1

ANALYSE

Exercice 1.1.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2xt)\,dt$ converge.
On note $f(x)$ sa valeur.
Montrer de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2xt)\,dt$ converge.
Montrer enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ converge et préciser sa valeur.

2. Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\big|\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos\big(2xt\big) + 2ht\sin\big(2xt\big)\big| \leqslant 2h^2t^2.$$
En déduire que :
$$\Big|f(x+h) - f(x) + 2h\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt\Big| \leqslant 2h^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$$

3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt.$$

4. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = -2xf(x).$$
En déduire que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer la valeur de cette constante (*on recherchera pour cela la valeur de f en* 0).
En conclusion, quelle est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $f(x)$?

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos^2(xt)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin^2(xt)\,dt$ convergent et calculer leurs valeurs respectives.

Solution :

1. Soit x réel. Pour tout t réel, on a :

$$0 \leqslant |\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ converge [considérer une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$], l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$ est absolument convergente, donc convergente. On peut ajouter que pour tout x réel : $|f(x)| \leqslant \sqrt{\pi}$.

De même, pour tout t positif, $0 \leqslant |t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ converge (son calcul est même banal). Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$ converge (absolument) et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$ converge vers la même valeur, puisque son intégrande est paire.

On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$ converge.

On peut ajouter que $\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt\right| \leqslant 2\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = 1.$

2. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Appliquons l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction cosinus à l'ordre 2 sur l'intervalle d'extrémités $2xt, 2(x+h)t$. On obtient pour tout t réel :

$$\big|\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos\big(2xt\big) + 2ht\sin\big(2xt\big)\big| \leqslant 2h^2t^2$$

Comme les intégrales en jeu sont toutes absolument convergentes, on en déduit immédiatement que :

$$\Big|f(x+h) - f(x) + 2h\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt\Big| \leqslant 2h^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$$

3. Il suffit de diviser par h, puis de faire tendre h vers 0 pour obtenir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt.$$

4. Remarquons que pour des raisons de parité, pour tout x réel :

$$f(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt, \quad f'(x) = -4\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$$

Soit x réel. Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, les conditions d'application du théorème d'intégration par parties sont réunies. Aussi :

$$2\int_0^u -2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt = \Big[2\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big]_0^u - 4x\int_0^u \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$$

En faisant tendre u vers l'infini, il vient, pour tout x réel, $f'(x) = -2xf(x)$ ou $\mathrm{e}^{x^2}(f'(x)+2xf(x)) = 0$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Sa valeur est $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Ainsi, pour tout x réel : $f(x) = \sqrt{\pi}.\mathrm{e}^{-x^2}$

5. Soit x réel.

- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,dt$, converge absolument et est nulle puisque son intégrande est impaire.
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos^2(xt)\,dt$ converge d'après les résultats précédents puisque pour tout t réel $\cos^2(xt) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2xt))$ et elle vaut :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+\mathrm{e}^{-x^2})$$

- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin^2(xt)\,dt$ converge d'après les résultats précédents et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}(1-\cos^2(xt))\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{e}^{-x^2}).$$

Exercice 1.2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \sqrt[3]{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.

3. Montrer que $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$ et $u_{n+1} - u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{3u_n}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n}$?

4. Écrire une fonction Pascal de deux variables n et a permettant de calculer u_n lorsque $u_0 = a$.

Solution :

1. On a $u_{n+1}^3 = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n^3 + u_n$. Par suite, puisque l'extraction d'une racine cubique a un sens sur $\mathbb{R}$:

$$u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + u_n}$$

2. On montre par une récurrence immédiate que pour tout n, $u_n > 0$. Cela entraîne que pour tout n, $u_{n+1}^3 > u_n^3$, donc que $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Supposons qu'elle soit majorée ; dans ce cas, elle converge vers une limite ℓ vérifiant par continuité $\ell^3 = \ell^3 + \ell$, soit $\ell = 0$, ce qui est impossible. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est donc pas majorée et, étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

3. $\star$ On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{u_n^2}} \underset{(+\infty)}{\sim} 1$, *i.e.* $u_{n+1} \sim u_n$.

