1

ANALYSE

Exercice 1-1

1. Pour quelles valeurs de x réel, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est-elle convergente ? On pose alors : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
Montrer que la fonction f est une fonction décroissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (on pourra considérer $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, puis faire tendre N vers l'infini).

3. En considérant $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x}$, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

4. Montrer que la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ (on majorera $\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}}$ par le terme général d'une série convergente).

Solution :

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$.

La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, puisque si $1 < x < y$, alors comme $n \geq 1$, $\frac{1}{n^y} \leq \frac{1}{n^x}$. La positivité des termes de cette série montre que f est décroissante.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ donné et $f_N : x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. C'est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\lim_{x \to 1} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$$

Or tous les termes de la série définissant f étant positifs, on a, pour tout $x > 1$:

$$f(x) > f_N(x), \ \forall N \in \mathbb{N}$$

La fonction f étant décroissante sur $]1, +\infty[$, alors $\ell = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ℓ est soit fini, soit $\ell = +\infty$). On a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\ell \geq f(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

La série harmonique étant divergente, il vient $\ell = +\infty$.

3. Par décroissance et positivité de la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^x}$ sur $[1, +\infty[$, il vient :

$$f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x} \geq f(x) - 1$$

(c'est une comparaison série–intégrale classique).
Un calcul de primitive donne :

$$\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

ce qui entraîne que $f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1^+.

4. Soit $x_0 >$ et $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon > 1$. Soit h réel tel que $|h| < \varepsilon$. On peut écrire :

$$\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}} = \mathrm{e}^{-(x_0+h)\ln n} - \mathrm{e}^{-x_0 \ln n}$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$|\mathrm{e}^{-(x_0+h)\ln n} - \mathrm{e}^{-x_0 \ln n}| \leq |h| \ln(n) \mathrm{e}^{-(x_0-\varepsilon)\ln n}$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n) e^{-(x_0-\varepsilon)\ln n}$ est convergente. En effet :

$$\ln(n) e^{-(x_0-\varepsilon)\ln n} = \frac{\ln n}{n^{x_0-\varepsilon}} = \frac{\ln n}{n^{\alpha}}, \ (\alpha > 1)$$

Soit $\beta > 1$ tel que $1 < \beta < \alpha$. Alors, par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\beta \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$$

ce qui entraîne la convergence de la série. On note S sa somme. Il vient :

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}} \right| \leq S.|h|$$

ce qui entraîne que f est continue en x_0.

Exercice 1-2

1. Pour quelles valeurs de t réel la série $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$ est-elle convergente ? On pose alors :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$$

2. Montrer que g est décroissante sur son domaine de définition.

3. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} g(t)$.

4. a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b) Déterminer $\lim_{t\to 0^+} g(t)$

c) Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

Solution :

1. Posons $u_n = \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$.

$\star$ Si $t \leq 0$, alors la suite (u_n) ne converge pas vers 0 et la divergence de la série est triviale.

$\star$ Si $t > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} (t\sqrt{n})^4.\mathrm{e}^{-t\sqrt{n}} = 0$ et donc u_n est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, ce qui prouve que la série converge.

Ainsi, g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si $t > t' > 0$, alors pour tout n, $\mathrm{e}^{-t'\sqrt{n}} \geq \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}$, puis par sommation depuis $n = 0$ jusqu'à un rang N, et conservation des inégalités à la limite, on en déduit : $g(t') \geq g(t)$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour $t \geq 1$ et $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\mathrm{e}^{-t\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-t(\sqrt{n}-1)} \leq \mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-(\sqrt{n}-1)} = \mathrm{e}^{-t}.v_n$$

La série de terme général v_n est convergente (car $\lim_{n\to\infty} n^2.v_n = 0$) et donc, pour $t \geq 1$, on a $0 \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{-t}. \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, ce qui donne, par encadrement :

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

4. a) Ce résultat est une question de cours, il suffit d'écrire, par décroissance de f :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n)$$

Le résultat s'en déduit alors, par sommation ...

b) On a donc ici : $g(t) - \mathrm{e}^{-t} \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du \leq g(t)$

Or, par le changement de variable $v = t^2 u$:

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, dt = \frac{1}{t^2}\int_{t^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv \underset{(t\to 0^+)}{\longrightarrow} +\infty$$

Ce qui prouve que $\lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$.

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, dv = 2\int_0^{+\infty} z.\mathrm{e}^{-z}\, dz = 2$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, dt \underset{(0^+)}{\sim} \frac{2}{t^2}$

L'encadrement : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du \leq g(t) \leq \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{u}}\, du + \mathrm{e}^{-t}$ montre alors que $g(t) \underset{(0^+)}{\sim} \dfrac{2}{t^2}$.

Exercice 1-3

1. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^x} du$ est convergente. On note $f(x)$ sa valeur.
2. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$.
3. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, puis $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution :

1. Le problème provient évidemment de la borne supérieure, et pour $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{\sin u}{u^x}\, du = \Big[-\frac{\cos u}{u^x}\Big]_1^A - x\int_1^A \frac{\cos u}{u^{x+1}}\, du$$

On a $0 \leq \dfrac{|\cos u|}{u^{x+1}} \leq \dfrac{1}{u^{x+1}}$, et comme $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{x+1}}\, du$ est absolument convergente, donc convergente, tandis que $\lim_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A}{A^x} = 0$.

Cela prouve que l'intégrale proposée est convergente.

2. En achevant le calcul associé à l'intégration par parties précédente, on obtient :

$$f(x) = \cos 1 - x\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{x+1}}\,du$$

Une deuxième intégration par parties (dans le même sens) donne alors :

$$f(x) = \cos 1 + x\sin 1 - x(x+1)\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{x+2}}\,du$$

Soit : $f(x) = \cos 1 + x\sin 1 - x(x+1)f(x+2)$.

3. Pour tout $x \geq 2$, on a : $|f(x)| \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,dx = 1$.

Par conséquent, $\forall\, x > 0, \left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{x+2}}\,du\right| \leq 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cos 1$.

On écrit : $f(x+2) = -\dfrac{f(x)}{x(x+1)} + \dfrac{\cos 1}{x(x+1)} + \dfrac{\sin 1}{x+1}$ et puisque f est bornée sur $[2,+\infty[$, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+2) = 0.$$

Exercice 1-4

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(x,y,z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z$$

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Montrer que :

$$F(x,y,z) = (2x+y+z-6)^2 + (4x+y-18)^2 + 4(x-9)^2 - 684$$

c) Montrer que F atteint son minimum sur $\mathbb{R}^3$ en un unique point. Préciser ses coordonnées, ainsi que la valeur du minimum.

2. a) Rappeler la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n dt$.

b) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

$$I(a,b,c) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c\right)^2 dt$$

c) Déterminer :

$$I = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} I(a,b,c)$$

3. a) Justifier (brièvement) que :

$$\big(P \mid Q\big) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, P(t)\, Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

b) Calculer la distance du polynôme $P_0(X) = X^3$ au sous-espace $H = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2.

c) Soit $T(X) = a\,X^2 + b\,X + c$ un polynôme appartenant à H.
Montrer que T est la projection orthogonale du polynôme X^3 sur le sous-espace H si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) & = & 0 \end{cases}$$

et retrouver le résultat précédent.

Solution :

1. a) L'application $(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car polynomiale par rapport à chacune de ses variables. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 48x + 12y + 4z - 240 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 12x + 4y + 2z - 48 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 4x + 2y + 2z - 12 \end{cases}$$

Les points critiques sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 12x + 3y + z = 60 \\ 6x + 2y + z = 24 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + y = 36 \\ 4x + y = 18 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9 \\ y = -18 \\ z = 6 \end{cases}$$

b) Il suffit de développer le terme de droite de l'égalité proposée pour aboutir au résultat demandé.

c) On vérifie que $(9, -18, 6)$ annule $F(x, y, z) + 684$ (qui est un réel positif comme somme de trois carrés). Il en résulte que F admet un minimum absolu en ce point qui vaut -684.

2. a) Une intégration par parties évidente sur un intervalle de la forme $[0, X]$, suivie d'un passage à la limite, montre que $I_n = nI_{n-1}$ et $I_0 = 1$ entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.

b) La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 h(t) = 0$ entraîne la convergence en $+\infty$ de l'intégrale proposée. Un simple développement de $(t^3 - at^2 - bt - c)^2$, l'existence et la linéarité de l'intégrale donnent :

$$I(a,b,c) = a^2 I_4 + b^2 I_2 + c^2 I_0 + 2abI_3 + 2acI_2 + 2bcI_1 - 2aI_5 - 2bI_4 - 2cI_3$$

ou :

$$I(a,b,c) = F(a,b,c) + 720$$

c) D'après la première question :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} I(a,b,c) = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} F(a,b,c) + 720 = 36$$

qui est atteint en $(9, -18, 6)$.

3. a) On vérifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)\, Q(t) dt$ existe (même raisonnement qu'à la question précédente) et que la forme proposée est bilinéaire (existence et linéarité de l'intégrale), symétrique (commutativité du produit de réels), positive (positivité de l'intégrale) et définie (car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} P^2(t)$ est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}^+$). On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

b) On sait que :

$$d^2(P_0, H) = \inf_{P\in H} ||P_0 - P||^2 = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c)^2 dt = 36$$

c) On sait que T est la projection orthogonale du polynôme X^3 sur le sous-espace H si et seulement si $T \in H$ et $(P_0 - T) \in H^{\perp}$. Si l'on pose $T(X) = aX^2 + bX + c$, ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} (X^3 - T \mid X^2) = 0 \\ (X^3 - T \mid X) = 0 \\ (X^3 - T \mid 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^5 - at^4 - bt^3 - ct^2) dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^4 - at^3 - bt^2 - ct) dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c) dt = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} 120 - 24a - 6b - 2c = 0 \\ 24 - 6a - 2b - c = 0 \\ 6 - 2a - b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

On retrouve ainsi le point critique de la première question.

Exercice 1-5

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Étudier la convergence des intégrales

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$$

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x^2} f(t)dt$

2. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.

3. Préciser les limites de F aux bornes de D.

4. Étudier les variations de F. On montrera en particulier que F' s'annule en une unique valeur a qu'on déterminera.
Dresser le tableau de variations de F.

5. Tracer l'allure du graphe de F et préciser son intersection avec l'axe (Ox).

Solution :

1. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est positive et continue sur $]-1,+\infty[$.

• Au voisinage de -1, $h(t)$ est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann).

• Au voisinage de l'infini, $h(t)$ est équivalent à $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable pour la même raison.

Ainsi les deux intégrales I et J convergent-elles.

2. La fonction F est définie si et seulement si h est définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{x}, x^2\right]$, donc si et seulement si $\left[\dfrac{1}{x}, x^2\right] \subset]-1,+\infty[$, soit :

$$(x > 0) \;\; \text{ou}\; (x < 0) \cap \left(\tfrac{1}{x} > -1\right) \Longleftrightarrow (x > 0) \cup (x < -1)$$

La première question montre d'une part que $F(-1) = I$ existe et d'autre part que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -J$.

Finalement, le domaine de définition de F est :

$$D_F =]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$$

3. De nouveau, la première question nous assure que :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = J, \;\; \lim_{x\to+\infty} F(x) = J, \;\; \lim_{x\to 0^+} F(x) = -J, \;\; \lim_{x\to 0^-} F(x) = I$$

4. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. Sur cet intervalle, la dérivée F' est donnée par :

$$F'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^6}}+\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}$$

- on a trivialement $F'(x)>0$ pour $x>0$.
- pour $x<-1$, il vient :

$$F'(x)>0 \Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+x^6}>\dfrac{1}{x^4+x}\\ x<-1\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}3x^6+4x^3-1>0\\ x<-1\end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$x\in\,]\alpha,-1[,\ \text{avec } \alpha=\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)^{1/3}$$

On remarquera que $\lim\limits_{x\to-1^-}F'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F'(x)=+\infty$, ce qui donne en ces points des demi–tangentes verticales.

Exercice 1-6

On rappelle les formules de trigonométrie :

$$\sin a+\sin b=2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a-\sin b=2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

1. Soit $a>0$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a\sin(\lambda\,x)\,f(x)dx\right]=0$$

De la même manière, on a (et on n'en demande pas la démonstration) :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a\cos(\lambda\,x)\,f(x)dx\right]=0$$

2. Pour $a\in[0,\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n(a)=\int_0^a\frac{\sin(nx)}{\sin x}dx$$

a) Justifier la convergence de $I_n(a)$.

b) Montrer que pour $a\in[0,\pi[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[I_{n+1}(a)-I_n(a)\right]=0$.

3. a) Déterminer $I_n(\pi)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Pour $a\in]0,\pi[$, écrire une relation entre $I_n(a)$ et $I_n(\pi-a)$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(a)=\dfrac{\pi}{2}$.

4.a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

b) Soit $a \in]0, \pi[$. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \phi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

peut se prolonger en une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0, a]$.

c) Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx$$

et en déduire la valeur de J.

Solution :

1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties est légitime et en supposant $\lambda > 0$ (ce qui n'est pas une restriction, puisque l'on cherche la limite lorsque $\lambda \to +\infty$) :

$$I_\lambda = \int_0^a \sin(\lambda x) f(x)\, dx = \Big[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} f(x) \Big]_0^a + \frac{1}{\lambda} \int_0^a \cos(\lambda x) f'(x)\, dx$$

Ainsi : $\quad |I_\lambda| \leq \dfrac{|f(0)|}{\lambda} + \dfrac{|f(a)|}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^a |f'(x)|\, dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

2. a) L'intégrale est impropre pour la borne 0, mais : $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x} \sim \dfrac{nx}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} n$, et la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0.

Si $a = \pi$, l'intégrale est aussi impropre en π, mais le changement de variable $t = \pi - x$ montre que le problème est le même qu'en 0 et la fonction à intégrer se prolonge encore par continuité.

L'intégrale est donc en fait «fausement impropre».

b) A l'aide des formules de trigonométrie données dans l'énoncé, on obtient :

$$I_{n+1}(a) - I_n(a) = \int_0^a \cos \frac{2n+1}{2} x \cdot \frac{1}{\cos(x/2)}\, dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x/2)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a] \subset [0, \pi[$, on conclut, grce à la première question :

$$\lim_{n \to \infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$$

3. a) Toujours avec les formules données, on a :

$$I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi) = \int_0^\pi 2 \cos(nx)\, dx = 0$$

Donc $I_{n+1}(\pi) = I_{n-1}(\pi)$ et, par récurrence :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, I_{2p}(\pi) = I_0(\pi) = 0 \text{ et } I_{2p+1}(\pi) = I_1(\pi) = \pi$$

b) En effectuant le changement de variable $x = \pi - t$:

$$I_n(\pi - a) = \int_0^{\pi - a} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx = \int_a^{\pi} (-1)^n \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, dt$$

Donc :

$$I_n(\pi - a) = (-1)^n[I_n(\pi) - I_n(a)]$$

c) Ainsi : $I_n a) = I_n(\pi) + (-1)^{n+1} I_n(\pi - a)$, d'où :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) + I_n(a) &= I_{n+1}(\pi) + I_n(\pi) + (-1)^n[I_{n+1}(\pi - a) - I_n(\pi - a)] \\ &= \pi + (-1)^n[I_{n+1}(\pi - a) - I_n(\pi - a)]. \end{aligned}$$

On a donc $I_{n+1}(a) + I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi$ et $I_{n+1}(a) - I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où :

$$I_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi/2$$

4. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe.

Pour $x \geq 1$, en intégrant par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

Comme $\dfrac{|\cos t|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ est (absolument) convergente, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Par conséquent $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et donc J existe.

b) La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, a]$ et pour $x0$:

$$\phi(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{x^3/6}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi ϕ est prolongeable par continuité en 0, en posant $\phi(0) = 0$.
On a alors, pour $x0$:

$$\phi'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2 \sin^2 x}$$

Un développement limité donne : $\sin^2 x - x^2 \cos x = \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)$, tandis que l'on a : $x^2 \sin^2 x = x^4 + o(x^4)$, donc $\displaystyle\lim_0 \phi' = \frac{1}{6}$.

Par théorème, on en déduit que le prolongement par continuité de ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = \dfrac{1}{6}$, donc ce prolongement est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

c) $\displaystyle I_n(a) - \int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\, dx = \int_0^a \sin(nx)\phi(x)\, dx$. La première question montre donc que cette expression est de limite nulle, lorsque n tend vers l'infini, et :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Le changement de variable $t=nx$, pour $n\geq 1$, donne :

$$\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}\,dx=\int_0^{na}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

La convergence de l'intégrale étant acquise, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 1-7

1. Pour $x\in[0,1[$, on pose $h(x)=\ln(1-x)$

a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Calculer la dérivée p-ième de h.

b) Soit $x\in[0,1[$ fixé.

Étudier les variations de la fonction $t\mapsto\phi(t)=\dfrac{t-x}{t-1}$ sur l'intervalle $[0,x]$.

En déduire que, pour tout $x\in[0,1[$:

$$|H_p(x)|\leq x^p\,|\ln(1-x)|\qquad\text{où}\qquad H_p(x)=\int_0^x h^{(p+1)}(t)\,\frac{(x-t)^p}{p!}dt$$

2. Montrer que la fonction $x\mapsto g(x)=\ln(x^2)\ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

3. a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J=\int_0^1\frac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$$

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer :

$$I_n=-\int_0^1\frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx$$

c) Montrer que :

$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}$$

4. A-t-on :

$$(\forall x\in[0,1[)\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad ?$$

Solution :

1. a) Des calculs évidents et une démonstration par récurrence donnent pour tout $p\geq 1$ et pour tout $x\in[0,1[$:

$$h^{(p)}(x)=-\frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$$

b) Pour tout $x \in [0,1[$ fixé, l'application $t \mapsto \phi(t) = \dfrac{t-x}{t-1}$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,x]$. de plus

$$\phi'(t) = \frac{x-1}{(t-1)^2} < 0$$

Ainsi, par décroissance et comme $\phi(0) = x$, il vient pour tout $t \in [0,x]$:

$$0 \leq \phi(t) \leq x$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x h^{(p+1)}(t)\,\frac{(x-t)^p}{p!}dt\right| &= \left|\int_0^x -(\phi(t))^p)\,\frac{dt}{1-t}\right| \\ &\leq x^p \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x^p \ln(1-x) \\ &= x^p |\ln(1-x)|\end{aligned}$$

2. La fonction g est continue sur l'intervalle $]0,1[$.
- au voisinage de 0, $g(x)$ est équivalent à $h(x) = -x^2\ln(x^2)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
- au voisinage de 1, $g(x)$ est équivalent à $h(x) = 2\ln(x)\ln(1-x)$ soit encore $g(x) \sim 2(1-x)\ln(1-x)$ qui tend également vers 0 lorsque x tend vers 1.

Ainsi g est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ et y est donc bornée.

3. a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}$ est continue sur $]0,1[$.
Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à $-2\ln x$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$.
Au voisinage de 1, $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ qui tend vers 0.
Ainsi l'intégrale proposée existe.

b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 0 en 0, si $n \geq 1$. Elle est donc prolongeable par continuité sur $[0,1]$ ce qui assure l'existence de I_n, pour $n \geq 1$.
Pour $n = 0$, elle est équivalente à $2\ln x$ au voisinage de 0 qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$.

Une intégration par parties sur $[a,b] \subset]0,1[$ donne :

$$-\int_a^b \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx = \left[-\frac{x^{2n+1}\ln x^2}{(n+1)(2n+1)}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2x^{2n}}{(n+1)(2n+1)}dx$$

puis en prenant les limites en 0 et 1 :

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

c) Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction h :

$$h(x) = -\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n} + \int_0^x h^{(p+1)}(t)\frac{(x-t)^p}{p!}dt$$

d'où :

$$\left| J - \sum_{n=0}^{p-1} I_n \right| \leq \int_0^1 \frac{|\ln x^2|}{x^2} |H_p(x^2)| dx$$
$$\leq \int_0^1 |g(x)| x^{2p-2} dx \leq \frac{M}{2p-1}$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque p tend vers l'infini. On en déduit que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}$$

4. Il suffit de reprendre la formule de Taylor de la question précédente :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{p} \frac{x^n}{n} + H_p(x)$$

et pour $x \in [0,1[, |H_p(x)| \leq x^p |\ln(1-x)|$ qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Donc pour tout $x \in [0,1[$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Exercice 1-8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier naturel. On pose $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

a) Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x)$$

b) Établir que P_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

3. Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a,+\infty[$ et qui vérifie $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

a) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(\frac{1}{x}+a-1) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que G est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

b) Montrer que G' s'annule en un point de $]0,1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a,+\infty[$.

4. Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty,a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty,a[$, telle que $h(a)=0$ et telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$. Montrer que h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty,a[$.

5. Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞. La fonction f, qui est son inverse, est de classe C^∞.

2. a) Si $P_n(x)=(1+x^2)^{n+1}f^{(n)}(x)$, alors :

$$P_n'(x)=(n+1)2x(1+x^2)^n f^{(n)}(x)+(1+x^2)^{n+1}f^{(n+1)}(x)$$

et un calcul immédiat donne :

$$(1+x^2)P_n'(x)=2(n+1)xP_n(x)+P_{n+1}(x)$$

b) Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.

- $P_0=1$ vérifie l'hypothèse.
- Supposons l'hypothèse vérifiée pour tout $k\le n$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (1+x^2)P_n'(x)-2(n+1)xP_n(x) \\ &= (1+x^2)[(-1)^n(n+1)!nx^{n-1}+R'(x)] \\ &\qquad -2(n+1)x\left((-1)^n(n+1)!x^n+R(x)\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1}+Q(x) \end{aligned}$$

3. a) La fonction G est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. Par composition, elle est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x dans cet intevalle :

$$G'(x)=\frac{-1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}+a-1\right)$$

b) On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction G et on en déduit qu'il existe $C\in]0,1[$ tel que $G'(C)=0$. Donc, il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $g'(c)=0$, avec $c=\dfrac{1}{C}+a-1$.

4. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction g définie par :

$g(x) = h(-x)$.

5. Montrons le résultat par récurrence.

- on vérifie que P_0 et P_1 admettent respectivement 0 et une racine sur $\mathbb{R}$.
- supposons que le polynôme P_n admette n racines distinctes $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. La fonction $f^{(n)}$ s'annule donc en ces points.

Du théorème de Rolle appliqué à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}], 1 \leq i \leq n-1$, on déduit que $f^{(n+1)}$ (donc P_{n+1}) s'annule en $(n-1)$ point distincts $b_2 < b_3 < \ldots < b_n$, avec pour tout $1 \leq i \leq n-1 : b_i \in]a_i, a_{i+1}[$.

Or la fonction $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle $[a_n, +\infty[$, dérivable sur $]a_n, +\infty[$ et vérifie $f^{(n)}(a_n) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$. D'après la question 3, il existe $b_{n+1} > a_n$ tel que $f^{(n+1)}(b_{n+1}) = 0$.

De même, en appliquant la question 4 à $f^{(n)}$ sur l'intervalle $]-\infty, a_1[$, on trouve $b_1 < a_1$ tel que $f^{(n+1)}(b_1) = 0$.

On a ainsi trouvé $(n+1)$ points distincts où P_{n+1} s'annule.

Ce polynôme étant de degré $(n+1)$, il n'admet pas d'autres racines.

Exercice 1-9

Soit r un réel strictement positif. On considère un réel strictement positif u_0 et on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ en posant :

$$u_{n+1} = \frac{1}{r + u_n^2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 0$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + rx - 1$ et montrer qu'elle s'annule en un seul point ℓ. En déduire que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{r + x^2}$$

admet un seul point fixe (i.e. il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$).

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

a) Que vaut $g(x)$?

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que pour tout x réel on a :

$$(1 - rx)(r + x^2)^2 - x = (x^3 + rx - 1)(ax^2 + bx + c)$$

c) Déterminer la fonction $x \mapsto h(x) = g(x) - x$.

3. On prend pour r la valeur 1.

a) Montrer que g admet un seul point fixe.

b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$?

4. On prend pour r la valeur $1/2$.

a) Montrer que g admet trois points fixes. On notera α et β les deux points fixes qui sont différents de ℓ avec $\alpha < \beta$.

b) On pose $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. Montrer que f laisse l'ensemble E invariant (i.e que l'on a $f(E) = E$).

En déduire que $\alpha < \ell < \beta$.

c) Etudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$.

d) Etudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ en fonction de la valeur initiale u_0.

Solution :

1. Une étude immédiate montre que l'application $x \mapsto x^3 + rx - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'étude de ses limites en $\pm\infty$ montre qu'elle s'annule en un unique point ℓ.
Il en résulte que la fonction f admet un unique point fixe ℓ.

2. a) Un calcul immédiat donne, pour tout x réel :

$$g(x) = \frac{(r + x^2)^2}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

b) En effectuant le produit du membre de droite et par identification, il vient :

$$(1 - rx)(r + x^2)^2 - x = (x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)$$

c) La fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{(1 - rx)(r + x^2)^2 - x}{r(r + x^2)^2 + 1} = \frac{(x^3 + rx - 1)(-rx^2 + x - r^2)}{r(r + x^2)^2 + 1}$$

Remarquons que le discriminant Δ du trinôme $-rx^2 + x - r^2$ est égal à $1 - 4r^3$.

3. a) Lorsque $r = 1$, Δ est négatif. La fonction h n'admet qu'un seul zéro qui est ℓ. La fonction g admet donc ℓ comme unique point fixe.

b) La suite (u_n) est bornée par construction. La fonction g étant croissante, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (et bornées). Elles convergent donc chacune vers l'unique point fixe de g.
La suite (u_n) converge donc vers ℓ.

4. a) Lorsque $r = 1/2$, Δ est strictement positif. La fonction h a trois zéros et la fonction g admet trois points fixes α, β, ℓ. Un calcul immédiat donne :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Posons $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. On remarque que :

$$f(\alpha) = f(g(\alpha)) = g(f(\alpha)),\ f(\beta) = f(g(\beta)) = g(f(\beta)).$$

L'application f étant injective, les points $f(\alpha), f(\beta)$ ℓ sont trois points distincts, invariants par g. Comme f admet un unique point fixe, il vient :

$$f(\alpha) = \beta, \ f(\beta) = \alpha$$

On considère alors les différentes possibilités pour ordonner α, β et ℓ, et en appliquant f, on a nécessairement $\alpha < l < \beta$.

c) Le signe de h est immédiat :

$$\text{sgn}(h(x)) = \begin{cases} +1 & x \in]-\infty, \alpha[\cup]\ell, \beta[\\ -1 & x \in]\alpha, \ell[\cup]\beta, +\infty[\end{cases}$$

d) Il faut distinguer plusieurs cas :

• $0 < u_0 < \alpha$. On a alors $h(u_0) > 0$ et donc $u_2 > u_0$. La fonction g étant croissante, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α.

Elle converge vers un point fixe de g qui ne peut être que α.

Comme f est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est décroissante (car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$) et minorée par $\beta = f(\alpha)$. Elle converge donc vers β.

• $u_0 = \alpha$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à α et β.

• $\alpha < u_0 < \ell$. Le tableau des signes de h et un raisonnement identique à celui du premier cas montrent que la suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers α, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers β.

• $u_0 = \ell$. La suite (u_n) est constante égale à ℓ.

• $\ell < u_0 < \beta$. La suite (u_{2n}) est croissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers α.

• $u_0 = \beta$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes égales respectivement à β et α.

• $u_0 > \beta$. La suite (u_{2n}) est décroissante et converge vers β, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et converge vers α.

Exercice 1-10

On considère une fonction f définie et continue sur $[0, \pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

1. On suppose dans cette question seulement que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la suite (I_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0, \pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n-uplet de réels $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ associe le nombre $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kt)\right)^2 dt$.

On pose $b_k(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$.

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a, b), on a

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Calculer pour tout couple (k, l) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)dt.$$

En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \cdots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

c) Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.

d) Conclure.

Solution :

1. Les deux fonctions à intégrer étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} f(t)\cos nt\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f'(t)\cos nt dt$$

Les fonctions f et f' sont bornées sur le segment $[0, \pi]$ par M et M' respectivement. Ainsi :

$$|I_n| \leq \frac{2M}{n} + \frac{\pi M'}{n}$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. a) Comme $\sin kt \sin \ell t = \dfrac{1}{2}\cos(k-\ell)t - \dfrac{1}{2}\cos(k+\ell)t$, il vient :

$$\int_0^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ \pi/2 & \text{si } k = l \end{cases}$$

Ainsi :

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kt)\right)^2 dt$$

Lorsqu'on développe le carré de la dernière expression, tous les termes des doubles produits ont une intégrale nulle, alors que l'intégrale des autres termes vaut $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi le résultat demandé.

b) Il suffit de vérifier, par un calcul, que :

$$F(a_1, \ldots, a_n) - F(b_1(f), \ldots, b_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} [a_k - b_k(f)]^2 \geq 0$$

Il en résulte que F admet un minimum global en $(b_1(f), \ldots, b_n(f))$.

c) Comme F est à valeurs positives, son minimum est positif ou nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) - 2\sum_{k=1}^{n} b_k(f)b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt \geq 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

Les sommes partielles de la série $\sum b_k^2(f)$ sont majorées par $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$. La série est donc convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2(f) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$$

d) Puisque la série $\sum b_k^2(f)$ converge, son terme général tend vers 0 c'est-à-dire $\lim_{k \to +\infty} b_k(f) = 0$.
Ce résultat suppose seulement que f soit continue sur $[0, \pi]$.

Exercice 1-11

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(f(x)) = \sin(f(x))$$

Solution :

On sait que les solutions de l'équation $\cos x = \sin y$ sont :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases}$$

Donc $\cos(f(x)) = \sin(f(x))$ est équivalent à :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi}{2} - f(x) + 2k\pi \\ f(x) = \dfrac{-\pi}{2} + f(x) + 2k\pi \end{cases}$$

La seconde solution est impossible. La première correspond à $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, k étant une fonction de x. Mais f étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle et f est une fonction constante de la forme $\dfrac{\pi}{4} + k_0\pi$.

Exercice 1-12

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.

Pour $n \geqslant 1$, déterminer $I_n - I_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n, pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.
En utilisant à une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \sin[(2n+1)t] dt = 0.$$

4. Soit g l'application définie sur $]0, \pi/2]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)} = \dfrac{\sin(t) - t}{t \sin(t)}$.

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} (I_n - J_n)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$

5. Comparer J_n et $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du$.

En déduire finalement la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t}$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 par $(2n+1)$. Ainsi les intégrales I_n et J_n existent.
L'utilisation de la formule trigonométrique

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

donne :

$$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\, dt = 0$$

et comme $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, il vient, pour tout $n \geq 0$, $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Une intégration par parties donne, pour tout $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or par les régles de comparaison avec les intégrales de Riemann :

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

entraîne que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{\cos A}{A^2} = 0$ entraîne que :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{\sin t}{t} dt \text{ existe et est égale à } \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

3. Une intégration par parties pour f de classe C^1 donne :

$$\int_a^b f(t)\sin(2n+1)t dt = \left[\frac{-1}{2n+1} f(t)\cos(2n+1)t\right]_a^b + \frac{1}{2n+1}\int_a^b f'(t)\cos(2n+1)t dt$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(2n+1)t$ et $t \mapsto f'(t)\cos(2n+1)t$ étant continues sur le segment $[a, b]$, elle y sont bornées par des constantes M et N. Ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(2n+1)t dt\right| \leq \frac{M}{2n+1} + \frac{N(b-a)}{2n+1}$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(2n+1)t dt = 0$$

4. La fonction g est clairement de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$. Au voisinage de 0, un développement limité donne :

$$g(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Ainsi, on peut prolonger g en $x = 0$ par $g(0) = 0$. Il reste à prouver que g' est une fonction continue en $x = 0$. Pour cela :

$$g'(x) = \frac{x^2 \cos x - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$$

et un développement limité de g' en 0 donnent :

$$g'(x) = -\frac{1}{6} + o(1)$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, on en déduit qu g est dérivable en 0, que $g'(0) = 1/6$ et que g' est continue en 0. Ainsi g est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

On a alors $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin(2n+1)t dt$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (question 3.) D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

5. En posant $t = \frac{u}{2n+1}$, il vient :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

et d'après la question 2, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1-13

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = 1 - \sin x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1 - \sin u_n$$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 3$, on a $\alpha \leq u_n \leq 1$. Etudier la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

Solution :

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. Comme $f(\pi - x) = f(x)$, il suffit de faire l'étude sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$, puis de compléter le dessin par une symétrie par rapport à la verticale d'abscisse $\pi/2$, suivie de translations horizontales d'amplitudes $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ayant $f'(x) = -\cos x$, f est décroissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, avec $f(-\pi/2) = 2$ et $f(\pi/2) = 0$. Le dessin s'en déduit sans peine.

2. u_0 est réel, donc $u_1 \in f(\mathbb{R}) = [0, 2] \in [0, \pi]$. Par conséquent :
$u_1 \in f([0, \pi]) = [0, 1] \subset [0, \pi/2]$
$u_2 \in f([0, 1]) = [\alpha, 1] \subset [0, 1]$, avec $\alpha = 1 - \sin 1 > 0$.
A partir du rang 3, on a donc $u_n \in [\alpha, 1]$.

