})) = \exp(-\frac{e^{-t}}{b})$$

D'où la densité de T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T(t) = \exp(-\frac{e^{-t}}{b}) \cdot \frac{1}{b}e^{-t}$$

Un calcul similaire donne qu'une densité de $\ln Y_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{\ln Y_1}(t) = \exp(-\frac{e^t}{b}) \cdot \frac{1}{b}e^t$$

Posons $S = \ln Y_1 - \ln Y_2$. Alors $S(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln Y_1} f_{-\ln Y_1}(s-t)dt$$

soit

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{e^{-t}}{b}) \cdot \frac{1}{b}e^{-t}\exp(-\frac{e^{s-t}}{b}) \cdot \frac{1}{b}e^{s-t}dt$$

Posons $u = \varphi(t) = \dfrac{1}{b}e^{-t}$ qui est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient :

$$f_S(s) = e^s \int_0^{+\infty} ue^{-u(1+e^s)}du$$

et, pour tout s réel :

$$f_S(s) = \frac{e^s}{(1+e^s)^2}\Gamma(2) = \frac{e^s}{(1+e^s)^2}$$

c) On a $V = \exp(S), V(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et une densité de V est définie pour $v \geq 0$ par $f_V(v) = \dfrac{1}{(1+v)^2}$.

On sait que $W(\Omega) =]0,1]$ et pour tout $0 < w \leq 1$:

$$P(W < w) = P(V > \frac{1}{w} - 1) = 1 - F_V\left(\frac{1}{w} - 1\right)$$

On obtient ainsi, pour la densité de W :

$$f_W(w) = -f_V\left(\frac{1}{w} - 1\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right) = 1$$

ce qui donne que W suit une loi uniforme sur $]0,1]$. Ainsi $E(W) = \dfrac{1}{2}, V(W) = \dfrac{1}{12}$.

d) On sait que $W = \dfrac{Y_2}{Y_1+Y_2} = 1 - \dfrac{Y_1}{Y_1+Y_2} = 1 - W'$. Comme Y_1 et Y_2 jouent des rôles symétriques, W et W' suivent la même loi, et $E(W) = E(W') = 1/2$.

e) On a $UW = Y_2$. Donc $E(UW) - E(U)E(W) = 0$. Si on peut étendre les théorèmes connus des variables aléatoires discrètes aux variables continues, alors $\rho_{U,W} = 0$. Cela signifie-t-il que U et W sont indépendantes ?

Exercice 3-4

A. Soit k un entier naturel strictement positif. On considère une suite $(x_n)_{n>0}$, de nombres réels appartenant au segment $[0,k[$.
On pose pour tout n entier strictement positif :

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad r_n = f(s_n) = s_n - \lfloor s_n \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x.

1. Montrer que la suite (r_n) est bornée.

2. Montrer que $r_{n+1} = f(f(s_n) + x_{n+1})$, pour tout $n > 0$.

B. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles continues indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $[0,k[$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2, définie par $S_2 = X_1 + X_2$.

2. On définit la variable aléatoire R_2 par : $R_2 = S_2 - \lfloor S_2 \rfloor$.
Déterminer la fonction de répartition de R_2 en fonction de celle de S_2 et en déduire une densité de R_2, dans les cas :
   a) $k = 1$,
   b) $k = 2$.

3. Soient $(X_n)_{n>0}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$. On définit pour tout $n > 0$:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad R_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor$$

Déterminer la loi de R_n (on pourra utiliser les résultats de la question A.2 et un raisonnement par récurrence).

Solution :

A. 1. Pour tout n, s_n est un nombre réel et pour tout n, $0 \leq r_n < 1$. (r_n s'appelle la partie fractionnaire de s_n).

2. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(s_n) + x_{n+1} = s_n - \lfloor s_n \rfloor + x_{n+1} = s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor$$

et

$$\begin{aligned} f(f(s_n)+x_{n+1}) &= s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor - \lfloor (s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor) \rfloor \\ &= s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor - \lfloor s_{n+1} \rfloor + \lfloor s_n \rfloor \\ &= r_{n+1} \end{aligned}$$

B. 1. On sait que $S_2(\Omega) = [0, 2k[$ et que pour tout x réel, la densité f de S_2 est définie par :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)dt$$

Donc

- $0 \leq x \leq k,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{k^2} = \frac{x}{k^2}$
- $k \leq x < 2k,\ f(x) = \displaystyle\int_{x-k}^k \frac{dt}{k^2} = \frac{2k-x}{k^2}.$

Finalement :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{k^2} & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ \dfrac{2k-x}{k^2} & \text{si } k \leq x < 2k \\ 0 & \text{si } x \geq 2k \end{cases}$$

2. a) Pour $k = 1$, il vient :

$$R_2 = \begin{cases} S_2 & \text{si } 0 \leq S_2 < 1 \\ S_2 - 1 & \text{si } 1 \leq S_2 < 2 \end{cases}$$

Ainsi, pour $t \in [0, 1[$:

$P(0 \leq R_2 < t)$

$\quad = P\left\{[(0 \leq S_2 < t) \text{ et } (0 \leq S_2 < 1)] \text{ ou } [(0 \leq S_2 - 1 < t) \text{ et } (1 \leq S_2 < 2)]\right\}$

et, par disjonction et inclusion :

$$P(0 \leq R_2 < t) = P(0 \leq S_2 < t) + P(1 \leq S_2 < 1+t)$$

La fonction de répartition de R_2 est définie par :

$$F_{R_2}(t) = \int_0^t x dx + \int_1^{1+t} (2-x)dx = t, \text{ pour } t \in [0, 1[$$

soit :

$$F_{R_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

ce qui signifie que R_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

Pour $k = 2$, on a :

$$R_2 = \begin{cases} S_2 & \text{si } 0 \le S_2 < 1 \\ S_2 - 1 & \text{si } 1 \le S_2 < 2 \\ S_2 - 2 & \text{si } 2 \le S_2 < 3 \\ S_2 - 3 & \text{si } 3 \le S_2 < 4 \end{cases}$$

et de même que précédemment, pour $t \in [0, 1[$, par disjonction et inclusion :

$$\begin{aligned} P(0 \le R_2 < t) &= P(0 \le S_2 < t) + P(1 \le S_2 < 1+t) + P(2 \le S_2 < 2+t) \\ &\quad + P(3 \le S_2 < 3+t) \\ &= \int_0^t \frac{xdx}{4} + \int_1^{1+t} \frac{xdx}{4} + \int_2^{2+t} \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx + \int_3^{3+t} \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx \\ &= t \end{aligned}$$

De même que précédemment, R_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

3. Peut-on envisager de montrer par récurrence que R_n suit une loi uniforme sur $[0, 1[$?

- c'est vrai pour $n = 1, 2$.
- supposons que R_n suive une loi uniforme sur $[0, 1[$. Alors $R_{n+1} = f(S_{n+1}) = f(f(S_n) + X_{n+1}) = f(R_n + X_{n+1})$. Or R_n et X_{n+1} suivent chacune une loi uniforme sur $[0, 1]$ et sont indépendantes. Par la question précédente, R_{n+1} suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

Exercice 3-5

Soit $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.
n véhicules numérotés de 1 à n sont engagés dans un rallye automobile. Ils finissent une étape entre minuit et une heure du matin.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note U_i la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du véhicule i. On suppose que les variables (U_i) sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, on note N_t la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules arrivés au plus tard à l'instant t.

Enfin, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note T_i la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée du véhicule classé en i-ième position.

1. Déterminer la loi de N_t.

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer, sous forme d'une somme, la fonction de répartition de T_i, puis une densité et l'espérance de T_i.

Solution :

1. Chaque variable aléatoire U_i suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi pour tout t réel, $P(U_i \leq t) = t$.
Chaque voiture a la probabilité t d'arriver avant l'instant t, les heures d'arrivée sont indépendantes et N_t représentant le nombre de voitures arrivées avant l'instant t, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,t)$.

2. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, notons F_i la fonction de répartition de la variable aléatoire T_i.
Pour tout $t \in]0,1[$,

$$F_i(t) = P(T_i \leq t) = P(N_t \geq i) = \sum_{k=i}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

Ainsi, pour tout t réel :

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=i}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

La fonction F_i vérifie les propriétés des fonctions de répartition des variables à densité (F est continue, dérivable sauf peut-être en 0 et 1, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$).

Pour tout $0 < t < 1$:

$$\begin{aligned} F_i'(t) &= \sum_{k=i}^{n} C_n^k k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - \sum_{k=i}^{n-1} C_n^k (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=i-1}^{n-1} C_n^{k+1} (k+1) t^k (1-t)^{n-k-1} - \sum_{k=i}^{n-1} C_n^k (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \\ &= C_n^i i t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} \left((k+1)C_n^{k+1} - (n-k)C_n^k\right) t^k (1-t)^{n-k-1} \\ &= C_n^i i t^{i-1} (1-t)^{n-i} \end{aligned}$$

et $E(T_i) = \displaystyle\int_0^1 i C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$. Une intégration par parties donne que :

$$\begin{aligned} J_i &= \int_0^1 t^i (1-t)^{n-i} dt = \frac{n-i}{i+1} \int_0^1 t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} dt \\ &= \frac{n-i}{i+1} J_{i+1} = \cdots = \frac{(n-i)!}{(i+1)(i+2)\dots(n+1)} \end{aligned}$$

et
$$E(T_i) = \frac{iC_n^i}{(i+1)C_{n+1}^i} = \frac{i}{n+1}$$

Exercice 3-6

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules rouges en proportion q, toutes indiscernables au toucher, avec $q = 1-p$ et $0 < p < 1$. On procède à une suite de n tirages au hasard d'une boule de l'urne, dont on note la couleur avant de la replacer dans l'urne, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3, fixé a priori. On constitue ainsi des séries unicolores, au gré des couleurs obtenues dans la suite des n tirages. Par exemple, pour $n = 9$, en notant B l'obtention d'une boule blanche et R l'obtention d'une boule rouge, la suite de résultats $B, B, R, B, R, R, R, B, B$ fournit 5 séries unicolores : BB, puis R, puis B, puis RRR, et enfin BB.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de séries unicolores obtenues à l'issue des n tirages.

1. Calculer :
   a) la probabilité $P[X = m]$.
   b) la probabilité $P[X = M]$,

m et M désignant respectivement les valeurs minimales et maximales que peut prendre X.

On désigne par Y_i la variable aléatoire valant 1 lorsqu'une boule blanche est obtenue au $(i-1)$-ième tirage et une boule rouge est obtenue au i-ème tirage, valant 0 sinon.

Symétriquement, on désigne par Z_j la variable aléatoire valant 1 lorsqu'une boule rouge est obtenue au $(j-1)$-ième et une boule blanche est obtenue au j-ème tirage, valant 0 sinon.

2. Exprimer X en fonction des Y_i et des Z_j. En déduire l'espérance de X.

Tout au long de la suite des n lancers, on gagne un Euro à chaque fois que l'obtention d'une boule blanche est immédiatement suivie de l'obtention d'une boule rouge ; inversement, on perd un Euro à chaque fois que l'obtention d'une boule rouge est immédiatement suivie de l'obtention d'une boule blanche. Soit G_k la variable aléatoire représentant le gain global en Euro(s), (positif ou négatif), obtenu à l'issue du k-ième tirage.

3. a) Déterminer les lois de G_1, G_2, G_3.

b) Montrer que les variables $G_k, k > 1$, sont toutes de même loi.

c) Préciser l'espérance et la variance de G_k.

d) En utilisant la question précédente, calculer la variance de X.

Solution :

1. Le nombre de séries unicolores est compris entre 1 et n. Donc $X(\Omega) \in \{1, \ldots, n\}$.
L'événement $(X = 1)$ correspond a des séries unicolores de longueur n, soit de boules blanches, soit de boules rouges. Aussi $P(X = 1) = p^n + q^n$.
L'événement $(X = n)$ correspond à un changement de couleur à chaque tirage. Aussi
• si $n = 2k$ est pair, l'événement $(X = n)$ correspond au tirage $(BRBR \ldots BR)$ ou $(RBRB \ldots RB)$ et $P(X = n) = 2(pq)^k$.
• si $n = 2k + 1$ est impair, l'événement $(X = n)$ correspond au tirage $(BRBR \ldots BRB)$ ou $(RBRB \ldots RBR)$ et $P(X = n) = p^{k+1}q^k + p^k q^{k+1} = (pq)^k$.

2. Les variables aléatoires (Y_i) et (Z_j) représentent les ruptures de couleurs. En effet l'événement $(Y_i + Z_i = 1)$ correspond à un changement de couleur. Aussi $X = 1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} Y_i + \sum_{j=2}^{n} Z_j$. Les variables aléatoires (Y_i) et (Z_j) suivant toutes des lois de Bernoulli de paramètre pq, on a $E(X) = 1 + 2(n-1)pq$.

3. a) La variable aléatoire G_1 est certaine : $G_1(\Omega) = \{0\}, E(G_1) = 0, V(G_1) = 0$.
La variable aléatoire G_2 prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et :

$$P(G_2 = 1) = pq, \quad P(G_2 = -1) = pq, \quad P(G_2 = 0) = 1 - 2pq$$

La variable aléatoire G_3 prend ses valeurs dans le même ensemble.
• $(G_3 = 1) = (B, R, R) \cup (B, B, R) \Rightarrow P(G_3 = 1) = pq^2 + p^2q = pq$
• $(G_3 = -1) = (R, B, B) \cup (R, R, B) \Rightarrow P(G_3 = -1) = pq^2 + p^2q = pq$
• $(G_3 = 0) = (B, R, B) \cup (R, B, R) \cup (B, B, B) \cup (R, R, R) \Rightarrow P(G_3 = 0) = 1 - 2pq$.

b) Soit $k > 1$. La variable aléatoire G_k est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. En effet l'événement $(|G_k| \geq 2)$ est impossible puisque perdre (ou gagner) un second Euro nécessite d'avoir gagné (ou perdu) le premier.
• l'événement $(G_k = 1)$ signifie avoir obtenu une boule blanche au premier tirage, une boule rouge au k-ième et des résultats quelconques entre ces deux

tirages. Aussi :

$$P(G_k = 1) = pq \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i p^i q^{k-2-i} = pq$$

• l'événement $(G_k = -1)$ signifie avoir obtenu une boule rouge au premier tirage, une boule blanche au k-ième et des résultats quelconques entre ces deux tirages. Aussi :

$$P(G_k = -1) = pq \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i p^i q^{k-2-i} = pq$$

• ainsi $P(G_k = 0) = 1 - 2pq$.

c) Par des calculs évidents, il vient, pour $k > 1, E(G_k) = 0$ et $V(G_k) = 2pq$.

d) On peut écrire $G_n = \sum_{i=2}^{n} Y_i - \sum_{j=2}^{n} Z_j = Y - Z$. Ainsi :

$$\begin{cases} V(G_n) = V(Y) + V(Z) - 2\mathrm{cov}(Y, Z) = 2pq \\ V(X) = V(Y) + V(Z) + 2\mathrm{cov}(Y, Z) \end{cases}$$

Or Y et Z suivent la même loi en inversant les rôles de B et R. Aussi :

$$V(X) = 4V(Y) - 2pq$$

Mais :

$$V(Y) = \sum_{i=2}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = (n-1)pq(1-pq) - 2(n-2)(pq)^2$$

En effet, si $j \geq i + 2$, les variables Y_i et Y_j sont indépendantes (il n'y a pas de tirage commun) et si $j = i+1, Y_i \cdot Y_j = 0$ et $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = -E(Y_i)E(Y_j) = -(pq)^2$. Finalement :

$$V(X) = (4n - 6)pq - (12n - 20)(pq)^2$$

Exercice 3-7

Soit n un entier naturel strictement positif, inconnu a priori.