$\star$ De plus, comme au voisinage de 0 : $(1+u)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3}\, u + o(u)$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{u_n^2}} - 1 \right) \underset{(+\infty)}{\sim} u_n \times \frac{1}{3u_n^2} = \frac{1}{3u_n}$$

$\star$ Ainsi : $\dfrac{1}{u_n} \sim 3(u_{n+1} - u_n)$.

Or par télescopage : $\sum_{n=0}^{N} 3(u_{n+1} - u_n) = 3(u_{N+1} - u_0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par application de la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs ou nuls, la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ en résulte.

4. Voici une fonction parmi d'autres possibles

```
function u(n :integer ; a :real) :real
var v :real ;
Begin
v :=a ;
for k :=1 to n do v :=exp(1/3*v*(v*v+1)) ;
u :=v
End ;
```

Exercice 1.3.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$.

1. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   b) Rappeler les valeurs de $f(0)$ et de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que : $\forall\, x > 0, x f(x) < \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

b) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et la calculer.

3. a) On pose $I(a,b) = \int_a^b \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$. Calculer $I(a,b)$ en fonction de f, a et b.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{1/2}^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$.

4. On pose, pour x réel, $g(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}du$.

Montrer que l'intégrale $J = \int_{1/2}^{+\infty} g(x)dx$ converge et la calculer.

Solution :

1. a) $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}dt$.

Sous cette forme, il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

b) $f(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2\pi}$ (*cf.* la loi normale centrée réduite).

2. a) Pour $x > 0$:

$$xf(x) = \int_x^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-t^2/2}dt < \int_x^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

b) Pour $A > 0$:

$$\int_0^A f(x)\,dx = \big[xf(x)\big]_0^A - \int_0^A xf'(x)\,dx = Af(A) + \int_0^A x.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$

Ainsi : $\int_0^A f(x)\,dx = Af(A) - \mathrm{e}^{-A^2/2} + 1$. Or $0 \leqslant Af(A) \leqslant \mathrm{e}^{-A^2/2}$ et donc, par passage à la limite :

$$I \text{ converge et } I = 1.$$

3. a) On a $2u(1-u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2u-1)^2$; on effectue alors le changement de variable $2u - 1 = t$ et :

$$I(a,b) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\int_{2a-1}^{2b-1} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\big[f(2a-1) - f(2b-1)\big]$$

b) Ici, $a = \frac{1}{2}$ et on fait tendre b vers $+\infty$: $\int_{1/2}^{+\infty} \mathrm{e}^{2u(1-u)}\,du = \frac{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}{4}$

4. On a $g(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}f(2x-1)$ et pour $A > \frac{1}{2}$:

$$\int_{1/2}^{A} g(x)\,dx = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\int_{1/2}^{A} f(2x-1)\,dx = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}\int_{0}^{2A-1} f(y)\,dy$$

et, par passage à la limite :

$$J \text{ converge et } J = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}$$

Exercice 1.4.

1. a) Déterminer l'ensemble I des réels x pour lesquels la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k x^k$ converge.

b) Pour tout $x \in I$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose : $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k x^k$.

Calculer $R_n(x)$ et montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n(x)$ converge.

Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(x)$.

2. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} R_k - \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$ en fonction de n et R_n.

b) Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n u_n$ converge.

3. a) On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n u_n$ converge. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)R_n$?

b) En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n u_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

3. Application. Dans cette question $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

a) Pour quelles valeurs de x la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ est-elle convergente ?

On note alors : $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^x}$

Pour quelles valeurs de x la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n(x)$ est-elle convergente ? Exprimer sa somme en fonction de $\zeta(x-1)$.

Solution :

1. a) La série proposée est une série géométrique de raison $-x$, qui converge si et seulement si $|x| < 1$.

b) Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

c) La série définissant $R_n(x)$ est une série géométrique de raison $-x$, commençant par $(-1)^{n+1}x^{n+1}$.
Donc, pour tout $|x| < 1$, il vient :

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la série de terme général $R_n(x)$ est convergente pour tout x tel que $|x| < 1$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}x^{n+1} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