$\star$ Comme f est continue, si la suite u converge, sa limite ℓ est un point fixe de f.
Une étude rapide de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ montre que cette fonction est décroissante et s'annule en un unique point de $\mathbb{R}$.
On a :

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 1 - \sin\alpha - \alpha = \sin 1 - \sin\alpha > 0 \text{ et } g(1) = -\sin 1 < 0,$$

ce qui prouve que $\alpha \leq \ell \leq 1$.
Or sur $[\alpha, 1]$, $|f'(x)| = \cos x \leq \cos\alpha < 1$. Ainsi, par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, n \geq 3, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \cos\alpha |u_n - \ell|$$

Ainsi, $\forall\, n \geq 3, |u_n - \ell| \leq (\cos\alpha)^{n-3} |u_3 - \ell|$.
Puisque $|\cos\alpha| < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Exercice 1-14

1. Etudier la fonction réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ et tracer sa courbe représentative.

2. Etudier la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n \ln n}$.

3. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$x_0 > 0, x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n \ln n} x_{n-2}$$

a) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche les termes successifs de cette suite pour des valeurs initiales et jusqu'à un rang n entrés par l'utilisateur.

b) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
Que se passe-t-il si on remplace les conditions initiales par $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$?

Solution :

1. La fonction f est définie et de classe C^∞ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

Son signe est déterminé par celui de $\ln x + 1$ soit :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

2. La fonction f étant positive, décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$, on peut faire une comparaison série/intégrale, soit, pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln x} \leq \frac{1}{k\ln k}$$

En notant $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ et en sommant les inégalités précédentes :

$$S_n \geq \int_2^{n+1} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$

ce qui entraîne la divergence de la série proposée.

3. a) Voici une proposition de programme :

```
program
Var a,b,c : real ;
i,n : integer ;
Begin
writeln('premier terme, x0>0 ?') ; readln (a) ;
writeln('second terme, x1>0 ?') ; readln (b) ;
writeln('rang, n ?') ; readln (n) ;
For i := 2 to n do
begin
c := b+a/(n*ln(n)) ;
writeln('au rang', i, 'la suite vaut :', c) ;
a := b ; b := c
end ;
End.
```

b) Comme $x_0 > 0$ et $x_1 > 0$ et $n\ln n > 0$, on montre par récurrence que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\forall n \geq 2,\ x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2}}{n\ln n} > 0$$

ce qui signifie que la suite (x_n) est strictement croissante.

c) La suite (x_n) étant strictement croissante, on a, pour tout $n \geq 2, x_n > x_1$ et donc :

$$x_n - x_{n-1} \geq x_1 \frac{1}{n \ln n}$$

En sommant, il vient :

$$x_n - x_2 \geq x_1 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k} \right)$$

Et comme $x_1 > 0$, la suite (x_n) tend vers l'infini.

d) Si $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$, on est ramené à l'étude précédente avec $y_n = -x_n$. Dans ce cas, (x_n) tend vers $-\infty$.

Exercice 1-15

On considère un entier naturel non nul n, et la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.

2. Écrire un programme en Pascal qui détermine et affiche une valeur approchée de a_n à 10^{-2} près pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et convergente.

4. Quelle est la nature de la série $\sum_n a_n$?

5. Quelle est la nature de la série $\sum_n n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2} \right)$?

Solution :

1. Une étude rapide de la fonction f_n montre que $f_n'(x) = nx^2 + n^2 > 0$. La fonction f_n est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et continue. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle $a_n = f_n^{-1}(0)$.
On remarque que $a_n \in]0, 1[$, puisque $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = n^2 + n - 2 > 0$ si $n \geq 2$.

2. Utilisons la méthode de dichotomie sur $[0, 1]$.

```
Function f(n :integer ; x : real) : real ;
begin
f := n*x*x*x+n*n*x-2
end ;
Function racine : real ;
```

```
Var z, eps, a, b : real ;
begin
Writeln('Entrez une valeur de n') ; readln(n) ;
a := 0 ; b := 1 ;  eps := abs(b-a) ;
while eps >= .01
begin
c := (a+b)/2 ;
z := f(n,c) ;
if z<0 then b := c else a := c ;
eps := abs(b-a)
end ;
racine := c
end ;
```

3. On a :

$$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 = a_n^3 + (2n+1)a_n > 0$$

Comme f_n est strictement croissante et comme $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$, il vient : $a_{n+1} < a_n$. La suite (a_n) est positive et décroissante ; elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. Comme $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} + n - 2 \geq 0$, on a :

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

4. On peut écrire :

$$2 = na_n(a_n^2 + n) \sim n^2 a_n$$

Ainsi $a_n \sim \dfrac{2}{n^2}$. La positivité de a_n entraîne que la série $\sum a_n$ est convergente.

5. On a pour $n \geq 1$:

$$a_n - \frac{2}{n^2} = \frac{n^2 a_n - 2}{n^2} = -\frac{a_n^3}{n} < 0$$

Ainsi $\left(\dfrac{2}{n^2} - a_n\right) n^\alpha > 0$ et

$$\left(\frac{2}{n^2} - a_n\right) n^\alpha \sim \frac{a_n^3}{n} n^\alpha \sim \frac{8}{n^{7-\alpha}}$$

Enfin la série $\sum \dfrac{8}{n^{7-\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha < 6$.

Exercice 1-16

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe sur $\mathbb{R}$ si pour tout entier $n \geq 2$: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

1. Démontrer que $\sqrt[n]{n!} \leq (n+1)/2$.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. Étudier la convergence de la suite définie, pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln i}{n^2}\right)$$

Solution :

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée seconde est positive. Donc, pour $n \geq 1$:

$$(n!)^{1/n} = e^{1/n \ln(n!)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\ln k}$$

Donc

$$(n!)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

2. Il suffit d'étudier rapidement les fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}$ pour démontrer les inégalités demandées.

3. Chacun des termes du produit est strictement positif. On peut donc prendre le logarithme de u_n, soit :

$$v_n = \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$$

D'après la question précédente, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{\ln k}{n^2} - \frac{\ln^2 k}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right) \leq \frac{\ln k}{n^2}$$

D'où :

$$\frac{\ln n!}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \leq v_n \leq \frac{\ln n!}{n^2}$$

Mais :

$$\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \leq \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}$$

entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 = 0$$

Et par la première question :

$$0 \leq \frac{\ln n!}{n^2} = \frac{1}{n}\ln(n!)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!}{n^2}=0$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

Exercice 1-17

Soit a un réel strictement positif. On note $I=]-a,a[$.
Dans tout l'exercice, on considère une application f de $I\times I$ dans I qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\times I$ et pour laquelle il existe un réel $k\in[0,1[$ vérifiant : $\forall\,(x,y)\in I\times I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq k$$

1. Soit (x,y) et (x_0,y_0) deux couples de $I\times I$. On définit l'application φ sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(t)=f\left((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty\right)$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

b) En déduire que

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leq k.\max(|x-x_0|,|y-y_0|)$$

2. Soient $(\alpha,\beta)\in I\times I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0=\alpha,\quad u_1=\beta,\quad\text{et}\quad\forall\,n\in\mathbb{N},u_{n+2}=f(u_{n+1},u_n)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\max(|u_{n+2}-u_{n+1}|,|u_{n+1}-u_n|)$.

a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que $\forall\,n\in\mathbb{N},a_{n+2}\,\hat{\mathrm{E}}\leq ka_n$.

c) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du couple (α,β).

Solution :

1. a) φ est dérivable sur $[0,1]$, et même de classe $\mathcal{C}^1$, car composée de telles fonctions et, par application de la formule générale :

$$\varphi'(t)=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty)$$
$$+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty)$$

b) On a donc $\forall\,t\in[0,1],|\varphi'(t)|\leq\max(|x-x_0|,|y-t_0|).k$, et par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| = |\varphi(1)-\varphi(0)| \le \max(|x-x_0|,|y-y_0|).k$$

2. a) Pour tout n :

$$|u_{n+3}-u_{n+2}| = |f(u_{n+2},u_{n+1})-f(u_{n+1},u_n)| \le k.a_n \le a_n.$$

De plus, par définition de a_n, on a $|u_{n+2}-u_{n+1}| \le a_n$. D'où :

$$a_{n+1} = \max(|u_{n+3}-u_{n+2}|,|u_{n+2}-u_{n+1}|) \le a_n$$

La suite (a_n) est donc décroissante.

b) On a : $|u_{n+3}-u_{n+2}| \le k.a_n$ et $|u_{n+4}-u_{n+3}| \le k.a_{n+1} \le k.a_n$.
Par conséquent : $a_{n+2} = \max(|u_{n+4}-u_{n+3}|,|u_{n+3}-u_{n+2}|) \le ka_n$.

c) Ainsi, par récurrence, $a_{2n} \le k^n a_0$ et $a_{2n+1} \le k^n a_1$.

On en déduit : $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \le (a_0+a_1)\dfrac{1}{1-k}$ (en majorant les sommes partielles de la série géométrique de raison k, par la somme de cette série).
Ainsi la série à termes positifs $\sum a_n$ a ses sommes partielles majorées, donc est convergente.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \le |u_{n+1}-u_n| \le a_n$. La série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est donc (absolument) convergente, ce qui signifie que la suite de terme général u_n est convergente.

3. Soient (u_n) et (u'_n) les suites définies comme en 2. et initialisées respectivement par les couples (α,β) et (α',β').
D'après la question 2. d) ces suites convergent. Notons $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim u'$.
Pour tout n, on a : $|u_{n+2}-u'_{n+2}| \le k.\max(|u_{n+1}-u'_{n+1}|,|u_n-u'_n|)$, ce qui, par prolongement des inégalités à la limite donne :

$$|\ell-\ell'| \le k.|\ell-\ell'|$$

Comme $0 \le k < 1$, on en déduit $\ell = \ell'$ et la limite de u ne dépend pas de ses deux premiers termes.

Exercice 1-18

Dans tout l'exercice, g désigne une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, qui est périodique de période 1.

1. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$ est convergente. On pose alors $G(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$.

b) Montrer que $G(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers $+\infty$ et préciser sa valeur.

2. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$G(\lambda) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$$

b) Justifier l'existence d'un réel positif M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\mathrm{e}^{-x} - 1 + x| \leq Mx^2$$

et en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\, dx$.

c) Montrer que $G(\lambda)$ possède une limite finie quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx = 0$ et montrer que cette limite vaut alors $\displaystyle\int_0^1 -xg(x)\, dx$.

3. Dans cette question on suppose de plus que g est à valeurs positives ou nulles et que g est différente de la fonction nulle.
Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

a) Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$ est strictement positif.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_{n-1}^{n} f(x)g(x)\, dx \geq J.\int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

c) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$.

Solution :

1. a) La fonction g est continue et périodique, donc est bornée. Il existe M tel que : $\forall\, x, |\mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)| \leq M.\mathrm{e}^{-\lambda x}$. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ donne alors la convergence (absolue) de l'intégrale proposée.

b) De plus $|G(\lambda)| \leq M \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \frac{M}{\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} G(\lambda) = 0$.

2. a) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = \int_0^1 \ldots + \int_1^x \ldots = \int_0^1 \ldots + \int_0^{x-1} \mathrm{e}^{-\lambda(u+1)} g(u+1)\, du$

Par 1-périodicité de g, on en déduit, pour $x \geq 1$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda} \int_0^{x-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt$$

et, en faisant tendre x vers l'infini : $G(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt + \mathrm{e}^{-\lambda} G(\lambda)$, *i.e.* :

$$G(\lambda) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt$$

b) La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, |\mathrm{e}^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2} \sup_{[0,x]} |f''| = \frac{x^2}{2}$$

D'où : $\displaystyle \Big|\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt - \int_0^1 g(t)\, dt + \lambda \int_0^1 t g(t)\, dt\Big| \leq \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 t^2 g(t)\, dt$

et, en chassant les valeurs absolues :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt \leq \int_0^1 g(t)\, dt - \lambda \int_0^1 t g(t)\, dt + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 t^2 g(t)\, dt$$
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt \geq \int_0^1 g(t)\, dt - \lambda \int_0^1 t g(t)\, dt - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 t^2 g(t)\, dt$$

c) Par encadrement, on a donc $\displaystyle \lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = \int_0^1 g(t)\, dt$.

$\star$ Si $\displaystyle \int_0^1 g(t)\, dt 0$, La formule vue en 2. a) montre que$G(\lambda)$ n'a pas de limite finie lorsque λ tend vers 0, puisque le facteur placé devant l'intégrale est de limite infinie.

$\star$ Si $\displaystyle \int_0^1 g(t)\, dt = 0$, l'encadrement vu en b) donne :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} g(t)\, dt = -\lambda \int_0^1 t g(t)\, dt + o(\lambda)$$

Tandis que $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \sim \lambda$, d'où $\displaystyle \lim_{\lambda \to 0^+} G(\lambda) = -\int_0^1 t g(t)\, dt$

3. a) g n'est pas la fonction nulle et est 1-périodique, donc il existe au moins un point x de $[0,1]$ tel que $g(x) 0$. Par positivité et continuité de g, on en déduit $J > 0$.

b) Par décroissance de f, on a :

$$\int_{n-1}^n f(x) g(x)\, dx \geq f(n) \int_{n-1}^n g(x)\, dx = f(n).J$$

Comme $\displaystyle f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\, dx$ (encore par décroissance de f), on a bien l'inégalité demandée.

c) Par sommation : $\displaystyle \int_0^n f(x) g(x)\, dx \geq J \int_1^{n+1} f(x)\, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve la divergence de l'intégrale $\displaystyle \int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$.

Exercice 1-19

1. Etudier pour un réel x donné, la convergence des intégrales

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$
$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

2. Montrer que pour a et h réels :
$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$$

3. En déduire que
$$|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)G(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

4. Montrer que la fonction F est dérivable, quelle est sa dérivée ?

5. On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\, dt$

Montrer par une méthode analogue à celle des questions 3 et 4 que G est dérivable et que $G'(x) = H(x)$

6. Vérifier que $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1+x^2}\right) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$.

En déduire $H(x)$.

7. A l'aide du changement de variable $x = \tan u$ dans $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calculer $G(1)$. En déduire que $F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0, car au voisinage de ce point :
$$\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t} \sim \frac{t^2x^2}{2t^2} = \frac{x^2}{2}$$
De plus, pour tout $t > 0$:
$$\left|\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq \frac{2}{t^2}$$
ce qui montre que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0, car au voisinage de ce point :
$$\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t} \sim \frac{tx}{t} = x$$
De plus, pour tout $t > 0$:
$$\left|\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq |x|e^{-t}$$

ce qui montre que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour montrer que pour a et h réels :

$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$$

il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $[a, a+h]$.

3. On a par linéarité :

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)G(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{-\cos(tx) + \cos(tx_0) - t\sin(tx_0)}{t^2} e^{-t}\, dt$$

Par la question précédente :

$$|-\cos(tx) + \cos(tx_0) - t\sin(tx_0)| \leq \frac{1}{2}(tx - tx_0)^2$$

Donc :

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)G(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, pour tout $x \neq x_0$, on a :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - G(x_0) \right| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$$

ce qui entraîne que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = G(x_0)$.

5. La fonction H est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $t \mapsto \cos(tx)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|\cos(tx)e^{-t}| \leq e^{-t}$. En appliquant l'inégalité de Taylor à la fonction sinus, il vient :

$$|G(x) - G(x_0) - (x - x_0)H(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = (x - x_0)^2$$

ce qui entraîne que, pour tout $x \neq x_0$:

$$\left| \frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} - H(x) \right| \leq |x - x_0|$$

6. La vérification de $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1 + x^2}\right) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$ est immédiate. Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \cos(tx)e^{-t} dt &= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1 + x^2}\right]_0^A \\
&= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{-\mathrm{e}^{-A}\cos(Ax) + x.\mathrm{e}^{-A}\sin(Ax)}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre A vers l'infini pour obtenir :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t} dt = \frac{1}{1 + x^2}$$

7. Sachant que $F(0)=0$, on peut écrire :

$$F(x)=\int_0^x F'(t)\,dt=\int_0^x G(t)\,dt = xG(x)-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = xG(x)-\frac{\ln x}{2}$$

Pour $x=1$:

$$G(1)=\int_0^1 G'(t)\,dt=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4} \quad (t=\tan(u/2))$$

entraîne que :

$$F(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 1-20

1. Montrer que pour x réel non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, on pose alors $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$

2. Montrer que f est une fonction paire et déterminer le signe de $f(x)$.

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que pour $x>0$, on a :

$$x.f(x)=f(\frac{1}{x})$$

5. En découpant l'intégrale définissant $f(x)$ à l'aide de la borne intermédiaire $\sqrt{x}$, et en effectuant un changement de variable dans la seconde intégrale, montrer que pour $x>0$, on a :

$$f(x)=2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

6. a) Quelle est la dérivée de la fonction $t\mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$? En déduire, pour $x>0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

b) Montrer que, pour $x>0$, $f(x)\le \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} f$.

7. a) Montrer que pour $x>0$:

$$0\le \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}-f(x)\le \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}\le\frac{1}{x^2}$$

En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\ln x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

La règle de Riemann permet de conclure à la convergence.

2. La parité de f est évidente, et la positivité de la fonction à intégrer donne la (stricte) positivité de $f(x)$.

3. Pour $0 < x < y$ et $t \geq 0$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(y^2+t^2)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

Par conservation des inégalités par intégration, puisque les bornes sont dans le sens croissant, on conclut à la décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, fait d'abord sur un segment $[\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$, suivi d'un passage à la limite donne :

$$f(x) = \int_{+\infty}^{0} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{(1+\frac{1}{u^2})(x^2+\frac{1}{u^2})}} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+\frac{1}{x^2})}} = \frac{1}{x} f(\frac{1}{x})$$

5. On écrit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \ldots + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ldots$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$ (d'abord sur un segment $[\alpha, \sqrt{x}]$ puis on passe à la limite et on se rend alors compte que les deux intégrales sont égales. D'où :

$$f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

6. a) La dérivée de $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On en déduit :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \Big[\ln(t + \sqrt{1+t^2})\Big]_0^{\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

b) Or, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)x^2}} = \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)}}$

et donc : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$.

Or $\dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. a) En plaçant tout sous la même intégrale, et en réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{(\sqrt{x^2+t^2}+\sqrt{x^2})\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)x^2}}$$
$$\leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt = \frac{1}{x^2}$$

Comme $\dfrac{1}{x^2}$ est négligeable devant $\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$, on en déduit que $f(x)$ est équivalent au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$, donc également à $\dfrac{\ln x}{x}$.

b) Comme $f(x) = \dfrac{1}{x}f(\dfrac{1}{x})$, on a : $f(x) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{x}\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\ln x$

Exercice 1-21

On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \text{ est strictement positif} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Préciser sa dérivée à droite en zéro.
Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que la dérivée de f s'annule sur I_n en un unique point noté x_n.
4. Montrer l'existence de deux suites réelles $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) = \frac{1}{y_n},\ f(z_n) = -\frac{1}{z_n}, \text{ avec } y_n \text{ dans } I_{2n}\ , \text{ et } z_n \text{ dans } I_{2n+1}.$$

Déterminer la dérivée de f en y_n et en z_n. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier les variations de f sur I_0, puis sur I_{2n} et I_{2n-1}, pour $n \geqslant 1$.

6. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 3\pi]$.

Solution :

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\sin x \underset{(0)}{\sim} x$, le choix de $f(0)$ est tel que f est aussi continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas.
$\star$ Pour $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 donne : $x\cos x - \sin x = -\dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, et :

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x + o(x)$$

Ainsi, f' a une limite en 0 et comme f est continue en 0, on en déduit par théorème, que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{3}$ et f' est donc continue en 0.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\star$ De la même façon, on a pour $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{\sin x}{x} - 2\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ et le même développement limité que précédemment donne $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$.
Ainsi f est deux fois dérivable en 0 avec $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$ et f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Le signe de f' sur I_n est celui de $g : x \mapsto x\cos x - \sin x$.
On a $g'(x) = -x\sin x$ et donc, pour n pair, g est strictement décroissante sur I_n, tandis que pour n impair elle est strictement croissante sur I_n.
Comme $g(2n\pi) > 0$ et $g((2n+1)\pi) < 0$, on en déduit que g, donc f', s'annule une fois et une seule sur chaque intervalle I_n.

4. Il est clair que $y_n = (2n + \frac{1}{2})\pi$ et $z_n = (2n + \frac{3}{2})\pi$.
On a alors $f'(y_n) = -\dfrac{1}{y_n^2}$ et $f'(z_n) = \dfrac{1}{z_n^2}$.
On en conclut qu'aux points d'abscisses y_n la courbe représentative de f est tangente à l'hyperbole d'équation $xy = 1$, tandis qu'aux points d'abscisses z_n elle est tangente à l'hyperbole d'équation $xy = -1$.

5. Les questions précédentes permettent de conclure :
$\star$ f est strictement décroissante sur I_0 ;
$\star$ Pour $n \geq 1$, f est strictement décroissante sur $[(2n-1)\pi, x_{2n-1}]$, strictement croissante sur $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ et à nouveau strictement décroissante sur $[x_{2n}, (2n+1)\pi]$.

6. L'esquisse du tracé (en forme de «sinusoïde amortie») s'en déduit sans peine.

Exercice 1-22

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère l'équation (E_n) définie par :

$$(E_n) \quad x^{n+2} - 2.x^{n+1} + x^n + x^3 - (2+n)x^2 + x(1+2n) - n = 0$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_n) et déterminer son ordre de multiplicité en fonction de n.

2. a) Désormais on suppose que n est supérieur ou égal à trois. Montrer qu'il existe une solution et une seule de (E_n) dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite on note a_n cette solution.

b) Ecrire un programme turbo-pascal permettant d'obtenir une valeur approchée de a_3 à ε près, $\varepsilon > 0$ étant donné.

3. Montrer que la suite de terme général a_n converge et déterminer sa limite L (on pourra, par exemple, comparer a_n et $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour n assez grand).

4. Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$, quand n tend vers l'infini.

Solution :

1. Soit $P = X^{n+2} - 2X^{n+1} + X^n + X^3 - (2+n)X^2 + X(1+2n) - n$.

Des calculs simples donnent $P(1) = P'(1) = 0$. Par conséquent P est divisible par $(X-1)^2$ et on voit alors que $P = (X-1)^2(X^n + X - n) = (X-1)^2 Q$.

Si $n = 2$, on a encore $Q(1) = 0$ et 1 est racine triple de P.
Si $n2$, alors 1 n'est pas racine de Q et 1 est racine double de P.

2. a) Chercher les solutions de (E_n) dans $]1,+\infty[$, revient à chercher les solutions, dans cet intervalle, de l'équation $x^n + x - n = 0$.

Une étude rapide de la fonction $f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x - n$ montre que cette fonction est strictement croissante, telle que $f_n(1) = 2 - n < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Ainsi, par le théorème de la bijection, f_n s'annule en un point a_n et un seul de $]1,+\infty[$.

b) On peut procéder par dichotomie, en notant déjà que $f_3(2) = 7 > 0$ et donc que l'on a : $1 < a_3 < 2$.

Après les présentations d'usage, le corps du programme est alors :

```
...A :=1 ; B :=2 ;
While B-A>eps do
  begin M :=(A+B)/2 ;
  if M*M*M+M-3 < 0 then A := M else B := M
  end ;
  R :=(A+B)/2 ...end.
```

3. On a : $f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n$.

Or : $\ln\Big[\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^n\Big] = n\ln\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)$, donc :

$$\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n \sim \mathrm{e}^{-1/2}.\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$$

Cette expression domine largement n, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) = +\infty$.

Par conséquent, pour n assez grand, $f_n\big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\big) > 0$, d'où $1 < a_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$, et :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

4. Posons $a_n = 1 + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \to 0$.

On a : $(1+\varepsilon_n)^n = n-1-\varepsilon_n$, *i.e.* $\ln(n-1-\varepsilon_n) = n\ln(1+\varepsilon_n)$.
Ce que l'on peut écrire :

$$n.\varepsilon_n \sim n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln n + \ln(1-\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon_n}{n}) \sim \ln n$$

$$a_n - 1 = \varepsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 1-23

On considère la suite $x=(x_n)$ définie par :

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 2, (n^2+1)x_n = (2n^2-n)x_{n-1} - (n^2-n)x_{n-2}$$

1. On considère la suite $y=(y_n)$ définie par : $y_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, y_n = n(x_n - x_{n-1})$. Calculer x_n en fonction de y_n, y_{n-1} et n.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note z_n le nombre complexe de partie réelle x_n et de partie imaginaire y_n.

a) Calculer z_n en fonction de z_{n-1} et de n.

b) Montrer que $z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{i+k}\right)$ (i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

3. On pose $1+\frac{i}{k} = \frac{1}{r_k}\,\mathrm{e}^{i\theta_k}$, avec $r_k > 0$ et $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer r_k en fonction de k.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\theta_k$. Calculer x_n en fonction de S_n et de $P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

4. Montrer que la suite x est bornée.

Solution :

1. La relation de récurrence peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x_n &= n^2(x_{n-1}-x_n) + n^2(x_{n-1}-x_{n-2}) + n(x_{n-2}-x_{n-1}) \\ &= n(n-1)(x_{n-1}-x_{n-2}) - n^2(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2, x_n = -ny_n + ny_{n-1} = n(y_{n-1}-y_n)$$

2. a) On a : $z_n = x_n + iy_n = -ny_n + ny_{n-1} + i(nx_n - nx_{n-1})$
D'où : $z_n = ni(x_n+iy_n) - ni(x_{n-1}+iy_{n-1}) = niz_n - niz_{n-1}$
et on en déduit : $\forall n \geq 1, z_n = \dfrac{n}{n+i}z_{n-1}$.

b) Par récurrence, on a donc : $z_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+i}\right)z_0 = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+i}$.

3. a) $|1+\frac{i}{k}|^2 = 1+\frac{1}{k^2}$, soit $|1+\frac{i}{k}| = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ et $r_k = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$.

b) $z_n = \prod\limits_{k=1}^{n} r_k \mathrm{e}^{-i\theta_k}$, d'où $z_n = \mathrm{e}^{-iS_n} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \mathrm{e}^{-iS_n} P_n$

On en déduit $x_n = P_n . \cos(S_n)$.

$\star$ On a $\ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right) = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

Or $\ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente.

Par application de la règle d'équivalence, pour les séries à termes positifs, on en déduit la convergence de la suite de terme général $\ln P_n$, puis celle de la suite de terme général P_n. En particulier la suite (P_n) est bornée.
Comme la fonction cosinus est bornée, on en déduit que la suite (x_n) est bornée.

Exercice 1-24

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction φ_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}$.

1. a) Etudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt$ (on donnera le tableau des variations et les limites aux bornes du domaine de définition).

b) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un unique réel, noté $x_n(a)$ tel que $\int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt = a$.

2. On note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_n(a) = x_n(a)$.

a) Montrer que la fonction h_n est croissante.

b) Montrer que $\lim\limits_{a\to+\infty} h_n(a) = +\infty$.

3. On suppose dans cette question que $a > \mathrm{e}-1$, où e désigne la base des logarithmes népériens. Soit A un réel fixé, strictement supérieur à 1 et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & , \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & , \text{si } t > 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^A \varphi_n(t)\,dt = \int_0^A g(t)\,dt$.

b) On pose $J_n = \int_A^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

c) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall\, n \geq n_0, J_n > 0$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(a) = +\infty$.

Solution :

1. a) La fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, avec : $f_n'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^n} > 0$.

Par conséquent, la fonction f_n est strictement croissante, avec $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_n(t) = +\infty$, ce qui entraîne la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt$).

b) f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, donc f atteint une fois et une seule la valeur a. Nous noterons x_n le point où f prend la valeur a et :

$$f_n(x_n) = a \Longleftrightarrow \int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt = a$$

2. a) b) On a $h_n(a) = x_n(a) = f_n^{-1}(a)$.

Or f_n^{-1} est également croissante et de limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui résout les deux questions.

3. a) Grce à la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt - \int_0^A g(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 \Big(\frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} - \mathrm{e}^t\Big)dt}_{\alpha} + \underbrace{\int_1^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt}_{\beta}$$

On a : $0 \le \alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \le \int_0^1 \mathrm{e}.t^n\,dt \le \frac{\mathrm{e}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Pour $n \ge 2$, $0 \le \beta = \displaystyle\int_1^A \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \le \mathrm{e}^A \int_1^A \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{\mathrm{e}^A}{n-1}\Big(1 - \frac{1}{A^{n-1}}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'où le résultat.

b) On a $J_n = \displaystyle\int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt - \int_0^A \varphi_n(t)\,dt = a - \int_0^A \varphi_n(t)\,dt$.

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^A \varphi_n(t)\,dt = \int_0^A g(t)\,dt = \mathrm{e} - 1$, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} J_n = a + 1 - \mathrm{e}$$

c) J_n ayant une limite strictement positive, il existe un rang n_0 à partir duquel $J_n > 0$.

On a donc $n \ge n_0 \implies \displaystyle\int_A^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt > 0$ et comme la fonction à intégrer est positive, ceci impose d'avoir $x_n(a) > A$.

Donc : $\forall A > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n(a) > A$, ce qui est la définition de :

$$\lim_{n\to\infty} x_n(a) = +\infty$$

Exercice 1-25

On admet que $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

1. a) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs de limite nulle. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes et en déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n[\ln(n+1) - \ln n]$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(-1)^{E(\frac{1}{x})}}{x}\, dx$, où E désigne la fonction partie entière, c'est-à-dire que $E(t)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t.

a) Montrer que $K_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \displaystyle\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{(-1)^k}{x}\, dx$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Solution :

1. a) La décroissance de la suite (a_n) entraîne :

$$S_{2n} - S_{2n-2} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

La suite (S_{2n}) est décroissante, alors que la suite (S_{2n+1}) est croissante. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} |S_{2n} - S_{2n-1}| = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$$

Les deux suites sont adjacentes et admettent une limite commune. Les sommes partielles de la série $\sum(-1)^n a_n$ ont donc une limite ce qui entraîne que la série converge.

b) On a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Ainsi $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ est positif et tend vers 0. Montrons la décroissance :

$$a_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n$$

par la croissance de la fonction logarithme.

Par suite la série $\sum (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. a) La relation de Chasles donne :

$$\int_{1/n}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)dx$$

Ici $f(x) = (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)} = (-1)^k$ lorsque $x \in \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]$. Donc :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k))$$

Utilisons la formule de Stirling rappelée en début d'exercice pour calculer la limite de K_n.

$$\begin{aligned}
K_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= -2(-\ln(2) + \ln(3) - \ldots - \ln(2n)) + \ln(2n+1) \\
&= \ln\left[\left(\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 (2n+1)\right] \\
&= \ln\left[\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right]
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{4n\pi})^2(2n+1)}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4} \sim \frac{2}{\pi}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right] = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Ainsi la suite (K_{2n}) tend vers $\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$. La suite (K_{2n+1}) également puisque le terme qu'on ajoute tend vers 0. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Exercice 1-26

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$. On définit alors la fonction φ sur $]0,1]$ par : $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que φ peut être prolongée en une fonction, notée $\widetilde{\varphi}$, continue sur $[0,1]$.

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à f sur le segment $[x,0]$, et la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall\, x \in\,]0,1], x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

3. Montrer que la fonction $\varphi^{(n)}$ a une limite en 0 et l'exprimer en fonction de $f^{(n+1)}(0)$.

4. Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Solution :

1. Comme f est une fonction de classe C^∞ telle que $f(0)=0$, on sait que :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$$

ce qui signifie que φ peut être prolongée en une fonction, notée $\widetilde{\varphi}$, continue sur $[0,1]$.

2. La formule de Taylor appliquée à la fonction f sur $[x,0]$ donne :

$$0 = f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

La formule de Leibniz appliquée à la fonction φ donne :

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} f^{(k)}(x)$$

Or :

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} = \frac{(n-k)!(-1)^{n-k}}{x^{n-k+1}}$$

d'où :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

puis, en reportant dans la première formule :

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = -n!(-1)^n \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

et après simplifications :

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

3. En intégrant par parties, les fonctions étant de classe C^∞, il vient :

$$\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt = \left[\frac{f^{(n+1)}(t)t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

d'où :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

Mais, la fonction $f^{(n+2)}$ étant continue sur l'intervalle $[0,1]$, elle y est bornée par M_{n+2}. Donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(n+1)x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt\right| &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+1)} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1}\, dt \\ &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)(n+1)} x\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Finalement :

$$\lim_{x\to 0} \varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

4. Montrons par récurrence que $\widetilde{\varphi}$ est de classe C^n sur $[0,1]$.

- c'est vrai pour $n = 0$ (première question).
- supposons que $\widetilde{\varphi}^{(n-1)}$ soit continue sur $[0,1]$. La question précédente montre que :

$$\lim_{x\to 0} (\widetilde{\varphi}^{(n-1)})'(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

On applique alors le théorème des fonctions de classe C^1 pour conclure.

Exercice 1-27

On considère la suite de terme général $u_n = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}$, pour $n \geq 1$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que : $\forall\, n \geq 1$, on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

3. Soit $a \in [0,1]$, montrer que $u_n \geq (1-a)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{a}{1+a}$.

4. Montrer, en utilisant une suite (a_n) bien choisie de points de $[0,1]$, que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Solution :

1. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\, dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 1 - \ln 2.$

2. On a déjà remarqué que $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, donc $\forall\, t \in [0,1], 0 \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{1}{2}$.