Une urne contient des jetons à deux faces portant chacun, sur une des faces un numéro bleu, et sur l'autre face un numéro rouge. On sait que, sur l'ensemble des jetons de l'urne, k exactement portent le numéro bleu k, ceci pour $k = 1, 2, \ldots, n$, et que, parmi les k jetons portant le numéro bleu k, un et un seul porte le numéro rouge i, ceci pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

1. Déterminer, en fonction de n, le nombre de jetons contenus dans l'urne.

On tire au hasard un jeton de l'urne. On désigne par B la variable aléatoire associée à son numéro bleu, et par R la variable aléatoire associée a son numéro rouge. On pose, d'autre part, $G = B - R$.

2. a) Déterminer la loi du couple (B, R).

b) En déduire les lois de B et de R. Calculer leurs espérances et leurs variances.

c) Suite au tirage d'un jeton, on gagne G. Préciser l'espérance de G et calculer la variance de G.

3. Déduire de b) et c), trois estimateurs sans biais de n, l'un étant une fonction de B, le second une fonction de R et le troisième une fonction de G. Préciser leurs variances respectives. Lequel est le plus indiqué pour estimer n ?

Solution :

1. Le nombre total de jetons est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. a) Le couple aléatoire (B, R) vérifie :

$$(B, R)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$$

et pour tout $(i, j) \in (B, R)(\Omega)$:

$$P((B, R) = (i, j)) = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

b) Il vient immédiatement que $B(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$P(B = i) = \sum_{j=1}^{i} P((B, R) = (i, j)) = \frac{2i}{n(n+1)}$$

Ainsi :

$$E(B) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3},$$

$$E(B^2) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$V(B) = \frac{n^2 + n - 2}{18}$$

La loi de R est tout aussi immédiate. On a $R(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$P(R = j) = \sum_{i=j}^{n} P((B, R) = (i, j)) = \frac{2(n - j + 1)}{n(n + 1)}$$

Un calcul élémentaire donne $E(R) = \dfrac{n+2}{3}, V(R) = V(B)$.

c) La variable aléatoire G est égale à $B - R$. Aussi $E(G) = E(B) - E(R) = \dfrac{n-1}{3}$, et :

$$V(G) = V(B) + V(R) - 2\text{cov}(B, R) = \frac{n^2 + n - 2}{18}$$

En effet :

$$\begin{aligned} E(BR) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} ij P((B, R) = (i, j)) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{n} ij \\ &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{6} \end{aligned}$$

et :

$$\text{cov}(B, R) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{6} - \frac{(2n+1)(n+2)}{9}$$

3. Posons $B' = \dfrac{3B-1}{2}, R' = 3R - 2, G' = 3G + 1$. Ces trois variables aléatoires ont pour espérance n et sont des estimateurs sans biais de n. Et :

$$V(B') = \frac{n^2 + n - 2}{8}, \quad V(R') = V(G') = \frac{n^2 + n - 2}{2}$$

indique que B' est un meilleur estimateur que R' et G'.

Exercice 3-8

Une épreuve écrite de concours se présente sous forme d'un Q.C.M.

50 questions, supposées mutuellement indépendantes , y sont posées. Pour chacune des 50 questions, il y a quatre sous-questions supposées mutuellement indépendantes.

Pour chaque sous-question, le candidat a le choix entre deux réponses : « vrai » ou « faux ». Les réponses aux questions sont présentées en ligne, une ligne par

question, chaque ligne étant constituée de quatre cases à cocher, une par sous-question.
On suppose que le candidat donne une réponse à chaque sous-question et qu'il répond à chaque fois au hasard.
On note F la variable aléatoire décomptant le nombre de sous-questions dont la réponse est erronée.

1) Dans une première éventualité, on suppose que le Q.C.M. est corrigé « question par question », c'est-à-dire qu'une ligne est considérée comme juste et rapporte 4 points au candidat si et seulement si toutes les réponses de la ligne sont correctes. Dans le cas contraire, le candidat est pénalisé d'un point.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le candidat.

Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance.

2) Désormais, on suppose que les sous-questions sont corrigées indépendamment les unes des autres, chaque case ayant une réponse correcte rapportant 1 point au candidat, et chaque case ayant une réponse incorrecte pénalisant la note de $1/4$ de point.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus dans cette deuxième correction.

Déterminer la loi de Y, son espérance, et sa variance.

Solution :

1. Soit L le nombre de lignes non globalement justes. L prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 50\}$ et le nombre de points obtenus par le candidat est

$$4(50 - L) - L = 200 - 5L.$$

Pour tout $j \in \{0, \ldots, 50\}, P(X = 200 - 5j) = P(L = j)$. Or L suit une loi binomiale de paramètres $(50, p)$, avec $p = 1 - \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{15}{16}$. En effet, une ligne est considérée comme correcte si les 4 réponses sont correctes, et ceci avec la probabilité $\dfrac{1}{16}$. Les réponses étant considérées indépendamment ligne par ligne, on obtient la justification demandée.

Comme $X = 200 - 5L$, il vient

$$E(X) = 200 - 250p \text{ et } V(X) = 25V(L) = 1250p(1 - p).$$

2. Soit F le nombre de réponses fausses. F prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 200\}$ et le nombre de points obtenus par le candidat est $(200 - F) - F/4 = 200 - \frac{5}{4}F$.

Pour tout $j \in \{0, \ldots, 200\}, P(Y = 200 - 5j/4) = P(F = j)$. Or F suit une loi binomiale de paramètres $(200, 1/2)$.
Donc $Y(\Omega) = \{200 - 5j/4, 0 \leq j \leq 200\}$, et pour tout $j \in \{0, \ldots, 200\}$:

$$P(Y = 200 - 5j/4) = P(F = j) = C_{200}^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Comme $Y = 200 - 5F/4$, il vient $E(Y) = 75$ et $V(Y) = \dfrac{25}{64}$.

Exercice 3-9

Soient X_1, X_2, X_3, X_4, quatre variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, b]$, b étant un nombre réel strictement positif inconnu.

On définit les variables réelles à densité suivantes :

$$Y = \min(X_1, X_2), Z = \max(X_1, X_2), A = \min(X_3, X_4), B = \max(X_3, X_4)$$

1. Déterminer la loi de Y (fonction de répartition et densité).

2. Déterminer la loi de Z (fonction de répartition et densité).

On définit, d'autre part, les variables aléatoires :

$$S = \max(A, Y), \text{ et } T = \min(B, Z)$$

et on note F et G, respectivement, les fonctions de répartition de S et T.

3. Déterminer F et G, et montrer que :

$$(*) \quad F(x) - G(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

4. En intégrant F et G par parties sur l'intervalle $[0, b]$, et en utilisant la relation $(*)$, montrer que $E(S) < E(T)$, où E désigne l'opérateur espérance.

5. Déterminer des densités de S et T, et calculer les espérances et les variances de S et T.

6. Soient a et b deux réels, avec $a < b$, et U et V, deux variables aléatoires réelles à densité, définies toutes deux sur l'intervalle $[a, b]$, dont les fonctions de répartitions respectives, F_U et F_V sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F_U(x) - F_V(x) \geq 0$.

A-t-on $E(U^k) \leq E(V^k)$ pour tout k entier naturel ?

Solution :

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivant une loi uniforme sur $[0,b]$ et étant indépendantes, il vient $Y(\Omega)=[0,b]$, et pour tout $y\in\mathbb{R}$:

$$P(Y>y)=P((X_1>y)\cap(X_2>y))=(1-F_X(y))^2$$

et :

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<0\\ 1-\left(1-\dfrac{y}{b}\right)^2 & \text{si } 0\le y\le b\\ 1 & \text{si } y>b\end{cases}$$

d'où une densité de Y :

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\notin[0,b]\\ \dfrac{2}{b}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) & \text{autrement}\end{cases}$$

2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivant une loi uniforme sur $[0,b]$ et étant indépendantes, il vient $Z(\Omega)=[0,b]$, et pour tout $z\in\mathbb{R}$:

$$P(Z<z)=P((X_1<z)\cap(X_2<z))=(F_X(z))^2$$

et :

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{si } z<0\\ \left(\dfrac{z}{b}\right)^2 & \text{si } 0\le z\le b\\ 1 & \text{si } z>b\end{cases}$$

d'où une densité de Z :

$$f_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{si } z\notin[0,b]\\ \dfrac{2z}{b^2} & \text{autrement}\end{cases}$$

3. Par indépendance de A et Y, il vient, pour tout s réel :

$F(s)=p((A<s)\cap(Y<s))=[F_Y(s)]^2$. Donc :

$$F(s)=\begin{cases}0 & \text{si } s<0\\ \dfrac{s^2}{b^4}(2b-s)^2 & \text{si } 0\le s\le b\\ 1 & \text{si } s>b\end{cases}$$

De même, par indépendance de B et Z, il vient, pour tout t réel :

$$1-G(t)=p((B>t)\cap(Z>t))=[P(Z>t)]^2.$$

Donc :

$$G(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \dfrac{t^2}{b^4}(2b^2-t^2) & \text{si } 0\le t\le b\\ 1 & \text{si } t>b\end{cases}$$

Enfin, pour tout x réel : $G(x)-F(x)=-\dfrac{2x^2}{b^4}(b-x)^2\le 0$.

4. Comme F et G sont des fonctions de classe C^1, les espérances de S et T existent et :

$$\int_0^b F(x)dx = [xF(x)]_0^b - \int_0^b xf_S(x)dx = b - E(S)$$

$$\int_0^b G(x)dx = [xG(x)]_0^b - \int_0^b xf_T(x)dx = b - E(T)$$

La relation, $F(x) - G(x) \geq 0$, pour tout x réel entraîne donc que $E(S) \leq E(T)$. De plus, on a l'égalité $E(S) = E(T)$ si et seulement si $\int_0^b (G(x) - F(x))dx = 0$ ce qui entraîne $F = G$ (puisque $F - G$ est positive et continue), ce qui n'est pas le cas ici.

5. Un calcul immédiat donne :

$$f_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin [0,b] \\ \dfrac{4}{b^4}s(s-b)(s-2b) & \text{sinon} \end{cases}, f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,b] \\ \dfrac{4t}{b^4}(b^2 - t^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$E(S) = \frac{7b}{15},\ V(S) = \frac{11b^2}{225},\ E(T) = \frac{8b}{15},\ V(T) = \frac{11b^2}{225}$$

6. Le cas $k = 0$ est évident et le cas $k = 1$ a été traité dans une question précédente. Pour $k \geq 2$, considérons :

$$\begin{aligned} \int_a^b kx^{k-1}(F_U - F_V)(x)dx &= \left[x^k(F_U - F_V)(x)\right]_a^b - \int_a^b x^k(f_U - f_V)(x)dx \\ &= E(V^k) - E(U^k) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(U^k) \leq E(V^k) \Leftrightarrow \int_a^b kx^{k-1}(F_U - F_V)(x)dx \geq 0$$

- pour k impair cette inégalité est toujours vérifiée.
- pour k pair, elle est vérifiée si $a \geq 0$, mais n'est pas toujours vérifiée si $a < 0$. En effet, dans ce cas, il est possible de trouver deux fonctions de répartition F_U et F_V telles que l'intégrale reste négative.

Exercice 3-10

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda \in]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$.

1. a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, on a $f(x) \leq \lambda x$.

b) On prend $x_0 \in]0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$

Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 0.

2. On considère des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de paramètre x_n, c'est-à-dire que la probabilité de succès la n-ième fois (ce qui correspond à $X_n = 1$) est x_n.

a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir n échecs aux n premières épreuves ?

b) Montrer que la suite (p_n) est décroissante et converge. On note ℓ sa limite. Comment interpréter la propriété $\ell = 0$?

c) Montrer que $\ell = 0$ si et seulement si la série de terme général x_n diverge.

3. On pose $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du 1 ?

b) Calculer $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$ · En déduire un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

Que vaut, dans ce cas, ℓ définie au 2) ?

Solution :

1. a) La fonction f étant de classe C^2 et vérifiant $f(0) = 0, f'(0) = \lambda, f''(t) < 0$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire, pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \lambda x + \int_0^x (x-t) f''(t) dt < \lambda x$$

b) Par la question précédente, comme $\lambda \in]0,1]$, la suite (x_n) est décroissante, minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $L \geq 0$ qui vérifie $L \leq \lambda L$ donc $L = 0$ lorsque $\lambda < 1$.

2. a) Par indépendance, on a :

$$p_n = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)$$

b) Comme $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - x_n < 1$, la suite (p_n) est décroissante, et minorée par 0. Elle admet donc une limite ℓ.
$\ell = 0$ signifie obtenir une infinité d'échecs, car les événements E_n=«obtenir n échecs lors des n premières épreuves», forment une suite décroissante d'événements.

c) On a $\ln p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1-x_k)$. La suite (x_n) étant convergente vers 0, on sait que pour n grand $\ln(1-x_n) \sim -x_n$. Ainsi la série $\sum x_n$ diverge si et seulement si la série $\sum \ln(1-x_n)$ diverge c'est-à-dire si et seulement si la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n)$ n'existe pas ou encore si et seulement si $\ell = 0$.

3. On vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ vérifie les conditions de la première question,sauf pour $\lambda = 1$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{1}{x_n} = 1$$

La suite $\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}\right)_n$ est convergente vers 1 (ici même égale...). On peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0}\right) = n$$

donc $\dfrac{1}{x_n} \sim n$ et $x_n \sim \dfrac{1}{n}$. Ainsi la série $\sum x_n$ diverge et $\ell = 0$.

Exercice 3-11

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n)0.$$

Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

2. Réciproquement, on suppose que X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont telles que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Soient X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, possédant une variance, telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Comparer la variance de X et celle de Y.