2. a) Notons $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1, R_k = S - \sum\limits_{j=1}^{k} u_j$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_k &= \sum_{k=0}^{n}\Big(S - \sum_{j=1}^{k} u_j\Big) = (n+1)S - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{k} u_j \\
&= (n+1)S - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} u_j = (n+1)S - \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)u_j \\
\sum_{k=0}^{n} R_k &= (n+1)S - (n+1)\sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} ju_j \\
&= (n+1)R_n + \sum_{j=1}^{n} ju_j
\end{aligned}$$

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, la suite (R_n) est décroissante et tend vers 0 car la série $\sum\limits_n u_n$ converge.
Supposons que la série $\sum\limits_n R_n$ converge. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$: $\sum\limits_{k=n}^{2n} R_k < \frac{\varepsilon}{2}$
Donc, par décroissance :

$$\forall\, n \geqslant N, |nR_{2n}| \leqslant \Big|\sum_{k=n}^{2n} R_k\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n+\infty} 2nR_{2n} = 0$. Enfin :

$$(2n+1)R_{2n+1} \leqslant 2nR_{2n} + R_{2n+1} \implies \lim_{n+\infty}(2n+1)R_{2n+1} = 0$$

Ainsi la suite (nR_n) tend vers 0, ce qui entraîne que la série $\sum\limits_j ju_j$ converge.

3. a) Si la série $\sum\limits_n nu_n$ converge, alors :

$$(n+1)R_n = (n+1)\sum_{j=n+1}^{\infty} u_j \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} ju_j$$

cette dernière expression tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

b) On déduit des deux dernières questions que les séries $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} nu_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

4. a) La série de terme général $u_n(x)$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$.

b) Par la question 3, la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} nu_n(x)$ converge, donc si et seulement si $x > 2$.
Enfin,dans ce cas, sa somme vaut évidemment $\zeta(x-1)$.

Exercice 1.5.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1, u_n \in]-1,1[$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$.

1. a) On suppose dans cette question que $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite (p_n) a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1[$. Montrer que la suite (p_n) admet une limite finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c) **Application**. Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$

2. a) On suppose dans cette question que $u_1 = 0$ et $u_n = -\dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$. La suite (p_n) a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que $u_n \in]-1,0[$, pour tout $n \geqslant 1$. Que peut-on dire de la suite (p_n) si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge ?

c) Montrer que la suite (p_n) admet une limite $\lambda > 0$ si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

d) **Application**. Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque l'on a $u_1 = 0$ et $u_n = -\dfrac{2}{n(n+1)}$, pour $n \geqslant 2$.

3. On suppose maintenant que u_n est de signe quelconque et que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente. Que peut-on conclure sur la suite (p_n) ?

Solution :

1. a) On a pour tout $k, 1+u_k = \dfrac{k+1}{k}$. Donc par télescopage :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$$

La suite $(p_n)_n$ tend vers l'infini.

b) On sait que pour tout $k, 1+u_k \geqslant 1$. Aussi $p_n \geqslant 1$ et :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$$

Ainsi la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la suite $(\ln p_n)_n$ admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_k \ln(1+u_k)$ converge.

- si u_n ne tend pas vers 0, alors $\ln(1+u_n)$ ne tend pas vers 0, et la série $\sum_k \ln(1+u_k)$ diverge grossièrement.
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et, par la règle d'équivalence pour les séries à termes positifs, la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la série $\sum_n u_n$ converge.

c) Comme la série $\sum_n \dfrac{1}{n(n+2)}$ converge (règle de Riemann), on sait que la suite $(p_n)_n$ admet une limite. Or, en revenant aux sommes partielles, on a :

$$\begin{aligned}
\ln p_N &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right] \\
&= 2\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) \\
&= 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln n - \sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) = \ln 2 + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{N\to+\infty} p_N = 2$.

2. a) Comme dans la question précédente pour tout $k, 1+u_k = \dfrac{k-1}{k}$. Donc

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) On sait que pour tout $k, 1+u_k \geqslant 0$. Aussi

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$$

Ainsi la suite $(p_n)_n$ admet une limite si et seulement si la suite $(\ln p_n)_n$ admet une limite c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_k \ln(1+u_k)$ converge.

On suppose que la série $\sum_n u_n$ diverge.