Par conséquent $0 \leq \left(\frac{t}{1+t}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis $0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit :

$$\forall\, n \geq 1 \,;\, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

3. L'écriture précédente montre que $\forall\, t \in [a,1]$, $\dfrac{t}{1+t} \geq 1 - \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{a}{1+a}$.
Par positivité de la fonction à intégrer, il vient alors :

$$(u_n)^n \geq \int_a^1 \Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n \, dt = (1-a)\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n$$

et donc :

$$\frac{a}{1+a}(1-a)^{1/n} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

4. Le résultat précédent étant valable pour tout choix de $a \in [0,1]$, on cherche une suite (a_n) de points telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (1-a_n)^{1/n} = 1$.

On veut donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \ln(1-a_n) = 0$ et $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ (ou $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$) convient.

L'encadrement obtenu en 3. donne alors, par le théorème du même nom :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 1-28

Soient a et b deux réels distincts.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1}\, dt = (x-a)^n P_n(x).$$

Préciser le degré de P_n.

2. Calculer $P_n(a)$.

3. On pose, pour p et q entiers naturels, $I(p,q) = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p (t-b)^q \, dt$.

a) Déterminer une relation entre $I(p,q)$ et $I(p+1, q-1)$, lorsque $q \geqslant 1$. En déduire l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q.

b) En déduire $P_n(b)$.

4. En remarquant que $t - b = (t-a) + (a-b)$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction des puissances de $(x-a)$.

En déduire $P_n^{(k)}(a)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (où $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme P_n).

Solution :

1. La fonction $f : x \mapsto (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$ est une fonction polynôme de degré $2n-2$, qui admet a comme zéro d'ordre $n-1$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$

est la primitive de f nulle en a. Donc F est une fonction polynôme de degré $2n-1$, qui admet a pour racine d'ordre exactement n.

Ainsi, il existe une fonction polynôme P_n, de degré $n-1$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1} = (x-a)^n P_n(x)$$

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$F'(x) = f(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1} = n(x-a)^{n-1}P_n(x) + (x-a)^n P_n'(x)$.

D'où, pour xa : $(x-b)^{n-1} = nP_n(x) + (x-a)P_n'(x)$.

Or deux fonctions polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ sont égales. Ainsi la formule précédente reste valable pour $x = a$, ce qui donne :

$$P_n(a) = \frac{(a-b)^{n-1}}{n}$$

3. a) En intégrant par parties, on obtient :

$$\forall q \geq 1, I(p,q) = -\frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

et comme $I(p+q, 0) = \dfrac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$, il vient, par récurrence descendante :

$$I(p,q) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)}(b-a)^{p+q+1}$$

Ce que l'on peut aussi écrire :

$$I(p,q) = (-1)^q \frac{1}{C_{p+q}^p} \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

b) Alors : $P_n(b) = \dfrac{I(n-1, n-1)}{(b-a)^n} = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{C_{2n-2}^{n-1}} \dfrac{(b-a)^{2n-1}}{2n-1}$

4. On remarque ! On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k}(x-a)^{n+k-1}. \end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^{n+k}}{n+k} \\ &= (x-a)^n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^k}{n+k} \end{aligned}$$

Par conséquent : $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (a-b)^{n-1-k} \frac{(x-a)^k}{n+k}$.

Or, d'après la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Par identification (la famille $\big((x-a)^k\big)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre), il vient :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], P_n^{(k)}(a) = \frac{k!C_{n-1}^k(a-b)^{n-1-k}}{n+k}$$

et évidemment, $P_n^{(k)}(a) = 0$, pour $k > n-1$.

Exercice 1-29

Pour x réel positif ou nul et n entier naturel non nul, on pose :

$$s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1. Ecrire un programme en Turbo-Pascal, permettant la saisie du réel x, de l'entier n et affichant la valeur de $s_n(x)$.

2. Montrer que $s_n(x) + (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt - \ln(1+x)$ est une constante.

3. Donner, en fonction de n et de x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par $s_n(x)$.

4. Pour $x \in [0,1]$ fixé, déterminer la limite de la suite $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Solution :

1.
```
Var i,n integer ; s, u, x real ;
  begin Write ('x=') ; Readln(x) ;
  Write ('n=') ; Readln(n)
  s :=0 , u :=-1
  for i :=1 to n do
    begin u :=-u*x/i ;
        s :=s+u ; end ;
  Write('pour x=',x :0 :2,'et n=',n,'s=',s :0 :4) ;
End.
```

2. On voit ce que vaut la dérivée de la fonction s_n. On en déduit :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_0^x \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \end{aligned}$$

En mettant tout du même côté, on voit donc que :

$$s_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt - \ln(1+x) = 0.$$

3. On a $|s_n(x) - \ln(1+x)| = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

4. Si $x \in [0,1]$, l'erreur commise est donc majorée par $\dfrac{1}{n+1}$ qui a 0 pour limite lorsque n tend vers l'inifini. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \ln(1+x)$.

Ceci signifie que, pour $x \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$.

En particulier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

Exercice 1-30

Soit f l'application définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$2yf(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout y tel que $0 < y < 1$:

$$\left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln y|$$

En déduire que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

Solution :

1. Pour définir $f(x,y)$, il faut avoir $y1$, $y-1$ et $\frac{x+y}{1+xy} > 0$, donc $x+y$ et $1+xy$ de même signe et non nuls.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, car composée, produit, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions apparaissant en dénominateur ne s'annulant pas et la fonction placée dans le logarithme étant strictement positive.

3. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-1}{(x+y)(1+xy)(y^2-1)} + \frac{2y}{(y^2-1)^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

On vérifie alors facilement la formule demandée.

4. Fixons y dans $]0,1[$ et étudions la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $h'(x) = \frac{1-y^2}{(x+y)(1+xy)} > 0$.

Par conséquent h est strictement croissante.

De plus $h(0) = \ln y$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\ln y$. Donc $|h(x)| \leq |\ln y|$, ce qui est le résultat demandé.

Pour x fixé, la fonction, de la variable y, à intégrer est continue sur $]0,1[$ et :

Au voisinage de $y = 0$, $|f(x,y)| \leq |\ln y| = -\ln y$, et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln y \, dy$ donne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x,y)\, dy$.

Au voisinage de $y = 1$, $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{1+y} \cdot \dfrac{-\ln y}{1-y}$ et la fonction majorante se prolonge par continuité en 1, donc est intégrable sur $[1/2, 1]$.

La convergence de $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(x,y)\, dy$ en résulte.

Par disjonction des problèmes, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\, dy$ est convergente.

Exercice 1-31

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x non nul, on ait :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f.

(On déterminera une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.)

3. Montrer que P_n et Q_n sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Préciser le degré, la parité et le coefficient du terme de plus haut degré de chacun de ces polynômes.

4. En écrivant que $\sin(x) = x.g(x)$, déterminer deux nouvelles relations entre $P_n, Q_n, P_{n+1}, Q_{n+1}$. En déduire que $P_n' = Q_n$.

Solution :

1. La fonction g est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, car on a : $g(0) = \lim\limits_{0} g = 1$ et, pour x non nul :

$$g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

Au voisinage de 0, on a : $x\cos x - \sin x = x\big(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\big) - x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Soit : $x\cos x - \sin x \sim -\dfrac{x^2}{3}$ et $g'(x) \sim -\dfrac{1}{3}x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Par théorème, on en déduit que g est dérivable en 0, avec $g'(0)=0$ et g' est donc continue en 0.

2. Procédons par récurrence sur n :

⋆ Le résultat est acquis au rang 1, avec $P_1(x) = x$ et $Q_1(x) = 1$.

⋆ Si le résultat est vrai au rang n, alors en dérivant sur $\mathbb{R}^*$:

$$g^{n+1}(x) = [g^{(n)}]'(x) = \frac{1}{x^{n+2}}\big(\sin^{(n+1)}(x)(xP_n(x) + xQ'_n(x) + (n+1)Q_n(x) \\ + \sin^{(n+2)}(x)(-xP'_n(x) + xQ_n(x) + (n+1)P_n(x)\big)$$

Ce qui montre que le résultat est valable au rang $n+1$, avec :

$$\begin{cases} P_{n+1} = XP_n + XQ'_n + (n+1)Q_n \\ Q_{n+1} = -XP'_n + XQ_n + (n+1)P_n \end{cases}$$

On conclut alors par le principe de récurrence.

3. ⋆ Les polynômes P_1 et Q_1 sont à coefficients entiers et les formules de récurrence précédentes montrent que cette propriété est héréditaire. Donc, pour tout $n \geq 1$, P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients entiers.

⋆ Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait : $P_n(x) = x^n + \cdots$ et $Q_n(x) = nx^{n-1} + \cdots$ (ce qui est vrai au rang 1). Alors les formules de récurrence donnent aisément : $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \cdots$ et $Q_{n+1}(x) = (n+1)x^n + \cdots$

On conclut encore par le principe de récurrence.

⋆ Enfin, supposons que pour un certain $n \geq 1$, P_n a la parité de n et Q_n celle de $n-1$ (vrai au rang 1).

Alors XP_n a la parité de $n+1$, XQ'_n aussi et Q_n a également la parité de $n+1$. Donc P_{n+1} a la parité de $n+1$. On procède de même pour Q_{n+1} et on conclut par le principe de récurrence.

4. ⋆ On a, puisque $\sin x = x.g(x)$: $\sin^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\big(x.g(x)\big)$

La formule de G. Leibniz donne alors :

$$\sin^{(n)}(x) = x.g^{(n)}(x) + n.g^{(n-1)}(x)$$

En remplaçant, il vient, pour $x0$ et $n \geq 2$:

$$x^n.\sin^{(n)}(x) = P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x) \\ + nP_{n-1}(x)\sin^{(n-1)}(x) + nQ_{n-1}(x)\sin^{(n)}(x)$$

et comme $\sin^{(n+1)} = -\sin^{(n-1)}$:

$$(x^n - P_n(x) - nQ_n(x))\sin^{(n)}(x) + (-Q_n(x) + nP_{n-1}(x))\sin^{(n+1)}(x) = 0$$

⋆ Soient A et B deux polynômes tels que $\forall\, x0, A(x)\sin x + B(x)\cos x = 0$.

• Pour $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*, B(x) = 0$, donc B a une infinité de racines et est le polynôme nul.

• Pour $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}, A(x) = 0$, donc A a une infinité de racines et est le polynôme nul.

Or, pour tout n, la paire $\{\sin^{(n)}, \sin^{(n+1)}\}$ est, au signe près, la paire $\{\sin, \cos\}$. On a donc :

$$P_n + nQ_{n-1} = X^n \text{ et } Q_n = nP_{n-1}$$

Comme $Q_n = -XP'_{n-1} + XQ_{n-1} + nP_{n-1}$, on a $-XP'_{n-1} + XQ_{n-1}$, d'où : $\forall\, x0, P'_{n-1}(x) = Q_{n-1}(x)$, *i.e.* :

$$\forall\, n \geq 1, Q_n = P'_n.$$

2

ALGÈBRE

Exercice 2-1

Soit $\mathcal{E}$ une base de $\mathbb{C}^2$, et u un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ tel que la matrice associée à u dans $\mathcal{E}$ soit

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'équation du second degré que doivent vérifier les valeurs propres de U.

2. En déduire que $a + d$ et $ad - bc$ ne dépendent pas de la base $\mathcal{E}$, mais uniquement de l'endomorphisme u.

3. Calculer $U^2 - (a + d)U + (ad - bc)I_2$, où I_2 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On suppose que $a + d \neq 0$. Montrer que si U^2 est diagonalisable, alors U l'est également. Ce résultat est-il encore vrai si $a + d = 0$?

Solution :

1. $U - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$.

2. On sait que les valeurs propres de u sont les valeurs propres de n'importe quelle matrice associée, donc le choix d'une base est sans influence sur les racines de l'équation du second degré obtenue, donc sans influence sur ses coefficients. C'est le résultat demandé.

3. On trouve sans difficultés : $U^2 - (a + d)U + (ad - bc)I_2 = 0$, où 0 désigne la matrice nulle, carrée d'ordre 2.

4. Si $a+d \neq 0$, on déduit du calcul précédent : $U = \dfrac{ad-bc}{a+d}\, I_2 + \dfrac{1}{a+d}\, U^2$.
Si U^2 est diagonalisable et si P est une matrice de passage diagonalisante pour U^2, la relation précédente montre que $P^{-1}UP$ est aussi diagonale, donc U est diagonalisable.

En revanche, si $a+d=0$, on peut prendre $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^2 = 0$ est diagonalisable, tandis que U est non nulle et admet 0 pour unique valeur propre, donc n'est pas diagonalisable.

Exercice 2-2

On désigne par Φ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$(\forall\ P \in \mathbb{R}[X]) \qquad \Phi(P) = (X^2-1)\, P'' + (2X+1)\, P'$$

Soit n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. a) Vérifier que la restriction de Φ à E_n est un endomorphisme de E_n, noté Φ_n.

b) Exprimer la matrice de Φ_n dans la base canonique $\big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ de E_n.

c) Déterminer les valeurs propres de Φ_n. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?

d) Montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme H_k de degré k et de coefficient dominant égal à 1, qui est vecteur propre de Φ_n.

2. a) Justifier (brièvement) que :

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, P(x)\, Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En observant que :

$$(x^2-1)\, P''(x) + 2x\, P'(x) = \frac{d}{dx}\big[(x^2-1)\, P'(x)\big]$$

montrer que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\big(\Phi(P) \mid Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x)^{3/2}\, (1+x)^{1/2}\, P'(x)\, Q'(x) dx$$

c) En déduire que la famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E_n.

Solution :

1. a) La linéarité de la dérivation montre que Φ est une application linéaire. Si P est un polynôme de degré $p \leq n$, on peut écrire $P(X) = a_p X^p + Q(x)$ et $\Phi(P)(X) = p(p+1)a_p X^p + R(X)$, ce qui montre que Φ restreint à E_n est un endomorphisme de E_n.

b) Le calcul donne, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\Phi_n(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

Ainsi :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

c) La matrice A_n est triangulaire supérieure, les valeurs propres de Φ_n sont ses éléments diagonaux, soit :

$$\mathrm{Spec}(A) = \{k(k+1), 0 \leq k \leq n\}$$

Enfin Φ_n est un endomorphisme de E_n, espace vectoriel de dimension $(n+1)$ qui admet $(n+1)$ valeurs propres distinctes. Ainsi Φ_n est diagonalisable.

d) Les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Soit H_k l'unique vecteur propre de coefficient dominant associé à la valeur propre $\lambda_k = k(k+1)$. On a $H_k(X) = X^p + Q(X)$ et $\Phi_n(H_k) = p(p+1)X^p + R(X)$.
Mais $\Phi_n(H_k) = k(k+1)H_k$, d'où $\Phi_n(H_k) = k(k+1)X^p + R_1(X)$, ce qui entraîne que $p = k$.

2. a) Montrons déjà que l'intégrale proposée est une intégrale convergente :
La fonction $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, P(x)Q(x)$ est continue sur $]-1, 1]$. Démontrons la convergence en $x = -1$.

- si $P(-1)Q(-1) \neq 0$, alors, au voisinage de -1, $h(x) \sim \dfrac{C}{\sqrt{1+x}}$ qui est intégrable par le critère de Riemann.
- si $P(-1)Q(-1) = 0$, on peut écrire $P(X)Q(X) = (x+1)^k R(X)$ et h admet un prolongement par continuité en $x = -1$.

On vérifie aisément que $(\ ,\ )$ est bilinéaire, symétrique, positive.

Enfin, si $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, P^2(x)\, dx = 0$, par continuité et positivité, on a, pour tout x de $]-1, 1]$, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, P^2(x) = 0$ et P admettant une infinité de racines sur $]-1, 1[$ est le polynôme nul.

b) Une intégration par parties sur $[a,b] \subset]-1,1[$ donne :

$$\int_a^b \big((x^2-1)P''(x)+2xP'(x)\big)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\,dx = \Big[(x^2-1)P'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\Big]_a^b$$

$$-\int_a^b (x^2-1)P'(x)\Big[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q'x) - \frac{Q(x)}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}\Big]\,dx$$

d'où en faisant passer le dernier terme dans la partie gauche :

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Phi(P)(x)Q(x)\,dx = \Big[(x^2-1)P'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}Q(x)\Big]_a^b$$

$$+\int_a^b (1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}P'(x)Q'(x)\,dx$$

Il reste à faire tendre a vers -1 et b vers 1 pour obtenir :

$$(\Phi(P) \mid Q) = \int_{-1}^1 (1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}P'(x)Q'(x)\,dx$$

c) L'expression que l'on vient d'obtenir étant symétrique, il s'ensuit :

$$(\Phi(P) \mid Q) = (P \mid \Phi(Q))$$

Les valeurs propres λ_k étant deux à deux distinctes, on a pour $k \neq j$:

$$\begin{aligned}(\Phi(H_j) \mid H_k) = (H_j \mid \Phi(H_k)) &\iff \lambda_j(H_j \mid H_k) = \lambda_k(H_k \mid H_j)\\ &\implies (H_k \mid H_j) = 0\end{aligned}$$

Exercice 2-3

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$, à coefficients réels.

Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note par ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle u \mid v \rangle = u_1v_1 + \cdots + u_pv_p.$$

Si $u \in \mathbb{R}^p$, on note $\|u\|$ la norme euclidienne du vecteur u .

1. a) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives. On notera c sa plus grande valeur propre.

b) Montrer que $\|Ax\|^2 \leqslant c\,\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. En déduire que pour tout couple de vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ et pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(*) \qquad \big|\langle A^k x \mid y \rangle\big| \leqslant c^{\frac{k}{2}}\,\|x\|\,\|y\|$$

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si chaque coefficient de U_n converge, lorsque n tend vers l'infini, vers le coefficient correspondant de la matrice U. On note ε_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2. a) Soient $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$. En utilisant la relation $(*)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$ est convergente.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une matrice que l'on notera $\exp(A)$.

c) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors e^λ est une valeur propre de $\exp(A)$.

d) Calculer $\exp(A)$ lorsque A est une matrice diagonale.

Solution :

1. a) La matrice ${}^tAA$ est symétrique puisque $({}^tAA)^t = {}^tAA$. Elle est réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On peut écrire :

$${}^tAAX = \lambda X \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX \Leftrightarrow ||AX||^2 = \lambda||X||^2$$

ce qui entraîne que $\lambda \geq 0$.

b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$. Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_ie_i$ et ${}^tAAx = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i\lambda_ie_i$, avec pour tout $1 \leq i \leq p, 0 \leq \lambda_i \leq c$. Alors :

$$||Ax||^2 = {}^tX{}^tAAX = \sum_i\sum_j \lambda_ix_ix_j{}^te_ie_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_ix_i^2$$

et

$$||Ax||^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_ix_i^2 \leq c\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = c||x||^2$$

Une récurrence évidente montre que pour tout $k \in \mathbb{N}, ||A^kx||^2 \leq c^k||x||^2$.
Soit alors x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Il vient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle A^kx, y\rangle|^2 \leq ||A^kx||^2||y||^2 \leq c^k||x||^2||y||^2$$

2. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

a) On a par la question précédente : $\left|\dfrac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}\right| \leq \dfrac{c^{k/2}}{k!}||x||\,||y||$, qui est le terme général d'une série convergente. La série proposée est donc absolument convergente.

b) On définit $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}$ et pour tout $1 \leq i,j \leq n$, $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$, ainsi que $b_{n,i,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle A^k\varepsilon_i \mid \varepsilon_j\rangle}{k!}$. La convergence des séries écrites montre que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_{n,i,j} = b_{i,j}$.

c) Si $Ax = \lambda x$, alors pour tout $n \geq 0$:

$$B_n x = \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k x}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k x}{k!} = x\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Cette dernière somme converge vers e^{λ}, tandis que (B_n) converge vers e^{A}.

d) Si B est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, la définition de $\exp(B)$ et un calcul immédiat donnent :

$$\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$$

Exercice 2-4

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB) \\ \mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A) \end{cases}$$

b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$$

c) Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3. On considère les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice BA.

b) Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I-AB$.

Solution :

1. a) Si $Bx = 0$, alors $ABx = 0$. De même tout vecteur ABx s'écrit $A(Bx)$.

b) Si la matrice AB est inversible, il vient $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB) = \{0\}$, ce qui entraîne que B est inversible. De même $\mathbb{R}^p = \operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.

2. Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
Alors $BAx = \lambda x \implies ABAx = \lambda Ax$, ce qui donne :
$Ax \in \operatorname{Ker}(\lambda I - AB) = \{0\}$. Donc $Ax = 0$ et $0 = BAx = \lambda x$ entraîne que $\lambda x = 0$. Enfin $\lambda \neq 0$ entraîne que $x = 0$.
Les matrices AB et BA jouant des rôles symétriques, on obtient la réciproque demandée.

b) Posons $X = \dfrac{I}{\lambda} + \dfrac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$. Il vient :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - AB)X &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{\lambda A - ABA}{\lambda}\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{A(\lambda I - BA)}{\lambda}\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B \\
&= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{AB}{\lambda} = I
\end{aligned}$$

c) La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

3. a) En effectuant le produit BA, on trouve :

$$BA = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

b) Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I - AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), qui donne :

$$(I - AB)^{-1} = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (2-p) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & (2-p) \end{pmatrix}$$

Exercice 2-5

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $H = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

1. Montrer que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $q(X) = {}^tXHX$.

a) Vérifier que $q(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que les valeurs propres de H sont strictement positives et que H est inversible.

c) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^tXH^{-1}X \geq 0$, et que ${}^tXH^{-1}X = 0$ si et seulement si $X = 0$.

3. On note $||X|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, a_n la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande valeur propre de H.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ a_n ||X||^2 \leq q(X) \leq b_n ||X||^2$.

b) On note $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à H et on admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$. Montrer que $na_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

c) On considère la suite (h_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite $(h_n - \ln n)$ est convergente. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Solution :

1. La commutativité de l'addition dans $\mathbb{N}$ donne que H est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2. a) On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right) dt\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}\right) dt\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = {}^t XHX\end{aligned}$$

b) Soit λ une valeur propre de H. Il existe un vecteur X non nul tel que $HX = \lambda X$. Ainsi :

$$q(X) = {}^t XHX = {}^t X(\lambda X) = \lambda ||X||^2$$

et $q(X) \geq 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, entraîne que $\lambda \geq 0$.

Or si $\lambda = 0$, il vient $q(X) = 0$. Mais $q(X) = \displaystyle\int_0^1 \big(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\big)^2 dt = 0$ entraîne que le polynôme $\big(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\big)^2$ est identiquement nul sur $\mathbb{R}$ et donc que $X = 0$.

Ainsi H ne possède que des valeurs propres strictement positives ce qui entraîne qu'elle est inversible.

c) Posons $Y = H^{-1}X$. Alors :

$${}^t XH^{-1}X = {}^t Y {}^t HH^{-1}HY = {}^t Y {}^t HY = {}^t YHY \geq 0$$

et si ${}^t YHY = 0$, alors $Y = 0$ et donc $X = 0$.

3. On sait que H est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots e_n)$. Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $||X||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$, et $HX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$.

On sait de plus que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 < a_n \leq \lambda_i \leq b_n$. Finalement ${}^t XHX = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et :

$$a_n ||X||^2 \leq \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq b_n ||X||^2$$

b) Si l'on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à H, on admet que $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} = s_n$ On a alors, par la question précédente $na_n \leq s_n \leq nb_n$.

c) Posons $u_n = h_n - \ln n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\big(\frac{n}{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\big(1 - \frac{1}{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + O\Big(\frac{1}{2(n+1)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} + O\Big(\frac{1}{2(n+1)^2}\Big) \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, le série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente ce qui siginifie que

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini, donc que la suite (u_n) converge.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} s_n &= h_{2n} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) = h_{2n} - \frac{1}{2} h_n \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - \frac{1}{2}(u_n + \ln(n)) = u_{2n} - \frac{1}{2} u_n + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln n \end{aligned}$$

Or $0 \leq a_n \leq \dfrac{s_n}{n}$ donne :

$$0 \leq a_n \leq \frac{u_{2n} - \frac{1}{2} u_n + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln n}{n}$$

soit, par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Exercice 2-6

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et f, g, h trois endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g = h, \ \ g \circ h = f, \ \ h \circ f = g$$

1.a) Comparer les images de ces trois endomorphismes ainsi que leurs noyaux.

b) Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$ et, en calculant $h^2 \circ f \circ h^2$, montrer que $f^5 = f$.

c) Montrer que les noyaux des puissances de f sont tous égaux et en déduire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

2. On suppose maintenant que f, g, h sont de rang n.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

Montrer que les sous-espaces propres de f (s'il y en a) sont stables par g et par h.

On suppose désormais que f est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que $f^2 = I_E$ (l'endomorphisme identité de E) et que f, g, h commutent deux à deux.

c) En déduire que f, g, h admettent une base commune de vecteurs propres.

Solution :

1. a) Comme $f = g \circ h$, pour tout $x \in E : f(x) = g(h(x))$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$
Comme $h = f \circ g$, pour tout $x \in E : h(x) = f(g(x))$. Donc $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f$
Comme $g = h \circ f$, pour tout $x \in E : g(x) = h(f(x))$. Donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} h$
On obtient ainsi :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} h$$

De même $h = f \circ g \Rightarrow \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} h$.
$f = g \circ h \Rightarrow \operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$ et $g = h \circ f \Rightarrow \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Ce qui donne

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} h$$

b) Il vient $f^2 = f \circ f = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h \circ h = h^2$, et
$g^2 = g \circ g = g \circ (h \circ f) = (g \circ h) \circ f = f \circ f = f^2$.
Enfin
$f^5 = h^2 \circ f \circ h^2 = h \circ (h \circ f) \circ h^2 = h \circ g \circ h^2 = h \circ (g \circ h) \circ h = h \circ f \circ h = g \circ h = f$

c) On sait que :

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker} f^5 = \operatorname{Ker} f$$

Ainsi :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 = \ldots = \operatorname{Ker} f^5$$

Mais $f^5 = f \Rightarrow \operatorname{Ker} f^{1+4p} = \operatorname{Ker} f$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite des noyaux de f est constante.

Le théorème du rang dit qu'il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ pour montrer que ces deux sous–espaces sont supplémentaires.

Or si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, alors $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = f(y) \end{cases}$.

Mais alors $f^2(y) = 0 \implies y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \implies x = f(y) = 0$.

2. a) Les valeurs propres de f font partie de l'ensemble des racines du polynôme $X^5 - X$, polynôme annulateur de f. Mais f étant un isomorphisme (rang de f égal n), elles sont incluses dans les racines de $X^4 - 1$, qui sont $\{1, -1, i, -i\}$. Les seules valeurs propres réelles possibles sont donc 1 et -1.

Soit $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors

$$g(x) = h(f(x)) = \lambda h(x) = \lambda f(g(x))$$

Or comme $\dfrac{1}{\lambda} = \lambda$, il vient $f(g(x)) = \lambda g(x)$, ce qui signifie que le sous-espace propre de$f$ associé à la valeur prope λ est stable par g. La démonstration pour h est identique.

b) Si f est de plus symétrique, on sait qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs popres sont réelles. Les valeurs propres étant incluses dans $\{-1, 1\}$, la matrice associée à f dans la base des vecteurs propres est diagonale avec ces valeurs sur la diagonale. Donc $f^2 = I$.
Par la question 1.b) on a $I = f^2 = g^2 = h^2$. Donc :
$g \circ f = g \circ g \circ h = g^2 \circ h = h = f \circ g$,
$f \circ h = f \circ f \circ g = f^2 \circ g = g = h \circ f$,
$h \circ g = h \circ h \circ f = h^2 \circ f = f = g \circ h$.

c) Les endomorphismes g et h sont diagonalisables, car $g^2 = I = h^2$.
Comme f est diagonalisable, On sait que $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$. Comme g laisse stable E_1 (resp. E_{-1}), alors g_1 (resp. g_{-1}), restriction de g à E_1, (resp. E_{-1}) est un endomorphisme de E_1 (resp. E_{-1}) et g et g_{-1} sont eux même diagonalisables (ils verifient la même équation que g).

Si l'on note $\mathcal{B}_1$ une base de diagonalisation de g_1 et $\mathcal{B}_{-1}$ une base de diagonalisation de g_{-1}, l'« union » de ces deux bases est une base de E, formée de vecteurs propres de g et de f par construction.

La démonstration pour h est identique.

Exercice 2-7

Soit a un réel strictement positif et E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, a]$. On considère les fonctions s et c de E définies pour tout $x \in [0, a]$ par $s(x) = \sin(x)$ et $c(x) = \cos(x)$. On définit en outre l'application Φ de E dans E par :

$$\forall (x, f) \in [0, a] \times E, \ \Phi(f)(x) = \int_0^a f(t) \sin(x + t) dt$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $(\Phi(s), \Phi(c))$ est un système libre de E.

3. Déterminer $\operatorname{Im} \Phi$.

4. On suppose désormais que $a = \pi/2$. Déterminer les valeurs propres non nulles de Φ ainsi que les sous-espaces propres associés.

5. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par s et c. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme de F. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application $(x, t) \mapsto f(t) \sin(x + t)$ est continue sur $[0, a]^2$. Par suite la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $[0, a$. La linéarité est immédiate et provient de la linéarité de l'intégrale.

2. On a pour tout $x \in [0, a]$:

$$\Phi(f)(x) = \sin x \int_0^a f(t) \cos t \, dt + \cos x \int_0^a f(t) \sin t \, dt = \lambda(f) s + \mu(f) c$$

Donc :

$$\Phi(s) = s \int_0^a \sin t \cos t \, dt + c \int_0^a \sin^2 t \, dt, \Phi(c) = s \int_0^a \cos^2 t \, dt + c \int_0^a \sin t \cos t \, dt$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \Phi(s) \\ \Phi(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^a \sin t \cos t \, dt & \displaystyle\int_0^a \sin^2 t \, dt \\ \displaystyle\int_0^a \cos^2 t \, dt & \displaystyle\int_0^a \sin t \cos t \, dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible car par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\left(\int_0^a \sin t \cos t \, dt \right)^2 - \left(\int_0^a \sin^2 t \, dt \right) \left(\int_0^a \cos^2 t \, dt \right) < 0$$

ce qui entraîne que $(\Phi(s), \Phi(c))$ est un système libre puisque (s, c) l'est.

3. On sait déjà que $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Vect}(s, c)$. D'après la question précédente, on peut écrire que $\operatorname{Vect}(s, c) = \operatorname{Vect}(\Phi(s), \Phi(c))$. Donc

$$\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(\Phi(s), \Phi(c)) = \operatorname{Vect}(s, c)$$

4. Soit λ une valeur propre non nulle de Φ et f un vecteur propre associé. Comme $f = \dfrac{\Phi(f)}{\lambda}$, on a $f \in \operatorname{Vect}(s, c)$, soit $f(x) = a \cos x + b \sin x$. On calcule alors $\Phi(f)$ et on obtient :

$$\left(\frac{a\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) \sin x + \left(\frac{a}{2} + \frac{b\pi}{4}\right) \cos x = \lambda(a \cos x + b \sin x)$$

soit :

$$\begin{cases} a(1/2 - \lambda) + b\pi/4 = 0 \\ a\pi/4 + b(1/2 - \lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/2 + \pi/4 \\ \lambda_2 = 1/2 - \pi/4 \end{cases}$$

Chaque sous–espace propre associé est de dimension 1 et :

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}(c + s), \quad E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}(c - s)$$

5. On a vu que $\Phi(s)$ et $\Phi(c)$ s'exprimaient en fonction de s et c et engendraient le même sous–espace. On en déduit que $\Phi|_F$ est un endomorphisme, même un isomorphisme de F. Cet endomorphisme admet deux valeurs propres distinctes (λ_1, λ_2) car les vecteurs propres associés sont dans F. Ainsi il est diagonalisable.

Exercice 2-8

Soit E l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, $(n \geq 2)$ formé des matrices $A = (a_{i,j})$ vérifiant :

il existe un réel unique noté $m(A)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = m(A)$$

On considère en outre la matrice $J = (j_{p,q})$ de E définie par :

pour tout $(p,q) \in \{1,\dots,n\}^2, j_{p,q} = 1$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $A.J$ et $J.A$ pour $A \in E$. En déduire que E est stable par la multiplication des matrices et que l'application $m : A \mapsto m(A)$ est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$.

2. Soit G la droite vectorielle engendrée par J et soit $H = \operatorname{Ker} m$ le noyau de m. Montrer que $E = G \oplus H$. (on pourra considérer la matrice $A - \left(\dfrac{m(A)}{n}\right) J$, pour $A \in E$).

3. Pour tout couple $(k,l) \in \{2,\dots,n\}^2$, on considère la matrice $H^{k,l}$ dont tous les éléments sont nuls exceptés :

$$h_{1,1}^{k,l} = h_{k,l}^{k,l} = 1, \text{ et } h_{1,l}^{k,l} = h_{k,1}^{k,l} = -1$$

Montrer que pour tout couple $(k,l) \in \{2,\dots,n\}^2, H^{k,l}$ est élément de H et que l'ensemble des matrices $(H^{k,l})$ forme une base de H

(si $A = (a_{i,j}) \in H$, on pourra considérer la matrice $A' = \displaystyle\sum_{2 \leq k,l \leq n} a_{k,l} H^{k,l}$).

En déduire la dimension de E.

Solution :

1. Montrons que :

$$E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AJ = JA = m(A)J\}$$

Si A est élément de E, les conditions imposées sur A et un calcul immédiat montrent que $AJ = JA = m(A)J$.