Solution :

1. La réponse est négative. En effet, on a $P(X + Y = 1) \neq 0, P(X - Y = 0) \neq 0$, mais $P((X + Y = 1) \cap (X - Y = 0)) = 0$.

2. Ici encore la réponse est négative. En effet, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si $Y = X$, alors $X + Y = 2X, X - Y = 0$, et $2X$ est indépendante de 0, alors que X ne l'est pas de X.

3. Comme $X + Y$ et $X - Y$ ont une variance, leur produit a une espérance et par indépendance $E((X + Y)(X - Y)) = E(X + Y)E(X - Y)$, soit en développant :

$$E(X^2) - E(Y^2) = E^2(X) - E^2(Y) \Rightarrow V(X) = V(Y)$$

Exercice 3-12

On admet le résultat suivant :
Soit $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$ une suite à deux indices de réels positifs ou nuls telle que :

a) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}$ converge. On note S_k sa somme ;

b) la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ converge.

Alors on peut permuter les symboles $\sum$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \right)$$

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, N) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance. Montrer que si on note $E(X \mid N = n)$ l'espérance de la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$, on a :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X \mid N = n).P(N = n)$$

2. Une expérience consiste à effectuer des lancers successifs et indépendants d'une pièce donnant «pile» avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et «face» avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois «pile».

Dans un deuxième temps, si «pile» est apparu pour la première fois au n-ième tirage, on effectue n lancers de la même pièce et on note X le nombre de «pile» obtenus lors de cette seconde série de lancers.
Déterminer l'espérance de X (on admettra que cette espérance existe).

3. Dans un casino, un jeu se déroule de la façon suivante : un croupier mélange trois cartes, qui sont l'As de Coeur, le 2 de Coeur et le Valet de Pique et les présente sur la table face cachée. Un joueur choisit une carte au hasard. Si celle-ci est un Coeur, il gagne la somme correspondante (1 Euro si c'est l'As ou 2 Euros si c'est le 2) et rejoue, le croupier mélangeant à nouveau les trois cartes ; si la carte tirée est le Valet de Pique, le jeu s'arrête.
On note N le nombre de cartes de Coeur tirées jusqu'à l'apparition du Valet de Pique et S la somme des Euros obtenus.
a) Déterminer la loi de N. Quelle est la probabilité que le Valet de Pique n'apparaisse jamais ?

b) Déterminer la loi conditionnelle de S sachant que $N = n$.

c) Quel prix minimum le casino doit-il faire payer une telle partie pour ne pas être perdant en moyenne ?

Solution :

1. La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k|N = n)$ est une série convergente, car pour tout $k \geq 1$, on a :

$$0 \leq kP(X = k|N = n) \leq kP(X = k)$$

et on sait que X admet une espérance.

On a donc, par définition $E(X|N=n)=\sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k|N=n)$, et, par la propriété admise :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X=k|N=n)P(N=n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k|N=n)\right)P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(X|N=n)P(N=n) \end{aligned}$$

2. N représente le temps d'attente du premier « pile ». On sait que N suit une loi géométrique de paramètre p, soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $P(N=n)=pq^{n-1}$.

Or la loi conditionnelle de X conditionnée par $(N=n)$ représente le nombre de

« piles » obtenus lors de n lancers ; c'est donc une loi binomiale de paramètres (n,p). Donc pour tout $0\leq k\leq n$:

$$P(X=k|N=n)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad E(X=k|N=n)=np$$

En utilisant la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(X|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} np\cdot pq^{n-1} = p^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\right) \\ &= p^2\frac{1}{(1-q)^2} = 1 \end{aligned}$$

3. a) N représente le nombre de parties jouées avant l'apparition du Valet de Pique. N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{1}{3}$, soit :

$$P(N=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall\, n\in\mathbb{N}$$

On a alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)=1$ et la probabilité que le Valet de Pique n'apparaisse jamais est nulle.

b) L'événement $(N=n)$ correspond au tirage de n cartes Cœur, qui rapporte chacune 1 ou 2 Euros. Donc $(S|N=n)(\Omega)=\{n,\ldots,2n\}$.

c) $(S = k|N = n)$ correspond au tirage de x cartes As de Cœur et y cartes deux de Cœur, avec $\begin{cases} x + y = n \\ x + 2y = k \end{cases}$. Donc $\begin{cases} x = 2n - k \\ y = k - n \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $k \in \{n, \ldots, 2n\}$:

$$P(X = k|N = n) = \frac{C_n^{k-n}}{2^n}$$

et

$$\begin{aligned} E(X|N = n) &= \sum_{k=n}^{2n} k\frac{C_n^{k-n}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(n+j)C_n^j \\ &= \frac{1}{2^n}n\sum_{j=0}^{n} C_n^j + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n} jC_n^j \\ &= n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} \end{aligned}$$

et

$$E(S) = \sum_{n=0}^{\infty} E(S|N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3$$

Le prix minimum que le casino doit faire payer pour ne pas être perdant en moyenne doit être supérieur ou égal à 3 Euros.

Exercice 3-13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et T une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Rappeler l'expression d'une densité φ de T. On notera Φ la fonction de répartition de T.

2. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 < 1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{2x^2}$.
(on pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Chebicheff).
b) En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(x)\big)\, dx$, puis la calculer.

3. On associe à T les variables aléatoires suivantes :

$$X = |T|, \quad Y = \lfloor T \rfloor, \quad Z = \lfloor X \rfloor$$

où $|\ |$ désigne la valeur absolue et $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière.
a) Déterminer une densité de X.

b) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $p(Z = k)$ à l'aide de la fonction Φ.

c) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la probabilité $P(Y = k)$.

d) Montrer la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} k\big(P(Y = k) - P(Y = -k)\big)$ (on pourra raisonner à partir des sommes partielles). En déduire l'espérance de Y.

e) Montrer que Z admet une espérance.

Solution :

1. C'est effectivement une question de cours ! Une densité de T est définie pour tout x réel par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et la fonction de répartition de T est alors $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$.

2. Par définition d'une fonction de répartition, on sait que pour tout x réel, $0 \leq \Phi(x) \leq 1$, et, ici, comme $e^{-t^2/2} > 0$ pour tout t réel, on a : $\Phi(x) < 1$.

a) L'inégalité de Bienaymé-Chebicheff affirme que, pour tout x réel :

$$P(|T| > x) \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow P((T > x) \cup (T < -x)) \leq \frac{1}{x^2}$$

donc que $2P(T > x) \leq \dfrac{1}{x^2}$ ce qui correspond à $1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{2x^2}$.

b) La majoration que l'on vient d'obtenir montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))dx$ converge. De plus, pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A (1 - \Phi(t))dt = [t(1 - \Phi(t))]_0^A - \int_0^A t\varphi(t)dt$$

Or $0 < A(1 - \Phi(A)) \leq A\dfrac{1}{2A^2}$ entraîne que $\lim\limits_{A \to +\infty} A(1 - \Phi(A)) = 0$, donc que :

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt = \int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

3. a) Calculons la fonction de répartition de $X = |T|$.

- pour tout $x \leq 0, P(X \leq x) = 0$.
- pour $x > 0$, $P(X \leq x) = P(-x \leq T \leq x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 2\Phi(x) - 1$.

Une densité de X est alors :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\varphi(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et son espérance est $E(X) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

b) Pour tout $k \geq 0$, on a $(Z = k) = (\lfloor X \rfloor = k) = (k \leq X < k+1)$. Ainsi :

$$P(Z = k) = 2\int_k^{k+1} \varphi(t)dt = 2[\Phi(k+1) - \Phi(k)]$$

c) de la même façon, pour $k \in \mathbb{Z}$: $(Y = k) = (\lfloor T \rfloor = k) = (k \leq T < k+1)$, et

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \varphi(t)dt = \Phi(k+1) - \Phi(k)$$

d) Utilisons, comme suggéré dans l'énoncé, les sommes partielles. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\big(p(Y = k) - p(Y = -k)\big) &= \sum_{k=1}^{N} k\big(\Phi(k+1) - \Phi(k)\big) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} k\big(\Phi(-k+1) - \Phi(-k)\big)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\big(\Phi(k+1) - \Phi(k)\big) &= \sum_{k=1}^{N}[(k+1)\Phi(k+1) - k\Phi(k)] - \sum_{k=1}^{N} \Phi(k+1) \\ &= (N+1)\Phi(N+1) - \Phi(1) - \sum_{k=2}^{N+1} \Phi(k)\end{aligned}$$

et comme pour tout $x \geq 0, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\big(\Phi(-k+1) - \Phi(-k)\big) &= \sum_{k=1}^{N} k\big(\Phi(k) - \Phi(k-1)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N}[k\Phi(k) - (k-1)\Phi(k-1)] - \sum_{k=1}^{N} \Phi(k-1) \\ &= N\Phi(N) - \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k)\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{N} k\big(p(Y=k)-p(Y=-k)\big) = N(\Phi(N+1)-\Phi(N)) + \Phi(N+1)$$
$$-\Phi(1)+\Phi(0)+\Phi(1)-\Phi(N)-\Phi(N+1)$$

Or :

$$N(\Phi(N+1)-\Phi(N)) = N\int_N^{N+1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt \leq \frac{N}{\sqrt{2\pi}}e^{-N^2/2}$$

tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\big(p(Y=k)-p(Y=-k)\big) = 1-\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

e) La série $\sum k(\Phi(k+1)-\Phi(k))$ est convergente, car

$$0 < k(\Phi(k+1)-\Phi(k)) = k\int_k^{k+1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt \leq \frac{ke^{-k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ceci signifie que l'espérance de Z existe.

Exercice 3-14

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre inconnu λ.

1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}S_n$.

Rappeler la loi de S_n.

Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur de λ sans biais et convergent.

2. On pose $\theta = P(X=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ (où $P(A)$ désigne la probabilité de l'événement A) et on cherche un estimateur sans biais du paramètre θ.
(Dans le cas où X représente le nombre de pannes que subit un appareil, $P(X=0)$ est la probabilité qu'il n'y ait aucune panne et c'est en ce sens qu'il est intéressant de l'estimer).

a) Calculer l'espérance de $T_n = \mathrm{e}^{-\overline{X_n}} = \exp(-\overline{X_n})$ et montrer que T_n n'est pas un estimateur sans biais de θ.

b) Soit s un entier quelconque. Montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S_n = s]$ est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
Préciser en particulier la valeur de $P(X_1 = 0 \mid S_n = s)$

c) On considère la variable aléatoire :

$$\widehat{\theta} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$$

Montrer que $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ.

d) Calculer la variance de $\widehat{\theta}$ et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\widehat{\theta}\,) = 0$.

Solution :

1. Les n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre λ, on sait que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Son espérance et sa variance sont donc égales à $n\lambda$. De plus $E(\overline{S_n}) = \lambda$ et $V(\overline{S_n}) = \dfrac{\lambda}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\overline{S_n}) = 0$, $\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

2. a) On sait, d'après le théorème de transfert, que :

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k}{n}} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k}{n}} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{-1/n}(n\lambda)\right)^k}{k!} \\
&= e^{(n\lambda)(e^{-1/n}-1)}
\end{aligned}$$

On a $E(T_n) \neq \theta$ ce qui signifie que T_n n'est pas un estimateur sans biais de θ. On a tout de même $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = \theta$ ce qui signifie que T_n est asymptotiquement sans biais.

b) On sait que :

$$P(X_1 = k | S_n = s) = \frac{P((X_1 = k) \cap (S_n = s))}{P(S_n = s)}$$

Or, $P((X_1 = k) \cap (S_n = s)) = P(X_1 = k \cap (\sum_{j \neq 1} X_j = s - k))$. Les variables aléatoires X_1 et $\displaystyle\sum_{j \neq 1} X_j$ sont indépendantes et $\displaystyle\sum_{j \neq 1} X_j$ suit une loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$. On obtient alors :

$$P(X_1 = k | S_n = s) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-(n-1)\lambda} \times \frac{((n-1)\lambda)^{s-k}}{(s-k)!} \times \frac{s!}{e^{-n\lambda}(n\lambda)^s}$$

et

$$P(X_1 = k|S_n = s) = C_s^k \frac{(n-1)^{s-k}}{n^s} = C_s^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-k}$$

Ainsi la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = s)$ est la loi binomiale de paramètres $s, \dfrac{1}{n}$. Enfin :

$$P(X_1 = 0|S_n = s) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s$$

c) D'après le théorème de transfert :

$$E(\widehat{\theta}) = \sum_{s=0}^{+\infty} P(X_1 = 0|S_n = s)P(S_n = s) = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$$

et $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ.

d) Comme dans les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
E(\widehat{\theta}^2) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2s} P(S_n = s) \\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2s} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^s}{s!} \\
&= e^{-n\lambda} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 (n\lambda)\right)^s}{s!} \\
&= e^{-2\lambda} e^{\frac{\lambda}{n}} \\
V(\widehat{\theta}) &= e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)
\end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3-15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre r et, pour $n \geq 2$, S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, r).

1. a) Pour tout réel $t > 0$, on pose $g(t) = E(\exp(-tX))$. (E désigne l'espérance, exp la fonction exponentielle). Calculer $g(t)$ en fonction de t et r.

b) Justifier l'égalité :

$$E\left(\exp\left(-t\frac{S_n}{n}\right)\right) = \left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

2. Soit a un réel tel que $0 < a < r < 1$ et t un réel positif fixé.

a) Montrer que :

$$p\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = p\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right]$$

b) Soit Y une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs positives. Montrer que $p(Y \geq 1) \leq E(Y)$. En déduire que :

$$p\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \exp(at)\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

3. a) Etudier les variations de la fonction $t \mapsto \ln\left[\exp(at)g(t)\right]$

b) En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$p\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \exp(-nM)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Donner une interprétation probabiliste du résultat précédent lorsque $a = r - \varepsilon$.

Solution :

1. a) On sait que $e^{-tX}(\Omega) = \{1, e^{-t}\}$. Ainsi :

$$g(t) = (1 - r) + re^{-t}$$

b) Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre r, alors $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et :

$$E\left(\exp\left(-\frac{tS_n}{n}\right)\right) = E\left(\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n}\exp(-\frac{tX_i}{n})\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E[\exp(-\frac{tX_i}{n})] = \left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

2. a) Comme $t > 0$ et comme la fonction exponentielle est bijective, on peut écrire : $\left(\dfrac{S_n}{n} \leq a\right) = \left(\dfrac{S_n}{n} - a \leq 0\right) = \left(-t\left(\dfrac{S_n}{n} - a\right) \geq 0\right)$

$$= \left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right]$$

b) On suppose que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, avec $y_i \geq 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i P(Y = y_i) &= \sum_{i|y_i \leq 1} y_i P(Y = y_i) + \sum_{i|y_i \geq 1} y_i P(Y = y_i) \\ &\geq \sum_{i|y_i \geq 1} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i|y_i \geq 1} P(Y = y_i) = P(Y \geq 1) \end{aligned}$$

(On remarquera que cette inégalité reste vérifiée même si $P(Y \geq 1) = 0$, puisque l'espérance de Y est positive). Par les deux résultats précédents, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) &= P\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right] \\ &\leq E\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right)\right] \\ &= e^{at} E\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right] \\ &= e^{at}\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

3. a) On peut écrire $\varphi : t \mapsto at + \ln(re^{-t} + 1 - r)$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$:

$$\varphi'(t) = \frac{r}{e^t(r-1) - r} + a$$

On a $\varphi'(t) = 0$ si et seulement si $t = t_0 = \ln\left(\dfrac{(a-1)r}{a(r-1)}\right) > 0$ (car $0 < a < r < 1$). Ainsi la fonction φ admet un minimum en t_0 qui est strictement négatif, puisque $\varphi(0) = 0$.

b) Notons $-M$ ce minimum. On remarque que :

$$e^{at}\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{at/n} g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \psi^n(\frac{t}{n})$$

avec $\psi(t) = e^{\varphi(t)}$. Donc :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \left(e^{\varphi(t/n)}\right)^n = e^{n\varphi(t/n)} \leq e^{-nM}$$

4. Si $a \leq r - \varepsilon$, il vient :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq r - \varepsilon\right) \leq e^{-nM}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \geq r - \varepsilon\right) = 1$$

Exercice 3-16

On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une série d'au moins deux résultats identiques suivis d'un résultat contraire. On arrête alors les lancers.
On suppose qu'on a une probabilité p d'obtenir « pile » et $q = 1 - p$ d'obtenir « face » lorsqu'on lance cette pièce et que les résultats des divers lancers sont indépendants.

On note :

• X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués,
• Y la variable aléatoire égale au rang du lancer où commence la première série de résultats identiques ,
• Z la variable aléatoire égale à 0 si la première série de résultats identiques est une série de faces, égale à 1 si la première série de résultats identiques est une série de piles.

Par exemple :
pour $PFPFPPPPF$, on a $X = 9$, $Y = 5$ et $Z = 1$.
pour $FFFFP$, on a $X = 5$, $Y = 1$ et $Z = 0$.

1. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z), puis du couple (X, Y) (on pourra séparer les cas Y pair et Y impair).

2. On se place dans le cas où $p = 1/2$. Déterminer la loi et l'espérance de X.

3. On considère la fonction Pascal suivante :

```
Function f(p : real) : char ;
Var ok : boolean ;
Begin
ok :=random<=p ;
If ok Then f :='p' Else f :='f'
End ;
```

La fonction `random`, sans paramètre, est une fonction qui renvoie une valeur de type `real` prise au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$. Chaque appel à cette fonction donne une nouvelle valeur indépendante des précédentes.

Que rend la fonction `f` lorsqu'on l'exécute ?

4. On désire simuler l'expérience décrite dans cet exercice, lorsque $p = 0.8$.

A l'aide de la fonction `f`, écrire un programme affichant à l'écran une série de lancers, et la valeur correspondante des variables aléatoires X et Y sous la forme : $PFPFPFPPPPPF$ 12 7.
(on utilisera une variable `r : array[1..1000] of char` dans laquelle on rangera les résultats des lancers successifs obtenus.)

Solution :

1. Il est évident que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ et que :

$$(X,Y))(\Omega) = \{(\ell, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid \ell \geq m+2\}.$$

Calculons la probabilité $P((X,Y,Z) = (\ell, m, n))$.

• l'événement $(X,Y,Z) = (\ell, 2k, 0)$ correspond à l'obtention d'une suite de PF k fois, puis d'une suite de F $(\ell - 2k - 1)$ fois qui commence au coup $2k$ et un P au rang ℓ. Ainsi $P((X,Y,Z) = (\ell, 2k, 0)) = p^{k+1}q^{\ell-k-1}$.

• l'événement $(X,Y,Z) = (\ell, 2k, 1)$ correspond à l'obtention d'une suite de FP k fois, puis d'une suite de P $(\ell - 2k - 1)$ fois et un F au rang ℓ. Ainsi $P((X,Y,Z) = (\ell, 2k, 0)) = p^{\ell-k-1}q^{k+1}$.

• l'événement $(X,Y,Z) = (\ell, 2k+1, 1)$ correspond à l'obtention d'une suite de PF k fois, puis d'une suite de P $(\ell - 2k - 1)$ fois et un F au rang ℓ. Ainsi $P((X,Y,Z) = (\ell, 2k+1, 0)) = p^{\ell-k-1}q^{k+1}$.

• l'événement $(X,Y,Z) = (\ell, 2k+1, 0)$ correspond à l'obtention d'une suite de FP k fois, puis d'une suite de F $(\ell - 2k - 1)$ fois et un P au rang ℓ. Ainsi $P((X,Y,Z) = (\ell, 2k+1, 0)) = p^{k+1}q^{\ell-k-1}$.

On sait que $(X,Y))(\Omega) = \{(\ell, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid \ell \geq m+2\}$. Donc, pour tout $1 \leq m \leq \ell - 2$:

$$P((X = \ell) \cap (Y = m)) = p^{k+1}q^{\ell-k-1} + q^{k+1}p^{\ell-k-1}$$

2. Lorsque $p = 1/2$, pour tout $1 \leq m \leq \ell - 2$:

$$P((X = \ell) \cap (Y = m)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}$$

et la loi de X est définie pour tout $\ell \geq 3$ par :

$$P(X = \ell) = \sum_{m=1}^{\ell-2} P((X = \ell) \cap (Y = m)) = (\ell - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}$$

On sait que pour $|x| < 1$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-2)x^{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} + 1$$

Donc :

$$E(X) = \sum_{\ell=3}^{+\infty} \ell(\ell-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1} = 5$$

3. La fonction proposée simule le lancer d'une pièce avec la probabilité p d'obtenir Pile. Elle retourne la lettre p avec la probabilité p et la lettre f avec la probabilité $1-p$.

4. Voici un programme :

```
Program Pile_Face ;
Uses CRT ;
Var r : array[1..1000] of char ;
i,y : integer ;
Function f(p : real) : char ;
Var ok : boolean ;
Begin
ok :=random<=p ;
If ok Then f :='p' Else f :='f'
End ;
Begin
Randomize ;
r[1] :=f(0.8) ; i := 1 ;
Write (r[i]) ;
Repeat
i :=i+1 ; r[i] :=f(0.8) ; write r[i]
Until r[i-1]=r[i] ;
y :=i-1 ;
Repeat
i :=i+1 ; r[i] :=f(0.8) ; write r[i]
Until r[i-1]<>r[i] ;
Write ('  ',i,'   ',y)
End.
```

Exercice 3-17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un jeu consiste à tirer un numéro parmi les nombres $\{0, \ldots, n\}$. Le joueur gagne la somme x égale au numéro tiré si ce numéro est pair, ou perd cette somme x si le numéro tiré est impair.

1. On suppose que le numéro tiré suit une loi uniforme sur $\{0, ..., n\}$.
Déterminer la loi du gain (positif ou négatif) du joueur, et son espérance.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne à ce jeu ?
Y-a-t-il des valeurs de n qui optimisent l'espérance du gain ?

2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où le numéro tiré suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Solution :

1. On a immédiatement $X(\Omega) = \{(-1)^k k, 0 \leq k \leq n\}$. La variable aléatoire X prend chacune de ces valeurs avec la probabilité $\dfrac{1}{n+1}$. Ainsi :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k}{n+1}$$

Donc

- si $n = 2p, E(X) = \dfrac{p}{2p+1}$,
- si $n = 2p+1, E(X) = -\dfrac{1}{2}$.

De même :

- si $n = 2p, P(X > 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(X = 2k) = \frac{p}{2p+1}$,
- si $n = 2p+1, P(X > 0) = \dfrac{p}{2(p+1)}$.

La probabilité que le joueur gagne de l'argent est inférieure à $\dfrac{1}{2}$.

2. Dans cette question $X(\Omega)$ n'a pas changé, mais pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = (-1)^k k) = \frac{C_n^k}{2^n}$$

Ainsi

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{kC_n^k}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n C_{n-1}^{k-1} = \begin{cases} -1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Le jeu est donc équilibré si $n > 1$. Enfin :

$$P(X > 0) = \sum_{k \geq 1} P(X = 2k) = \sum_{k \geq 1} \frac{C_n^{2k}}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

Là encore, la probabilité que le joueur gagne de l'argent est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3-18

Soient $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$, $n + m$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre inconnu p.
On se propose d'estimer p. On suppose dans la suite que $n > m$.
Soit $M_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, $M_2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} Y_k$ et $N = \frac{M_1 + M_2}{2}$.
1. Vérifier que M_1, M_2 et N sont des estimateurs sans biais et convergents de p.
Quel est le meilleur des trois ? (c'est-à-dire, celui dont la variance est la plus petite)
On discutera suivant les valeurs de n et m.

2. Parmi les estimateurs de p de la forme $aM_1 + bM_2$ quel est le meilleur estimateur sans biais ?

Solution :

1. De façon évidente, $E(M_1) = E(M_2) = E(N) = p$. Ces trois estimateurs sont sans biais. De plus :

$$V(M_1) = \frac{pq}{n}, \quad V(M_2) = \frac{pq}{m}, \quad V(N) = \frac{1}{4}(V(M_1)+V(M_2)) = \frac{pq}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

- si $n > m, V(M_1) < V(M_2)$ et M_1 est un meilleur estimateur que M_2.
- $\frac{V(N)}{V(M_2)} = \frac{m+n}{4n} < 1$ car $n > m$. Ainsi N est un meilleur estimateur que M_2.
- $\frac{V(N)}{V(M_1)} = \frac{m+n}{4m}$. Donc si $m < n < 3m$, N est meilleur que M_1 lui même meilleur que M_2. Si $3m < n$, M_1 est meilleur que N lui même meilleur que M_2.

2. On sait que $E(aM_1 + bM_2) = (a+b)p$. Donc $aM_1 + bM_2$ est un estimateur sans bais de p si et seulement si $a + b = 1$. De plus :

$$V(aM_1 + bM_2) = a^2 \frac{pq}{n} + b^2 \frac{pq}{m}$$

Il faut donc minimiser cette fonction de (a, b) sous la contrainte $a + b = 1$. On étudie donc :

$$F : a \mapsto F(a) = a^2 \frac{pq}{n} + (1-a)^2 \frac{pq}{m}$$

qui présente un minimum pour $a = \dfrac{n}{n+m}$. Le meilleur estimateur sans biais du type $aM_1 + bM_2$ est donc $\dfrac{n}{n+m} M_1 + \dfrac{m}{n+m} M_2$.

Exercice 3-19

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto f(t) = \frac{1}{2}\exp(-|t|)$.
Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X dont on déterminera la fonction de répartition, l'espérance et l'écart-type.
On dit alors que X suit la loi de Laplace.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.
Déterminer une densité $g : x \mapsto g(x)$ de $Y = X_1 + X_2$. On distinguera les cas $x < 0$ et $x > 0$.
Quelles sont les valeurs de l'espérance et de l'écart-type de Y ?

3. a) Donner sans calculs une densité de la variable aléatoire $X_1 - X_2$.

b) Dans un laboratoire, un technicien effectue indépendamment l'une de l'autre, deux pesées successives d'un même objet. On suppose que l'erreur qu'il commet à chaque pesée suit une loi de Laplace.
Soit a réel positif. Quelle est la probabilité que les deux mesures effectuées ne diffèrent pas de plus de a ?

c) Pour quelles valeurs de a l'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne-t-elle une information sur cette probabilité ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive ; il suffit donc de vérifier qu'elle est d'intégrale 1. La convergence est évidente et, par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{2}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt = 1$$

Soit F la fonction de répartition de X, on a :

Si $x \leq 0$, $F(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\, dt = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{x}$

Si $x \geq 0$, par symétrie, $F(x) = 1 - F(-x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

⋆ La convergence (absolue) de l'intégrale définissant l'espérance est banale et, par symétrie, l'espérance est nulle.

⋆ Enfin la variance est égale au moment d'ordre 2 et :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-|t|}\,dt = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Gamma(3) = 2$$

2. Une densité g de Y est donnée, par convolution, par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-|x-t|}\,dt$$

Pour $x < 0$, $4g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{2t-x}\,dt + \int_x^0 \mathrm{e}^{x}\,dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x-2t}\,dt$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{4}(1-x)\mathrm{e}^{x}$

Tandis que pour $x > 0$: $4g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t-x}\,dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-x} + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x-2t}\,dt$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

On peut donc écrire : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{4}(1+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}$.

Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = 0$ et, par indépendance :

$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) = 4$.

3. a) La variable $-X_2$ a même loi que X_2, donc, toujours par indépendance, $X_1 - X_2$ a même loi que $Y = X_1 + X_2$.

b) Soit X_1 l'erreur aléatoire commise lors de la première mesure et X_2 celle commise lors de la seconde. On cherche la probabilité de l'événement $|X_1 - X_2| \leq a$, c'est-à-dire $-a \leq X_1 - X_2 \leq a$. On peut donc écrire :

$$p = P(-a \leq X_1 - X_2 \leq a) = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Une intégration par parties donne la solution et :

$$p = \frac{1}{2}\big(2 - (a+2)\mathrm{e}^{-a}\big)$$

c) L'inégalité de Bienaymé-Chebychev donne une indication dès que la largeur de l'intervalle considéré est égale au moins à deux fois l'écart-type de Y, c'est-à-dire pour $a \geq 2$.

Exercice 3-20

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.
Soit $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

1. Pour tout $t \in [0,1]$, déterminer une densité sur $\mathbb{R}^+$ de la variable $t(X+Y)-X$ (qui s'écrit également $(t-1)X+tY$).

2. En déduire la loi de Z.

Solution :

1. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc tY suit la loi exponentielle de densité $f(u) = \frac{1}{t}\exp(-\frac{u}{t})$, pour $u \geq 0$ et $f(u) = 0$, pour $u < 0$ (écrire $P(tY \leq u) = P(Y \leq \frac{u}{t})$, ce qui donne la fonction de répartition et dériver).