Réciproquement, soit A une matrice réelle vérifiant $AJ = JA = \lambda J$, pour λ réel. La définition de J permet d'écrire :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda$$

E est alors évidemment un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable par multiplication, puisque si $AJ = JA = m(A)J$ et $BJ = JB = m(B)J$, alors

$$ABJ = m(B)AJ = m(B)m(A)J = JAB$$

Enfin, l'application $A \mapsto m(A)$ est évidemment linéaire.

2. Le sous-espace G est un sous–espace de E. L'application m est une forme linéaire non nulle sur E. Le théorème du rang entraîne que son noyau est de dimension $\dim(E) - 1$. Comme G est de dimension 1, il reste à prouver que

$$G \cap \operatorname{Ker} m = \{0\}$$

Or :

$$A \in G \cap \mathrm{Ker}(m) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \lambda J \\ m(A) = 0 \end{cases}$$

Donc $0 = m(A) = \lambda m(J) = n\lambda \implies A = 0$.

3. L'ensemble des matrices $H^{k,l}$ est de cardinal $(n-1)^2$. Chaque matrice $H^{k,l}$ vérifie $m(H^{k,l}) = 0$.

$\star$ Montrons qu'elles forment une famille libre.

Si $\sum\limits_{k,l} \lambda_{k,l} H^{k,l} = 0$, il suffit de regarder chaque terme (i,j) de cette somme pour s'apercevoir que :

$$\forall (i,j) \in (\{2,\ldots,n\})^2,\ 0 = \big(\sum_{k,l} \lambda_{k,l} H^{k,l}\big)_{i,j} = \lambda_{i,j}$$

$\star$ Montrons que cette famille engendre $\mathrm{Ker}(m)$.

Soir $A \in \mathrm{Ker}(m)$. Posons $A = (a_{i,j})$ et $A' = \sum\limits_{2 \leq k,l \leq n} a_{k,l} H^{k,l}$, et montrons que $A = A'$.

- $a'_{1,1} = \sum\limits_{s=2}^{n} \sum\limits_{r=2}^{n} a_{r,s} = \sum\limits_{s=2}^{n} (-a_{1,s}) = -(-a_{1,1}) = a_{1,1}$.
- si $i \geq 2, j \geq 2$, alors $a'_{i,j} = a_{i,j}$.
- si $i = 1, j \geq 2$, alors $a'_{1,j} = -\sum\limits_{r=2}^{n} a_{r,j} = a_{1,j}$
- si $i \geq 2, j = 1$, alors $a'_{i,1} = a_{i,1}$.

Ainsi la famille des matrices $(H^{k,l})_{2 \leq k,l \leq n}$ est un système libre et générateur de H et forme une base de H. On en déduit que la dimension de E est égale à $(n-1)^2 + 1$.

Exercice 2-9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. On identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonne à coefficients réels.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant :

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0, \quad \text{et} \quad {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0.$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

Soit C un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$f(X) = \langle AX, X\rangle - 2\langle C, X\rangle$$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Déterminer la nature de ces points.

Solution :

1. Soit λ une valeur propre de A (on sait que $\lambda \in \mathbb{R}$), et X une colonne propre associée. On a ${}^tXX > 0$ et :

${}^tXAX \neq 0$ et ${}^tXAX = \lambda {}^tXX \geq 0$, donc $\lambda {}^tXX > 0$ et $\lambda > 0$.

2. Avec des notations évidentes et en développant : $f(X) = \sum_{i,j} a_{i,j}x_ix_j - 2\sum_i c_ix_i$. Soit, en simplifiant par 2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots a_{1,n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots a_{n,n}x_n = c_n \end{cases} \Longleftrightarrow X = A^{-1}C$$

En effet, nous venons de démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

3. Soit H une matrice colonne quelconque. Dans le calcul de $f(A^{-1}C + H)$ les termes du premier degré en H disparaissent, puisque $A^{-1}C$ est un point critique, et il reste :

$$f(A^{-1}C + H) = f(A^{-1}C) + {}^tHAH$$

Pour $H \neq 0$, on a ${}^tHAH > 0$ et donc f présente au point $A^{-1}C$ un *minimum* absolu strict.

Exercice 2-10

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension n, et f est un endomorphisme de E.
Par convention $f^0 = id$ (application identité) et on définit par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$, f^k par $f^k = f \circ f^{k-1}$
On dira que f est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$$

soit une base de E.

1. Montrer que si f est cyclique, alors $(id, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre d'endomorphismes de E.

2. Indiquer à quelles conditions un projecteur de E est cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$, et on considère l'endomorphisme d de E défini par : $\forall\, Q \in E$,

$$d(Q)(X) = Q(X+1) - Q(X)$$

a) Que peut-on dire du degré de $d(Q)$ relativement à celui de Q ?

b) Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme d. Est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme d est-il cyclique ?

4. On suppose dans cette question que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs propres respectivement associés. Montrer à l'aide du vecteur $x_0 = \sum_{k=1}^{n} e_k$ que f est cyclique.

5. On suppose dans cette question que f est diagonalisable et admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec $p < n$. On pose

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$$

a) Calculer $P(f)(x)$ lorsque x est un vecteur appartenant à l'un des sous-espaces propres de f.

b) En déduire que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

c) f est-t-il cyclique ?

Solution :

1. Supposons f cyclique, et soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des scalaires tels que l'on ait $a_0 id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0$.
En particulier, on a : $a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$, où x_0 est un vecteur tel que $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On en déduit la nullité de tous les scalaires et la famille $(id, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

2. Si p est un projecteur, on a $p^2 = p$, donc la famille $(x_0, p(x_0), p^2(x_0), \ldots)$ est toujours liée.
Ainsi, pour qu'un projecteur soit cyclique, il est nécessaire que la dimension de E soit inférieure ou égale à 2, donc égale à 2.
Réciproquement, si $\dim E = 2$, on peut trouver un vecteur x_0 tel que $(x_0, p(x_0))$ soit une base de E, si et seulement si p n'est pas l'identité ou l'application nulle.
Bref, un projecteur est cyclique si et seulement si $\dim E = 2$ et p est la projection sur une droite parallèlement à une autre droite.

3. a) $\star$ Si Q est un polynôme constant, alors $d(Q)$ est le polynôme nul.

$\star$ Sinon, écrivons $Q = a_0 + \cdots + a_q X^q$, avec $q \geq 1$ et $a_q \neq 0$. On obtient :
$d(Q) = q a_q X^{q-1} + \cdots$, ce qui prouve que $d(Q)$ est de degré exactement $q - 1$.

b) $\star$ D'après a), $\operatorname{Ker} d$ est l'ensemble des polynômes constants : $\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

$\star$ Toujours d'après a) $\operatorname{Im} d \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Or par la formule du rang, on a :

$$\dim \operatorname{Im} d = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - \dim \operatorname{Ker} d = (n-2) - 1 = \dim \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

Ce qui assure que l'on a : $\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

$\star$ Si λ était une valeur propre non nulle de d et Q un polynôme propre associé, on aurait : $\deg Q = \deg(\lambda Q) = \deg d(Q) = \deg Q - 1$, ce qui est absurde. Ainsi la seule valeur propre possible de d est 0.
De plus 0 est effectivement valeur propre de d, le sous-espace propre associé étant le noyau de d.

$\star$ Si l'endomorphisme d était diagonalisable, comme 0 est son unique valeur propre, d serait l'endomorphisme nul, ce qui est faux. Donc d n'est pas diagonalisable.

c) Prenons par exemple $Q = X^{n-1}$. Alors la famille $(Q, d(Q), \dots, d^{n-1}(Q))$ est échelonnée en degré, donc est libre dans E, et est de cardinal $n = \dim E$. Ainsi cette famille est une base de E, ce qui prouve que d est cyclique.

4. On a $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$, d'où $f(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et par une récurrence simple :

$$f^p(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p e_k$$

Donc, si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p f^p(x_0) = 0$, on a :

$$0 = \sum_{p=0}^{n-1} a_p f^p(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{p=0}^{n-1} a_p \lambda_k^p\Big) e_k = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) e_k, \text{ avec } P = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, et donc le polynôme P s'annule en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme il est de degré inférieur ou égal à $n-1$, il s'agit du polynôme nul et tous les coefficients a_p sont nuls.
La famille $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est donc libre de cardinal n et est une base de E, ce qui prouve que f est cyclique.

5. a) Supposons x propre associé à la valeur propre λ_k.
On a $P(f) = (f - \lambda_1 id) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p id)$ et les endomorphismes écrits commutent entre eux. On peut donc écrire : $P(f) = \cdots \circ (f - \lambda_k id)$. Ainsi :

$$P(f)(x) = \cdots \circ (f - \lambda_k id)(x) = 0.$$

b) Par hypothèse il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. D'après a) l'endomorphisme $P(f)$ s'annule en chaque vecteur d'une telle base. Par conséquent $P(f)$ est nul sur une base, donc est l'endomorphisme nul.

c) La question b) montre, en développant $P(f)$, que la famille $(id, f, \dots, f^p)$ est liée, avec $p < n$. Comme toute sur-famille d'une famille liée est liée, on en déduit que la famille $(id, f, \dots, f^{n-1})$ est liée.
La question 1. montre alors que f n'est pas cyclique.

Exercice 2-11

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Si $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ a_{i-1} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On note P_a le polynôme défini par : $P_a(X) = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

1. Soit λ une valeur propre de M_a. Déterminer le rang de la matrice $M_a - \lambda I_n$. En déduire la dimension du sous-espace propre associé.

2. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $P_a(\lambda) = 0$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur P_a pour que M_a soit diagonalisable.

4. On pose $Q(X) = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$. Montrer que Q possède une racine multiple si et seulement si n est multiple de 6.

5. On prend dans cette question $a = \left(0, -\dfrac{C_{n+1}^1}{n+1}, \dots, -\dfrac{C_{n+1}^{n-1}}{n+1}\right)$, où C_m^p désigne le coefficient binomial habituel. Pour quelles valeurs de n la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Comme λ est une valeur propre de M_a, on sait déjà que $\mathrm{rg}(M_a - \lambda I_n) \leq n-1$.

Par ailleurs $M_a - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a_n - \lambda \end{pmatrix}$ est de rang $\geq n-1$, car les $n-1$ premières colonnes sont échelonnées, donc forment une famille libre.

Ainsi $\mathrm{rg}(M_a - \lambda I_n) = n-1$.

Par le théorème du rang, on en déduit que les sous-espaces propres sont de dimension exactement 1.

2. On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \lambda^2 L_3 + \dots + \lambda^{n-1} L_n$ et la première ligne de $M_a - \lambda I_n$ devient $(\,0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad P_a(\lambda)\,)$.

On effectue alors, dans cet ordre, les permutations $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, …, $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$, de façon à amener la ligne L_1 en dernière position, sans perturber l'ordre des autres lignes. On obtient ainsi une matrice trigonale supérieure de diagonale $(1, 1, \dots, 1, P_a(\lambda))$.

Par conséquent les valeurs propres de M_a sont les racines du polynôme P_a.

3. Comme les sous-espaces propres sont de dimension 1, M_a est diagonalisable si et seulement si M_a admet n valeurs propres, c'est-à-dire si et seulement si P_a admet n racines distinctes.

4. Le polynôme Q possède une racine multiple si et seulement si il existe une racine commune à Q et Q'.
Or $Q' = (n+1)[(X+1)^n - X^n]$, d'où :

$$Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0 \iff (S) : \begin{cases} (\lambda+1)^{n+1} - \lambda^{n+1} = 1 \\ (\lambda+1)^n = \lambda^n \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda^n(\lambda+1) - \lambda^{n+1} = 1 \\ (\lambda+1)^n = \lambda^n \end{cases} \iff \lambda^n = (\lambda+1)^n = 1$$

Or : $\lambda^n = (\lambda+1)^n = 1 \implies |\lambda+1| = |\lambda| = 1 \implies \lambda \in \{j, j^2\}$.
On a : $j^n = (j+1)^n = 1 \iff j^n = (-j^2)^n = 1 \iff j^n = (-1)^n = 1$, ce qui se produit si et seulement si n est pair et multiple de 3, donc multiple de 6.
Le calcul est le même pour j^2 (et d'ailleurs ce calcul est inutile puisque j^2 est le conjugué de j)

En conclusion Q possède une racine multiple si et seulement si n est un multiple de 6, Q ayant alors j et j^2 pour racines au moins doubles.

5. Lorsque a est le n-uplet de l'énoncé, on a :

$$P_a(X) = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_{n+1}^k}{n+1} X^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k X^k = \frac{1}{n+1} Q(X)$$

Les questions 3. et 4. montrent alors que M_a est diagonalisable si et seulement si n n'est pas un multiple de 6.

Exercice 2-12

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norme associée étant notée $\|\cdot\|$.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E tels que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1, n]\!], \|x_i\| = 1 \\ \forall\, i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies \|x_i - x_j\| = 1 \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout couple d'indices i et j, $\langle x_i, x_j \rangle$.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre n, de terme générique $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.
Montrer que A est inversible et en déduire que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Solution :

1. En développant : $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle$.

Ainsi, pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = \dfrac{1}{2}$ et bien sr $\langle x_i, x_i\rangle = 1$.

2. $\star$ On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \dots & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}(x_1 + \dots + x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}(x_1 + \dots + x_n) = 0 \end{cases}$

On en déduit : $x_1 = \dots = x_n$ et en reportant dans l'une quelconque des équations, il vient $x_1 = \dots = x_n = 0$, ce qui prouve que le noyau de A se réduit à $\{0\}$ et donc que A est inversible.

(On peut aussi calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de I_n et A, ce qui donne en plus une expression de l'inverse de A, ou remarquer que $A = \dfrac{1}{2}(I + J)$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Les valeurs propres de J sont aisées à calculer et on constate alors que 0 n'est pas valeur propre de A ...).

$\star$ Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ était liée, il existerait des scalaires non tous nuls, tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$, d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = 0$.

En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A, on aurait donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, et les colonnes de A seraient liées, ce qui nie l'inversibilité de A.

Ainsi la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 2-13

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout x de E on pose : $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

1. a) L'application F est-elle un endomorphisme de E ?

   b) L'application F est-elle injective, surjective ?

   c) L'application F est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

d) Caractériser les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telles que F soit un projecteur.

2. a) Montrer que les valeurs propres de F sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ F)^{-1}$.

c) Montrer que $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Solution :

1. a) La linéarité de F résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire et des propriétés du calcul vectoriel. D'autre part F est clairement à valeurs dans E, donc F est un endomorphisme de E.

b) Si $F(x) = 0$, on a : $\forall\, k, \langle x, e_k\rangle = 0$ (car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E), ce qui prouve que x est orthogonal à une base de E, donc à tout vecteur de E, et en particulier à x. Ainsi $\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$.
Ceci prouve que F est injective, donc est bijective, puisque F est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

c) Pour tous vecteurs x et y, on a :

$$\langle F(x), y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle e_k, x\rangle = \langle F(y), x\rangle$$

Ainsi, F est un automorphisme symétrique.

d) Comme F est un automorphisme, F est un projecteur si, et seulement si, $F = id$.

$\star$ Si $F = id$, alors $\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

En particulier, pour tout indice j, $e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k\rangle e_k$ et l'unicité de l'écriture dans une base donne $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$, ce qui prouve que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée.

$\star$ Réciproquement si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, alors :

$$\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \text{ et } F = id.$$

$$F \text{ projecteur} \iff (e_1, \ldots, e_n) \text{ orthonormée}$$

2. a) Si λ est une valeur propre de F et x un vecteur propre associé, on a :

$$\lambda\|x\|^2 = \langle F(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 > 0 \text{ (car } x \neq 0)$$

Donc $\lambda > 0$.

b) $s = (s \circ F)^{-1}$ équivaut à $s \circ s = F^{-1}$. Puisque F est un endomorphisme symétrique, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a : $M_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$ et on peut donc considérer l'endomorphisme s tel que $M_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2})$.

Par construction même, $s \circ s = F^{-1}$, s est un automorphisme et s est symétrique, donc s convient.

c) Pour tout couple (i,j), on a : $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \langle e_i, s \circ s(e_j)\rangle = \langle e_i, F^{-1}(e_j)\rangle$.

Or : $e_j = F(F^{-1}(e_j)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle F^{-1}(e_j), e_i\rangle e_i$, d'où : $\langle F^{-1}(e_j), e_i\rangle = \delta_{i,j}$.

Ainsi $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$ et donc $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2-14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer que $A^{12} = I_2$.

On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

1. Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$. En déduire que σ n'est pas vide.

On admettra que la matrice A vérifie la relation : $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ $(\star)$.

2. Montrer que σ vérifie l'une, et l'une seulement, des deux propositions suivantes :
   a) $\sigma \subseteq \{-1, 1\}$
   b) il existe un entier p tel que $1 \leq p < n/2$ et $\sigma = \{e^{-2ip\pi/n}, e^{2ip\pi/n}\}$.

Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2\cos(2p\pi/n)$?

3. On suppose que $\mathrm{card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$.

4. On suppose que $\sigma = \{1\}$ et que $A \neq I_2$.
   a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Im}(A - I_2)$
   b) En déduire que A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c) Calculer T^k, pour $k \geq 1$. En déduire une contradiction.

5. Montrer que si $\sigma = \{-1\}$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction.

Conclure.

Solution :

1. λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, donc si et seulement si : $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.
Ce qui donne en développant :
$$\lambda \in \sigma \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$
Une équation du second degré à coefficients réels ayant toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$, on en déduit que σ est non vide.

La formule $(*)$ se vérifierait facilement, il suffit de faire les calculs ...

2. Si λ est une valeur propre de A, alors λ^n est une valeur propre de A^n, donc d'après l'hypothèse faite sur A :
$$\lambda^n = 1$$
Si le spectre de A est réel, on a donc $\sigma \in \{-1, 1\}$.

Sinon, il existe une valeur propre de A de la forme $\lambda_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}$, avec $0 \leq p < n$, et donc $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \mathrm{e}^{-i\frac{2p\pi}{n}}$ est aussi valeur propre de la matrice A.

Or les valeurs propres de A ne sont pas réelles, donc sont distinctes, et quitte à permuter les rôles de λ_1 et λ_2, on peut supposer que l'on a $0 < p < \dfrac{n}{2}$ (pour éviter les nombres -1 et 1).
En conclusion, dans ce cas $\sigma = \{\mathrm{e}^{-2ip\pi/n}, \mathrm{e}^{2ip\pi/n}\}$

On a alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) = a + d \in \mathbb{Z}$.

3. Si A a deux valeurs propres distinctes.
$\star$ Si elles sont réelles, on a $\sigma = \{-1, 1\}$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(-1, 1)$ et A^2 est semblable à I_2, donc vaut I_2, *a fortiori* $A^{12} = I_2$.

$\star$ Sinon, elles sont complexes conjuguées, donc de la forme vue en 2, avec $2\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) \in \mathbb{Z}$, donc $2\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) \in \{-1, 0, 1\}$ (les valeurs -2 et 2 ne correspondent pas à des valeurs propres complexes non réelles).

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) = -\dfrac{1}{2}$, les valeurs propres sont j et j^2, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(j, j^2)$ et A^3 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12} = I_2$.

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) = 0$, les valeurs propres sont i et $-i$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(i, -i)$ et A^4 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12} = I_2$.

Si $\cos(\dfrac{2p\pi}{n}) = \dfrac{1}{2}$, les valeurs propres sont $-j$ et $-j^2$, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(-j, -j^2)$ et A^6 est semblable à I_2, donc vaut I_2. *A fortiori* $A^{12} = I_2$.

4. a) Si 1 est l'unique valeur propre de A, alors l'équation $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ équivaut à l'équation $(\lambda - 1)^2 = 0$, donc $a + d = 2, ad - bc = 1$.
La relation $(*)$ s'écrit donc : $A^2 - 2A + I_2 = 0$,*i.e.* $(A - I_2)(A - I_2) = 0$

On a donc $\mathrm{Im}(A - I_2) \subset \mathrm{Ker}(A - I_2)$.

Or : $\dim \mathrm{Im}(A-I_2)+\dim \mathrm{Ker}(A-I_2) = 2$ et $A-I_2$ n'est pas inversible et n'est pas non plus la matrice nulle. Ainsi $\dim \mathrm{Im}(A - I_2) = \dim \mathrm{Ker}(A - I_2) = 1$ et l'inclusion précédente montre que :

$$\mathrm{Im}(A - I_2) = \mathrm{Ker}(A - I_2)$$

b) Soit e_2 un vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(A - I_2)$, le vecteur $e_1 = (A - I_2)(e_2)$ est tel que $(A - I_2)(e_1) = (A - I_2)^2(e_2) = 0$.

Donc $A(e_1) = e_1$, tandis que $A(e_2) = e_1 + e_2$.

La famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ (e_1 est propre pour A et pas e_2). Par conséquent A est semblable à la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Facilement $\forall\, k \geq 1, T^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or il existe $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$, donc, pour le même entier n, on a $T^n = P^{-1}A^nP = I_2$. La contradiction est claire.

5. On fait le même raisonnement qu'en 4., en utilisant $A + I_2$ et on aboutit également à une contradiction.

Dans tous les cas possibles, on a trouvé $A^{12} = I_2$ et donc le but est atteint.

Exercice 2-15

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. Pour P et Q dans E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\, dt$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$

Montrer qu'il existe un unique triplet (x_0, y_0, z_0) tel que f présente en (x_0, y_0, z_0) un minimum absolu et déterminer ce triplet.

Solution :

1. Comme P et Q sont des polynômes, si $n = \deg(PQ)$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t) = 0$ entraîne l'existence de l'intégrale proposée.

On vérifie que la forme proposée est bilinéaire, symétrique et positive.

Si de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}P^2(t)dt = 0$, par positivité et continuité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}P^2(t)$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-t}P^2(t) = 0$ pour tout t réel et P est le polynôme nul : on a donc effectivement un produit scalaire.

2. En fait $f(x,y,z)$ représente le carré de la distance du polynôme X^3 au sous–espace $\mathbb{R}_2[X]$.
On sait que cette distance est atteinte en un unique polynôme qui est la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. ce qui se traduit par : $X^3-(-x_0X^2-y_0X-z_0)$ est orthogonal à la base canonique $1, X, X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit, après calculs :

$$\begin{cases} 24x_0+6y_0+2z_0 &= -120 \\ 6x_0+2y_0+z_0 &= -24 \\ 2x_0+y_0+z_0 &= -6 \end{cases} \iff (x_0,y_0,z_0)=(-9,18,-6)$$

Exercice 2-16

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $(\alpha,\beta,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}^*$, pour que le polynôme $P_1=X^8+X^4+1$ divise le polynôme $P_2=X^{8n}+\alpha X^{4n}+\beta$.

Solution :

On a : $(X^8+X^4+1)(X^4-1)=X^{12}-1$.
Par conséquent, les racines de X^8+X^4+1 sont les racines douzièmes de l'unité, sauf celles qui sont racines quatrièmes de l'unité.
Les racines de P_1 sont donc simples et sont les nombres $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{12}}$, avec $0\le k\le 11$ et $k\notin\{0,3,6,9\}$.
P_1 divise P_2 si et seulement si ces nombres sont racines de P_2, ce qui conduit au système :

$$\forall\, k\in[\![1,11]\!]\setminus\{3,6,9\},\ \mathrm{e}^{i\frac{4kn\pi}{3}}+\alpha\mathrm{e}^{i\frac{2kn\pi}{3}}+\beta=0$$

Ce qui équivaut à : $\begin{cases}\cos(\dfrac{2kn\pi}{3})(\alpha+1)+\beta=0\\ \sin(\dfrac{2kn\pi}{3})(\alpha-1)=0\end{cases}$, pour tout $k\in[\![1,11]\!]\setminus\{3,6,9\}$

Si n est un multiple de 3, il reste $\alpha+\beta+1=0$;
si n n'est pas un multiple de 3, on obtient $\alpha=1$ et comme $\cos(\dfrac{2kn\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}$ (on évite les valeurs de k multiples de 3), il vient $\beta=1$.

Exercice 2-17

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels, non scalaire (c'est-à-dire que A n'est pas de la forme $\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$).

On dira qu'une suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $B_n=(b_{i,j,n})_{1\le i,j\le 2}$, converge vers une matrice $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ si pour tout $(i,j)\in\{1,2\}^2$, la suite de nombres réels $(b_{i,j,n})$ converge vers le nombre réel $b_{i,j}$.

1. On suppose que A possède deux valeurs propres réelles distinctes.

a) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. exprimer S_n ainsi que son éventuelle limite, lorsque n tend vers l'infini. On notera cette limite $\exp(A)$.

c) Déterminer les valeurs propres de $\exp(A)$ en fonction de celles de A.

d) Montrer que $\exp(A)$ est une matrice inversible.

2. On suppose maintenant que A ne possède qu'une seule valeur propre.

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible, telles que $P^{-1}AP = J$, avec $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer J^n.

c) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Déterminer S_n ainsi que son éventuelle limite, lorsque n tend vers l'infini. On notera encore cette limite $\exp(A)$.

d) Déterminer les valeurs propres de $\exp(A)$ en fonction de celle de A. Montrer que $\exp(A)$ est une matrice inversible.

3. A t-on toujours $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$?

Solution :

1. a) La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres, donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq b$ et une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

b) On a alors $A^k = PD^kP^{-1}$, d'où :

$$S_n = P\Sigma_n P^{-1}, \text{ avec } \Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k$$

Or : $\Sigma_n = \mathrm{diag}(\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}) \longrightarrow \mathrm{diag}(\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b)$, et, en revenant au calcul effectif d'un produit de matrices, on voit aisément que la limite d'un produit est le produit des limites, donc :

$$\exp A = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix} P^{-1}$$

c) Le résultat précédent montre que $\mathrm{Spec}(\exp A) = \{\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b\}$

d) Une exponentielle n'étant jamais nulle, 0 n'est pas valeur propre de $\exp A$, et cette matrice est bien inversible.

2. Soit a l'unique valeur propre de A.

a) La matrice A n'est pas diagonalisable, sinon A serait semblable à aI_2, donc serait égale à aI_2, ce qui est exclu par l'énoncé.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ une colonne propre associée à la valeur propre a et Q une matrice inversible de première colonne X (possible, d'après le théorème de la base incomplète). La matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Les matrices A et T étant semblables, elles ont mêmes valeurs propres et $\beta = a$, de plus on sait que $\alpha \neq 0$ (puisque A n'est pas diagonalisable), donc $T = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Or, si on prend $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, avec $k \neq 0$, (on garde le premier vecteur de base, qui est propre, et on change le second), un calcul simple donne :

$$RTR^{-1} = \begin{pmatrix} a & \dfrac{\alpha}{k} \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, en prenant $k = \alpha$, la matrice T, donc la matrice A, est semblable à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

b) On obtient, par une récurrence facile, ou par la formule du binôme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, J^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

c) Comme $A^k = PJ^kP^{-1}$, il vient :

$$S_n = P \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k.a^k}{k!} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc, en simplifiant la sommation du terme placé en première ligne et deuxième colonne :

$$\exp A = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{pmatrix} P^{-1}$$

d) $\exp A$ admet donc e^a pour unique valeur propre et cette valeur propre étant non nulle, $\exp A$ est inversible.

3. La réponse est non. Il suffit de trouver un contre-exemple. En fait, tout couple de matrices (A, B) tel que $AB \neq BA$ convient.

On peut proposer : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0 \neq AB$.

Les calculs de $\exp A, \exp B$ et $\exp(A+B)$ sont alors très simples (on a $A^2=0$, $B^2=0$ et AB est diagonale) :

$\exp A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il est clair que $\exp(A+B) \neq \exp A . \exp B$.

Exercice 2-18

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application Φ qui à toute fonction f de E associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. a) Soit f un élément de E et F une primitive de f. Exprimer $\Phi(f)$ en fonction de F pour x non nul. En déduire la continuité de $\Phi(f)$ en 0.
Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Soit $f \in \operatorname{Ker} \phi$. Etudier la parité de f. Déterminer le noyau de Φ. L'endomorphisme Φ est-il injectif ?

2. L'endomorphisme Φ est-il surjectif ?

3. On appelle valeur propre de Φ tout réel λ tel qu'il existe $f \in E$ non nul tel que $\Phi(f) = \lambda f$. Un tel élément s'appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ.
Soit λ une valeur propre non nulle de Φ et f un vecteur propre associé.

a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer f' en fonction de f.

c) Pour quelles valeurs de α la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto |x|^\alpha$ est-elle solution de l'équation trouvée dans la question précédente ?

d) Soit $E_\lambda = \{f \mid \Phi(f) = \lambda f\}$ et $h \in E_\lambda$ non nul.
Pour tout $x \neq 0$, on définit $k(x)$ par $h(x) = k(x)|x|^\alpha$. Déterminer la fonction k. En déduire le sous–espace E_λ.

e) Montrer que tout réel est valeur propre de Φ.

Solution :

1. a) Soit $x \neq 0$. On peut écrire :

$$g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x) - F(0)}{x} - \frac{F(-x) - F(0)}{x}\right]$$

Par la définition de la dérivée, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = f(0), \quad \lim_{x\to 0} \frac{F(-x)-F(0)}{x} = -f(0)$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$, ce qui signifie que g est prolongeable en 0.

Pour $x_0 \neq 0$, g est continue en x_0 comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi Φ est une application de E dans E qui est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b) Si $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors $f(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0, F(x) = F(-x)$. En dérivant, il vient, pour $x \neq 0, f(x) = -f(-x)$, c'est-à-dire f impaire.

Réciproquement, si f est impaire, $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\int_x^0 f(t)\,dt$$

ce qui entraîne que $g(x) = 0$ pour $x \neq 0$, et que $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Finalement :

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{f \mid f \text{ impaire}\}$$

2. La fonction g est dérivable pour tout $x \neq 0$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
Par exemple, la fonction $x \mapsto |x - 1/2|$ ne peut avoir d'antécédent par Φ, qui n'est donc pas surjective.

3. a) Soit f un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$. On a alors :

$$f(0) = \lambda f(0), \quad (x \neq 0) \implies \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\lambda x f(x)$$

Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$f(-x) = -\frac{1}{2\lambda x}\int_x^{-x} f(t)\,dt = \frac{1}{2\lambda x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

Ainsi f est une fonction paire.

b) Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable et pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(-\frac{1}{x^2}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt + \frac{1}{x}(f(x) + f(-x))\right)$$

Or la fonction f est paire. Il vient donc :

$$(1-\lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$$

c) La fonction $f : x \mapsto |x|^\alpha$ vérifie l'équation précédente si et seulement si :

- pour $x > 0$, $(1-\lambda)x^\alpha - \lambda\alpha x^\alpha = 0$
- pour $x < 0$, $(1-\lambda)(-x)^\alpha - \lambda\alpha x(-x)^{\alpha-1} = 0$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

d) Soit h la fonction $x \mapsto k(x)|x|^\alpha$. Si la fonction h vérifie l'équation précédente alors pour $x > 0$:

$$(1-\lambda)k(x)x^\alpha - \lambda x(k'(x)x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}k(x)) = 0$$

avec :

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

Donc $k'(x) = 0$ et k est une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$. La démonstration pour $x < 0$ est identique.
Finalement :

$$E_\lambda = \{C.f \mid C \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$f : x \mapsto |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

e) On a vu que 0 est valeur propre de Φ ainsi que tout $\lambda \neq 0$. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de Φ est $\mathbb{R}$.

3

PROBABILITES

Exercice 3-1

Soit f une fonction définie, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ telle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ f(x) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. On note F la fonction de répartition de X et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, Q(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x tf(t)dt$$

1. On étudie dans cette question le cas particulier où X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer F et Q.

b) Déterminer une application C de $[0, 1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.

c) Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

2. On revient maintenant au cas général.

a) Montrer que Q est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer une application C de $[0, 1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.
Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 C(x)dx = \int_0^{+\infty} Q(x)f(x)dx$.

Solution :

1. a) La fonction de répartition de la loi exponentielle est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Son espérance est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, et pour tout $x \geq 0$:

$$Q(x) = \lambda \int_0^x \lambda t.\mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x + 1)$$

qui est obtenu par une intégration par parties évidente.

b) Pour tout x positif, $Q'(x) = \lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda x}$ et $F'(x) = \lambda.\mathrm{e}^{-\lambda x}$ sont toutes deux positives. Ainsi Q et F réalisent chacune une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$, et $C = Q \circ F^{-1}$ est une bijection de [0,1[sur lui–même.
Il suffit de poser $C(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} Q \circ F^{-1}(x) = 1$, pour définir C comme bijection de $[0, 1]$ sur lui–même.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+, Q(x) = C\big(F(x)\big)$.

c) Par composition, C est une application strictement croissante sur $[0, 1]$. Un calcul immédiat donne :

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) \implies C(x) = x + (1 - x)\ln(1 - x)$$

On a alors $C'(x) = -\ln(1 - x)$ et $C'(x) = 1 \iff x = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. Enfin :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \iff F^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = x \iff x = \frac{1}{\lambda} = E(X)$$

2. a) Comme f est strictement positive, l'espérance $E(X)$ est strictement positive ce qui entra"ne que Q est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = f(x) > 0$ et $Q'(x) = \dfrac{xf(x)}{E(X)} > 0$. Ceci entraîne que F et Q sont deux bijections continues de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = 1$, il suffit de prendre $C = Q \circ F^{-1}$ et $C(1) = 1$, pour prouver que C est une bijection de $[0, 1]$.