De la même façon $(1-t)X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{1-t}$ et $(t-1)X$, qui est son opposée, admet pour densité la fonction g définie par : $g(u) = \dfrac{1}{1-t}\exp(\dfrac{u}{1-t})$, si $u \leq 0$ et $g(u) = 0$, si $u > 0$.
Une densité h de $T = (1-t)X + tY$ est donc donnée par convolution :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,du$$

La fonction à intégrer est non nulle si et seulement si $x - u \geq 0$ et $u \leq 0$. Donc, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t}\exp(-\frac{x-u}{t})\frac{1}{1-t}\exp(\frac{u}{1-t})\,du \\ &= \frac{1}{t(1-t)}\exp(-\frac{x}{t})\int_{-\infty}^{0}\exp(\frac{u}{t(1-t)})\,du = \exp(-\frac{x}{t}) \end{aligned}$$

2. La variable Z prend clairement ses valeurs entre 0 et 1 et, pour $t \in [0,1]$:

$$[Z \leq t] = [X \leq t(X+Y)] = [(t-1)X + tY \geq 0] = [T \geq 0]$$

C'est pour cela qu'il suffisait de connaître une densité sur $\mathbb{R}^+$ de T et :

$$P(Z \leq t) = P(T \geq 0) = \int_{0}^{+\infty} \exp(-\frac{x}{t})\,dx = t$$

La variable Z suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3-21

Pour $a > 0$ et $b > 0$ on pose $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$.

1. a) Justifier l'existence de $B(a,b)$.

b) Calculer $B(a,b)$ lorsque a et b sont des entiers naturels non nuls.

2. On rappelle que X_a suit la loi $\Gamma(1,a)$ si une densité f_a de X_a est définie par :

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Pour $x > 0$, exprimer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) f_b(x-t)\,dt$ en fonction de $B(a,b)$.

En déduire que pour $a > 0$ et $b > 0$, $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Exprimer $B(a+1,b)$ en fonction de $B(a,b)$.

3. A l'aide du changement de variable $u = 2t-1$, calculer :

$$B(1/2,1/2) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}.$$

En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

4. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(1/2,1/2)} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} & \text{si } t \in \,]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer avec un minimum de calculs son espérance et sa variance.

Solution :

1. a) Si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, l'intégrale ne pose pas de problème d'existence et si $0 < a < 1$ ou $0 < b < 1$, la règle de Riemann assure la convergence pour la borne concernée. Ainsi, par disjonction des cas, l'intégrale proposée converge.

b) Pour $b \geq 1$ et $a > 1$, une intégration par parties donne :

$$B(a,b) = \frac{a-1}{b} B(a-1,b+1)$$

Soit : $\quad B(a,b) = \dfrac{a-1}{b}\,\dfrac{a-2}{b+1} \cdots \dfrac{1}{a+b-2} B(1,a+b-1)$

et comme $B(1,a+b-1) = \dfrac{1}{a+b-1}$, il vient :

$$\forall\, a,b \in \mathbb{N}^*, B(a,b) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

2. On sait que si $X \hookrightarrow \Gamma(1,a)$ et $Y \hookrightarrow \Gamma(1,b)$ et si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $X+Y \hookrightarrow \Gamma(1,a+b)$. Comme on sait qu'une

densité de $X+Y$ s'obtient alors par convolution, il vient, avec les notations de l'énoncé :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+\,, f_{a+b}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) f_b(x-t)\, dt$$

Il n'y a du grain à moudre que si $t \in [0, x]$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+\,, f_{a+b}(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} \frac{1}{\Gamma(b)} (x-t)^{b-1} \mathrm{e}^{t-x}\, dt$$

Soit : $\dfrac{1}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1} \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1}\, dt$

On effectue le changement de variable $t = xu$ et on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1} \mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a+b-1} B(a,b), \text{ soit :}$$

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_+^*\,, B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Ainsi : $B(a+1, b) = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \dfrac{a}{a+b} B(a,b)$.

3. Le changement de variable donne : $B(1/2, 1/2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

En posant $u = \sin t$, on obtient finalement $B(1/2, 1/2) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi$.

Comme $B(1/2, 1/2) = \dfrac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)}$, on en déduit que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

4. En écrivant l'intégrale idoine, on a : $E(X) = \dfrac{B(3/2, 1/2)}{B(1/2, 1/2)} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$.

De même $E(X^2) = \dfrac{3}{8}$ et, par la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 3-22

Soit $a \in\,]0, 1[$ et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, à valeurs dans $[0, 1]$.

On suppose que la loi conditionnelle de X conditionnée par $[X \leqslant a]$ est la loi uniforme sur $[0, a]$ et que sa loi conditionnelle conditionnée par $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a, 1]$.

On suppose de plus que $P[X \leqslant a] = \dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.

On cherche maintenant à estimer le paramètre inconnu a.

2. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$.
En déduire un estimateur sans biais T_n de a.
La suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

3. Donner une majoration de $V(T_n)$ quand $a \in]0, 1[$.
Pour n et α donnés, préciser, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, les valeurs de ε pour lesquelles $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance au risque α pour a.

(c'est-à-dire : $P[T_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant T_n + \varepsilon] \geqslant 1 - \alpha$)

4. Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\dfrac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}} \right)_{n \geq 1}$?

On suppose que n est suffisamment grand pour identifier la loi de $\dfrac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}}$ à cette loi limite.
En déduire un intervalle de confiance pour a à un risque inférieur à 5%.

5. Au niveau de risque 5%, comparer les longueurs des deux intervalles de confiance trouvés dans les questions 3 et 4.

Solution :

1. Une densité de X vaut $\dfrac{1}{2a}$ sur $[0, a]$ et $\dfrac{1}{2(1-a)}$ sur $[a, 1]$ et 0 ailleurs.

En utilisant la formule de Chasles pour calculer les intégrales, on trouve alors facilement :

$$E(X) = \frac{2a+1}{4} \text{ et } V(X) = \frac{4 + (2a-1)^2}{48}$$

2. $E(M_n) = E(X) = \dfrac{2a+1}{4}$ et $V(M_n) = \dfrac{1}{n} V(X) = \dfrac{4 + (2a-1)^2}{48.n}$.

Ainsi $T_n = 2M_n - \dfrac{1}{2}$ est d'espérance a, donc est un estimateur sans biais de a. La variance de T_n vaut $4V(M_n)$, donc est de limite nulle et (T_n) est une suite d'estimateurs convergente.

3. On a : $V(T_n) = \dfrac{4 + (2a-1)^2}{12.n} \leq \dfrac{5}{12.n}$ et, grce à l'inégalité de Bienaymé-Chébychev :

$$\text{Pour tout } a \text{ de } [0,1],\ P(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{12.n\varepsilon^2}$$

Si on veut que $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance au risque α, il suffit de prendre ε tel que $\frac{5}{12.n\varepsilon^2} \leq \alpha$, donc tel que $\varepsilon \geq \sqrt{\frac{5}{12.n\alpha}}$.

4. Le théorème de la limite centrée indique que $\left(\frac{T_n - a}{\sigma(T_n))}\right)_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite.

Soit alors $t_{\alpha/2}$ le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite. On a :

$$P[T_n - t_{\alpha/2}\sigma(T_n) \leq a \leq T_n + t_{\alpha/2}\sigma(T_n)] = 1 - \alpha$$

L'intervalle précédent n'est pas observable, puisque $\sigma(T_n)$ dépend du paramètre inconnu a, mais $V(T_n)$ étant majoré par $\frac{5}{12.n}$, cet intervalle est toujours inclus dans l'intervalle $\left[T_n - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{5}{12.n}}, T_n + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{5}{12.n}}\right]$, qui est, lui, observable et est *a fortiori* un intervalle de confiance pour a de risque inférieur à α.

Pour $\alpha = 5\%$, on a $t_{\alpha/2} = 1{,}96$.

5. Le rapport de longueur des deux intervalles de confiance est $\sqrt{\alpha}.t_{\alpha/2}$. Pour $\alpha = 5\%$, il vaut approximativement 0,44.

Exercice 3-23

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit $Y_n = nX_n$ où X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et qui admet f_n pour densité.

Pour $x \in [0,n]$, calculer $P[Y_n \leqslant x]$. En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(n+2)x(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

Soit $Y_n = nX_n$ où X_n admet pour densité f_n.

Pour $x \in [0,n]$, montrer que $P[Y_n \leqslant x] = 1 - \left(\frac{n+1}{n}x + 1\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}$.

En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Solution :

1. La fonction f_n est positive, continue sauf au point 0 et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = (n+1)\int_0^1 (1-t)^n\,dt = 1$$

Toutes les conditions sont réunies pour affirmer que f_n est bien une densité de probabilité.

La variable aléatoire Y_n prend ses valeurs entre 0 et n et, pour $x \in [0, n]$:

$$P(Y_n \leq x) = P(X_n \leq \frac{x}{n}) = (n+1)\int_0^{x/n} (1-t)^n\,dt = 1 - (1-\frac{x}{n})^{n+1}$$

$\star$ En notant F_n la fonction de répartition de Y_n, on a donc : $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$, si $x < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, si $x \geq 0$.

(En effet $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{x}{n})^n = \mathrm{e}^{-x}$, comme on le voit facilement en considérant les logarithmes et si $x \geq 0$, alors pour n assez grand, on a $0 \leq x \leq n$)

Par conséquent, la suite (Y_n) converge donc en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

2. $\star$ A nouveau, f_n est positive, continue sauf au point 0 et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = (n+1)(n+2)\int_0^1 t(1-t)^n\,dt = (n+1)(n+2)\int_0^1 u^n(1-u)\,du = 1$$

Donc f_n est une densité de probabilité.

$\star$ De la même façon, Y_n prend ses valeurs entre 0 et n et, pour $x \in [0, n]$:

$$\begin{aligned} P(Y_n \leq x) = P(X_n \leq \frac{x}{n}) &= (n+1)(n+2)\int_0^{x/n} t(1-t)^n\,dt \\ &= (n+1)(n+2)\int_{1-\frac{x}{n}}^1 u^n(1-u)\,du \end{aligned}$$

soit :

$$P(Y_n \leq x) = (n+2)\big[1 - (1-\frac{x}{n})^{n+1}\big] - (n+1)\big[1 - (1-\frac{x}{n})^{n+2}\big]$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$P(Y_n \leq x) = 1 - \big(\frac{n+1}{n}\,x + 1\big)(1-\frac{x}{n})^{n+1}$$

Pour $x \geq 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n \leq x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, tandis que pour $x < 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n \leq x) = 0$.

En dérivant, ou directement, on reconnaît dans la loi limite la loi Gamma de paramètres $b = 1$ et $\tau = 2$.

Exercice 3-24

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, ..., X_k)$, $k \geqslant 1$.

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.

3. En déduire la probabilité de l'événement $A_n = \{X_n \geqslant \max(X_1, ..., X_{n-1})\}$ pour $n \geqslant 2$.

Solution :

1. La variable Y_k prend ses valeurs entre 0 et 1, et pour $t \in [0, 1]$, on a, par indépendance et équirépartition :

$$P(Y_k \leq t) = P(X_1 \leq t).P(X_2 \leq t) \cdots P(X_k \leq t) = t^k$$

On en déduit qu'une densité f_{Y_k} de Y_k est donnée par :

$$f_{Y_k}(t) = k.t^{k-1}, \text{ si } 0 \leq t \leq 1\,;\ f_{Y_k}(t) = 0, \text{ sinon}$$

2) La variable Z_k prend ses valeurs entre -1 et 0, et pour $t \in [-1, 0]$:

$$P(Z_k \leq t) = P(Y_k \geq -t) = 1 - P(Y_k \leq -t) = 1 - (-t)^k$$

Une densité f_{Z_k} de Z_k est donc donnée par :

$$f_{Z_k}(t) = k.(-t)^{k-1}, \text{ si } -1 \leq t \leq 0\,;\ f_{Z_k}(t) = 0, \text{ sinon}$$

3) On a : $P(A_n) = P(X_n + Z_{n-1} \geq 0)$, et la variable aléatoire X_n étant indépendante de toute fonction de $X_1, \ldots, X_{n-1}$, la variable X_n est indépendante de Z_{n-1}. D'où, par convolution :

$$P(A_n) = \int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_{n-1}}(t) f_{X_n}(x - t)\, dt\Big] dx$$

Mais $f_{Z_{n-1}}$ est nulle en dehors de $[-1, 0]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_{n-1}}(t) f_{X_n}(x - t)\, dt = \int_{-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2} f_{X_n}(x - t)\, dt$$

Puis f_{X_n} vaut 1 si $x - t$ appartient à $[0, 1]$ et 0 sinon. L'intégrale précédente est donc nulle si $x \notin [0, 1]$, et si $x \in [0, 1]$ elle se réduit à $\displaystyle\int_{x-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2}\, dt$ et vaut donc $(1 - x)^{n-1}$.

Ainsi : $P(A_n) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$.

Exercice 3-25

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est convexe.

2. Trois autobus contiennent respectivement n_1, n_2, n_3 passagers en plus de leur chauffeur. On considère deux expériences :

- dans la première on choisit au hasard un des trois chauffeurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de passagers de l'autobus qu'il conduit.
- dans la seconde, on choisit au hasard un des $n_1 + n_2 + n_3$ passagers et on note Y le nombre de passagers de l'autobus dans lequel ce passager se trouve.

Comparer les espérances des variables aléatoires X et Y.

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $g''(x) = 2 > 0$, donc g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. $\star$ La variable aléatoire X prend les valeurs n_1, n_2, n_3 avec la même probabilité $\frac{1}{3}$, donc $E(X) = \frac{1}{3}(n_1 + n_2 + n_3)$ (on suppose donc implicitement que n_1, n_2, n_3 sont deux à deux distincts, mais le résultat concernant l'espérance reste valide dans tous les cas).

$\star$ La variable aléatoire Y prend les mêmes valeurs et $P(Y = n_i) = \dfrac{n_i}{n_1 + n_2 + n_3}$, d'où $E(Y) = \dfrac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3}$ (même remarque que pour la variable X).

$\star$ La convexité de g permet d'affirmer que l'on a :

$$g\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}\right) \leq \frac{g(n_1) + g(n_2) + g(n_3)}{3}$$

C'est-à-dire : $\dfrac{(n_1 + n_2 + n_3)^2}{9} \leq \dfrac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{3}$, *i.e.* $E(X) \leq E(Y)$.

Exercice 3-26

Soient a et b deux réels positifs distincts.
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Pareto de densités respectives f_a et f_b définies par :

$$f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}, \qquad f_b(t) = \begin{cases} bt^{-b-1} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

1. Reconnaître les lois de $\ln(X)$ et de $\ln(Y)$.
2. En déduire la loi de $Z = XY$.

Solution :

1. Les variables aléatoires X et Y prennent leurs valeurs dans $[1, +\infty[$, donc $\ln X$ et $\ln Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a :

$$P(\ln X \leq x) = P(X \leq \mathrm{e}^x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} a.t^{-a-1}\,dt = 1 - \mathrm{e}^{-ax}$$

Donc $\ln X$ suit la loi exponentielle de paramètre a. De même $\ln Y$ suit la loi exponentielle de paramètre b. Une densité g_a de $\ln X$ est la fonction définie par :

$$\text{Si } x \geq 0,\ g_a(x) = a\mathrm{e}^{-ax} \text{ et sinon } g_a(x) = 0$$

On notera de même g_b une densité de $\ln Y$.

2. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\ln X$ et $\ln Y$. Une densité g de $\ln Z = \ln X + \ln Y$ s'obtient donc par convolution :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t) g_b(x-t)\,dt$$

$\ln Z$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on se limite au cas $x \geq 0$ et l'intégrale devient :

$$g(x) = \int_0^x a\mathrm{e}^{-at} b\mathrm{e}^{-b(x-t)}\,dt = ab\frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{b-a}$$

Enfin, pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) = P(\ln Z \leq \ln x) &= \int_0^{\ln x} ab\frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{b-a}\,dt \\ &= \frac{ab}{b-a}\left[\frac{1}{b}(x^{-b} - 1) - \frac{1}{a}(x^{-a} - 1)\right] \end{aligned}$$

Donc une densité de Z sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{ab}{b-a}(x^{-a-1} - x^{-b-1})$.

Exercice 3-27

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2. a) Déterminer la probabilité des événements $X \geq 2$, $X \geq 3$ et $X = 2$.

b) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $(X \geq k)$.

c) En déduire la loi et l'espérance de X, puis la limite de cette dernière lorsque n tend vers l'infini.

3. On veut simuler l'expérience précédente lorsqu'il y a 10 boules dans l'urne.

Compléter les lignes manquantes du programme Pascal suivant afin qu'il affiche la série de numéros obtenus ainsi que la valeur de X correspondante :

```
Var u : array[1..11] of integer ;
......
Begin
u[1] :=1+random(10) ;
......
......
End.
```

L'affichage à l'écran se fera sous la forme 5 3 2 6 $X = 4$.

On précise que l'instruction `x :=random(n)` met dans la variable x déclarée de type `integer` une valeur « au hasard » entre 0 et $n-1$ (chaque appel à `random(n)`, pour n fixé renvoie une nouvelle valeur, indépendante des valeurs déjà obtenues).

Solution :

1. On effectue au minimum deux tirages et au maximum $n+1$ (lorsque les n premiers tirages ont amené, dans cet ordre, les résultats $n, n-1, n-2, \ldots, 1$). Toutes les situations intermédiaires étant possibles, on a donc $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

2. a) $P(X \geq 2) = 1$, $P(X \geq 3) = \dfrac{C_n^2}{n^2}$, car l'événement $(X \geq 3)$ est réalisé lorsque les numéros n_1, n_2 obtenus aux deux premiers tirages vérifient $n_1 > n_2$. Or il existe n^2 façons de tirer deux fois un numéro, toutes équiprobables, et C_n^2 façons de choisir un couple (n_1, n_2) de $[\![1, n]\!]^2$ tel que $n_1 > n_2$.

On en déduit : $P(X = 2) = P(X \geq 2) - P(X \geq 3) = 1 - \dfrac{C_n^2}{n^2}$.

b) Le même raisonnement montre que $P(X \geq k) = \dfrac{C_n^{k-1}}{n^{k-1}}$.

c) Par conséquent $P(X=k)=\dfrac{C_n^{k-1}}{n^{k-1}}-\dfrac{C_n^k}{n^k}$, le résultat étant valable même pour $k=n+1$, avec les conventions habituelles concernant les coefficients binomiaux, et aussi pour $k=1$ (ce qui donne bien une probabilité nulle).

On a :

$E(X)=\sum\limits_{k=2}^{n+1} k.P(X=k)=\sum\limits_{k=2}^{n+1} k.P(X\geq k)-\sum\limits_{k=2}^{n+1} k.P(X\geq k+1)$

Un changement d'indice dans la première somme donne alors :

$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)P(X\geq k+1)-\sum\limits_{k=2}^{n+1} k.P(X\geq k+1)$

D'où, après regroupements et simplifications :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}=(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$$

3.

```
PROGRAM boules ; uses crt ;
Var u :Array[1..11] of integer ; i : integer ;
Begin
(randomize ;
u[1] :=1+random(10) ; i :=1 ; write(u[1], ' ') ;
repeat i :=i+1 ;
   u[i] :=1+random(10) ;
   write(u[i],' ') ;
   until u[i]>=u[i-1] ;
writeln ('X=',i) ; readkey ;
End.
```

Exercice 3-28

Dans cet exercice, on considère trois variables aléatoires Y, X_1, X_2 admettant des moments d'ordre deux, et on s'intéresse à l'existence et à l'unicité d'un *minimum* pour la quantité

$$E\big((Y-aX_1-bX_2)^2\big)$$

lorsque (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$, E désignant l'espérance.

1. Soit $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(A \text{ est inversible}) \iff (xt-yz\neq 0)$$

2. Dans cette question et la suivante, on suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 vérifient $E(X_1^2).E(X_2^2) - (E(X_1X_2))^2 \neq 0$.

a) Montrer que $E(X_1^2)$ et $E(X_2^2)$ sont des réels strictement positifs.

b) Plus généralement, montrer que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $E\big((aX_1+bX_2)^2\big)$ est un réel strictement positif.

3. On définit l'application : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto f(a,b) = E\big((Y - aX_1 - bX_2)^2\big)$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'il existe un unique couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0) = \dfrac{\partial f}{\partial b}(a_0,b_0) = 0$.

b) Montrer que, dans ces conditions, on a $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$E\big((Y - a_0X_1 - b_0X_2)(aX_1 + bX_2)\big) = 0$$

puis que

$$E\big((Y-aX_1-bX_2)^2\big) = E\big((Y-a_0X_1-b_0X_2)^2\big)+E\big(((a_0-a)X_1+(b_0-b)X_2)^2\big)$$

c) Etudier les extremums de f.

4. **Cas particulier**.
On suppose ici que X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et on pose $Y = X_1^2$. Déterminer (a_0, b_0) pour lequel $E\big((Y - a_0X_1 - b_0X_2)^2\big)$ est *minimum*.

Pour cela, on admettra que la propriété relative à l'espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes reste vraie pour des variables aléatoires à densité indépendantes.

Solution :

1. Ce résultat est connu.

2. a) Si $E(X_1^2) = 0$, alors $P(X_1 = 0) = 1$, donc $P(X_1X_2 = 0) = 1$ et $E(X_1X_2) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. On conclut de la même façon pour la variable aléatoire X_2.

b) Supposons b non nul, alors :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, E\big((aX_1 + bX_2)^2\big) = a^2E(X_1^2) + 2abE(X_1X_2) + b^2E(X_2^2) \geq 0$$

Par conséquent : $\Delta' = b^2[E^2(X_1X_2) - E(X_1^2)E(X_2^2)] \leq 0$.
Par hypothèse ce discriminant n'est pas nul, donc il est strictement négatif et le trinôme est toujours strictement positif.
Enfin, si $b = 0$, il reste $E(a^2X_1^2) > 0$ et la conclusion reste valable.

3. a) On a :
$f(a,b)=E(Y^2)+a^2E(X_1^2)+b^2E(X_2^2)+2abE(X_1X_2)-2aE(X_1Y)-2bE(X_2Y)$
La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2aE(X_1^2) + 2bE(X_1X_2) - 2E(X_1Y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2bE(X_2^2) + 2aE(X_1X_2) - 2E(X_2Y) \end{cases}$$
Il existe un unique point critique (a_0, b_0), car la matrice du système correspondant est inversible, d'après l'hypothèse de l'énoncé.

b) $\star$ $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a_0,b_0) = 0$, donc $E\big((Y - a_0X_1 - b_0X_2)X_1\big) = 0$ et, de la même façon $E\big((Y - a_0X_1 - b_0X_2)X_2\big) = 0$. Par linéarité de l'espérance, on a donc :
$$E\big((Y - a_0X_1 - b_0X_2)(aX_1 + bX_2)\big) = 0$$
$\star$ On écrit $Y - aX_1 - bX_2 = Y - a_0X_1 - b_0X_2 + (a_0 - a)X_1 + (b_0 - b)X_2$, on développe alors le carré et le résultat précédent montre que l'espérance du « double produit » est nul, ce qui donne la formule voulue.

c) Ainsi $f(a,b) = f(a_0,b_0) + E\big(((a_0 - a)X_1 + (b_0 - b)X_2)^2\big) \geq f(a_0,b_0)$ l'égalité ne pouvant avoir lieu que si l'espérance du terme complémentaire est nulle, c'est-à-dire pour $(a,b) = (a_0,b_0)$.
La fonction f admet un minimum absolu atteint uniquement en (a_0,b_0). Comme f n'a pas d'autre point critique, elle ne possède pas d'autre extremum local et *a fortiori* pas de maximum absolu.

4. On a :
$E(X_1^2) = E(X_2^2) = \dfrac{1}{3}$ et, par indépendance $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = \dfrac{1}{4}$.
On est bien dans les conditions de l'exercice et de plus $E(X_1Y) = E(X_1^3) = \dfrac{1}{4}$, $E(X_2Y) = E(X_2)E(X_1^2) = \dfrac{1}{6}$.
Par conséquent $E\big((Y - aX_1 - bX_2)^2\big)$ est minimum au point (a_0,b_0) solution du système $\begin{cases} \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{b_0}{4} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{a_0}{4} + \dfrac{b_0}{3} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$
Soit pour $(a_0,b_0) = \big(\frac{6}{7}, -\frac{1}{7}\big)$.

Exercice 3-29

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $Y = \ln(\mathrm{e}^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y.

2. Calculer $E(Y)$.

Solution :

1. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $\mathrm{e}^X - 1$ aussi et puisque l'événement $(X = 0)$ est quasi-imposible, Y est définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(\mathrm{e}^X \leq \mathrm{e}^y + 1) = P(X \leq \ln(\mathrm{e}^y + 1)) = 1 - \exp(-\ln(\mathrm{e}^y + 1)) \\ &= \frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y + 1} \end{aligned}$$

Une densité de Y est donc la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y + 1)^2}$$

2. Sous réserve de convergence (absolue) , l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}\, dx$$

La fonction φ à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\varphi(x) = 0$, la convergence en résulte en appliquant deux fois la règle de Riemann.

Le changement de variable $y = -x$, légitime, donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y.\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y + 1)^2}\, dy$$

L'intégrale est donc nulle et $E(Y) = 0$.

Exercice 3-30

On considère une urne contenant m boules numérotées de 1 à m. On procède à partir de cette urne à des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant :

Au premier tirage, on tire une boule « au hasard » de l'urne.

Si à un tirage quelconque, on a obtenu la boule numéro k, on la replace dans l'urne, et toutes les boules portant un numéro strictement inférieur à k sont remplacées par un nombre égal de boules portant le numéro k ; on peut alors procéder au tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du n-ème tirage. $P(A)$ désigne la probabilité de l'événement A.

1. Déterminer la loi de X_1.

2. i) Montrer que : $\forall\, k \in [\![1, m]\!], P(X_2 = k) = \dfrac{2k-1}{m^2}$.

ii) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(X_{n+1} = m) = \dfrac{m-1}{m} P(X_n = m) + \dfrac{1}{m}$.

iii) Calculer $P(X_n = m)$ en fonction de m et de n.

3. Comparer les événements $(X_n = m)$ et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (X_k = m)$. En déduire un calcul direct de $P(X_n = m)$.

Solution :

1. Pour le premier tirage tous les numéros sont représentés une fois et X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, m]\!]$.

2. i) Appliquons la formule des probabilités totales, avec le système complet $\big(X_1 = i\big)_{1 \le i \le m}$:

$$\forall\, k \in [\![1, m]\!], P(X_2 = k) = \sum_{i=1}^{m} P(X_2 = k / X_1 = i) P(X_1 = i)$$

Si $i \le k-1, P(X_2 = k \mid X_1 = i) = \dfrac{1}{m}$ (une boule porte le numéro k)

$$P(X_2 = k \mid X_1 = k) = \frac{k}{m} \text{ (} k \text{ boules portent le numéro } k\text{)}$$

si $i > k, P(X_2 = k \mid X_1 = i) = 0$ (il n'y a plus de boule portant le numéro k)

Il reste donc : $P(X_2 = k) = (k-1)\dfrac{1}{m^2} + k\,\dfrac{1}{m^2} = \dfrac{2k-1}{m^2}$

ii) De la même façon : $P(X_{n+1} = m) = \sum\limits_{i=1}^{m} P(X_{n+1} = m / X_n = i) P(X_n = i)$.

Or, si X_n prend une valeur inférieure à m, il y a 1 boule portant le numéro m pour le tirage suivant, tandis que si $X_n = m$ est réalisé, l'urne ne contient plus que des boules numérotées m. Ainsi :

$$P(X_{n+1}=m)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}P(X_n=i)+P(X_n=m)$$
$$=\frac{1}{m}(1-P(X_n=m))+P(X_n=m)$$

Ce qui est le résultat voulu.

iii) La suite $\big(P(X_n = m)\big)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique de raison $\dfrac{m-1}{m}$, de point fixe 1 et de premier terme $\dfrac{1}{m}$. Il vient alors classiquement :

$$\forall n\geq 1, P(X_n=m)=1-(1-\frac{1}{m})^n$$

3. Si on obtient la boule m au cours d'un des n premiers tirages, on est sur d'obtenir la boule numérotée m au n-ème tirage. Réciproquement si on obtient la boule m au n-ème tirage, on a obtenu la boule m au cours des n premiers tirages.

Donc : $(X_n = m) = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(X_k = m)$ et :

$$P(X_n=m)=1-P\big(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k m)\big)$$

Mais, tant que l'on n'obtient pas la boule m, on a une chance sur m de l'obtenir au tirage suivant, c'est-à-dire la probabilité $1-\dfrac{1}{m}$ de ne pas l'obtenir au tirage suivant. Ainsi :

$$P(X_n=m)=1-\big(1-\frac{1}{m}\big)^n$$

Exercice 3-31

On dispose de dix pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la k-ème pièce amène « Pile » avec la probabilité $\dfrac{k}{10}$.

On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient « Face ». Quelle est la probabilité d'avoir lancé la cinquième pièce ?

Solution :

Soit A_k l'événement « on choisit la pièce numéro k » et F l'événement « on obtient Face ». La formule du Révérend Thomas Bayes donne :

$$P(A_5/F)=\frac{P(F/A_5)P(A_5)}{P(F)}$$

et la formule des probabilités totales donne :

$$P(F)=\sum_{i=1}^{10}P(F/A_i)P(A_i)$$

sachant que $\sum_{i=1}^{10} i = 55$, il vient $P(A_5/F) = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$.