Comme F' est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, F^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et par composition, C l'est également. De plus :

$$C'(x) = Q'\big(F^{-1}(x)\big)(F^{-1})'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x) f(F^{-1}(x))(F^{-1})'(x)$$

Or :

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{f(F^{-1}(x))}$$

donc :

$$C'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x)$$

Enfin :

$$C'(t) = 1 \iff F^{-1}(t) = E(X) \iff t = F(E(X))$$

et, par bijectivité de F :

$$F(x) = t = F(E(X)) \iff x = E(X)$$

b) Il vient :

$$\int_0^1 C(x)dx = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a Q(F^{-1}(x))dx$$

Posons $u = F^{-1}(x)$. Alors $x = F(u)$ et

$$\int_0^a Q(F^{-1}(x))dx = \int_0^{F^{-1}(a)} Q(u)f(u)du$$

Il reste à prendre la limite en a pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 3-2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $A_n = \{-n, -n + 1, \ldots, n-1, n\}$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de $|S|$ (valeur absolue de S).

La suite de l'exercice consiste à donner une expression intégrale de F. Pour cela, on notera N_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $x + y = k$.

3.a) Exprimer en fonction de N_k le coefficient de z^k dans le développement de :

$$\Big(\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots + z^n\Big)^2$$

b) On pose $z = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [-\pi; \pi[$.

Pour $t \neq 0$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z^k$ sous la forme $\dfrac{\sin(p_n t/2)}{\sin t/2}$, où p_n est un entier que l'on déterminera en fonction de n. Que trouve-t-on pour $t = 0$?

4. On admettra que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \ \int_a^b \mathrm{e}^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha}\left(\mathrm{e}^{i\alpha b} - \mathrm{e}^{i\alpha a}\right)$$

Montrer que :

$$\forall k \in A_n, \ N_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt}\Big) \mathrm{e}^{-ikt} dt$$

5. a) Pour $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, on appelle M_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $-k \leq x + y \leq k$.
Etablir la formule :

$$M_k = c \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2((2n+1)u)\sin(2k+1)u}{\sin^3 u} du$$

où c est une constante à déterminer.

b) En déduire une expression de $F(k)$ sous forme intégrale.

Solution :

1. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = A_n$, il vient immédiatement que $S(\Omega) = A_{2n}$. Soit $k \in A_{2n}$. On a :

$$(S = k) = \bigcup_{i=-n}^{i=n} (X = i, Y = k - i)$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient :

$$P(S = k) = P\Big(\bigcup_{i=-n}^{i=n} (X = i, Y = k - i)\Big) = \sum_{i=-n}^{i=n} P(X = i)P(Y = k - i)$$

Mais ceci n'est valable que si :

$$\begin{cases} -n \leq k - i \leq n \\ -n \leq i \leq n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k - n \leq i \leq k + n \\ -n \leq i \leq n \end{cases}$$

Ainsi :

- si $k \leq 0$, ceci est équivalent à $-n \leq i \leq k + n$ et :

$$P(S = k) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=-n}^{k+n} 1 = \frac{2n + k + 1}{(2n+1)^2}$$

- si $k > 0$, ceci est équivalent à $k - n \leq i \leq n$ et :

$$P(S = k) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=k-n}^{n} 1 = \frac{2n - k + 1}{(2n+1)^2}$$

Ce qui peut se résumer par, pour tout $k \in A_{2n}$:

$$P(S = k) = \frac{2n - |k| + 1}{(2n+1)^2}$$

2. On a $|S|(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ et :

$$P(|S| = 0) = P(S = 0) = \frac{1}{2n+1}$$

et pour tout $k \geq 1$:

$$P(|S| = k) = P(S = k) + P(S = -k) = \frac{2(2n - k + 1)}{(2n+1)^2}$$

Un simple calcul donne la fonction de répartition F de $|S|$:

$$F(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ \dfrac{1}{2n+1} & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{k(4n-k+1)}{(2n+1)^2} & \text{si } 1 \leq k \leq 2n \\ 1 & \text{si } k > 2n \end{cases}$$

3. a) Notons $S_n(z) = \left(\dfrac{1}{z^n} + \dfrac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \dfrac{1}{z} + 1 + z + \cdots + z^n\right)^2$. Alors :

$$S_n(z) = \sum_{(p,q)\in A_n^2} z^p z^q = \sum_{-2n\leq p+q\leq 2n} z^p z^q = \sum_{-2n\leq k\leq 2n} N_k z^k$$

b) Effectuons le calcul proposé :

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{it})^k = \mathrm{e}^{-int} \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{i(n+k)t}) = \mathrm{e}^{-int} \sum_{j=0}^{2n} (\mathrm{e}^{ijt}) \\ &= \mathrm{e}^{-int} \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)it} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \mathrm{e}^{-int}\mathrm{e}^{-it/2} \frac{\mathrm{e}^{(2n+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{it/2}(e^{it} - 1)} \\ &= \frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} \end{aligned}$$

Cette expression se prolonge par continuité pour $t = 0$ en $2n+1$.

4. Là encore, effectuons le calcul demandé.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=-2n}^{2n} N_j \mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=-2n}^{2n} N_j \mathrm{e}^{i(j-k)t}\Big) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(N_k + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-2n, j\neq k}^{2n} N_j \mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(N_k + \sum_{j=-2n, j\neq k}^{2n} \int_{-\pi}^{\pi} N_j \mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt} dt \\ &= N_k \end{aligned}$$

5. a) On sait que :

$$\begin{aligned} M_k = \sum_{j=-k}^{k} N_j &= \sum_{j=-k}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt}\Big)\mathrm{e}^{-ijt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-k}^{k} \Big(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt}\Big)\mathrm{e}^{-ijt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt}\Big) \sum_{j=-k}^{k} \mathrm{e}^{-ijt} dt \end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.a) :

$$\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt} = \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2$$

Donc en utilisant la parité de la fonction à intégrer, puis le changement de variables $u = t/2$, il vient :

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2 \Big(\frac{\sin(2k+1)t/2}{\sin t/2}\Big) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2 \Big(\frac{\sin(2k+1)t/2}{\sin t/2}\Big) dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2[(2n+1)t].\sin[(2k+1)t]}{\sin^3 t} dt \end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$:

$$\begin{aligned} F(k) &= P(|S| \leq k) = P(-k \leq S \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(-j \leq X+Y \leq j) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\Big(\sum_{r=-j}^{j} P(X+Y=r)\Big) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{r=-j}^{j} N_r \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2[(2n+1)t]\sin[(2r+1)t]}{\sin^3 t} dt \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j}\frac{\sin^2[(2n+1)t]\sin[(2r+1)t]}{\sin^3 t} dt \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2[(2n+1)t]}{\sin^3 t}\Big(\sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j}\sin[(2r+1)t]\Big) dt \end{aligned}$$

Exercice 3-3

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls, r est un entier naturel.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges).
Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1. On note B_i (resp N_i, R_i) l'événement : «le joueur tire une boule blanche (resp une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup.»

On note G_r l'événement : «le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges».

a) Calculer les probabilités $p(G_0)$ et $p(G_1)$.

b) Trouver une relation entre $p(G_r)$ et $p(G_{r-1})$.

c) Calculer $p(G_r)$.

2. Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.

a) Calculer les espérances $E(X_0)$, $E(X_1)$, $E(X_2)$.

b) Trouver une relation entre $p(X_r = k)$ et $p(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$), puis entre $E(X_r)$ et $E(X_{r-1})$.

c) En déduire $E(X_r)$.

Solution :

1. a) $\star$ Pour déterminer la probabilité de l'événement G_0, on sait que l'on est dans la situation où il n'y a pas de boules rouges dans l'urne. Donc le joueur gagne ou perd et :

$$P(G_0) = P(B_1) = \frac{b}{n+b}$$

$\star$ Il y a maintenant une boule rouge dans l'urne et l'événement G_1 s'écrit alors : $G_1 = B_1 \cup (R_1 \cap B_2)$. Soit :

$$P(G_1) = P(B_1)+P(R_1)P(B_2/R_1) = \frac{b}{n+b+1}+\frac{b}{(n+b+1)(n+b)} = \frac{b}{n+b}$$

b) On peut écrire $G_r = B_1 \cup (R_1 \cap G_{r-1})$ et :

$$P(G_r) = P(B_1) + P(R_1)P(G_r/R_1) = \frac{r}{n+b+r}P(G_{r-1}) + \frac{b}{n+b+r}$$

c) On sait que $P(G_0) = P(G_1) = \dfrac{b}{n+b}$. Supposons que $P(G_{r-1}) = \dfrac{b}{n+b}$.
Alors :

$$P(G_r) = \frac{r}{n+b+r}\frac{b}{n+b} + \frac{b}{n+b+r} = \frac{b}{n+b}$$

2. a) On a $X_0(\Omega) = \{1\}$ et $E(X_0) = 1$.
De même $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$, avec :

$$P(X_1 = 1) = P(\overline{R_1}) = \frac{n+b}{n+b+1}, P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{n+b+1}$$

et :

$$E(X_1) = \frac{n+b+2}{n+b+1}$$

Enfin $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, avec :

$$P(X_2 = 1) = \frac{n+b}{n+b+2}, P(X_2 = 2) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2(n+b)}{(n+b+1)(n+b+2)}$$

$$P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2)$$

et le calcul donne :

$$E(X_2) = \frac{n+b+3}{n+b+1}$$

b) L'événement $(X_r = k)$ avec $k \geq 2$ implique le tirage d'une boule rouge au premier coup. Donc :

$$\begin{aligned} P(X_r = k) &= P(R_1 \cap (X_r = k)) = P(R_1)P(X_r = k/R_1) \\ &= P(R_1)P(X_{r-1} = k-1) \end{aligned}$$

(lorsqu'on a retiré une boule rouge au premier tirage, les tirages suivants se font à partir d'une urne contenant $(r-1)$ boules rouges avec $(k-1)$ tirages à effectuer pour réaliser l'événement $(X_r = k)$). Donc, pour tout $r \geq 1, k \geq 2$:

$$P(X_r = k) = \frac{r}{n+b+r} P(X_{r-1} = k-1)$$

On remarque que $X_r(\Omega) = \{1, 2, \ldots, (r+1)\}$. Pour $r \geq 1$:

$$E(X_r) = P(X_r = 1) + \sum_{k=2}^{r+1} k.P(X_r = k)$$

et

$$\begin{aligned} E(X_r) &= \frac{n+b}{n+b+r} + \sum_{k=2}^{r+1} k \frac{r}{n+b+r} P(X_{r-1} = k-1) \\ &= \frac{n+b}{n+b+r} + \frac{r}{n+b+r} \sum_{k=2}^{r+1} ((k-1)+1) P(X_{r-1} = k-1) \\ &= \frac{n+b}{n+b+r} + \frac{r}{n+b+r} (E(X_{r-1}) + 1) \end{aligned}$$

c) Un raisonnement par récurrence montre que :

$$E(X_r) = \frac{r}{n+b+r} E(X_{r-1}) + 1, \text{ d'où } E(X_r) = \frac{n+b+r+1}{n+b+1}$$

Exercice 3-4

On suppose que l'on sait tirer des nombres aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire que l'on a une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Donner une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis suivant une loi de probabilité $(p_n)_n$ donnée, c'est-à-dire montrer comment définir une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = p_n$ (on pourra penser à définir la fonction de répartition de Y).

Solution :

Une méthode possible est la suivante :

On effectue un tirage aléatoire d'un nombre compris entre 0 et 1 ;
si ce nombre est inférieur à p_1, on prend $Y = 0$,
si ce nombre est dans l'intervalle $[p_1, p_1 + p_2[$, on prend $Y = 1$,
...
si ce nombre appartient à $[p_1 + \cdots + p_k, p_1 + \cdots + p_{k+1}[$, on prend $Y = k$,
enfin, si ce nombre vaut 1, on prend $Y = 1525$ (ou autre chose !)

On peut réécrire ceci en termes de fonction de répartition de Y. On peut d'ailleurs attendre d'un candidat qu'il critique la notion de test d'appartenance ...

Exercice 3-5

Dans cet exercice, on admettra les propriétés suivantes :

• soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes de sommes respectives U et V. La série de terme général $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ (série produit) est convergente et a pour somme $W = UV$.

• si de plus, la série de terme général $w_n t^n$ est convergente pour tout $t \in [0, 1[$, alors la fonction $t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$ est deux fois dérivable sur cet intervalle, les fonctions dérivées seconde et première étant obtenues en dérivant terme à terme la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$.

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie donnant pile (P) avec la probabilité α et face (F) avec la probabilité $\beta = 1 - \alpha$. ($\alpha \in]0, 1[$).

On s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs. On note S_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »

Chaque pile ne peut servir qu'à une seule série de deux piles consécutifs.

Ainsi, dans la succession F P F P P P P, seuls sont réalisés les événements S_5 et S_7 et non S_6.

On note G_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »

1. On pose $a_k = P(S_k)$ (probabilité de l'événement S_k). Soit P_k l'événement « on obtient pile au k-ième tirage. » En écrivant que $P_{k-1} \cap P_k \subset S_{k-1} \cup S_k$, montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\alpha^2 = a_k + \alpha\, a_{k-1}$.

En déduire la valeur de a_k pour tout $k \geqslant 2$.

2. On pose $b_k = P(G_k)$ (probabilité de l'événement G_k).

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} + b_k$.

3. Montrer que la série de terme général $a_k t^k$ est convergente pour tout t de $[0, 1[$ et calculer sa somme $F(t)$.

Montrer de même que la série de terme général $b_k t^k$ est convergente et exprimer sa somme H en fonction de F. Expliciter $H(t)$ pour $t \in [0,1[$

4. Montrer que H admet une limite lorsque t tend vers 1^-.

5. En admettant que $H(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H(t)$, que $H'(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H'(t)$ et que $H''(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H''(t)$, montrer que la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ permet de définir la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Montrer que X admet une espérance et une variance et donner les valeurs de ces moments

---

Solution :

1. Soit $k \geq 2$. Si P_{k-1} et P_k sont réalisés, alors soit S_{k-1} soit S_k est réalisé (cela dépend de ce qui s'est passé avant). Donc $P_{k-1} \cap P_k \subset S_{k-1} \cup S_k$, et :

$$(P_{k-1} \cap P_k) = (P_{k-1} \cap P_k \cap S_{k-1}) \cup (P_{k-1} \cap P_k \cap S_k)$$

et la réunion précédente est disjointe.

$\star$ On a $S_k \subset P_{k-1} \cap P_k$ et $P(P_{k-1} \cap P_k \cap S_k) = P(S_k) = a_k$.

$\star$ $S_{k-1} \subset P_{k-1}$ et P_k est indépendant de S_{k-1} (car S_{k-1} ne dépend que de ce qui s'est passé avant le k-ième lancer).
Donc :

$P(P_{k-1} \cap P_k \cap S_{k-1}) = P(P_k \cap S_{k-1}) = P(P_k).P(S_{k-1}) = \alpha.a_{k-1}$

Finalement :

$$\forall\, k \geq 2, \alpha^2 = P(P_{k-1} \cap P_k) = a_k + \alpha.a_{k-1}$$

La suite (a_k) est donc arithmético-géométrique, de point fixe $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha}$ et de premier terme nul. On obtient alors :

$$\forall\, k \geq 1, a_k = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\left(1 + (-1)^k \alpha^{k-1}\right)$$

2. $S_2 = P_1 \cap P_2 = G_2$, donc $a_2 = b_2 = a_1 b_1 + b_2$ (car $a_1 = 0$) ;
$S_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3 = G_3$, donc $a_3 = b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_3$ (car $a_1 = b_1 = 0$) ;
et, de façon générale, S_k est la réunion des événements incompatibles :

$\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$ et

$\ldots \cap S_i \cap \underbrace{\overline{S_{i+1}} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k}_{\text{a même probabilit que} G_{k-i}}$, pour i variant de 1 à $k-1$

D'où : $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} + b_k$.

3. $\star$ La série de terme général $a_k t^k$ est somme de deux séries géométriques convergentes, donc est elle-même convergente et :

$F(t) = \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha} \sum\limits_{k=2}^{\infty} t^k + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-\alpha t)^k = \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha} \cdot \dfrac{t^2}{1-t} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \dfrac{\alpha^2 t^2}{1+\alpha t}$

Soit : $\forall t \in [0,1[, F(t) = \dfrac{\alpha^2 t^2}{(1-t)(1+\alpha t)}$

$\star$ b_k est une probabilité, donc $0 \leq b_k t^k \leq t^k$ et, pour $t \in [0,1[$, la convergence de la série géométrique de raison t donne la convergence de la série proposée.

De plus : $a_k t^k = b_k t^k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (a_i t^i)(b_{k-i} t^{k-i})$. donc par le résultat admis (produit de Cauchy de ces deux séries), il vient :

$$\forall t \in [0,1[, F(t) = H(t) + F(t)H(t)$$

Soit : $\forall t \in [0,1[, H(t) = \dfrac{F(t)}{1+F(t)} = \dfrac{\alpha^2 t^2}{(1-t)(1-\alpha t) + \alpha^2 t^2}$

4. $\lim\limits_{t \to 1^-} H(t) = 1$.

5. Les résultats admis permettent de sommer les séries rencontrées et :

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, ce qui prouve que l'on est bien en présence d'une loi de probabilité.

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k.b_k = H'(1) = \dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}$.

$E\big(X(X-1)\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1).b_k = H''(1)$, ce qui donne :

$V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - [E(X)]^2$, soit tous calculs effectués :

$$V(X) = \frac{(1-\alpha)(1+3\alpha+\alpha^2)}{\alpha^4}$$

Exercice 3-6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \exp(t - e^t)$.

1. a) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

b) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et que le moment d'ordre k est donné par la formule $m_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(u))^k e^{-u} du$.

3. a) Soit u un réel srictement positif. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du.$$

En écrivant $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^k$ sous la forme $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^{k-1}$, vérifier la relation :

$$I_k = I_{k-1} + \int_0^n (u\ln(u))\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

c) On pose $J_k = (k+1)I_k$. Trouver une relation de récurrence entre J_k et J_{k-1}. (On pourra faire une intégration par parties).
En déduire J_k pour tout entier $k \leqslant n$, puis I_n.

d) On rappelle que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente. On appelle γ sa limite.
En admettant que $m_1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n$, montrer que $E(X) = -\gamma$

NB : La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.

Solution :

1. a) La fonction f est continue (et positive) sur $\mathbb{R}$.
$\star$ Au voisinage de $+\infty$: $t^2 f(t) = \exp(t - \mathrm{e}^t + 2\ln t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car le terme prépondérant « sous » l'exponentielle est le terme $-\mathrm{e}^t$, qui a pour limite $-\infty$.
Ainsi $f(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, on a $f(t) = \exp(t).\exp(-\mathrm{e}^t) \sim \exp(t)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\,dt$ converge, ce qui donne la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$.
Par disjonction des problèmes, on en conclut que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est positive et $F : x \mapsto -\exp(-\mathrm{e}^t)$ est une primitive de f, d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 0 - (-1) = 1$$

2. Sous réserve d'existence, $m_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,dt$.
La convergence de cette intégrale se traite exactement comme dans la première question, puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2.t^k f(t) = 0$ et $t^k f(t) \underset{-\infty)}{\sim} t^k.\mathrm{e}^t$, qui est d'intégrale convergente sur $]-\infty, 0]$.
Effectuons alors le changement de variable, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, défini par $u = \mathrm{e}^t$. On a alors $t = \ln u$, $\mathrm{e}^t\,dt = du$ et :

$$m_k = \int_0^{+\infty} (\ln u)^k.\mathrm{e}^{-u} du$$

3. a) Pour n assez grand $1 - \frac{u}{n} > 0$ et on peut écrire :

$$\ln\left[\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right] = n\ln(1 - \frac{u}{n}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n\,\frac{-u}{n} = -n$$

Par continuité de la fonction exponentielle, il vient alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-n}$$

b) En écrivant comme demandé, par linéarité de l'intégration :

$$I_k - I_{k-1} = \int_0^n -\frac{1}{n}\,(u\ln u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

c) On procède alors à une intégration par parties, en dérivant $u \mapsto u\ln u$:

$$I_k - I_{k-1} = \left[u\ln u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^k\right]_0^n - \frac{1}{k}\int_0^n \ln u\left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du - \frac{1}{k}\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du$$

C'est-à-dire :

$$I_k = I_{k-1} - \frac{1}{k}\,I_k + \frac{n}{k(k+1)}\left[\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n = I_{k-1} - \frac{1}{k}\,I_k - \frac{n}{k(k+1)}$$

Ce qui s'écrit :

$$J_k = J_{k-1} - \frac{n}{k+1}$$

Or $J_0 = \displaystyle\int_0^n \ln u\,du = n\ln n - n$, d'où : $J_n = -n\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + n\ln n - n$ et enfin :

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \ln n.$$

d) On a $I_n = -\dfrac{n}{n+1}\,u_n - \dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}\,\ln n$.

En admettant que $m_1 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, il vient par négligeabilité de $\ln n$ devant $n+1$:

$$m_1 = -\gamma$$

Exercice 3-7

1. Une urne contient des boules noires et des boules blanches dans les proportions p et $q = 1 - p$ respectivement, avec $p \in]0, 1[$.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise dans cette urne. Soit (n_1, n_2) un couple d'entiers tels que $n_1 + n_2 = n$.
Quelle est la probabilité d'obtenir n_1 boules blanches (et donc n_2 boules noires) ?

Soit $F(p)$ cette probabilité. Pour quelle(s) valeur(s) de p cette probabilité est-elle maximale ? On pourra poser $H(p) = \ln(F(p))$.

2. On effectue dans cette question n tirages succesifs d'une boule avec remise dans une urne contenant des boules indiscernables au toucher de k couleurs différentes.

Pour $i \in \{1, \cdots, k\}$, la proportion initiale de boules de couleur i dans l'urne est p_i où $p_i \in]0, 1[$. (avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$).

Soit $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ un k-uplet d'entiers strictement positifs dont la somme est égale à n.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir la répartition $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ en n tirages ? (c'est-à-dire n_1 boules de couleur 1, n_2 de couleur 2, etc.)
On notera $F(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ cette probabilité.

b) On cherche s'il existe des valeurs du k-uplet $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ pour lesquelles cette probabilité est maximale.
On pose $H = \ln(F)$. Déterminer un point candidat à l'optimisation de H sous la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

c) Si au moins l'un des nombres $p_1, \ldots, p_k$ est nul, on pose $F(p_1, \ldots, p_k) = 0$. Montrer que la fonction F ainsi prolongée sur $[0, 1]^k \cap \{\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\}$ admet un maximum et que ce maximum est obtenu en un point de l'ouvert $]0, 1[^k$.

d) Conclure.

Solution :

1. On a : $F(p) = C_n^{n_1} q^{n_1} p^{n_2}$ et $H(p) = K + n_2 \ln p + n_1 \ln(1 - p)$.
La fonction H est dérivable sur $]0, 1[$, avec $H'(p) = \dfrac{n_2}{p} - \dfrac{n_1}{1 - p}$.
Par conséquent H (donc F) est croissante sur $]0, \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}[$ et décroissante sur $]\dfrac{n_2}{n_1 + n_2}, 1[$.
On en déduit que la fonction F est maximale pour $p = \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}$.

2. a) Il s'agit de la loi multinomiale et donc :

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

b) La contrainte étant donnée, on peut exprimer, par exemple, p_k en fonction des autres proportions et :

$$\begin{aligned} H(p_1, \ldots, p_k) &= K(p_1, \ldots, p_{k-1}) \\ &= n_1 \ln p_1 + \cdots + n_{k-1} \ln p_{k-1} + n_k \ln(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1}) + C \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, k - 1\}$, $\dfrac{\partial K}{\partial p_i} = \dfrac{n_i}{p_i} - \dfrac{n_k}{1 - p_1 - \cdots - p_{k-1}} = \dfrac{n_i}{p_i} - \dfrac{n_k}{p_k}$.

Par conséquent $\dfrac{\partial K}{\partial p_i}(p_1, \ldots, p_{k-1}) = 0 \iff p_i = \dfrac{n_i}{n_k} p_k$.

Comme $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, il vient : $\dfrac{n - n_k}{n_k} p_k + p_k = 1$ et $p_k = \dfrac{n_k}{n}$, d'où $p_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Ainsi la fonction K possède un unique point critique : le point $(\frac{n_1}{n}, \ldots, \frac{n_{k-1}}{n})$.
Le point candidat à l'optimisation de H est donc le point $(\frac{n_1}{n}, \ldots, \frac{n_{k-1}}{n}, \frac{n_k}{n})$.

c) Le domaine $[0,1]^k$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^k$, de même que l'ensemble des points de la contrainte. Donc F (ou H), qui est continue, admet sur ce domaine un *minimum* et un *maximum*.
Si l'un des p_i est nul, F prend la valeur 0, donc le *maximum* est atteint en un point de $]0,1[^k$ et ce point est un point critique.

d) Le seul point candidat est donc **la** solution.

Exercice 3-8

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ la variable X_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\lambda$.

On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et f_n la densité de S_n nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. a) Déterminer f_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$

c) Que vaut l'espérance $E(S_n)$ de S_n ? Donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de S_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

b) On pose $T_n = \dfrac{S_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de T_n.

c) Etudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$.
Quelle est la limite en loi de la suite (T_n) ?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(T_n)$.

Solution :

1. a) On obtient, par convolution :

$$\begin{cases} \forall\, x < 0, f_2(x) = 0 \\ \forall\, x \geq 0, f_2(x) = \displaystyle\int_0^x 2\lambda^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{e}^{-2\lambda(x-t)}\, dt = 2\lambda.\mathrm{e}^{-2\lambda x}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \end{cases}$$

b) Démontrons, par récurrence, que f_n a bien la forme annoncée.

$\star$ Le résultat est banal pour $n = 1$, et on vient de la vérifier pour $n = 2$.

$\star$ Supposons le résultat acquis pour un certain entier $n \geq 1$, et passons au rang suivant.

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on obtient, par produit de convolution (car les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes) :

$\forall\, x \geq 0, f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x n\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}.(n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)(x-t)}\,dt$, soit :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{(n-1)\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}\,dt\\
&= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)^{n-1}\,dt\\
&= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\Big[\frac{1}{n\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)^n\Big]_0^x\\
&= (n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}(\mathrm{e}^{\lambda x}-1)^n = (n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^n
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat au rang $n+1$ et donne la conclusion, par le principe de récurrence.

c) Par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^n E(T_i) = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{\lambda i}$.

Comme il est connu que $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{i} \sim \ln n$, il vient $E(S_n) \sim \dfrac{1}{\lambda}\ln n$.

d) Par indépendance des variables T_i : $V(S_n) = \sum\limits_{i=1}^n V(T_i) = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{\lambda^2 i^2}$, et on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{i^2}$ est convergente, ce qui signifie que la variance de S_n a une limite lorsque n tend vers l'infini (cette limite vaut d'aileurs $\dfrac{\pi^2}{6\lambda^2}$).

2. a) On a $F_n(x) = 0$, pour $x < 0$, et pour $x \geq 0$:

$F_n(x) = \displaystyle\int_0^x n\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}\,dt = \Big[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^n\Big]_0^x$, *i.e.* :

$$\forall\, x \geq 0, F_n(x) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^n$$

b) $\dfrac{S_n}{n}$ est encore à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour $x \geq 0$:

$$H_n(x) = P(S_n \leq nx) = F_n(nx) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda nx})^n$$

c) Pour $x \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda nx} = 0$, donc $n\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda nx}) \sim -n\mathrm{e}^{-\lambda nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci prouve, par continuité de la fonction exponentielle, que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 1$, tandis que pour $x < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 0$.

Par conséquent, la fonction H_n converge point par point, vers la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0. Ce qui veut dire que (T_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

d) $E(T_n) = \dfrac{1}{n}E(S_n) \sim \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$V(T_n) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ce sont bien l'espérance et la variance de la variable certaine égale à 0.

Exercice 3-9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\mathcal{R} \;:\; \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\; ku_{k+1} - nu_k + (n-k)u_{k-1} = 0$$

1.a) Vérifier que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) On considère l'application Φ de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute suite $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1). Montrer que Φ est linéaire et injective.

c) Montrer que toute suite de E est constante à partir du rang n.

d) Vérifier que tout suite constante est élément de E.

e) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*,\; a_i = \sum_{k=0}^{i-1} C_{n-1}^k$, avec la convention $C_n^k = 0$ pour $k > n$.
Montrer que (a_n) est élément de E. En déduire la dimension de E et la forme générale des suites de E.

2. Un point P se déplace sur un axe gradué de 0 jusqu'à n par unité de temps et par sauts de longueur 1.
Ses déplacements sont déterminés par les règles suivantes :
- si à l'instant $k \geq 1$, P se trouve en 0 ou en n, il y reste définitivement.
- si à l'instant k, il se trouve en i pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, il se trouvera au temps $k+1$ en $i+1$ avec la probabilité $\dfrac{i}{n}$ ou bien en $i-1$ avec la probabilité $\dfrac{n-i}{n}$.
- le point se trouve en $t = 0$ en 0 et il se trouve au temps $t = 1$ en 1.

On cherche à déterminer la probabilité que le point arrive en n.

On appelle G l'événement : « P arrive en n », et on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse du point au temps k.

Pour $i \in \{0, \cdots, n\}$, on pose $p_i^k = p(G \mid X_k = i)$ (probabilité que le point arrive en n sachant qu'au temps k il se trouve en i).
On admettra que l'événement « le point arrive en n à un instant quelconque » est indépendant du moment où il se trouve en i, c'est-à-dire que p_i^k ne dépend pas de k. On pose alors $p_i^k = p_i$.

Déterminer la probabilité qu'il arrive en n.
(On raisonnera à partir de la suite (p_i) définie par ce qui précède et $p_k = 1$ pour $k \geqslant n$).

Solution :

1. a) On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réeles : il est non vide et stable par addition et multiplication par un scalaire.

b) L'application Φ est manifestement linéaire. Elle est injective car son noyau est réduit au vecteur nul. En effet, si $u_0 = u_1 = 0$, une récurrence immédiate montre que $u_n = 0, \forall n \geq 2$.

c) Lorsque $k = n$, on a : $nu_{n+1} - nu_n = 0$. Ainsi $u_{n+1} = u_n$.
Supposons que $u_{n+i} = u_{n+i-1}$, alors :

$$(n+i)u_{n+i+1} = nu_{n+i} + iu_{n+i-1} = (n+i)u_{n+i} \Rightarrow u_{n+i+1} = u_{n+i}$$

d) Si la suite (u_n) est constante égale à c, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée (vérification immédiate).

e) Comme $a_1 = 1, a_2 = n$, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée pour $k = 1$.
Pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$ka_{k+1} - na_k + (n-k)a_{k-1} = k(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) - nC_{n-1}^{k-1} + 0$$

et

$$ka_{k+1} - na_k + (n-k)a_{k-1} = kC_n^k - kC_n^k = 0$$

Pour $k > n$, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée, puisque la suite (a_n) vérifie la relation $a_k = a_n = 2^{n-1}$.

L'application Φ est injective. Donc $\dim(E) = \dim \operatorname{Im}(\Phi) \leq 2$. mais, on vient d'exhiber deux éléments indépendants de E : la suite constante et la suite (a_n). Donc $\dim(E) \geq 2$ et par suite $\dim(E) = 2$.
Tout élément de (a_i) de E est de la forme :

$$a_i = \alpha + \beta \sum_{k=0}^{i-1} C_{n-1}^k, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2. On se place à l'instant k. Au temps k, le point peut soit avancer, soit reculer d'une case, événements que l'on note A_k et R_k.
Pour $i \in \{2, \cdots, n-1\}$,

$$P_{X_k=i}(G) = P_{X_k=i}(G/A_k)P_{X_k=i}(A_k) + P_{X_k=i}(G/R_k)P_{X_k=i}(R_k)$$

d'où

$$p_i = \frac{i}{n}p_{i+1} + \frac{n-i}{n}p_{i-1}$$

La suite (p_i) vérifie la relation $\mathcal{R}$ pour $i \in \{2, \cdots, n-2\}$. De plus $p_1 = \dfrac{2}{n}p_2$, et $p_0 = 0$. La relation est donc vérifiée pour $i = 1$.
De même $p_{n+1} = p_n = 1$. La relation est donc vraie pour $i = n$.
La suite (p_i) est élément de E.
Il existe α et β réels tels que $\forall\ i \in \mathbb{N},\ p_i = \alpha + \beta a_i$.
Mais $p_0 = 0$ donc $\alpha = 0$ et $p_n = 1$ impliquent que $\beta a_n = 1$, avec $a_n = 2^{n-1}$.

On obtient finalement :

$$p_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 3-10

1. Vérifier que les polynômes $1,\ X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3(X)$. Ecrire la décomposition des polynômes $X^2,\ X^3$ sur cette base.

2. Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note m_i le moment d'ordre i de cette variable.
Déterminer m_i pour $i = 1,\ 2,\ 3$.

3. Soient $T_1,\ T_2, \cdots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T. On cherche à estimer le paramètre inconnu λ.

a) Quelle est la loi suivie par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$? Montrer que $M_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ est un estimateur sans biais de λ.

b) Préciser $E(T_k^2),\ E(M_n^2)$ et $E(T_k M_n)$ pour k dans $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $V_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[T_i - M_n]^2$.

Est-ce que V_n est un estimateur sans biais de λ ?

Proposer un estimateur W_n sans biais de λ obtenu à l'aide de V_n.

4. On montrerait à l'aide des résultats des premières questions que la variance de W_n est égale à $\displaystyle\frac{n}{(n-1)^2}\lambda(1+2\lambda)$.

Entre M_n et W_n quel est le meilleur estimateur, c'est-à-dire celui de variance minimum ?

Solution :

1. Un calcul immédiat donne :

$$X^2 = X(X-1) + X, \quad X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$$

2. Par prépondérance classique, chacune des séries suivantes est convergente, et :

$m_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$ (résultat du cours)

$m_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda$ (même remarque)

$$m_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\frac{\lambda^k}{k!} + 3k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

3. a) D'après la stabilité des sommes de lois de Poisson, $\sum_{k=1}^{n} T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.
D'où $E\big(\sum_{k=1}^{n} T_k\big) = n\lambda$ et $E(M_n) = \lambda$. Ainsi M_n est un estimateur sans biais de λ.

b) D'après la question précédente :

$$E(T_k^2) = \lambda^2 + \lambda \text{ et } E(M_n^2) = \frac{1}{n^2}(n^2\lambda^2 + n\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{n}\lambda$$

$$E(T_k M_n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k} E(T_i T_k) + \frac{1}{n} E(T_k^2)$$

Les variables aléatoires T_k sont indépendantes, l'espérance du produit est égal au produit des espérances.

$$E(T_k M_n) = \frac{n-1}{n}\lambda^2 + \frac{1}{n}(\lambda^2 + \lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{n}\lambda$$

et

$$E(V_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [E(T_k^2) - 2E(T_k M_n) + E(M_n^2)] = \frac{n-1}{n}\lambda$$

Ainsi, V_n n'est pas un estimateur sans biais de λ. On choisira comme estimateur sans biais $W_n = \dfrac{n}{n-1} V_n = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} [T_k - M_n]^2$.

4. Un calcul donne :

$$V(M_n) = E(M_n^2) - (E(M_n))^2 = \frac{\lambda}{n}$$

et on a :

$$\frac{V(M_n)}{V(W_n)} = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{1+2\lambda} < 1$$

On préférera donc (au sens du minimum de la variance) M_n à W_n.

Exercice 3-11

On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = (1-p)$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième, l'autre.

On définit de même la longueur L_2 de la 2-ieme série.

1. Déterminer la loi de L_1 et son espérance. Pour quelle valeur de p, $E(L_1)$ est-elle minimum ?

2. Donner la loi du couple (L_1, L_2).

3. Déterminer la loi de L_2, son espérance.

4. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
On admet l'existence de la covariance de L_1 et L_2. Son signe est-il prévisible ?

Solution :

1. $\star$ $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 1$, on peut écrire, avec des notations évidentes :
$$(L_1 = n) = (P_1 P_2 \ldots P_n F_{n+1}) \cup (F_1 F_2 \ldots F_n P_{n+1})$$
D'où, par disjonction, puis indépendance des résultats des différents lancers :
$$\forall\, n \geq 1, P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$$
$\star$ La convergence des séries rencontrées étant patente :
$$E(L_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P(L_1 = n) = qp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\Big)$$
Soit : $E(L_1) = qp\Big(\dfrac{1}{(1-p)^2} + \dfrac{1}{(1-q)^2}\Big) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p(1-p)} - 2.$

$\star$ Or $p \mapsto p(1-p)$ est maximale pour $p = \dfrac{1}{2}$, le *maximum* valant $\dfrac{1}{4}$.
Donc l'espérance de L_1 est minimale pour $p = \dfrac{1}{2}$, le *minimum* valant 2.

2. L_2 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $[L_1 = n) \cap (L_2 = k)]$ n'est autre que :
$$(P_1 \ldots P_n F_{n+1} \ldots F_{n+k} P_{n+k+1}) \cup (F_1 \ldots F_n P_{n+1} \ldots P_{n+k} F_{n+k+1})$$
D'où :
$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, P[L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k$$
3. $\star$ Par sommation, on obtient la loi marginale de L_2 :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P[L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = p^2 q^k \frac{1}{1-p} + q^2 p^k \frac{1}{1-q}$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$
$\star$ Ainsi, les séries étant convergentes :
$$E(L_2) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} k.q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{\infty} k.p^{k-1} = p^2 \frac{1}{p^2} + q^2 \frac{1}{q^2} = 2.$$
4. $\star$ Déjà $P[(L_1 = 1) \cap (L_2 = 1)] = pq(p+q) = pq$, tandis que $P(L_1 = 1) = 2pq$ et $P(L_2 = 1) = p^2 + q^2$.
Ainsi, $(L_1 = 1)$ et $(L_2 = 1)$ sont indépendants si et seulement si $2(p^2 + q^2) = 1$, soit, si et seulement si $4p^2 - 4p + 1 = 0$, ce qui donne $p = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, on a : $P[(L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = \dfrac{1}{2^{n+k}}$, tandis que $P(L_1 = n) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P(L_2 = k) = \dfrac{1}{2^k}$, ce qui prouve que L_1 et L_2 sont indépendantes.
Finalement L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Si $p = \dfrac{1}{2}$ la covariance est nulle, tandis que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, une grande valeur de L_1 signifie que l'on a très probablement commencé par le côté le plus probable, donc la deuxième sera probablement assez courte et réciproquement.
On peut donc prévoir que le coefficient de corrélation sera négatif, donc la covariance négative. Le calcul confirmerait...

Exercice 3-12

Soit X une variable aléatoire admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

1. a) Montrer que sa fonction de répartition F_X définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.

On note F_X^{-1} sa réciproque. Soit alors U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

b) Montrer que $F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

c) Déterminer F_X^{-1} quand X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{b}$, avec $b > 0$.

2. En Turbo-Pascal, la fonction **random** simule une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Par exemple, si **T** est une variable de type **real**, l'instruction **T := random** affecte à **T** un réel de [0,1[suivant la loi uniforme sur cet intervalle.

On admettra que les appels successifs à **random** sont indépendants.

Définir en Pascal une fonction **Gamma (b : real ; n : integer)** simulant la loi Gamma de paramètres b et n ($b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$)

3. On considère l'instruction **T := (Gamma(1 , n) - n) / sqrt (n)** où **T** est une variable de type **real**.
Quelle est son effet lorsque n est « grand » ?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto F_X(x)$ est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$. Elle définit une bijection entre ces deux ensembles.

b) On sait que $F_X^{-1}(U)(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$:

$$P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

Ainsi $F_X^{-1}(U)$ et X ont la même fonction de répartition sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$. Elle suivent donc la même loi.

c) Si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$, alors, pour tout $x \geq 0$:
$F_X(x) = 1 - e^{-x/b}$ et donc, pour tout $u \in [0, 1[$:

$$F_X^{-1}(u) = -b\ln(1-u)$$

2. La loi Gamma $\Gamma(b, n)$ est la loi de la somme de n variables indépendantes suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$. D'après la question précédente, on pourra simuler une telle loi en additionnant n fois $-b\ln(1-u)$; donc :

```
Function gamma ( b : real ; n : integer)
var k : integer ;
s : real ;
begin
s := 0 ;
For k := 1 to n do s := s-b*ln(1-random) ;
Gamma := s
end ;
```

3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$. Le théorème de la limite centrée nous assure que si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors $\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Ainsi l'instruction T := (Gamma(1 , n) - n) / sqrt (n) où T est une variable de type real affecte à T, pour n grand, un nombre réel suivant quasiment la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 3-13

Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (ak + 1)\mathrm{e}^{-k} ?$$

Solution :

Si le problème a une solution, alors $P(X = 0) = 1$. Ceci impose donc d'avoir $P(X = 1) = 0$, d'où $a = -1$ et alors $P(X = 2)$ serait strictement négatif !
La réponse est donc NON.

Exercice 3-14

Soient A, B, et C trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant une même loi binomiale de paramètres n et p.

Soit M la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la matrice $M(\omega)$ définie par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

2. Quelle est la probabilité que M soit nilpotente ? (une matrice X est dite nilpotente s'il existe $p > 0$ tel que $X^p = 0$.)

3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

4. Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

5. Donner la loi, l'espérance et la variance de la plus grande des valeurs propres.

6. On suppose $p = 1/2$.

a) Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de M soit égale à la somme des deux autres ?

b) Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers pairs ?

Solution :

1. Les trois variables aléatoires A, B, C suivent la même loi. Ainsi les trois colonnes de la matrice M sont identiques et la matrice M n'est jamais inversible. Donc :

$$P(\text{M inversible}) = 0$$

2. Notons $a = A(\omega), b = B(\omega), c = C(\omega)$. Un calcul immédiat donne :

$$M^2 = (a+b+c)M, \text{ et } \forall n \geq 2,\ M^n = (a+b+c)^{n-1}M$$

Ainsi M est nilpotente si et seulement si $a + b + c = 0$ (ceci comprend les cas où $M = 0$). Mais, par indépendance, $A + B + C$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3n, p)$; donc :

$$P(\text{M nilpotente}) = (1-p)^{3n}$$

3. M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$ et par le calcul précédent si et seulement si $a + b + c = 1$ ou bien $M = 0$. Ces deux événements étant incompatibles, il vient :

$$\begin{aligned} P(\text{M est une projection}) &= C_{3n}^1 p(1-p)^{3n-1} + (1-p)^{3n} \\ &= (1-p)^{3n-1}[(3n-1)p + 1] \end{aligned}$$

4. Si M n'est pas la matrice nulle, M est de rang 1. Donc :
- $a+b+c=0 \Rightarrow M=0$ et M admet une seule valeur propre 0.
- $a+b+c \neq 0$, alors M est de rang 1. Son noyau est de dimension 2 ; ainsi 0 est valeur propre de M, le sous–espace propre associé étant de dimension 2, et la valeur propre restante est $a+b+c$ (le sous–espace propre associé étant l'image de M). Ainsi, dans ce cas, M admet deux valeurs propres.

Si l'on appelle N la variable aléatoire égale au nombre de valeurs propres de M, alors $N(\Omega)=\{1,2\}$ et :

$$P(N=1)=(1-p)^{3n}, \quad P(N=2)=1-(1-p)^{3n}$$

Un calcul immédait donne $E(N)=2-(1-p)^{3n}$.
Enfin, la matrice M est toujours diagonalisable, car, soit $M=0$, auquel cas elle est diagonale, soit $M \neq 0$ et les deux sous-espaces propres de M sont supplémentaires.

5. Si X est la variable aléatoire représentant la plus grande valeur propre de M, alors $X(\omega)=a+b+c$ et X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3n,p)$. Ainsi :

$$E(X)=3np, V(X)=3np(1-p).$$

6. a) Posons :

$$A=(a=b+c),\ B=(b=a+c),\ C=(c=a+b)$$

L'événement recherché est $A \cup B \cup C$. On a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A) \\ +P(A\cap B\cap C)$$

Or :

$$P(A\cap B\cap C)=P(a+b+c=0)=(1-p)^{3n}$$
$$P(A\cap B)=P(a=b\cap c=0)=P(a=b)P(c=0)$$

Mais :

$$P(a=b)=\sum_{k=0}^{n}P(a=k\cap b=k)=\sum_{k=0}^{n}P(a=k)P(b=k)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^n$$

Enfin $A=(a=b+c)$. Mais $b+c$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$ et a est indépendante de $b+c$. Donc :

$$p(A)=\sum_{k=0}^{n}P(a=k\cap(b+c=k))=\sum_{k=0}^{n}P(a=k)P(b+c=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}C_{2n}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_{2n}^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}C_{3n}^n$$

Soit finalement :

$$P(A\cup B\cup C)=3\frac{C_{3n}^{n}}{8^{n}}-3\frac{C_{2n}^{n}}{8^{n}}+\frac{1}{8^{n}}$$

b) Soit D l'événement «toutes les valeurs propres de M sont paires». Cet événement est égal à $(a+b+c$ pair$)$. Donc :

$$\begin{aligned}P(D)&=\sum_{k\geq 0}P(a+b+c=2k)\\&=\sum_{k\geq 0}C_{3n}^{2k}p^{2k}(1-p)^{3n-2k}\\&=\frac{1+(1-2p)^{3n}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3-15

On considère 6 dés, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de manière à ce que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres appara"t avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

2. On effectue n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins $1/2$?

3. On effectue n tirages successifs sans remise d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins $1/2$?

Solution :

1. On a $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$ et pour tout $k\in X(\Omega), P(X=k)=\lambda k$. En sommant ces probabilités, on obtient $\lambda=\dfrac{1}{21}$ et :

$$E(X)=\frac{13}{3}, V(X)=\frac{20}{9}.$$

2. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on obtient le dé truqué. N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/6)$ et pour tout les entiers k tels que $0\leq k\leq n$:

$$P(N=k)=C_{n}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

3. Ici, nécessairement, $n \leq 6$. On est en situation d'équiprobabilité. Donc :
• si $n \leq 5, N(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$P(N = 0) = \frac{A_n^5}{A_n^6} = 1 - \frac{n}{6}, \quad P(N = 1) = \frac{n}{6}$$

• si $n = 6, N(\Omega) = \{1\}$.
Enfin :

$$P(A) = P(N = 1) \Rightarrow (P(A) \geq \frac{1}{2}) \iff \frac{n}{6} \geq \frac{1}{2} \iff n \geq 3$$

Exercice 3-16

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité qu'on nommera X, dont on donnera une densité et l'espérance si elle existe.

2. Pour n entier naturel non nul, on note Y_n la variable aléatoire définie comme la partie entière de nX.
On rappelle que si x est un nombre réel, la partie entière de x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Déterminer son espérance si elle existe.

Solution :

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$F'(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^{-x} \text{ pour } x > 0 \text{ et } F'(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^x \text{ pour } x < 0$$

Ainsi F' est positive et F est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme il est clair que $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, la fonction F possède toutes les propriétés requises pour être une fonction de répartition et une densité associée est, par exemple :

$$f(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^{-x} \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } f = \frac{\ln 5}{2} 5^x \text{ pour } x \leq 0$$

La densité f est paire et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$ est convergente (négligeabilité classique), donc X possède une espérance et $E(X) = 0$.

2. a) $Y_n(\Omega) = \mathbb{Z}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(Y_n = k) = P(k \leq nX < k+1)$, *i.e.* :

$$P(Y_n = k) = F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n})$$

Soit, en revenant à la définition de F :

Si $k \in \mathbb{N}, P(Y_n = k) = \dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{2} \dfrac{1}{(\sqrt[n]{5})^{k+1}}$

Si $k \in \mathbb{Z}^{-*}, P(Y_n = k) = \dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{2} (\sqrt[n]{5})^{k}$

b) On sait que pour $|x| < 1$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, ainsi les séries rencontrées convergent et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k.P(Y_n = k) = \frac{\sqrt[n]{5}-1}{2\sqrt[n]{5}} \sum_{k=0}^{+\infty} k\big(\frac{1}{\sqrt[n]{5}}\big)^k = \frac{1}{2(\sqrt[n]{5}-1)}$$

De la même façon :

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} k.P(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k.P(Y_n = -k) = \frac{\sqrt[n]{5}}{2(\sqrt[n]{5}-1)}$$

Ainsi Y_n admet une espérance, et $E(Y_n) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3-17

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes, toutes de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On note f une densité de ces variables aléatoires et F leur fonction de répartition.

1. a) Montrer qu'une densité g de la variable $X_1 - X_0$ est donnée par :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt.$$

b) Calculer $P(X_0 < X_1)$ et $P(X_1 < X_0)$.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour toute permutation σ de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n)$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)} \leq x) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $P(E_n)$ où E_n est l'événement :

« Il existe deux indices distincts i, j de $[\![0,n]\!]$ tels que $X_i = X_j$ »

b) Montrer que $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

c) Calculer $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$ en fonction de $F(x)$.

3. Si $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega)$ le plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $X_n(\omega) > X_0(\omega)$ si un tel indice existe et $T(\omega) = 0$ sinon.

Calculer $P(T = n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. La variable T admet-elle une espérance ?

4. On pose pour tout $\omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

a) Calculer pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $P([T = n] \cap [Y \leq x])$.

b) Comment en déduirait-on la fonction de répartition de Y ?

Solution :

1. a) X_0 et $-X_1$ sont indépendantes, de densités respectives $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(-t)$. Donc $X_0 - X_1$ admet pour densité :

$$g : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt$$

On trouverait évidemment le même résultat pour la variable $X_1 - X_0$.

b) $P(X_0 < X_1) = P(X_0 - X_1 < 0) = P(X_1 - X_0 < 0) = P(X_1 < X_0)$.

La variable aléatoire $X_1 - X_0$ étant aussi une variable aléatoire à densité, on a : $P(X_1 = X_0) = 0$, et donc : $1 = P(X_1 < X_0) + P(X_0 < X_1)$. Par conséquent :

$$P(X_1 < X_0) = P(X_0 < X_1) = \frac{1}{2}$$

2. a) $P(E_n) = P(\bigcup\limits_{i<j} (X_i = X_j))$.

Une récurrence élémentaire sur k montre que $P(\bigcup\limits_{1 \leq i \leq k} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} P(A_i)$, donc :

$P(E_n) \leq \sum\limits_{i<j} P(X_i = X_j) = 0$ (car $X_i - X_j$ est une variable a densité). Soit :

$$P(E_n) = 0$$

b) L'univers Ω est la réunion disjointe des $(n+1)!$ événements :

$$X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}, \text{ pour } \sigma \text{ décrivant } S([\![0, n]\!])$$

et de l'événement E_n. Or E_n est quasi-impossible et, par symétrie, tous les événements précédents ont la même probabilité. Ainsi :

$$P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n) = \frac{1}{(n+1)!}$$

c) De même notons $B_\sigma = (X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)} \leq x)$.

Tous les événements B_σ, σ décrivant $S([\![0, n]\!])$, ont la même probabilité (toujours par symétrie), sont deux à deux incompatibles et leur réunion diffère de l'événement $B = (X_0 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)$ d'un événement quasi-impossible.

Comme $P(B) = [F(x)]^{n+1}$, il vient :

$$P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x) = \frac{1}{(n+1)!}[F(x)]^{n+1}$$

3. $(T = n) = (X_1 \leq X_0) \cap (X_2 \leq X_0) \cap \ldots \cap (X_{n-1} \leq X_0) \cap (X_n > X_0)$.
Comme l'égalité de deux variables aléatoires X_i et X_j, avec $i \neq j$, est quasi-impossible, on peut donc écrire :

$$P(T = n) = P\big(\bigcup [X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0 < X_n]\big)$$

La réunion étant étendue à toutes les permutations de $[\![1, n-1]\!]$.
Comme il y a $(n+1)!$ façons de permuter les $n+1$ variables en présence, toutes équiprobables, on obtient :

$$P(T = n) = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

On peut remarquer que $P(T = n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(T = n) = 1$ et l'événement $(T = 0)$ est quasi-impossible.

Comme $n.P(T = n) \sim \dfrac{1}{n}$, la variable T n'a pas d'espérance.

4. a) $(T = 0)$ étant quasi-impossible, $P[(T = 0) \cap (Y \leq x)] = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T = n) \cap (Y \leq x)$ a même probabilité que l'événement

$$\bigcup [X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0 < X_n \leq x]$$

la réunion étant étendue à toutes les permutations de $[\![1, n-1]\!]$.
D'où : $P[(T = n) \cap (Y \leq x)] = (n-1)!\dfrac{[F(x)]^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{[F(x)]^{n+1}}{n(n+1)}$

b) On en déduirait $P(Y \leq x)$ par la relation $P(Y \leq x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n(n+1)}$, avec $t = F(x)$.
Pour achever le calcul, il faudrait savoir que pour $|t| < 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ et séparer la série en deux en décomposant $\dfrac{1}{n(n+1)}$ ...

Exercice 3-18

Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k(X)$ désigne l'ensemble des parties de X à k éléments.
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et E_n désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a \leq n$ et $1 \leq b \leq n$. On tire au hasard une partie A dans $\mathcal{P}_a(E_n)$ et une partie B dans $\mathcal{P}_b(E_n)$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cap B$ et Y la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cup B$.

a) Dans le cas particulier où $n = 7, a = 4, b = 2$, déterminer la loi de X.

b) Dans le cas général, calculer l'espérance des variables X et Y.

c) Sous la contrainte $a + b = n$, quels sont les couples (a, b) pour lesquels l'espérance de X est maximale ?

2. On tire au hasard une partie C dans $\mathcal{P}(E_n)$, puis on tire au hasard une partie D dans $\mathcal{P}(C)$. On note Z la variable aléatoire égale au cardinal de D. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Solution :

1. Dans cette question $\Omega = \mathcal{P}_a(E_n) \times \mathcal{P}_b(E_n)$, de cardinal $C_n^a C_n^b$, et muni de la probabilité uniforme.

a) $\star$ $(X = 0)$ est réalisé si les parties A et B sont disjointes. Pour réaliser cet événement, on peut choisir A de C_7^4 façons, et une fois A choisie, B est une partie à 2 éléments de $E_7 \setminus A$, qui est de cardinal 3. Il existe donc C_3^2 façons de choisir B et : $P(X = 0) = \dfrac{C_7^4 C_3^2}{C_7^4 C_7^2} = \dfrac{1}{7}$.

De même pour réaliser $(X = 2)$, il faut que B soit incluse dans A. La partie A est toujours choisie de C_7^4 façons et, une fois A choisie, on peut alors choisir B de C_4^2 façons, ce qui donne : $P(X = 2) = \dfrac{C_7^4 C_4^2}{C_7^4 C_7^2} = \dfrac{2}{7}$.

Comme $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, il vient alors $P(X = 1) = \dfrac{4}{7}$.

b) $\star$ Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si $i \in A \cap B$ et la valeur 0 sinon.

On a : $P(X_i = 1) = \dfrac{C_{n-1}^{a-1} C_{n-1}^{b-1}}{C_n^a C_n^b} = \dfrac{ab}{n^2}$ (car une fois le nombre i mis dans les parties A et B, il reste à compléter la partie A en prenant $a - 1$ éléments dans $E_n \setminus \{i\}$, idem pour B).

La variable X_i étant de Bernoulli, il vient $E(X_i) = \dfrac{ab}{n^2}$ et puisque $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, on obtient :

$$E(X) = \frac{ab}{n}$$

$\star$ On a $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$, *i.e.* $Y = a + b - X$, et :

$$E(Y) = a + b - \frac{ab}{n}$$

c) Sous la contrainte $a + b = n$, on a : $E(X) = \dfrac{a(n - a)}{n}$.

Une étude rapide de la fonction $x \mapsto x(n - x)$ montre que cette fonction est croissante sur $[0, \frac{n}{2}]$, décroissante sur $[\frac{n}{2}, n]$ et sa représentation graphique est symétrique par rapport à la verticale d'abscisse $\frac{n}{2}$.

Ainsi, si n est pair $E(X)$ est maximale pour $a = \frac{n}{2}$ (et donc $b = \frac{n}{2}$), tandis que si n est impair $E(X)$ est maximale pour $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = \frac{n+1}{2}$.

2. Notons T la variable aléatoire égale au cardinal de C. Les variables T et Z prennent leurs valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a en appliquant la formule des probabilités totales :

$P(Z=k) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(Z=k/T=i).P(T=i) = \sum\limits_{i=k}^{n} P(Z=k/T=i).P(T=i)$

(en effet, on a $\operatorname{card} D \leq \operatorname{card} C$)

L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique et donc :

$$P(Z=k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{C_i^k}{2^i}.\frac{C_n^i}{2^n}$$

Or : $C_i^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{n-i}$ et $P(Z=k) = \dfrac{C_n^k}{2^i} \sum\limits_{i=0}^{n-k} \dfrac{1}{2^{i+k}} C_{n-k}^i = \dfrac{C_n^k}{2^{n+k}} (1+\frac{1}{2})^{n-k}$

Ainsi : $\forall\, k \in [\![0,n]\!], P(Z=k) = C_n^k \big(\frac{1}{4})\big)^k \big(\frac{3}{4}\big)^{n-k}$

Par conséquent $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/4)$ et $E(Z) = \frac{n}{4}$.

Exercice 3-19

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant m jetons blancs numérotés de 1 à m et n jetons noirs numérotés de 1 à n.

1. On tire successivement et sans remise les $m+n$ jetons de l'urne. On appelle X le rang d'apparition du premier jeton portant le numéro 1 et Y le rang d'apparition du premier jeton blanc.

a) Déterminer la plus grande valeur notée α (respectivement β) prise par la variable aléatoire X (respectivement Y).

b) Calculer $P([X=\alpha] \cap [Y=\beta])$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et n pour que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes (on distinguera les cas $m \geq 2$ et $m=1$, puis pour $m=1$, on distinguera selon que $n \geq 2$ ou $n=1$).

2. On effectue maintenant une succession de tirages avec remise dans cette urne. On note encore X le rang d'apparition du premier jeton numéroté 1 et Y celui du premier jeton blanc. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que X et Y soient indépendantes.

Solution :

1. a) L'urne contient $m+n$ jetons, dont deux jetons portant le numéro 1, donc $\alpha = m+n-1$. De même, comme l'urne contient n jetons noirs, $\beta = n+1$.

b) $\star$ Si $m \geq 2$, pour réaliser $(Y = \beta)$, on doit tirer d'abord tous les jetons noirs, donc on réalise *ipso facto* $(X \leq n)$.

Comme $\alpha = m + n - 1 > n$, on ne peut donc pas réaliser simultanément $(Y = \beta)$ et $(X = \alpha)$. Par suite :

$$m \geq 2 \implies P([X = \alpha] \cap [Y = \beta]) = 0$$

$\star$ En revanche, si $m = 1$, $[X = \alpha] \cap [Y = \beta] = [X = n] \cap [Y = n + 1]$ et cet événement se réalise si l'on tire d'abord tous les jetons noirs portant un numéro ≥ 2 (ce qui peut se faire de $(n - 1)!$) façons), puis le jeton noir portant le numéro 1 et enfin le jeton blanc.

Les $(n + 1)!$ façons de vider l'urne étant équiprobables, on a :

$$P[(X = n) \cap (Y = n + 1)] = \frac{(n - 1)!.1.1}{(n + 1)!} = \frac{1}{n(n + 1)}$$

c) $\star$ Si $m \geq 2$, $(X = \alpha)$ et $(Y = \beta)$ ne sont pas de probabilité nulle, tandis que $P([X = \alpha] \cap [Y = \beta]) = 0$: X et Y ne sont pas indépendantes.

$\star$ Reste à étudier le cas $m = 1$.

Dans ce cas, on a : $P(X = n) = \dfrac{(n - 1)!.2}{(n + 1)!} = \dfrac{2}{n(n + 1)}$ (on place les $n - 1$ jetons portant un numéro ≥ 2 aux $n - 1$ premiers rangs du tirage, et on peut achever de deux façons selon la couleur $n^{\text{ème}}$ jeton).

On a de même $P(Y = n + 1) = \dfrac{n!}{(n + 1)!} = \dfrac{1}{n + 1}$ (on extrait d'abord les n jetons noirs).

Ainsi :

$P[(X = n) \cap (Y = n + 1)] = \dfrac{1}{n(n + 1)}$; $P(X = n).P(Y = n + 1) = \dfrac{1}{n(n + 1)^2}$

Ces deux événements ne sont donc indépendants que si $n(n + 1)^2 = n(n + 1)$, c'est-à-dire que si $n = 1$.

Finalement, le seul cas où X et Y peuvent être indépendantes est le cas $n = 1$, et $m = 1$.

Dans ce cas X est la variable certaine égale à 1, qui est indépendante de toute variable aléatoire.

Conclusion : X et Y sont indépendantes si et seulement si $m = n = 1$.

2. Dans le cas du tirage avec remise, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{2}{m + n})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{m}{m + n})$.

$\star$ $(X = 1) \cap (Y = 1)$ est réalisé si l'on tire du premier coup le jeton blanc portant le numéro 1, donc $P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = \dfrac{1}{m + n}$

$\star$ $P(X = 1) = \dfrac{2}{m + n}$ et $P(Y = 1) = \dfrac{m}{m + n}$

Les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ ne sont donc indépendants que si $\dfrac{2m}{m + n} = 1$, *i.e.* que si $m = n$. Ainsi X et Y ne peuvent être indépendantes que si $m = n$.

Supposons donc $m = n$.

$\star$ $\forall\, k, \ell \in \mathbb{N}^*, P(X = k)P(Y = \ell) = \big(1 - \frac{1}{m}\big)^{k-1}\frac{1}{m}\big(\frac{1}{2}\big)^{\ell} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^{\ell}}$

$\star$ Si $k < \ell$, l'événement $(X = k) \cap (Y = \ell)$ est réalisé lorsque les $(k-1)$ premiers tirages amènent un jeton noir portant un numéro supérieur ou égal à 2, le $k^{\text{ème}}$ tirage amène le jeton noir 1, tous les tirages du rang $k+1$ au rang $\ell - 1$ (s'il en existe) amènent un jeton noir de numéro quelconque et enfin le $\ell^{\text{ème}}$ tirage amène un jeton blanc.

Donc : $P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{k-1}\frac{1}{2m}\big(\frac{1}{2}\big)^{\ell-k+1}\frac{1}{2} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^{\ell}}$

$\star$ De la même façon :

$P[(X = k) \cap (Y = k)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{k-1}\frac{1}{2m} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^m}$

et si $k > \ell$:

$P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{\ell-1}\frac{m-1}{2m}\big(\frac{m-1}{m}\big)^{k-\ell-1}\frac{1}{m} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^{\ell}}$

Dans tous les cas on a $P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = P(X = k).P(Y = \ell)$ et les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 3-20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi de Pascal de paramètres n et p si $X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\ldots\}$ et si pour $k \geqslant n$,

$$P[X = k] = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n},\ (0 < p < 1,\ q = 1 - p \text{ et } n \in \mathbb{N}^*).$$

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$.

1. Montrer que si S_{n-1} suit la loi de Pascal de paramètres $n-1$ et p, S_n suit la loi de Pascal de paramètres n et p. Conclure.

2. Déterminer $P[T_n = 1]$ et pour tout $s \geqslant n$, $P[T_n = 1/S_n = s]$, $(n \geqslant 2)$.

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $q \in\,]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$,

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $q \in\,]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_s^n q^{s-n} = \frac{1}{(1-q)^{n+1}}$.

4. On suppose p inconnu.

Montrer que $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ est un estimateur sans biais de p.

5. En utilisant la question 3, calculer l'espérance de la variable
$\dfrac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}$, (avec $n \geqslant 3$).
En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} V(P_n) = 0$, où $V(P_n)$ désigne la variance de P_n.

Solution :

1. Posons H_k : S_k suit une loi de Pascal de paramètres (k, p).
On sait que H_1 est vérifiée.
Supposons H_{n-1} vérifiée. Comme $S_n = S_{n-1} + T_n$, il vient :
$S_n(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\}$, et pour tout $k \geq n$:

$$[S_n = k] = \bigcup_{\begin{cases} i \geq n-1 \\ k-i \geq 1 \end{cases}} ([S_n = i] \cap [T_n = k-i])$$

d'où, par indépendance :

$$\begin{aligned} P[S_n = k] &= \sum_{i=n-1}^{k-1} P[S_{n-1} = i]P[T_n = k-i] = p^n q^{k-n} \sum_{i=n-1}^{k-1} C_{i-1}^{n-2} \\ &= C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \end{aligned}$$

Ainsi H_n est vérifiée.

2. Il vient immédiatement $P[T_n = 1] = p$, et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} P[T_n = 1/S_n = s] &= \frac{P[T_n = 1 \cap S_n = s]}{P[S_n = s]} = \frac{P[T_n = 1 \cap S_{n-1} = s-1]}{P[S_n = s]} \\ &= \frac{P[T_n = 1]P[S_{n-1} = s-1]}{P[S_n = s]} \\ &= \frac{C_{s-2}^{n-2}}{C_{s-1}^{n-1}} = \frac{n-1}{s-1} \end{aligned}$$

3. Utilisons la formule des probabilités totales :

$$P[T_n = 1] = \sum_{s \geq n} P[T_n = 1/S_n = s]P[S_n = s]$$

Donc :

$$p = \sum_{s \geq n} \frac{n-1}{s-1} C_{s-1}^{n-1} p^n q^{s-n} = p^n \sum_{s \geq n} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n}$$

Ainsi :

$$\sum_{s=n}^{+\infty} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$$

La seconde formule se déduit de la première par un simple changement d'indices.

4. Toujours en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P[T_n = 1] = \sum_{s \geq n} P[T_n = 1/S_n = s] = \sum_{s \geq n} \frac{n-1}{s-1} P[S_n = s]$$

D'après le théorème de transfert, cette formule correspond à l'espérance de la variable aléatoire $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ qui est donc un estimateur sans biais de p.

5. Effectuons les calculs demandés :

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) &= \sum_{s \geq n} \frac{(n-1)^2}{(s-2)(s-1)} C_{s-1}^{n-1} p^n q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^n \sum_{s \geq n} \frac{(n-1)(n-2)}{(s-2)(s-1)} C_{s-1}^{n-1} q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^n \sum_{s \geq n} C_{s-3}^{n-3} q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^2 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)} \geq \dfrac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2}$ implique que :

$$E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) \geq E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2}\Big)$$

On en déduit que :

$$V(P_n) \leq E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) - E(P_n^2) = \frac{p^2}{n-2} \leq \frac{1}{n-2}$$

La suite d'estimateurs (P_n) est donc convergente.

Exercice 3-21

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = k)$ et $Q_k = P(X > k)$.