Exercice 3-32

On note $VP(\lambda, \theta)$ la loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0, \theta > 0$ et 0 , c'est-à-dire la loi de densité f définie par : $f(x) = \frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1}$ si $x > \theta$ et $f(x) = 0$ sinon.

Un phénomène économique suit une loi $VP(\lambda, \theta)$, θ étant un paramètre connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

On pose $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right)$ et $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T}$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $VP(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$.

a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

b) Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X .

c) Montrer que Y suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la loi de T ? En donner une densité.

3. Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\lambda}$.

4. Déduire de $\widehat{\lambda}$ un estimateur $\widehat{\lambda_1}$ sans biais de λ. L'estimateur $\widehat{\lambda_1}$ est-il convergent ?

5. On admet que la suite de variables aléatoires $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et on rappelle que la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite vérifie $\Phi(1,96) \simeq 0{,}975$.

En utilisant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ comme approximation de la loi de Z_n, donner, en fonction de n (supposé assez grand) et de la valeur observée λ_0 de $\widehat{\lambda}$, un intervalle de confiance à 95% de λ.

Application numérique : $n = 100$ et $\lambda_0 = 5$.

Solution :

1. Des calculs sans surprises donnent :

a) Pour $x \leq \theta$, $F_X(x) = 0$ et pour $x > \theta$, $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\lambda$

b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\lambda > 1$ et dans ce cas : $E(X) = \frac{\lambda\theta}{\lambda - 1}$.
De même, la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si $\lambda > 2$ et alors : $V(X) = \frac{\lambda\theta^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$.

c) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x > 0, F_Y(x) = P(X \leq \theta.\mathrm{e}^x) = F_X(\theta.\mathrm{e}^x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire la loi Γ de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et 1.

2. La variable aléatoire T est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$, donc T suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.
Une densité f_T de T est donnée par :

$$\forall\, t \leq 0, f_T(x) = 0, \forall\, t > 0, f_T(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda^n}{(n-1)!}$$

3. $\star$ On a $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T}$, donc sous réserve d'existence :

$$E(\widehat{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{x} f_T(x)\, dx = \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} x^{n-2} \lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, dx$$

On reconnaît l'intégrale (intégrale d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n-1)$), ce qui prouve que l'espérance existe et vaut :

$$E(\widehat{\lambda}) = \frac{n\lambda}{n-1}$$

$\star$ En procédant de la même façon on montre que $\widehat{\lambda}$ admet un moment d'ordre 2 valant $\frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$, donc une variance valant : $V(\widehat{\lambda}) = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$

4. $\widehat{\lambda}_1 = \frac{n-1}{n}\widehat{\lambda}$ vérifie $E(\widehat{\lambda}_1) = \lambda$ et $V(\widehat{\lambda}_1) = \frac{\lambda^2}{n-2}$. Cette variance est de limite nulle lorsque n tend vers l'infini, donc $\widehat{\lambda}_1$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

5. En approchant la loi de Z par la loi normale centrée réduite, on obtient :

$$P(-1,96 \leq \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda} - \lambda)}{\lambda} \leq 1,96) = 0,95$$

C'est-à-dire :

$$P(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1,96}\widehat{\lambda} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1,96}\widehat{\lambda}) = 0,95$$

On obtient donc comme intervalle de confiance pour λ, au niveau de confiance $0,95$:

$$[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1,96}\lambda_0, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1,96}\lambda_0]$$

L'application numérique donne : $I = [4{,}18; 6{,}22]$.

Exercice 3-33

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et suivant respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $\mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.

On pose, pour $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable.

2. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Solution :

1. Les valeurs propres de $A(\omega)$ sont $X(\omega)$ et $Y(\omega)$.

Si ces deux valeurs propres sont distinctes, $A(\omega)$ est diagonalisable.

Si elles sont égales, $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable, sinon elle serait semblable à une matrice scalaire, donc serait une matrice scalaire, ce qui est évidemment faux.

En notant p_1 la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable, on a donc :

$$p_1 = P(XY) = 1 - P(X = Y)$$

Par indépendance de X et Y, on peut écrire :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = k) = \left(\frac{3}{16}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \left(\frac{3}{16}\right)^n C_{2n}^n$$

[La dernière relation, appelée formule de Vandermonde résulte du fait que la somme de deux variables indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ suit la loi $\mathcal{B}(2n,p)$]

$$p_1 = 1 - \left(\frac{3}{16}\right)^n C_{2n}^n$$

2. $A(\omega)$ est inversible si et seulement si $X(\omega)0$ et $Y(\omega)0$. Donc, en notant p_2 la probabilité cherchée :

$$p_2 = P[(X0) \cap (Y0)] = [1 - P(X = 0)].[1 - P(Y = 0)]$$

$$p_2 = \left[1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right].\left[1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right]$$

Exercice 3-34

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-a)} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

3. F désignant la fonction de répartition de X, déterminer m tel que $F(m) = \dfrac{1}{2}$.

4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $Y = \inf(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive et on vérifie facilement que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)}\, dx = 1.$$

La fonction f est bien une densité de probabilité.

2. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-(x-a)}\, dx$ est connue et le calcul aisé, en intégrant par parties. On obtient : $E(X) = a + 1$.
(on peut aussi dire que $X = a + Y$, la variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre 1.)

3. Pour $x \geq a$, on a $F_X(x) = \displaystyle\int_a^x \mathrm{e}^{-(t-a)}\, dt = 1 - \mathrm{e}^{-(x-a)}$ et sinon $F_X(x) = 0$.

L'équation $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$ admet donc pour unique solution : $m = a + \ln 2$.

4. a) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[a, +\infty[$ et, par indépendance :

$\forall\, x \geq a, P(Y \leq x) = 1 - P(Y > x) = 1 - [P(X > x)]^n = 1 - [1 - F_X(x)]^n$

Soit :

$$P(Y \leq x) = 1 - \mathrm{e}^{-n(x-a)}$$

b) Une densité g de Y est donc définie par : $g(x) = n.\mathrm{e}^{-n(x-a)}$ si $x \geq a$ et $g(x) = 0$ sinon. La convergence des intégrales rencontrées est évidente, par négligeabilité classique de l'exponentielle devant la puissance et, à l'aide d'intégrations par parties :

$\star$ $E(Y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} nx.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx = a + \frac{1}{n}$.

$\star$ $E(Y^2) = \displaystyle\int_a^{+\infty} nx^2.\mathrm{e}^{-n(x-a)}\,dx = a^2 + 2a + \frac{2}{n}$, puis :

$V(Y) = 2a(1 - \frac{1}{n}) + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3-35

On considère n équipes de football de 1-ère division et n équipes de 2-ème division. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (on représente chaque équipe par une boule placée dans une urne et on extrait au hasard et une par une les boules de cette urne, l'équipe correspondant au $(2k+1)$-ème tirage rencontrant l'équipe correspondant au $(2k+2)$-ème tirage, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$).

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1-ère division à une équipe de 2-ème division.

2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.

3. Montrer que $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}$.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Solution :

Selon le protocole choisi, il y a $(2n)!$ façons de vider de vider l'urne, mais pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on peut permuter les résultats des $(2k-1)$-ème et $(2k)$-ème tirages, sans que cela modifie la liste des matchs à jouer. Il y a donc en fait $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ listes différentes de matchs, toutes équiprobables. (Attention, nous parlons bien de listes de matchs, c'est-à-dire que nous décidons qu'il y a un ordre pour les différents matchs, par exemple en décidant qu'il y a n terrains numérotés et que la k-ème paire ira jouer sur le k-ème terrain.)

1. Pour réaliser l'événement demandé, la procédure est simple : on prend toutes les équipes de division 1 et on les répartit en en plaçant une sur chaque

terrain, ce qui peut se faire de $n!$ façons, puis on procède de même pour les équipes de division 2, ce qui peut se faire aussi de $n!$ façons. On a donc :

$$p_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{C_{2n}^n}$$

2. Soit B_n l'événement de l'énoncé. Si n est impair, on a $q_n = P(B_n) = 0$ (il y aura au moins une rencontre entre quipes de divisions différentes).
Si n est pair, posons $n = 2m$. On choisit alors les m terrains où s'affronteront les équipes de division 1 (les équipes de division 2 iront donc sur les autres terrains !). Le raisonnement fait dans l'introduction montre qu'il y a $\frac{(2m)!}{2^m}$ façons d'organiser les rencontres entre les équipes de première division et le même nombre de façons d'organiser les rencontres entre équipes de division 2. Ainsi :

$$q_{2m} = C_{2m}^m \times \frac{(2m)!}{2^m} \times \frac{(2m)!}{2^m} \times \frac{2^{2m}}{(4m)!} = \frac{C_{2m}^m}{C_{4m}^{2m}}$$

3. On a :

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 1}{n!n!} = \frac{2^n(2n-1)(2n-3)\cdots 5.3.1}{n!}$$

Ainsi :

$$\frac{2^n(2n-2)(2n-4)\cdots 4.2}{n!} \leq C_{2n}^n \leq \frac{2^n(2n)(2n-2)\cdots 4.2.1}{n!}$$

Soit :

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}$$

4. $\star$ On a donc : $0 \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$. Puis :

$\star$ $0 \leq q_{2m} \leq \frac{2^{2m}}{C_{4m}^{2m}} = p_{2m}$ et $\lim\limits_{m\to\infty} q_{2m} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$.

OPTION B/L

Exercice BL-1

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, s_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

   b) Montrer que la suite de terme général $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2. a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 \leq s_n$.

   b) Montrer que la suite de terme général $s_n - 2\sqrt{n}$ est convergente.

Solution :

1. a) L'inégalité est banale pour $n = 1$ et si on la suppose vraie pour un certain rang n, alors :
$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
Or : $\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$ et donc :

$$s_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

On conclut par le principe de récurrence.

b) La question précédente montre que $\frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq 2$ et, pour $n \geq 1$:

$$\frac{s_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{s_n}{\sqrt{n}} = s_{n+1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$
$$\geq (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = 0$$

La suite de terme général $\frac{s_n}{\sqrt{n}}$ est donc croissante et majorée, donc convergente (on peut aussi comparer classiquement s_n avec une intégrale).

2. a) A nouveau l'inégalité est banale pour $n = 1$ et si on la suppose vraie pour un certain rang n, alors :

$$s_{n+1} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2} - 2$$

Car $2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

A nouveau, on conclut par le principe de récurrence.

b) La question précédente montre que $s_n - 2\sqrt{n} \geq -2$ et de plus :

$$s_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - s_n + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

On vérifie aisément que le numérateur est négatif, donc la suite $(s_n - 2\sqrt{n})$ est décroissante et minorée, et par conséquent est convergente.

Notons que cette question permet de retrouver le résultat de la question 1) b) et montre en prime que la limite de la suite $\big(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\big)$ vaut 2.

Exercice BL-2

Pour α et β réels positifs ou nuls, on pose : $f(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\,dt$.

1. Vérifier que $f(\alpha,\beta) = f(\alpha+1,\beta) + f(\alpha,\beta+1)$.

2. Montrer que $(\alpha+1)f(\alpha,\beta+1) = (\beta+1)f(\alpha+1,\beta)$. En déduire une relation entre $f(\alpha+1,\beta)$ et $f(\alpha,\beta)$.

3. Montrer que $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$.

4. Calculer $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

5. Montrer que, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\,\alpha \geq \frac{1}{2}, \forall\,\beta \geq \frac{1}{2}$:

$$\lambda^2 f(\alpha+\tfrac{1}{2},\beta-\tfrac{1}{2}) + 2\lambda f(\alpha,\beta) + f(\alpha-\tfrac{1}{2},\beta+\tfrac{1}{2}) \geq 0$$

puis : $[f(\alpha,\beta)]^2 \leq f(\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}) \times f(\alpha-\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2})$.

Solution :

1. Notons que pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ l'intégrale définissant $f(\alpha, \beta)$ a bien un sens, la fonction à intégrer étant continue.

Par linéarité de l'intégration :

$$f(\alpha+1, \beta) + f(\alpha, \beta+1) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta [t + (1-t)]\, dt = f(\alpha, \beta)$$

2. Dans l'intégrale définissant $f(\alpha, \beta+1)$, procédons à une intégration par parties (légitime) :

$$f(\alpha, \beta+1) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\beta+1} dt = \Big[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}\Big]_0^1 - \frac{\beta+1}{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^\beta dt$$

Soit :

$$(\alpha+1) f(\alpha, \beta+1) = (\beta+1) f(\alpha+1, \beta)$$

3. Le changement de variable $u = 1-t$, de classe $\mathcal{C}^1$ donne :

$$f(\alpha, \beta) = \int_1^0 (1-u)^\alpha u^\beta (-du) = f(\beta, \alpha)$$

4. $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx = \frac{\pi}{8}$ (sans calculs, car on reconnaît l'aire d'un demi-disque de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$: pour cela il suffit d'écrire :

$$y \leq \sqrt{x(1-x)} \iff y \geq 0 \text{ et } y^2 + x^2 - x \leq 0)$$

5. Soit $T_{\alpha,\beta}(\lambda)$ l'expression de l'énoncé. En plaant tout sous la même intégrale, il vient :

$$T_{\alpha,\beta}(\lambda) = \int_0^1 t^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-t)^{\beta-\frac{1}{2}}(\lambda\sqrt{t} + \sqrt{1-t})^2\, dt \geq 0$$

Ce trinôme du second degré est donc toujours positif ou nul, ce qui entraîne que son discriminant (réduit) est négatif ou nul, ce qui est exactement l'inégalité de l'énoncé.

Exercice BL-3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \exp\big(\dfrac{1}{\ln x}\big)$

*(*exp *désigne la fonction exponentielle de base* e, *i.e.* $\exp(u) = \mathrm{e}^u$*)*

1. Etudier les variations de la fonction f. Préciser le comportement aux bornes de son domaine de définition D et donner une représentation graphique de f.

2. Montrer que $f \circ f$ est bien définie sur D et expliciter cette fonction.

3. Soit u la suite réelle définie par son premier terme $u_0 = x$ et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Pour quelles valeurs de x la suite u est-elle bien définie ?

b) Etudier alors le comportement de cette suite.

Solution :

1. La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, dérivable sur son domaine de définition, avec $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2} f(x) < 0$, donc f décroît sur ses intervalles de continuité $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Les limites s'obtiennent sans problème : $\lim\limits_{0^+} f = 1$, $\lim\limits_{1^-} f = 0$, $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$. D'où l'esquisse d'une représentation graphique :

2. On remarque que $x \in\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[\implies f(x) \in\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$, donc $f \circ f$ est bien définie, avec :

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = \exp\Big(\frac{1}{\ln(\exp(\frac{1}{\ln x}))}\Big) = \exp(\ln x) = x$$

(ce que le dessin précédent laissait supposer).