1. Montrer que la série $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k.x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$ et que la série $\Psi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} Q_k.x^k$ converge pour tout $x \in \,]-1, 1[$.

2. Que vaut $Q_{k-1} - Q_k$? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1-x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q_k\, x^k$. En déduire que :

$$(\forall\, x \in \,]-1, 1[) \qquad \Psi(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{1 - x}$$

A quelle condition peut-on prolonger par continuité la fonction Ψ en 1 ?

3. On suppose que X admet une espérance et on admet que l'on peut dériver terme à terme la série de somme $\Phi(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k.x^{k-1}$$

Montrer qu'alors : $E(X) = \Phi'(1) = \Psi(1)$.

4. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce donnant pile (P) avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face (F) avec la probabilité $q = 1 - p$.
Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois pile suivi immédiatement de face ($T = k$ si et seulement si on obtient pile au $(k-1)$-ième lancer, face au k-ième lancer et que l'on n'a jamais obtenu PF lors des lancers précédents).

On pose $p_k = P(T = k)$. Calculer p_k pour $k \leq 4$.
Montrer que l'on a :

$$(\forall\ k \geq 2) \qquad p_{k+1} = p.q^{k-1} + p.p_k$$

Déterminer la fonction Φ associée à la variable T et en déduire l'espérance de T.

Solution :

1. La série $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k.x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$, car $|p_k x^k| \leq p_k$ qui est le terme général d'une série convergente.

De même, comme $0 \leq Q_k \leq 1$, il vient $|Q_k x^k| \leq |x|^k$ qui est le terme général d'une série convergente dès que $|x| < 1$.

2. Il est clair que $Q_{k-1} - Q_k = p_k$ et :

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=0}^{n} Q_k x^k &= \sum_{k=0}^{n} Q_k x^k - \sum_{k=0}^{n} Q_k x^{k+1} \\
&= Q_0 - \sum_{k=1}^{n}(Q_k - Q_{k-1})x^k - Q_n x^{n+1} \\
&= Q_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k x^k - Q_n x^{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} p_k x^k - Q_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

Pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |Q_n x^{n+1}| \leq \lim_{n\to+\infty} |x^{n+1}| = 0$, et, en passant à la limite :

$$(1-x)\Psi(x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[,\ \Psi(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{1-x}$$

Ainsi, Ψ admet un prolongement par continuité en $x = 1$ si et seulement si la fonction Φ est dérivable à gauche en ce point (car $\Phi(1) = 1$).

3. Si l'on suppose que $E(X)$ existe et que l'on peut dériver terme à terme une série de fonctions, il vient immédiatement :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k\right)\Big|_{x=1} = \Phi'(1)$$

et d'après la question précédente, si Φ est dérivable en $x = 1$,

$$E(X) = \Psi(1)$$

4. La variable aléatoire T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Il est évident que $p_2 = pq$.

L'événement $(T = 3)$ correspond à l'expérience $PPF \cup FPF$ et $p_3 = pq$.

L'événement $(T = 4)$ correspond à l'expérience $PPPF \cup FPPF \cup FFPF$ et $p_4 = pq(p^2 + pq + q^2)$.

De manière générale, notons X_n le résultat du n-ième tirage. Pour avoir $(T = k)$, il faut : $X_{k-1} = P, X_k = F$ et X_{k-2} est quelconque. Mais :

- si $X_{k-2} = F$, alors nécessairement $X_{k-3} = F$ et par récurrence pour tout $j \leq k - 2$, $X_j = F$.
- si $X_{k-2} = P$, on "oublie" ce tirage et on est ramené à la situation précédente avec $(n - 1)$ tirages.

Par disjonction des cas :

$$p_k = P(F \dots FPF) + P(P)p_{k-1} = pq^{k-1} + pp_{k-1}$$

En posant $p_1 = 0$ et par convergence des séries manipulées, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1}x^k + p\sum_{k=2}^{+\infty} p_{k-1}x^k \\ &= pqx^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (qx)^{k-2} + px\Phi(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\Phi(x) = \frac{pqx^2}{1 - x + pqx^2}$$

On sait que si T admet un espérance, alors $E(T) = \Phi'(1)$. Un calcul élémentaire donne :

$$\Phi'(x) = \frac{2pqx(1 - x + pqx^2) - pqx^2(2pqx - 1)}{(1 - x + pqx^2)^2} \Rightarrow E(T) = \Phi'(1) = \frac{1}{pq}$$

Exercice 3-22

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère :
• une variable aléatoire N définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
• deux variables aléatoires A et B indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les lois conditionnées $A|(N = n)$ et $B|(N = n)$ sont des lois binomiales de paramètres $(n + 1, p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère le polynôme P_ω défini par :

$$P_\omega(X) = A(\omega)X^{N(\omega)+1} - B(\omega)X^{N(\omega)} + 1$$

1. Quelle est la loi du coefficient A ?

2. Quelle est la loi du degré de P_ω ? (on distinguera le cas où P_ω est le polynôme identiquement nul, pour lequel on pose alors que le degré est $-\infty$, et le cas où P_ω est de degré 0).

Solution :

1. N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et lorsque N prend la valeur n, alors A peut prendre les valeurs entières de 0 à $n+1$. Ainsi A prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et la formule des probabilités totales donne :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, P(A = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k).P(A = i/N = k)$$

Or, $P(N = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et :

Si $k \geq i - 1$, $P(A = i/N = k) = C_{k+1}^{i} p^i q^{k+1-i}$, avec $q = 1 - p$
Si $k < i - 1$, $P(A = i/N = k) = 0$.

Ainsi : $P(A = i) = \dfrac{(p\lambda)^i}{i!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=i-1}^{\infty} (k+1)\dfrac{(q\lambda)^{k+1-i}}{(k+1-i)!}$

En écrivant : $k + 1 = (k + 1 - i) + i$, on peut séparer la série en deux séries convergentes connues, d'où :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, P(A = i) = \frac{(p\lambda)^i}{i!}\,\frac{\mathrm{e}^{-p\lambda}}{\lambda}(\lambda q + i)$$

2. a) P_ω est le polynôme nul si $N(\omega) = 0$, $A(\omega) = 0$ et $B(\omega) = 1$. Donc, en notant $D(\omega)$ le degré de P_ω :

$P(D = -\infty) = P(N = 0).P((A = 0) \cap (B = 1)/N = 0)$

Soit, par indépendance :

$$P(D = -\infty) = \mathrm{e}^{-\lambda}.p.q$$

b) P_ω est un polynôme constant non nul si ($N = 0, A = 0$ et $B \neq 1$) ou bien si ($N > 0, A = 0$ et $B = 0$). Or si $A = 0$ et $B \neq 1$, on a $A = 0$ et $B = 0$. Donc

$\star$ $P[(N=0)\cap(A=0)\cap(B\neq 1)] = P(N=0).P[(A=0)\cap(B=0)/N=0]$
$= \mathrm{e}^{-\lambda}.q^2$

$\star$ $P[(N>0)\cap(A=0)\cap(B=0)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(N=k).P[(A=0)\cap(B=0)/N=k]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.q^{k+1}q^{k+1}$$
$$= q^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda q^2)^k}{k!} = q^2\mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda q^2}-1)$$

Soit, en sommant, par incompatibilité des deux cas :
$$P(D=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}.q^2 + q^2\mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda q^2}-1) = q^2\mathrm{e}^{-\lambda p(2-p)}$$

c) Pour $k>0$, P_ω est de degré k si ($N=k-1$ et $A\neq 0$) ou si ($N=k, A=0$ et $B\neq 0$).

$\star$ $P[(N=k-1)\cap(A\neq 0)] = P(N=k-1).P(A\neq 0/N=k-1)$, d'où :
$$P[(N=k-1)\cap(A\neq 0)] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(1-q^k)$$

$\star$ $P[(N=k)\cap(A=0)\cap(B\neq 0)] = P(N=k).P[(A=0)\cap(B\neq 0)/N=k)$
Soit :
$$P[(N=k)\cap(A=0)\cap(B\neq 0)] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}q^{k+1}(1-q^{k+1})$$

Soit :
$$\forall\, k\geq 1, P(D=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\big(q^{k+1}(1-q^{k+1}) + \frac{k}{\lambda}(1-q^k)\big)$$

Exercice 3-23

On considère une variable aléatoire à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit f une densité de X et F sa fonction de répartition.

On suppose qu'il existe un réel a tel que f soit identiquement nulle sur l'intervalle $]-\infty,a[$ et continue sur $[a,+\infty[$. On suppose également que X admet une espérance notée $E(X)$.

1. Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$.

2. En effectuant une intégration par parties, montrer que l'intégrale
$$\int_a^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(t)dt\right)dx$$
converge, et vaut $E(X)-a$.

3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si on suppose seulement f continue sur $]a,+\infty[$?

4. Soient deux réels b et τ tels que $b > 0$ et $\tau > 0$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{b}} t^{\tau-1} dt\right) dx$ converge et calculer sa valeur.

5.a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha.\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer α pour que f représente la densité d'une variable aléatoire.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right) dx$ converge et calculer sa valeur.

Solution :

1. La variable aléatoire X ayant une espérance, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} t f(t)\, dt$ est convergente. On peut alors écrire, pour $x > a$:

$$0 \leq x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)\, dt$$

Par définition de la convergence de l'intégrale définissant $E(X)$, on a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt = 0$$

Ce qui est le résultat demandé.

2. En intégrant par parties (licite, car la continuité de f montre que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto -f(x)$) :

$$\int_a^A \Big(\int_x^{+\infty} f(t)\, dt\Big) dx = \Big[x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt\Big]_a^A + \int_a^A x f(x)\, dx$$

Comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = 1$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} x f(x)\, dx = E(X)$, le passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ donne :

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(t) dt\right) dx = -a + E(X)$$

3. Le résultat subsiste. En effet, il suffit de procéder sur l'intervalle $[b, +\infty[$, avec $b > a$ (intervalle sur lequel f est continue) et de procéser alors par passage à la limite lorsque b tend vers a, par continuité de l'intégrale par rapport à sa borne inférieure.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi Γ de paramètres (b, τ). En appliquant ce qui précède, on a :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t/b}t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)b^\tau}dt\Big)dx = E(X) = b\tau$$

En conséquence :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t/b}t^{\tau-1}\,dt\Big)dx = b\tau\Gamma(\tau)b^\tau = \tau\Gamma(\tau)b^{\tau+1}$$

5. a) On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (considérer une variable aléatoire à densité suivant la loi normale d'espérance 0 et de variance 1/2).

On doit donc prendre $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

b) Si X est une variable aléatoire ayant la densité précédente, X admet une espérance et :

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t.\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

En appliquant ce qui précède, il vient finalement :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt\Big)dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 3-24

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé ; X suit une loi exponentielle de paramètre a, Y suit une loi exponentielle de paramètre b, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs donnés.

On définit les variables aléatoires : $T = \min(X,Y), U = \max(X,Y), Z = U - T$.

(*N.B : dans chacune des questions, on prêtera attention au cas où* $a = b$).

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire D définie par $D = X - Y$.

2. Exprimer Z en fonction de X et de Y, et déterminer une densité de Z.

3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

4. Pour n entier positif, exprimer le moment d'ordre n de Z :
   a) en fonction des moments d'ordre n de X et de Y,
   b) en fonction de n, a, b.

Solution :

1. $\star$ Déjà $-Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ et sa fonction de répartition F_{-Y} est définie par :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^-, F_{-Y}(y) = P(-Y \leq y) = P(Y \geq -y) = 1 - F_Y(-y)$$

Une densité f_{-Y} de $-Y$ est donc définie sur $\mathbb{R}^-$ par :

$$f_{-Y}(y) = f_Y(-y) = b.\mathrm{e}^{by}$$

$\star$ Une densité de $D = X - Y = X + (-Y)$ s'obtient alors par convolution :

$$\forall\, d \in \mathbb{R}, f_D(d) = \int_{\mathbb{R}} f_X(d-t) f_{-Y}(t)\, dt$$

La fonction à intégrer est non nulle lorsque $t \leq 0$ et $d - t \geq 0$, ce qui conduit à distinguer deux cas :

Si $d \leq 0$, $f_D(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{d} a.\mathrm{e}^{-a(d-t)}.b.\mathrm{e}^{bt}\, dt = \frac{ab}{a+b}\,\mathrm{e}^{bd}$

Si $d > 0$, $f_D(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} a.\mathrm{e}^{-a(d-t)}.b.\mathrm{e}^{bt}\, dt = \frac{ab}{a+b}\,\mathrm{e}^{-ad}$

$\star$ Pour $a = b$, on peut abréger en : $\forall\, d \in \mathbb{R}, f_D(d) = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{e}^{-a|d|}$

2. $Z = U - T = |X - Y| = |D|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $z \in \mathbb{R}^+$, on a :

$P(Z \leq z) = P(-z \leq D \leq z) = F_D(z) - F_D(-z)$. D'où par dérivation :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^+, f_Z(z) = f_D(z) + f_D(-z)$$

Ce qui donne :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^+, f_Z(z) = \frac{ab}{a+b}(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})$$

Dans le cas particulier $b = a$, il vient : $f_Z(z) = a.\mathrm{e}^{-az}$ et Z suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$, d'où $E(Z) = \dfrac{1}{a}$ et $V(Z) = \dfrac{1}{a^2}$.

3. $\star$ Sous réserve de convergence, on a : $E(Z) = \dfrac{a+b}{ab}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} z(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz$.

La convergence est banale et le calcul simple, à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors :

$$E(Z) = \frac{ab}{a+b}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]$$

$\star$ De la même façon, mais avec une intégration par parties de plus, on obtient :

$$E(Z^2) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^2(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz = \frac{2(a^3+b^3)}{(a+b)a^2b^2}$$

Ce qui donne ;

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{1}{(a+b)^2a^2b^2}[2(a+b)(a^3+b^3) - (a^2+b^2)^2]$$

On vérifie que pour $b = a$, on retrouve les résultats attendus.

4. a) b) $\star$ Toujours sous réserve de convergence, on a :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz.$$

La convergence est banale, par négligeabilité classique, et on peut écrire :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n.\mathrm{e}^{-az}\, dz + \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n.\mathrm{e}^{-bz}\, dz.$$

Plutôt que de procéder à des intégrations par parties successives, il vaut mieux effectuer le changement de variable $t = az$ ou $t = bz$, ce qui donne :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\left[\frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1) + \frac{1}{b^{n+1}}\Gamma(n+1)\right].$$

i.e. : $E(Z^n) = \dfrac{ab.n!}{a+b}\left[\dfrac{1}{a^{n+1}} + \dfrac{1}{b^{n+1}}\right]$

$\star$ Or si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, on a $E(X^n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}+} x^n.a.\mathrm{e}^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^n}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{a^n}$

On peut écrire également $E(Z^n) = \dfrac{b}{a+b}E(X^n) + \dfrac{a}{a+b}E(Y^n)$.

Exercice 3-25

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Lors d'une épreuve de tir à l'arc, un concurrent dispose de n flèches, $n \geq 1$ fixé ; son objectif est d'envoyer chacune de ses n flèches le plus près possible du point O.
Pour chaque flèche décochée $f_i, 1 \leq i \leq n$, on suppose que l'abscisse X_i et l'ordonnée Y_i du point d'impact de f_i, sont deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux de loi normale d'espérance nulle et d'écart-type σ (exprimé dans l'unité commune du repère), σ étant un paramètre réel inconnu.

1. On note D_i la distance aléatoire du point d'impact de la flèche f_i à O. Déterminer une densité de D_i (on pourra reconna"tre les variables aléatoires $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$ et $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}$).

2. Calculer l'espérance et la variance de D_i ; en déduire une fonction simple $\widetilde{D_i}$ de D_i telle que $E(\widetilde{D_i}) = \sigma$ (E désignant l'opérateur espérance).

3. On suppose que les variables aléatoires $(D_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes. On s'intéresse à la distance aléatoire D de la meilleure flèche décochée par l'archer – au sens de la plus proche de O – parmi les n.

a) Exprimer D en fonction des variables aléatoires D_i, $1 \leq i \leq n$.

b) Déterminer la loi de D (on précisera la fonction de répartition et une densité).

c) Calculer l'espérance et la variance de D ; en déduire un estimateur sans biais D' de σ, fonction simple de D ; est-il convergent ? (justifier le bien-fondé de ce dernier résultat).

d) Proposer un estimateur de σ de meilleure qualité que celui précédemment rencontré.

Solution :

1. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2$ d'où :

$$\frac{D_i^2}{\sigma^2} = \frac{X_i^2}{\sigma^2} + \frac{Y_i^2}{\sigma^2}$$

Or, on sait que $\dfrac{X_i}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ et de densité ϕ. Déterminons la loi de $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$.

Pour tout $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{X_i^2}{\sigma^2} \leq u\Big) &= P\Big(-\sqrt{u} \leq \frac{X_i}{\sigma} \leq \sqrt{u}\Big) \\ &= \Phi(\sqrt{u}) - \Phi(-\sqrt{u}) = 2\Phi(\sqrt{u}) - 1 \end{aligned}$$

Si l'on note f une densité de $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$, alors

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} \dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(2, 1/2)$. La variable $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}$ suit la même loi et par indépendance $\dfrac{D_i^2}{\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(2,1) = \mathcal{E}(1/2)$. Une densité de $\dfrac{D_i^2}{\sigma^2}$ est alors définie par :

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} e^{-u/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminons maintenant la loi de D_i. Comme, pour $t \geq 0$:

$$P\Big(\frac{D_i}{\sigma} \leq t\Big) = P\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2} \leq t^2\Big)$$

une densité de $\dfrac{D_i}{\sigma}$ est définie par :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t e^{-t^2/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et une densité de D_i sera donnée par :

$$f_{D_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ \dfrac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Un calcul donne :

$$E\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et $E(D_i) = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

De même :

$$V\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = E\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2}\Big) - E^2\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

d'où $V(D_i) = \Big(2 - \dfrac{\pi}{2}\Big)\sigma^2$.

Ainsi $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}D_i$ est un estimateur sans biais de σ, mais au vu d'une seule observation d_i de D_i on ne peut statuer sur la convergence de cet estimateur.

3. a) On a évidemment $D = \min\limits_{1\leq i\leq n}(D_i)$ et $\dfrac{D}{\sigma} = \min\limits_{1\leq i\leq n}\Big(\dfrac{D_i}{\sigma}\Big)$.

b) Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{D}{\sigma} > t\Big) &= \prod_{i=1}^{n} P\Big(\frac{D_i}{\sigma} > t\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2} > t^2\Big) \\ &= \big(e^{-t^2/2}\big)^n = e^{-nt^2/2} \end{aligned}$$

Si l'on note F_D la fonction de répartition de D et f_D une densité, il vient :

$$F_D(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-(nu^2)/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$f_D(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \dfrac{nu}{\sigma^2}e^{-(nu^2)/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} E(D) &= \int_0^{+\infty} \frac{nu^2}{\sigma^2}e^{-(n/2)(u^2/\sigma^2)}du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{2n}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E(D^2) &= \int_0^{+\infty} u\frac{nu^2}{\sigma^2}e^{-(n/2)(u^2/\sigma^2)}du \\ &= \frac{2\sigma^2}{n}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \frac{2\sigma^2}{n} \ (\text{car } \Gamma(2) = 1) \end{aligned}$$

soit :

$$V(D) = \frac{\sigma^2}{n}\Big(2 - \frac{\pi}{2}\Big)$$

Posons $D' = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}D$. C'est un estimateur sans biais de σ, mais non convergent puisque $V(D') = \sigma^2\dfrac{4-\pi}{\pi}$.

On pouvait s'en douter, puisque le meilleur tir ne donne pas d'information sur la dispersion moyenne des tirs qui est mesurée par σ.

d) Il conviendrait de choisir un estimateur tenant compte de l'ensemble des tirs. Par exemple $\overline{D} = \sum_{k=1}^{n} D_k$. Mais alors les calculs seront plus lourds.

Exercice 3-26

L'engouement du public pour un jeu de foire, permettant de gagner des lots divers et variés, est tel qu'il est nécessaire d'en présélectionner les candidats. On organise donc une suite d'épreuves de sélection, chaque épreuve réunissant n candidats, $n \geq 1$ étant fixé, toutes basées sur le même principe.
A chaque épreuve :

• un nombre réel mystère a est déterminé au hasard par la fonction **Random** d'un calculateur électronique (a est donc la réalisation d'une variable aléatoire de densité uniforme sur l'intervalle$[0,1]$, et a est susceptible de changer d'une épreuve à l'autre, mais est une constante pour une épreuve donnée).

• chacun des n candidats est alors invité à proposer son évaluation de a, en inscrivant, en secret et indépendamment des autres, sa réponse sur papier.

• sera alors sélectionné pour le jeu celui des n candidats dont la réponse sera la plus proche de a (par valeur supérieure ou inférieure).

On fait les hypothèses suivantes :

• la réponse du candidat i, pour $1 \leq i \leq n$, est une variable aléatoire, notée X_i, à densité, de loi uniforme sur $[0,1]$.

• les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On admet que chaque épreuve de sélection ne fournit qu'un seul gagnant.
On s'intéresse à la variable aléatoire Z_a, mesurant l'erreur aléatoire d'évaluation de a par le gagnant d'une épreuve de sélection.

1. Exprimer Z_a en fonction des variables aléatoires $X_i, (1 \leq i \leq n)$ et de a. Préciser $Z_a(\Omega)$.

2. Le calculateur fournit la valeur $a = 1$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Z_1 ; en déduire une densité de Z_1.
   b) Calculer l'espérance et la variance de Z_1.

3. On revient au cas général où a est une valeur quelconque de l'intervalle $[0,1]$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Z_a (on distinguera deux cas en comparant a à $1/2$).
   b) En déduire une densité de Z_a.

4. En plus d'être l'heureux élu, le candidat sélectionné gagne, en cadeau de bienvenue, la somme $1-Z_a$, exprimée en milliers d'Euros. Calculer l'espérance de gain, à l'issue de cette phase de sélection, du vainqueur d'une épreuve.

Solution :

1. La variable aléatoire Z_a est définie par :

$$Z_a = \min_{1\le i\le n} |X_i - a|, \quad \text{et } Z_a(\Omega) = [0, \max(a, 1-a)]$$

2. a) La variable aléatoire Z_1 est définie par : $Z_1 = \min\limits_{1\le i\le n}(1-X_i)$ soit : $Z_1 = 1 - \max\limits_{1\le i\le n}(X_i)$. Ainsi $Z_1(\Omega) = [0,1]$ et, pour tout $z\in[0,1]$:

$$P(Z_1 \le z) = P(\max_{1\le i\le n}(X_i) > 1-z) = 1 - P(\max_{1\le i\le n}(X_i) < 1-z)$$

Par indépendance des variables (X_i) :

$$P(Z_1 \le z) = 1 - (F_{X_i}(1-z))^n = 1-(1-z)^n$$

Ainsi la fonction de répartition de Z_1 est définie par ;

$$F_{Z_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \le 0 \\ 1-(1-z)^n & \text{si } 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{si } z \ge 1 \end{cases}$$

et une densité de Z_1 est donnée par :

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [0,1] \\ n(1-z)^{n-1} & \text{si } z \in [0,1] \end{cases}$$

b) On a alors :

$$E(Z_1) = n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}dt = n\int_0^1 (1-u)u^{n-1}du = \frac{1}{n+1}$$

$$E(Z_1^2) = n\int_0^1 t^2(1-t)^{n-1}dt = n\int_0^1 (1-u)^2u^{n-1}du = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1$$

et

$$V(Z_1) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

3. Pour tout $z \in Z_a(\Omega)$:

$$P(Z_a \le z) = 1 - P(\min_{1\le i\le n}|X_i - a| > z) = 1 - (1 - P(|X_i - a| < z))^n$$

Posons $U_i = |X_i - a|$. On a $U_i(\Omega) = Z_a(\Omega)$ et :

$$\begin{aligned} P(U_i < u) &= P\left((a-u < X_i < a+u) \cap (0 < X_i < 1)\right) \\ &= P(\max(0, a-u) < X_i < \min(1, a+u)) \end{aligned}$$

- si $a \le \dfrac{1}{2} \le 1-a$:

$$F_{U_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \le 0 \\ 2u & \text{si } 0 \le u \le a \\ a+u & \text{si } a \le u \le 1-a \\ 1 & \text{si } 1-a \le u \end{cases}$$

d'où :

$$F_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1-(1-2z)^n & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ 1-(1-a-z)^n & \text{si } a \leq z \leq 1-a \\ 1 & \text{si } 1-a \leq z \end{cases}$$

et

$$f_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 2n(1-2z)^{n-1} & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ n(1-a-z)^{n-1} & \text{si } a \leq z \leq 1-a \\ 0 & \text{si } 1-a \leq z \end{cases}$$

- si $1-a \leq \frac{1}{2} \leq a$:

$$F_{U_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 2u & \text{si } 0 \leq u \leq 1-a \\ u+1-a & \text{si } 1-a \leq u \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq u \end{cases}$$

d'où :

$$F_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1-(1-2z)^n & \text{si } 0 \leq z \leq 1-a \\ 1-(a-z)^n & \text{si } 1-a \leq z \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq z \end{cases}$$

et

$$f_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 2n(1-2z)^{n-1} & \text{si } 0 \leq z \leq 1-a \\ n(a-z)^{n-1} & \text{si } 1-a \leq z \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq z \end{cases}$$

4. Le gain espéré est $1 - E(Z_a)$. Aussi :

- si $1-a \leq \frac{1}{2} \leq a$:

$$E(Z_a) = \int_0^{1-a} 2nz(1-2z)^{n-1}dz + \int_{1-a}^{a} nz(a-z)^{n-1}dz = \frac{1+(2a-1)^{n+1}}{2n+2}$$

- si $a \leq \frac{1}{2} \leq 1-a$, on pose $b = 1-a$ et on est ramené au cas précédent pour le calcul, soit :

$$E(Z_a) = \frac{1}{2n+2}(1+(1-2a)^{n+1})$$

Donc pour tout $a \in [0,1]$:

$$E(Z_a) = \frac{1}{2(n+1)}\left(1+|2a-1|^{n+1}\right)$$

Exercice 3-27

Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher ; pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires.

On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1. Exprimer la loi de N_p.

2. Déterminer l'espérance $E(N_p)$ de N_p.

3. L'entier n étant fixé, montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$:

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = C_n^k \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx,$$

en déduire la valeur de cette limite.

Solution :

1. On sait que $N_p(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que si l'on note U_i l'événement « on effectue les tirages dans l'urne i », la famille $(U_i)_{0\leq i\leq p}$ forme un système complet d'événements.

En appliquant la formule des probabilités totales, il vient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(N_p = k) &= \sum_{i=0}^{p} P(N_p = k \mid U_i)P(U_i) \\ &= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k} \end{aligned}$$

car on sait que $(N_p \mid U_i)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, i/p)$.

2. Le calcul de l'espérance de N_p donne :

$$\begin{aligned} E(N_p) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\Big(\sum_{k=0}^{n} kC_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k}\Big) \\ &= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} n\frac{i}{p} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

3. On sait que :

$$P(N_p = k) = \frac{p}{p+1}\Big(\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k}\Big)$$

Or $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p} C_n^k\Big(\frac{i}{p}\Big)^k\Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ sur l'intervalle $[0,1]$. D'où :

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = C_n^k \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$

Une intégration par parties immédiate donne :

$$I_k = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k}{n-k+1} I_{k-1}$$

et une récurrence toute aussi immédiate donne :

$$I_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} I_0 = \frac{k!(n-k)!}{n!}\,\frac{1}{n+1}$$

Finalement

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3-28

Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.

Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :

1) Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.

2) Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.

3) Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Solution :

1. Si le rat n'a aucune mémoire, les essais sont indépendants les uns des autres et la probabilité de succès à chaque essai vaut $p = \frac{1}{4}$.
Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{4})$ et $E(X) = \dfrac{1}{p} = 4$, $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = 12$.

2. $\star$ La probabilité de réussir au premier essai vaut $\dfrac{1}{4}$ et ensuite (s'il existe une suite) la probabilité de réussir à un essai quelconque vaut $\dfrac{1}{3}$ tandis que

la probabilité d'échouer vaut $\frac{2}{3}$ (puisqu'il élimine la porte qu'il a testée juste avant).

Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$P(X = 1) = \frac{1}{4}$;

$\forall\, k \geq 2, P(X = k) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ (valable pour $k = 2$).

$\star$ La convergence de la série écrite étant banale, X admet une espérance qui est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

D'où : $E(X) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} = \frac{13}{4}$

3. On a ici $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ et en notant E_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ essai est un échec » :

$P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = P(E_1).P(\overline{E_2}/E_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(X = 3) = P(E_1).P(E_2/E_1)P(\overline{E_3}/E_1 \cap E_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, donc, par passage au complémentaire $P(X = 4) = \frac{1}{4}$.

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 4]\!])$ et $E(X) = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$.

Exercice 3-29

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type tab) sont des permutations de $[\![1, n]\!]$.

On considère la fonction T définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a : tab) : integer ;
var i : integer ;
begin
  i := 1 ;
  while ( a[i] <> i ) and ( i < n+1 ) do i := i+1 ; T := i
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire sur l'univers S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $P(T \leqslant r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \frac{(n-k)!}{n!}$.

En déduire la valeur de $P(T = n + 1)$.

3. a) Exprimer $E(T)$ en fonction de n et des nombres $P(T \leqslant r)$, avec $2 \leqslant r \leqslant n$.

b) Établir, pour $k \leqslant n$, la relation : $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$.

c) En déduire que : $E(T) = (n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)!}$.

d) Donner un équivalent simple de $E(T)$, lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction T associe à toute permutation de $[\![1, n]\!]$ son premier point fixe, s'il en existe un, et $(n+1)$ sinon.

2. Notons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \{a \in S_n \mid a(i) = i\}$. Alors, par la formule du crible, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(T \leq r) &= P\Big(a \in \bigcup_i F_i\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_k \leq r} P(a \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}) \Big) \end{aligned}$$

Or :

$$P(a \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}) = \frac{\operatorname{card}(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k})}{\operatorname{card}(S_n)} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

et comme il y a C_r^k façons de choisir le k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ il vient :

$$P(T \leq r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \frac{(n-k)!}{n!}$$

Enfin :

$$P(T = n+1) = 1 - p(T \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3. a) On sait que $P(T = 1) = P(T \leq 1) = \dfrac{1}{n}$ et que $P(T = n+1) = 1 - P(T \leq n)$. Donc :

$$E(T) = \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} i(P(T \leq i) - P(T \leq i-1)) + (n+1)(1 - P(T \leq n)$$

Par télescopage, il vient :

$$E(T) = (n+1) + \frac{1}{n} - 2P(T \leq 1) - \sum_{i=2}^{n} P(T \leq i) = (n+1) - \sum_{i=1}^{n} P(T \leq i)$$

b) On démontre par récurrence que : $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$ (en fait c'est dans le cours...)

c) Ainsi :

$$
\begin{aligned}
E(T) &= (n+1) - \sum_{r=1}^{n} P(T \leq r) = (n+1) - \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1} C_r^k \frac{(n-k)!}{n!}\\
&= (n+1) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{r=k}^{n} C_r^k\\
&= (n+1) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!}{n!} C_{n+1}^{k+1}\\
&= (n+1) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n+1}{(k+1)!} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

d) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$, il résulte que $E(T)$ est équivalent à $n\Big(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big)$.

Exercice 3-30

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler l'expression d'une densité f_n de Y_n, ainsi que l'espérance et la variance de Y_n.

2. On note Y_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à Y_n.

a) Déterminer une densité φ_n de Y_n^* .

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(On admettra la formule de Stirling : $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

c) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Solution :

1. On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ suit une loi $\Gamma(1,n)$. Une densité est :

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et l'espérance et la variance valent n.

2. a) Y_n^* est définie par $Y_n^*=\dfrac{Y_n-n}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour tout x réel :

$$P(Y_n^*\leq x)=P(Y_n\leq n+x\sqrt{n})$$

ce qui permet de définir une densité de Y_n^* :

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-n-x\sqrt{n}}(n+x\sqrt{n})^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x\geq -\sqrt{n}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

b) Pour tout $x\geq-\sqrt{n}$:

$$\varphi_n(x)=\frac{\sqrt{n}.\mathrm{e}^{-n}n^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^{n-1}$$

ou

$$\varphi_n(x)=\frac{\sqrt{n}.\mathrm{e}^{-n}n^{n}}{n!}\exp\Big(-x\sqrt{n}+(n-1)\ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Soit x fixé. Lorsque n tend vers l'infini, on peut considérer que $x>-\sqrt{n}$ et donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}.\mathrm{e}^{-n}n^{n}}{n!}\exp\Big(-x\sqrt{n}+(n-1)\ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Or :

$$\begin{aligned}-x\sqrt{n}+(n-1)\ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)&=-x\sqrt{n}+(n-1)\Big[\frac{x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]\\&=-\frac{x^2}{2}+o(1)\end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling :

$$\frac{\sqrt{n}.\mathrm{e}^{-n}n^{n}}{n!}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et donc, pour tout x réel :

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) D'après le théorème de la limite centrée, (Y_n^*) converge en loi vers une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui se traduit par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Exercice 3-31

Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à 2. Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un n-uplet de réels, on appelle réarrangement de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le n-uplet $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_n})$ tel que :

$\star$ $\widehat{x_1} \leq \widehat{x_2} \leq \dots \leq \widehat{x_n}$;

$\star$ il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que pour tout $i, \widehat{x}_i = x_{\sigma(i)}$.

On notera $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_n}) = R(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, indépendantes et de même loi.
On s'intéresse aux n variables aléatoires rangées

$$(\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \dots, \widehat{X_n}) = R(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

définies pour tout $\omega \in \Omega$, par :

$$\big(\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \dots, \widehat{X_n}(\omega)\big) = R\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big)$$

1. Soit $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

a) Exprimer l'événement $(\widehat{X_r} \leq x)$ en fonction des événements $(X_i \leq x)$ ou de leurs complémentaires, i décrivant $[\![1, n]\!]$.

b) En déduire l'expression de la fonction de répartition F_r de $\widehat{X_r}$ en fonction de la fonction de répartition F des variables aléatoires X_i.

2. On suppose que F admet une dérivée continue f. Montrer qu'une densité de $\widehat{X_r}$ est donnée par :

$$f_r(x) = nC_{n-1}^{r-1}\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1 - F(x)\big)^{n-r} f(x)$$

3. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans le cas où $n = 2p + 1$, calculer une densité de la variable aléatoire médiane $\widehat{X}_{p+1}$ et son espérance.

Solution :

1. a) $(\widehat{X_r} \leq x)$ est réalisé si au moins r des n variables $X_1, \dots, X_n$ prennent des valeurs inférieures ou égales à x. Ce que l'on peut écrire :

$$(\widehat{X_r} \leq x) = \bigcup_{k=r}^{n} B_k$$

où :

$$B_k = \bigcup \big[(X_{i_1} \leq x) \cap (X_{i_2} \leq x) \dots \cap (X_{i_k} \leq x) \cap (X_{i_{k+1}} > x) \dots \cap (X_{i_n} > x)\big]$$

La réunion étant étendue à tous les k-uplets $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ de $[1, n]\!]$, les indices $i_{k+1} < \cdots < i_n$ désignant les autres éléments de $[\![1, n]\!]$.

b) En clair B_k est réalisé si k des n variables X_i prennent une valeur inférieure ou égale à x, les autres prenant une valeur supérieure à x.

Par indépendance, on a donc $P(B_k) = C_n^k[F(x)]^k.[1-F(x)]^{n-k}$.

Puis, par incompatibilité :

$$P(\widehat{X_r} \leq x) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k[F(x)]^k.[1-F(x)]^{n-k}$$

2. La dérivée de $g : t \mapsto \sum_{k=r}^{n} C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$ est :

$$g'(t) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k\, k.t^{k-1}(1-t)^{n-k} - \sum_{k=r}^{n} C_n^k\,(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}$$

(avec l'abus d'écriture habituel, pour le terme d'indice n de la seconde somme, consistant à écrire que la dérivée de $t \mapsto t^0$ est $t \mapsto 0.t^{-1}$)

Or $(n-k)C_n^k = nC_{n-1}^{n-k-1} = nC_{n-1}^k$ et $k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$, ce qui permet d'écrire :

$$g'(t) = n\sum_{k=r}^{n}\left[C_{n-1}^{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k} - C_{n-1}^{k}t^k(1-t)^{n-k-1}\right]$$

Par simplifications en cascade, il reste : $g'(t) = nC_{n-1}^{r-1}t^{r-1}(1-t)^{n-r}$.

Comme $P(\widehat{X_r} \leq x) = g\big(F(x)\big)$, il vient, par composition :

$$f_r(x) = \frac{d}{dx}\big(P(\widehat{X_r} \leq x)\big) = nC_{n-1}^{r-1}\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1-F(x)\big)^{n-r}.f(x)$$

3. On a ici :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ et } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\star$ Ainsi, une densité de $\widehat{X_{p+1}}$ est :

$$f_{p+1} : x \mapsto \begin{cases} (2p+1)C_{2p}^p x^p(1-x)^p & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit que $E(\widehat{X_{p+1}}) = (2p+1)C_{2p}^p \displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^p\,dx$.

Par intégration par parties, on obtient classiquement :

$$\forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\,dt = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$$

D'où :

$$E(\widehat{X_{p+1}}) = (2p+1)\frac{(2p)!}{p!p!}\cdot\frac{(p+1)!p!}{(2p+2)!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3-32

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, de densités respectives f et g nulles hors de l'intervalle $[0,1]$.

1. a) Déterminer une densité de $1-Y$.

   b) Déterminer une densité de $\ln X$.

c) Montrer qu'une densité de $Z = X(1-Y)$ est nulle hors de $[0,1]$ et est définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :

$$x \mapsto \int_x^1 f\left(\frac{x}{t}\right) g(1-t)\frac{dt}{t}$$

(on pourra commencer par déterminer une densité de $\ln Z = \ln X + \ln(1-Y)$).

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi à valeurs dans $[0,1]$.

A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'intervalle $\left[\prod_{i=1}^{n+1} X_i(\omega), \prod_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right]$ de longueur $L_n(\omega)$.

Montrer que pour tout $n \geq 2, L_n = X_1.Y_n$, où Y_n est une variable aléatoire de même loi que L_{n-1} et indépendante de X_1.

3. On suppose que les variables (X_n) suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de L_1 ainsi que l'espérance de L_n.

Solution :

1. a) $P(1-Y \leq t) = P(Y \geq 1-t) = 1 - P(Y \leq 1-t)$. Donc, par dérivation, une densité f_{1-Y} de $1-Y$ est :

$$f_{1-Y}(t) = f_Y(1-t) = g(1-t) \text{ (pour } 0 < t < 1, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

b) De même : $P(\ln X \leq t) = P(X \leq \mathrm{e}^t) = F_X(\mathrm{e}^t)$, et :

$$f_{\ln X}(t) = \mathrm{e}^t.f_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t.f(\mathrm{e}^t) \text{ (pour } t < 0, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

Ainsi, on a également :

$$f_{\ln(1-Y)}(t) = \mathrm{e}^t.f_Y(1-\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t.g(1-\mathrm{e}^t) \text{ (pour } t < 0, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

c) Par conséquent, une densité de $\ln Z = \ln X + \ln(1-Y)$ est définie par convolution (les variables $\ln X$ et $\ln(1-Y)$ sont indépendantes), par :

$$f_{\ln Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(x-t) f_{\ln(1-Y)}(t)\,dt$$

Si $x \geq 0$, on a $f_{\ln Z}(x) = 0$ (Z ne prend que des valeurs négatives) ;

Si $x < 0$, on a donc : $f_{\ln Z}(t) = \displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{x-t} f(\mathrm{e}^{x-t}).\mathrm{e}^t g(1-\mathrm{e}^t)\,dt$, *i.e.* :

$$f_{\ln Z}(x) = \mathrm{e}^x \int_x^0 f(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-t}) g(1-\mathrm{e}^t)\,dt = \mathrm{e}^x \int_{\mathrm{e}^x}^1 f(\frac{\mathrm{e}^x}{u}) g(1-u)\frac{du}{u}$$

(grce au changement de variable $u = \mathrm{e}^t$)

Enfin, pour $x \in]0,1[$, $P(Z \leq x) = P(\ln Z \leq \ln x) = F_{\ln Z}(\ln x)$ donne :

$$f_{\ln Z}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln Z}(\ln x) = \int_x^1 f(\frac{x}{u}) g(1-u)\frac{du}{u}$$

2. $L_n(\omega) = \big(1 - X_{n+1}(\omega)\big) \prod_{i=1}^{n} X_i(\omega) = X_1(\omega).Y_n(\omega)$, avec :

$$Y_n(\omega) = \big(1 - X_{n+1}(\omega)\big) \prod_{i=2}^{n} X_i(\omega)$$

⋆ Y_n n'est fonction que de $X_2, \ldots, X_{n+1}$, donc est indépendante de X_1.

⋆ Par simple décalage, Y_n suit la même loi que L_{n-1}.

3. ⋆ La loi de $L_1 = X_1(1 - X_2)$ est donnée directement par la question 1. (les fonctions f et g valant 1 sur $[0,1]$) :

$$\forall\, x \in\,]0,1],\, f_{L_1}(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

⋆ Par indépendance, on a :

$$E(L_n) = E(X_1 Y_n) = E(X_1)E(Y_n) = E(X_1)E(L_{n-1})$$

Comme $E(X_1) = \dfrac{1}{2}$, on obtient donc $E(L_n) = \dfrac{1}{2}\, E(L_{n-1})$.

Or $E(L_1) = E\big(X_1(1 - X_2)\big) = E(X_1)E(1 - X_2) = \dfrac{1}{4}$, d'où par récurrence :

$$E(L_n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Exercice 3-33

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et a un nombre réel strictement positif. On pose $X = |T| + a$, où $|T|$ est la valeur absolue de T.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X, en fonction de celle Φ de T.

2. En déduire une densité f_a de X.

3. Montrer que X admet des moments de tous ordres. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Solution :

1. On a $X(\Omega) = [a, +\infty[$ et $\forall\, x \geq a$:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(|T| \leq x - a) = 2\Phi(x - a) - 1$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

2. Par dérivation, une densité f_a de X est donc la fonction définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-a)^2/2} & \text{si } x > a \end{cases}$$

3. La fonction f_a est négligeable devant toute puissance de x, ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2.x^n f_a(x) = 0$ et montre, par référence classique, que

$\displaystyle\int_a^{+\infty} x^n f_a(x)\,dx$ converge. La variable X admet des moments de tous ordres.

$\star$ $E(X-a) = E(|T|) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$, d'où :

$$E(X) = a + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

$\star$ $E\big((X-a)^2\big) = E(T^2) = V(T) = 1$ (car $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$). D'où :

$$V(X) = V(X-a) = E\big((X-a)^2\big) - [E(X-a)]^2 = \frac{\pi-2}{\pi}$$

Exercice 3-34

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ et de fonction de répartition F. On pose :

$$U_n = \min\{X_1, \dots, X_n\} \text{ et } V_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_n (resp. G_n) de la variable U_n (resp. V_n).

2. Soient a un nombre réel et b un réel strictement positif. On définit les variables Y_n et Z_n en posant :

$$Y_n = a + bnF(U_n) \quad \text{et} \quad Z_n = a + bn(1 - F(V_n))$$

a) Déterminer la fonction de répartition H_n (resp. L_n) de Y_n (resp. Z_n). Que constatez-vous ?

b) Pour x fixé, déterminer la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que les variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ de fonction de répartition F. Que remarquez-vous ?

Solution :

1. $\star$ Par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(U_n \leq x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P(X_1 \geq x)\dots P(X_n \geq x) \\ &= 1 - \big(1 - F(x)\big)^n \end{aligned}$$

Donc : $F_n(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}$, si $x > 0$.

Par conséquent, $U_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

$\star$ $G_n(x) = P(V_n \leq x) = P(X_1 \leq x)\dots P(X_n \leq x) = \big(F(x)\big)^n$

Donc : $G_n(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $G_n(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})^n$, si $x > 0$.

2. a) $\star$ La variable aléatoire Y_n est à valeurs dans $[a, a+bn]$, et pour $x \in \,]a, a+bn[$, il vient :

$$H_n(x) = P(a + bnF(U_n) \leq x) = P[F(U_n) \leq \frac{x-a}{bn}]$$
$$= P[1 - \exp(-\lambda U_n) \leq \frac{x-a}{bn}] = P[U_n \leq -\frac{1}{\lambda} \ln\big(\frac{bn-x+a}{bn}\big)]$$
$$= 1 - \exp\big(n \ln(\frac{bn-x+a}{bn})\big) = 1 - \big(\frac{bn-x+a}{bn}\big)^n.$$

⋆ La variable Z_n est aussi à valeurs dans $[a, a+bn]$, et pour $x \in]a, a+bn[$, il vient :

$$L_n(x) = P[a + bn(1 - F(V_n)) \leq x] = P(1 - F(V_n) \leq \frac{x-a}{bn})$$
$$= P(\exp(-\lambda V_n) \leq \frac{x-a}{bn}) = P(V_n \geq -\frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x-a}{bn}))$$
$$= 1 - \big(1 - \exp(\ln(\frac{x-a}{n}))\big)^n = 1 - \big(1 - \frac{x-a}{bn}\big)^n = 1 - \big(\frac{bn-x+a}{bn}\big)^n$$

On constate que Y_n et Z_n suivent la même loi.

b) ⋆ Soit $x > a$, on peut écrire, pour n assez grand (de façon à avoir $x \leq a + bn$) :

$$\ln\big[\big(1 - \frac{x-a}{bn}\big)^n\big] = n \ln(1 - \frac{x-a}{bn}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{x-a}{b}.$$

D'où :

$$\text{si } x > a, \lim_{n\to\infty} H_n(x) = 1 - \exp\big(\frac{x-a}{b}\big)$$

et bien entendu, si $x \leq a$, alors la limite est nulle.

3. On a maintenant :

$$\star\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ et } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Des calculs semblables à ceux que l'on vient de faire montrent que les variables Y_n et Z_n suivent encore la même loi que dans le cas précédent.
En fait, la loi des variables Y_n et Z_n est indépendante de F.

Exercice 3-35

1. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b) On définit la variable aléatoire X_1 par $X_1 = \dfrac{1}{1+X}$.
Déterminer la fonction de répartition de X_1. En déduire une densité de X_1.

c) Soit n un entier naturel. Calculer l'espérance de X^n.

/quad d) Montrer que $E(X_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n E(X^n)$.

(on admettra que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{k}$, pour tout $|x| < 1$).

2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p).

a) Rappeler l'espérance et la variance de Y.

b) Calculer l'espérance $m_n(p)$ de la variable aléatoire Y_1 définie par $Y_1 = \dfrac{1}{1+Y}$.

c) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la limite de la suite $(m_n(p))$ lorsque n tend vers l'infini avec np tendant vers λ.

3. On considère deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 suivant la même loi binomiale de paramètres (n, p).

a) Donner la loi de $Z_1 + Z_2$.

b) Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, 2n]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z_1 = i \mid Z_1 + Z_2 = k)$.

Solution :

1. a) On sait que $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/12$.

b) Soit x réel. Alors

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) = P\Big(\frac{1}{1+X} \leq x\Big)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 \\ P(X \geq \dfrac{1-x}{x}) = 1 - F_X\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Une densité de X_1 est alors donnée par :

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [1/2, 1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(X_1) = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t} = \ln 2$$

c) Par le théorème de transfert, on trouve :

$$E(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et, en admettant la décomposition en série de $\ln(1+x)$, pour $|x| < 1$,

$$E(X_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n E(X^n) = \ln 2$$

2. a) On sait que $E(Y) = np$ et $V(Y) = np(1-p)$.

b) Toujours par le théorème de transfert :

$$m_n(p) = E(Y_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k p^k q^{n-k}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k p^k q^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} \frac{1}{p} \int_0^p t^k dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^p \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} t^k \Big) dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^p (t+q)^n dt = \frac{1-q^{n+1}}{p(n+1)}
\end{aligned}$$

c) On a :

$$m_n(p) = \frac{1-(1-p)^n}{p(n+1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{n\ln(1-p)}}{np(1+\frac{1}{n})}$$

Or :

$$n\ln(1-p) = n\ln(1-\frac{np}{n}) \sim -\lambda \text{ (quand } n \to +\infty)$$

Donc $\lim m_n(p) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.

3. a) On sait par le cours que $Z_1 + Z_2$ suit la loi binomiale de paramètres $(2n, p)$.

b) Enfin :

$$\begin{aligned}
P(Z_1 = i \mid Z_1 + Z_2 = k) &= \frac{P(Z_1 = i \cap Z_2 = k-i)}{P(Z_1 + Z_2 = k)} \\
&= \frac{P(Z_1 = i)P(Z_2 = k-i)}{P(Z_1 + Z_2 = k)} \\
&= \frac{C_n^i p^i q^{n-i} C_n^{k-i} p^{k-i} q^{n-k+i}}{C_{2n}^k p^k q^{2n-k}} \\
&= \frac{C_n^i C_n^{k-i}}{C_{2n}^k}
\end{aligned}$$

4

OPTION B/L

Exercice 4-1

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer u_0, u_1, puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + u_{n-1}$.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a + b.\mathrm{e}^{-x} + c.\mathrm{e}^{-2x}$, a, b, c étant trois paramètres réels quelconques.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser une base de E.

4. a) A toute fonction g de E, on associe la fonction $g_1 = \varphi(g)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g_1(x) = \int_0^1 \frac{g(t+x)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,dt$$

Montrer que l'application φ ainsi définie est un endomorphisme de E.

Solution :

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,dx = \big[\ln(\mathrm{e}^x+1)\big]_0^1 = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{2}$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int_0^1 \big(1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\big)\,dx = 1 - \ln\frac{\mathrm{e}+1}{2}$$

Pour $n \geq 1$, $u_n + u_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx} - e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x}dx = \frac{1-e^{1-n}}{n-1}$

2. On a, pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-nx}$, donc $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

Ainsi : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}(1 - e^{-n}) \leq \dfrac{1}{n}$ et, par encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Par définition E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $e_1 : x \mapsto x$, $e_2 : x \mapsto e^{-x}$ et $e_3 : x \mapsto e^{-2x}$.

Vérifions que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, a + b.e^{-x} + c.e^{-2x} = 0$.

$\star$ La considération de la limite en $+\infty$ montre que $a = 0$;

$\star$ il reste donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, b.e^{-x} + c.e^{-2x} = 0$. On peut simplifier par e^{-x} et la considération de la limite en $+\infty$ donne alors $b = 0$;

$\star$ il reste $\forall\, x \in \mathbb{R}, c.e^{-2x} = 0$, d'où $c = 0$.

La famille est bien libre et est donc une base de E.

4. a) Notons $g = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, g_1(x) &= \int_0^1 \frac{\alpha + \beta.e^{-(t+x)} + \gamma.e^{-2(t+x)}}{1+e^{-t}}\,dt\\ &= \alpha\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}}\,dt + \beta.e^{-x}\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt + \gamma.e^{-2x}\int_0^1 \frac{e^{-2t}}{1+e^{-t}}\,dt\\ &= \alpha u_0 + \beta u_1.e^{-x} + \gamma u_2.e^{-2x}\end{aligned}$$

Par conséquent : $g_1 = \alpha u_0 e_1 + \beta u_1 e_2 + \gamma u_2 e_3 \in E$

De plus l'écriture précédente montre que φ est linéaire (ce qui peut se voir également par linéarité de l'intégration), sa matrice relativement à la base (e_1, e_2, e_3) étant :

$$M = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4-2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+1}.

3. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 dx = 1.$

Pour calculer I_1, effectuons une intégration par parties, en intégrant $x \mapsto 1$ en $x \mapsto 1 + x$:

$$I_1 = \int_0^1 1.\ln(1+x)\,dx = \big[(1+x)\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+x}{1+x}\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a : $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$ (et $\ln 2 < 1$) et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \int_0^1 (\ln 2)^n\,dx = (\ln 2)^n$$

et, par encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 1.[\ln(1+x)]^{n+1}\,dx \\ &= \big[(1+x)[\ln(1+x)]^{n+1}\big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 [\ln(1+x)]^n\,dx \end{aligned}$$

Soit : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n$

Affinons alors la majoration obtenue en 1. Pour ε strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{1-\varepsilon} [\ln(1+x)]^{n+1}dx + \int_{1-\varepsilon}^1 [\ln(1+x)]^{n+1}\,dx \\ &\leq (1-\varepsilon)[\ln(2-\varepsilon)]^{n+1} + \varepsilon(\ln 2)^{n+1} \leq [\ln(2-\varepsilon)]^{n+1} + \varepsilon(\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} \leq \varepsilon + \Big(\frac{\ln(2-\varepsilon)}{\ln 2}\Big)^{n+1}$$

Le majorant a pour limite ε lorsque n tend vers l'infini, donc pour n assez grand $\dfrac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} < 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} = 0$.

Or on avait obtenu $(n+1)I_n = 2(\ln 2)^{n+1} - I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1}\big(1 - \dfrac{I_{n+1}}{2(\ln 2)^{n+1}}\big)$ et on peut donc écrire :

$(n+1)I_n \underset{(\infty)}{\sim} 2(\ln 2)^{n+1}$, *i.e.* $I_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$

Exercice 4-3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Par la méthode du pivot :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si $(-1)(\lambda-1)-(2\lambda-\lambda^2)(1-\lambda) = 0$, ce qui donne, en factorisant $(1-\lambda)^3 = 0$.

La seule valeur propre de A est donc 1.

Si A était diagonalisable elle serait semblable à I, donc serait égale à I, ce qui est manifestement faux. Bref, A n'est pas diagonalisable.

Enfin, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y = x \\ x+y+z = y \\ -y+z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite engendrée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. On cherche donc une base (e_1, e_2, e_3) telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$, où f désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A. Nous allons procéder matriciellement :

⋆ La question précédente montre que l'on peut prendre $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

⋆ On cherche $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e_2$, soit :

$\begin{cases} x+y = 1+x \\ x+y+z = y \\ -y+z = -1+z \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} y = 1 \\ z+x = 0 \end{cases}$. On peut prendre $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

⋆ On cherche $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_3$, soit :

$\begin{cases} x+y=x \\ x+y+z=1+y \\ -y+z=z \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} y=0 \\ z+x=1 \end{cases}$. On peut prendre $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui est évident par échelonnement.

Exercice 4-4

Soit X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que la covariance du couple (X, Y) est comprise entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

2. On suppose que la covariance du couple (X, Y) est nulle. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. Notons ρ le coefficient de corrélation entre X et Y. On sait que $\rho^2 \leq 1$, ce qui s'écrit :

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leq V(X)V(Y)$$

Or : $V(X) = p_1(1-p_1) = p_1 - p_1^2 = -(p_1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, donc $V(X) \leq \frac{1}{4}$ (avec égalité seulement pour $p_1 = \frac{1}{2}$).

On a de même $V(Y) \leq \frac{1}{4}$ et donc $|\,\text{Cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{4}$.

2. On a $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Mais X, Y et XY sont des variables de Bernoulli, leur espérance est donc la probabilité qu'elles prennent la valeur 1.
Ainsi l'hypothèse devient :

$$P[(X=1) \cap (Y=1)] = P(XY=1) = P(X=1)P(Y=1)$$

Ce qui signifie que les événements $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants.

D'autre part, on sait que si A et B sont indépendants, il en est de même de $\overline{A}$ et B, ainsi que de A et $\overline{B}$ et également de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
Donc, pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, les événements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, ce qui signifie que X et Y sont indépendantes.

Exercice 4-5

On note S le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.
K est le sous-espace vectoriel des suites constantes, et parmi elles, c est la suite constante dont le terme général est égal à 1.

T est l'application qui, à la suite u de terme général u_n, associe la suite $T(u) = v$, de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
E est le sous-ensemble de S constitué des suites u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S et que $T(E)$ est inclus dans E.

2. Montrer que T est un endomorphisme de S et que, pour toute suite v de S, il existe une et une seule suite u de S telle que $v = T(u)$ et $u_0 = \alpha$, oc α est un réel fixé quelconque.
Calculer alors u_n en fonction de α, n, et de termes de la suite v.
On note a la suite de S telle que $T(a) = c$ et $a_0 = 0$.

Vérifier que les suites c et a appartiennent à E.

3. Soit L l'application de E dans $\mathbb{R}^3$, qui à toute suite u de E, associe le triplet (u_0, u_1, u_2).
Montrer que L est une application linéaire. Est-elle bijective ? Quelle est la dimension de E ?

4. Soit u un élément de E. On pose $v = T(u)$, et $w = T(v)$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer w_n en fonction des termes de la suite u .
Montrer que w est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n et de w_0.

b) Exprimer le terme général v_n de la suite v en fonction de v_0, w_0 et n.

c) Exprimer de même pour $n \geqslant 0$, le terme général u_n de la suite u en fonction de u_0, v_0, w_0 et n, puis en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

d) Expliciter une base de E.

Solution :

1. • E contient la suite nulle, donc n'est pas vide et les propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ montrent que si u et v sont deux suites vérifiant la relation de récurrence définissant E, alors, pour tout scalaire λ, la suite $u + \lambda v$ vérifie encore cette relation. Donc E est stable par combinaison linéaire et est un sous-espace vectoriel de S.

• Si la suite $u : n \mapsto u_n$ appartient à E, alors un simple décalage de l'indice montre que la suite $u_d : n \mapsto u_{n+1}$ appartient aussi à E, donc $v = T(u) = u_d - u$ appartient aussi à E.

2. La linéarité de $d : u \mapsto u_d$ est évidente et donc $T = d - Id$ est un endomorphisme de S.

Supposons qu'il existe une suite u de S telle que $T(u) = v$. Alors :

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = v_0 \\ u_2 - u_1 = v_1 \\ \quad\vdots \\ u_{n+1} - u_n = v_n \\ \quad\vdots \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = u_0 + v_0 \\ u_2 = u_1 + v_1 = u_0 + v_0 + v_1 \\ \quad\vdots \\ u_{n+1} = u_n + v_n = u_0 + v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ \quad\vdots \end{cases}$$

La connaissance de u_0 détermine donc parfaitement la suite u et, par construction même on a bien $T(u) = v$.

On a donc $u_0 = \alpha$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \alpha + \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

Il est évident que $c \in E$.

La suite a étant définie par $a_0 = 0$ et $T(a) = c$, ce qui précède montre que $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = n$. Il est alors facile de vérifier que $a \in E$.

3. La linéarité de L est banale et la relation de récurrence définissant E montre (par récurrence !) qu'une suite de E est parfaitement définie par ses trois premiers termes, ce qui signifie exactement que L est bijective. Ainsi L est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$ et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

4. a) Pour $n \in \mathbb{N}, w_n = v_{n+1} - v_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1}$, soit :

$$4.w_{n+1} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n - 8u_{n+2} + 4u_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = w_n$$

Ainsi la suite w est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = w_0\, \frac{1}{4^n}$.

b) On a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k = v_0 + w_0 \dfrac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$, soit :

$$v_n = v_0 + \frac{4w_0}{3}\big(1 - \frac{1}{4^n}\big)$$

et la formule est valable pour $n = 0$.

c) De la même façon : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$, soit :

$$u_n = u_0 + n\big(v_0 + \frac{4w_0}{3}\big) - \frac{4w_0}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \big(\frac{1}{4}\big)^k$$

Ou encore : $u_n = u_0 + n\big(v_0 + \dfrac{4w_0}{3}\big) - \dfrac{16.w_0}{9}\big(1 - \dfrac{1}{4^n}\big)$

La formule étant encore valable pour $n = 0$.

Il n'y a plus qu'à remplacer v_0 par $u_1 - u_0$ et w_0 par $u_2 - 2u_1 + u_0$, pour obtenir une expression de la forme :

$$u_n = \alpha + \beta n + \gamma \frac{1}{4^n}$$

où α, β, γ s'expriment en fonction de u_0, u_1, u_2.

d) Ce qui précède montre que les suites $n \mapsto 1$, $n \mapsto n$ et $n \mapsto \dfrac{1}{4^n}$ forment une famille génératrice de E. Comme E est de dimension 3, ces trois suites forment une base de E.

Exercice 4-6

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction f_k définie par :

$$f_k(x) = x^k.\mathrm{e}^{|\ln(x^2)|}$$

1. a) Déterminer le domaine de définition de f_k.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_k.

2. Soit X une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 2]$.

a) Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^{|\ln(X^2)|}$

b) Déterminer pour quelles valeurs du réel α, Y^α admet une espérance.

Solution :

1. a) f_k est définie sur $\mathbb{R}^*$ et clairement paire pour k pair, impaire pour k impair. Il suffit donc de faire l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Remarquons que pour $x > 0$,

$$|\ln(x^2)| = 2|\ln x| = \begin{cases} 2\ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -2\ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall\, x \geq 1, f_k(x) = x^{k+2}$ et $\forall\, x \in\,]0, 1], f_k(x) = x^{k-2}$.

On note que les formules se «recollent» pour $x = 1$ et f_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par symétrie, sur $\mathbb{R}^*$. De plus f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$. En revanche, la dérivée à gauche en 1 de f_k vaut $k-2$, tandis que sa dérivée à droite en 1 vaut $k+2$. Ainsi f_k n'est pas dérivable en 1 (ni en -1).

(on pourrait étudier également le problème du prolongement par continuité en 1 et en -1 ...)

2. a) Puisque X prend ses valeurs entre -2 et 2, la variable aléatoire $\ln(X^2)$ prend ses valeurs entre $-\infty$ et $\ln 4$, donc $|\ln(X^2)|$ prend ses valeurs entre 0 et $+\infty$, ce qui signifie que $Y(\Omega) = [1, +\infty[$.

$\forall\, y \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|\ln(X^2)| \leq \ln y) = P(-\ln y \leq \ln(X^2) \leq \ln y) \\ &= P\big[\exp(-\tfrac{1}{2}\ln y) \leq |X| \leq \exp(\tfrac{1}{2}\ln y)\big] = P(\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq \sqrt{y}). \end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

$\star$ Pour $y \geq 4$, on a $F_Y(y) = P[\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq 2] = 2 \cdot \frac{1}{4}(2 - \frac{1}{\sqrt{y}}) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

$\star$ Pour $1 \leq y \leq 4$, $F_Y(y) = P[\frac{1}{\sqrt{y}} \leq |X| \leq \sqrt{y}] = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}})$

Par dérivation, on obtient donc pour densité de Y :

$$\text{Si } y \geq 4,\ f_Y(y) = \frac{1}{4y\sqrt{y}} \text{ ; si } 1 \leq y < 4,\ f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} + \frac{1}{4y\sqrt{y}}$$

b) Sous réserve de convergence, et par le théorème de transfert :

$$E(Y^\alpha) = \int_1^{+\infty} y^\alpha f_Y(y)\, dy$$

Le seul problème est du à la présence de la borne infinie et $y^\alpha f_Y(y) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{4} y^{\alpha - \frac{3}{2}}$.

La règle de Riemann montre alors que Y^α admet une espérance si et seulement si α vérifie : $\alpha - \frac{3}{2} < -1$, *i.e.* si et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$. En particulier Y n'a pas d'espérance.

Exercice 4-7

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux ; f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X+1)P(X+1) - (X-1)P(X-1)\ .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f .

3. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_1 = 2 \text{ ; } \forall n \geqslant 1, u_n = \frac{1}{6}\big((n+1)u_{n+1} - (n-1)u_{n-1}\big)$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E$ vérifiant : $\forall n \geqslant 1, u_n = P(n)$.
En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de u_n en fonction de n.

Solution :

1. La linéarité de f résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et il suffit de vérifier que l'image par f des polynômes de la base canonique de E sont encore éléments de E :

$f(1) = (X+1) - (X-1) = 2$;
$f(X) = (X+1)(X+1) - (X-1)(X-1) = 4X$;
$f(X^2) = (X+1)(X+1)^2 - (X-1)(X-1)^2 = 6X^2 + 2$.

Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

2. La matrice de f relativement à la base canonique de E est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Cette matrice est trigonale supérieure, donc les valeurs de A (donc de f) se lisent sur sa diagonale :

$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} f = \{2, 4, 6\}$$

f a donc 3 valeurs propres et comme $\dim E = 3$, on en déduit que f est diagonalisable et en résolvant les systèmes correspondants, on trouve :

$$E_{(2)}(f) = \operatorname{Vect}(2) \; ; \; E_{(4)}(f) = \operatorname{Vect}(X) \; ; \; E_{(6)}(f) = \operatorname{Vect}(2X^2 + 1)$$

3. $P \in E$ convient si et seulement si $P(1) = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P(n+1) - (n-1)P(n-1) - 6P(n) = 0$$

Or le seul polynôme qui s'annule en tout point de l'ensemble infini $\mathbb{N}^*$ est le polynôme nul.

On doit donc chercher un polynôme $P \in E$ tel que $P(1) = 2$ et $f(P) = 6P$.

La question précédente montre que la solution est le polynôme $\dfrac{2}{3}(2X^2 + 1)$.

On a donc : $\forall n \geq 1, u_n = \dfrac{4}{3}n^2 + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 4-8

Soit b un nombre réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ, avec $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$. Déterminer a pour que la probabilité de l'événement $(a < X \leq a + b)$ soit maximale.

Solution :

On a : $(a < X \leq a+b) = \left(\dfrac{a-m}{\sigma} < \dfrac{X-m}{\sigma} \leq \dfrac{a+b-m}{\sigma}\right)$. Donc

$$f(a) = P(a < X \leq a+b) = \Phi\left(\frac{a+b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation d'une fonction composée :

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = \frac{1}{\sigma}\Phi'\left(\frac{a+b-m}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\Phi'\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi'(t) = \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$ et donc $f'(a)$ est du signe de :

$$g(a) = \exp\left(-\frac{(a+b-m)^2}{\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(a-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

La fonction exp étant strictement croissante, $g(a)$ a même signe que :

$$-\frac{(a+b-m)^2}{\sigma^2} + \frac{(a-m)^2}{\sigma^2}$$

donc a même signe que : $-(a+b-m)^2 + (a-m)^2 = -b(b + 2a - 2m)$

Comme $b > 0$, $f'(a)$ est positif pour $a \leq \dfrac{2m-b}{2}$ et négatif pour $a \geq \dfrac{2m-b}{2}$.

Ainsi f passe par un maximum absolu strict pour $a = \dfrac{2m-b}{2} = m - \dfrac{b}{2}$.

Le maximum valant d'ailleurs $2.\Phi\left(\frac{b}{2\sigma}\right) - 1$
(Noter que le résultat semble clair sur un dessin représentant une densité d'une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, en interprétant la probabilité de l'énoncé en termes d'aires.)