3. a) Pour définir u_1, il faut que $x \in D_f$ et, comme D_f est stable par f, la suite est alors bien définie.

b) Comme $f \circ f = id_{D_f}$, on a $u_2 = u_0 = f(x)$, $u_3 = u_1 = f(x)$ et plus généralement, pour tout k : $u_{2k} = x$, $u_{2k+1} = f(x)$. Ces deux suites extraites sont donc convergentes et la suite (u_n) est convergente si et seulement si $u_1 = u_0$, *i.e.* $x = f(x)$. Or :

$$x = f(x) \iff \exp\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) = x \iff (\ln x)^2 = 1 \iff x \in \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}\}$$

(les nombres trouvés appartiennent bien au domaine D_f)

Exercice BL-4

Soit f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

4. Etudier les branches infinies de la représentation graphique de f et esquisser cette représentation.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur tout segment ne contenant pas 0. Comme x et $3x$ sont de même signe, le domaine de définition D_f de f est *a priori*Ê $\mathbb{R}^*$.

2. Soit φ une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a : $f(x) = \varphi(3x) - \varphi(x)$, d'où $f'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x)$, soit :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} = \mathrm{e}^{-x} \times \frac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{x}$$

3. $\star$ Supposons $x > 0$ et notons m_x et M_x la borne supérieure et la borne inférieure de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sur le segment $[x, 3x]$. On a : $\forall\, t \in [x, 3x]$, $\dfrac{m_x}{t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leq \dfrac{M_x}{t}$, d'où $m_x \ln 3 \leq f(x) \leq M_x \ln 3$ et comme $\lim\limits_{0} \exp = 1$: $\lim\limits_{x \to 0^+} f = \ln 3$.

$\star$ Le cas $x < 0$ se traite de même et $\lim\limits_{0} f = \ln 3$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 3$.

$\star$ Les équivalents classiques montrent que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -2$. La fonction f, prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0, et f' admet une limite en 0. On sait alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = -2$.

4. $\star$ Pour $t \geq 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leq \mathrm{e}^{-t}$, donc pour $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \displaystyle\int_x^{3x} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}$. On en déduit, par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\star$ Pour $x < 0$, posons $t = -u$ et $y = -x$: $f(x) = \displaystyle\int_y^{3y} \frac{\mathrm{e}^{u}}{u}\,du$.

Il existe $A > 0$ tel que $u > A \implies \mathrm{e}^u > u^3$ (prépondérance classique), donc pour $x < -A$: $f(x) \geq \displaystyle\int_y^{3y} u^2\,du = \frac{26}{3}y^3 = \frac{26}{3}|x|^3$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$: la courbe représentative présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées. La représentation graphique s'en déduit.

Exercice BL-5

Une entreprise fabrique des bacs parallélépipédiques de largeur x, de longueur y et de hauteur z. Ces bacs comportent un fond mais pas de couvercle et l'épaisseur des plaques formant ces bacs est négligeable.

1. Quelle est l'aire totale des plaques nécessaires à la construction d'un bac ? On notera cette aire $A(x, y, z)$.

2. On suppose que le volume V d'un tel bac est imposé. Comment choisir les dimensions pour minimiser l'aire A ?

Solution :

1. On a $A(x, y, z) = xy + 2(xz + yz)$ (un fond et quatre faces deux à deux égales).

2. Il s'agit de trouver le *minimum* de A sous la contrainte $V = xyz$, où V est donné. Cela revient à trouver le *minimum* de la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto xy + 2(x+y)\dfrac{V}{xy}$, les variables x et y décrivant $\mathbb{R}_+^*$.

Or :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x^2y^2 - 2Vy}{x^2y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^2y^2 - 2Vx}{xy^2} \end{cases}$$

La recherche des points critiques donne la relation évidente $x = y$, d'où l'unique point critique de coordonnées :

$$x_0 = (2V)^{1/3} \text{ et } y_0 = (2V)^{1/3}$$

On peut alors calculer les dérivées partielles secondes en ce point pour voir qu'il s'agit bien d'un *minimum*.

Exercice BL-6

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et g un endomorphisme de E tel que $g \circ g \circ g = 0$ (où 0 désigne l'endomorphisme nul de E).

1. Peut-on avoir $\dim \operatorname{Ker} g = 0$?

2. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ est inclus dans $\operatorname{Im} g$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(g \circ g)$? Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de g relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 2$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de g relativement à $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 0$, alors g est injectif, donc est un automorphisme de E et g^3 également, ce qui contredit l'hypothèse $g^3 = 0$.

2. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ et si $\operatorname{Ker} g$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} g$, alors $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. La restriction de g à son image est donc injective et réalise un isomorphisme de $\operatorname{Im} g$ sur lui-même. Ainsi la restriction de g^3 à $\operatorname{Im} g$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} g$ sur $\operatorname{Im} g\{0\}$ ce qui contredit l'hypothèse $g^3 = 0$.

Le théorème du rang, appliqué à la restriction de g à $\operatorname{Im} g$ donne :

$$2 = \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} g}) + \dim \operatorname{Im} g^2$$

Or $\operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} g}) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g$, donc $\dim \operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} g}) = \dim \operatorname{Ker} g = 1$, ce qui donne $\dim \operatorname{Im} g^2 = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} g^2 = 2$.

Soit x un vecteur n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} g^2$, on voit facilement que la famille $\big(g^2(x), g(x), x\big)$ est une base de E et relativement à cette base, g se traduit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, alors $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g$ (sinon $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et on conclut comme précédemment), donc en fait $g^2 = 0$ et en choisissant un vecteur x qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker} g$, le vecteur $g(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} g$, on peut donc construire une base de $\operatorname{Ker} g$ de la forme $\big(g(x), y\big)$. La famille $\big(g(x), y, x\big)$ est une base de E et relativement à cette base, g se traduit par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice BL-7

Une urne contient trois jetons numérotés $1, 2, 3$ indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'un jeton de cette urne, en replaant à chaque fois le jeton obtenu, avant le tirage suivant.

1. On note Y le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, deux numéros différents. Déterminer la loi de Y et son espérance.

2. On note Z le nombre aléatoire de tirages juste nécessaire pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Déterminer la loi du couple (Z, Y).

b) Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

Solution :

1. $\star$ La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ et pour $k \geq 2$, l'événement $(Y = k)$ est réalisé si les tirages du rang 2 au rang $k-1$ (s'il en existe) amènent le même résultat que le premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité$(1/3)^{k-2}$), le k-ème tirage amenant un résultat différent (ce qui se produit avec la probabilité $2/3$, soit :

$$\forall\, k \geq 2, P(Y = k) = (1/3)^{k-2}(2/3)$$

$\star$ La convergence étant évidente, on a :

$$E(Y) = 2\sum_{k=2}^{\infty} k(1/3)^{k-1} = 2\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 1\Big) = \frac{5}{2}$$

2. a) L'événement $(Z = m) \cap (Y = k)$ ne peut se réaliser que si l'on a : $m \geq 3$ et $2 \leq k < m$ et alors :

$$P[(Z = m) \cap (Y = k)] = P(Y = k)P(Z = m \mid Y = k).$$

Or : $P(Y = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$ et $P(Z = m/Y = k) = \big(\frac{2}{3}\big)^{m-k-1}\dfrac{1}{3}$

car les tirages dont les rangs sont compris entre $k+1$ et $m-1$ (s'il en existe) amènent l'un quelconque des deux numéros déjà obtenus, le dernier tirage permettant de conclure. Soit :

$$P[(Z = m) \cap (Y = k)] = \frac{2^{m-k}}{3^{m-1}}$$

b) $\star$ Ainsi, pour $m \geq 3$: $P(Z = m) = \sum\limits_{k=2}^{m-1} \dfrac{2^{m-k}}{3^{m-1}} = \dfrac{1}{3^{m-1}}(2^{m-1} - 2)$.

$\star$ La convergence de la série étant à nouveau classique, on a :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{m=3}^{\infty} \frac{m}{3^{m-1}}(2^{m-1} - 2) \\ &= \sum_{m=3}^{\infty} m\big(\tfrac{2}{3}\big)^{m-1} - 2\sum_{m=3}^{\infty} m\big(\tfrac{1}{3}\big)^{m-1} \end{aligned}$$

Aux premiers termes près, on reconnaît des séries classiques et :

$$E(Z) = \frac{11}{2}$$

Exercice BL-8

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
On note $U = |X - Y|$ (valeur absolue de $X - Y$) et $V = \min(X, Y)$.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par U et V ?
   b) Déterminer la loi du couple (U, V).

2. a) Déterminer la loi de U et la loi de V.
   b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. a) La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, ainsi que la variable aléatoire Y. Par conséquent U prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et V dans $\mathbb{N}^*$.

b) On a $P[(U = m) \cap (V = n)] = P(|X - Y| = m, \min(X, Y) = n)$.

$\star$ Si $m = 0$, par indépendance des variables X et Y :

$$P[(U = 0) \cap (V = n)] = P[(X = n) \cap (Y = n)] = p^2 q^{2n-2}.$$

$\star$ Si $m \in \mathbb{N}^*$, par disjonction des cas possibles :
$P[(U = m)\cap(V = n)] = P[(X = m+n)\cap(Y = n)] + P[(X = n)\cap(Y = m+n)]$
et, par équiprobabilité de ces deux événements et indépendance de X et Y :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, P[(U = m) \cap (V = n)] = 2q^2 p^{m+2n-2}$$

2. a) $\star$ $P(U = 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P[(U = 0) \cap (V = n)] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^2 (q^2)^{n-1} = \dfrac{q^2}{1 - p^2}$:

$$P(U = 0) = \frac{q}{1 + p}$$

Pour $m > 0$, $P(U = m) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2q^2 p^m (p^2)^{n-1} = \dfrac{2qp^m}{1 + m}$

$\star$ La loi de V est donnée par : $\forall n \geq 1$,

$P(V = n) = \sum_{m=0}^{\infty} P[(U = m) \cap (V = n)] = q^2 p^{2n-2} + \sum_{m=1}^{\infty} 2q^2 p^{2n-1} p^{m-1}$

Soit :

$$P(V = n) = q^2 p^{2n-2} + 2qp^{2n-1} = (1 + p)qp^{2n-2}$$

b) On vérifie aisément que, dans tous les cas :

$$P[(U = m) \cap (V = n)] = P(U = m)P(V = n)$$

Les variables U et V sont donc indépendantes.

Exercice BL-9

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant toutes trois la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Calculer $P(X = Y)$.

2. Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Calculer $P(X + Y = Z)$.

Solution :

1. $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k).P(Y = k) = \dfrac{1}{n}$

2. La variable $X+Y$ prend ses valeurs entre 2 et $2n$, et il convient de distinguer selon que $k > n + 1$ ou $k \leq n + 1$:

Si $2 \leq k \leq n + 1$, $P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) = \dfrac{k - 1}{n^2}$

Si $2n \geq k > n + 1$, $P(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(X = i)P(Y = k - i) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$

3. $P(X + Y = Z) = \sum_{k=1}^{n} P(X + Y = k)P(Z = k) = \dfrac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k - 1) = \dfrac{n - 1}{n^2}$

Exercice BL-10

Un joueur lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6, le nombre de fois juste nécessaire pour que chaque dé ait fait apparaître le numéro 6. Soit X le nombre aléatoire de jets ainsi effectués.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.

2. Déterminer la loi de X.

3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Dans l'affirmative quelle est sa valeur ?

Solution :

1. Numérotons les deux dés et notons X_i le temps d'attente du premier six sur le dé numéro i. Chaque variable X_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.
On a $X = \sup(X_1, X_2)$ et, par indépendance :

$$\forall\, n \geq 1, P(X \leq n) = P(X_1 \leq n).P(X_2 \leq n)$$

Or $P(X_i \leq n) = 1 - P(X_i > n) = 1 - (\frac{5}{6})^n$ et donc :

$$\forall\, n \geq 1, P(X \leq n) = \left(1 - (\tfrac{5}{6})^n\right)^2$$

On constate que le résultat reste valable pour $n = 0$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n-1) = \left(1 - (\frac{5}{6})^n\right)^2 - \left(1 - (\frac{5}{6})^{n-1}\right)^2$
Soit, après développement et simplifications :

$$\forall\, n \geq 1, P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}$$

3. La convergence de toute série du type $\sum nq^n$, avec $|q| < 1$ étant connue, la série définissant l'espérance de X est convergente, et on peut même séparer les sommations :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{11}{36}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$E(X) = \frac{96}{11}$$

Exercice BL-13

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X. On pose $Y = \mathrm{e}^{X+1}$.

1. Déterminer, en fonction de Φ, la fonction de répartition de Y.

2. En déduire une densité f de Y.

3. Y admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, P(Y \leq x) = P(X \leq -1 + \ln x) = \Phi(-1 + \ln x).$$

2. Une densité f de Y est donc donnée, par dérivation, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}\varphi(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, il vient :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}\pi}} \exp(-\frac{1}{2} \ln^2 x)$$

3. Y admet une espérance si et seulement si $x \mapsto x.f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, x^2.xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}\pi}} \exp(3 \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc, par la règle de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge

tandis que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} xf(x) = 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ n'est pas une intégrale impropre.

Par conséquent Y admet une espérance.

(Il est d'ailleurs possible de calculer cette espérance, à partir du théorème de transfert, par «canonisation» du trinôme obtenu dans l'exponentielle ...)

Exercice BL-14

Soit $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, a étant un paramètre réel.

On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M_a relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les valeurs propres de M_a. La matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Solution :

Par la méthode du pivot, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 2a$. Il est donc nécessaire de discuter :

$\star$ Si $a = 1$, l'unique valeur propre est 2 et si M_1 était diagonalisable, elle serait semblable à $2I$, donc serait égale à $2I$, ce qui est faux. Donc M_1 n'est pas diagonalisable.

$\star$ Si $a1$, la matrice M_a admet deux valeurs propres : 2 et $2a$.

$$M_aX = 2X \iff \begin{cases} (a-1)x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \\ -x + y + (2a-3)z = 0 \\ (a-2)x + (2-a)y + (3a-4)z = 0 \end{cases}$$

Comme $a1$, il reste : $E_{(2)} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M_aX = 2aX \iff \begin{cases} (1-a)x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \\ -x + (3-2a)y + (2a-3)z = 0 \\ (a-2)x + (2-a)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

Si $a = 2$, $E_{(4)} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et M_2 est diagonalisable.

Sinon, $E_{(2a)} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et M_a n'est pas diagonalisable.

En conclusion, seule la matrice M_2 est diagonalisable.