- si u_n ne tend pas vers 0, alors $\ln(1+u_n)$ non plus et la série à termes négatifs $\sum_k \ln(1+u_k)$ diverge vers $-\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$,
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et la série à termes négatifs $\sum_k \ln(1+u_k)$ diverge vers $-\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

c) On vient de voir que si la série $\sum_n u_n$ diverge, alors la suite $(p_n)_n$ ne tend pas vers une limite $\lambda > 0$.

Réciproquement si $\lim_{n\to\infty} p_n = \lambda > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \ln p_n = \ln \lambda$. Ceci entraîne que la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge et donc que $\lim_{n\to\infty} \ln(1+u_n) = 0$. Ainsi on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$, ce qui entraîne que la série $\sum_n u_n$ converge.

d) On a $1+u_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$. Ainsi :

$$p_n = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+2)}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n}(k+1)} = \frac{1}{n}\times\frac{n+2}{3}$$

dont la limite est $1/3$.

3. Si la série $\sum |u_n|$ converge, son terme général tend vers 0. Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$$

et comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, on a, à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leqslant |u_n|$.

Ainsi la série $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge, ce qui entraîne la convergence de la suite $(p_n)_n$.

Exercice 1.6.

Soit a un réel positif ou nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

On note u l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui à tout réel a associe $u(a)$.

2. Montrer que $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que l'application u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Calculer $u(0)$, puis $\lim_{a\to+\infty} u(a)$.

5. Déterminer l'application réciproque de u.

6. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}^+$.

7. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'elle est également dérivable à droite en 0. Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $u'(a)$, ainsi que la valeur de la dérivée à droite en 0.

8. Esquisser l'allure de la courbe représentant u.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto P_a(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P_a'(x) = 3x^2 + a$. Pour tout a, la fonction P_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} P_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_a(x) = +\infty$, P_a réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même ; 0 a donc un unique antécédent que l'on note $u(a)$.

2. Comme P_a est une fonction strictement croissante et que $P_a(0) = -1$, on a $u(a) > 0$, donc u est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Soit $0 \leqslant a < b$. On a :

$$\begin{aligned} P_a(u(b)) &= u(b)^3 + au(b) - 1 = u(b)^3 + bu(b) - 1 + (a-b)u(b) \\ &= (a-b)u(b) < 0. \end{aligned}$$

Or, P_a est une fonction strictement croissante : on a donc $u(b) < u(a)$ et u est strictement décroissante.

4. $u(0)$ est la racine positive de l'équation $P_0(x) = x^3 - 1 = 0$ donc $u(0) = 1$. Par ailleurs $au(a) = 1 - u(a)^3 \leqslant 1$; donc $0 < u(a) \leqslant \dfrac{1}{a}$, ce qui entraîne :

$$\lim_{a \to +\infty} u(a) = 0.$$

5. On sait que $u(a) \neq 0$ (on a même $u(a) \geqslant 1$). La relation définissant $u(a)$ permet donc d'écrire :

$$a = \frac{1 - u(a)^3}{u(a)}$$

Ainsi l'application réciproque de u sur $[1, +\infty[$ est $u^{-1} : t \mapsto \dfrac{1-t^3}{t}$.

6. La fonction u^{-1} est clairement continue sur $[1, +\infty[$, donc u est continue sur $\mathbb{R}^+$, la continuité en 0 s'entendant à droite.

7. La fonction u^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$(u^{-1})'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t = -\frac{1 + 2t^3}{t^2}.$$

Cette dérivée n'étant jamais nulle, u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (la dérivée en 0 s'entendant à droite) et :

$$\forall\, a \geqslant 0, u'(a) = \frac{1}{(u^{-1})'(u(a))} = -\frac{u(a)^2}{1 + 2u(a)^3}$$

et comme $u(a)^3 = 1 - au(a)$, il vient :

$$\forall\, a \geqslant 0, u'(a) = -\frac{u(a)^2}{3 - 2au(a)}$$

En particulier la dérivée en 0 à droite de u vaut : $u'(0) = -\frac{1}{3}$.

8. L'allure de la courbe représentant u se déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle de u^{-1} dont le tracé est élémentaire.

Exercice 1.7.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n.\mathrm{e}^{-t}}{1+nt}dt$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n cette intégrale.

2. a) Soit $J_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du$. Montrer que J_n est équivalent à $\ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) En déduire une constante C telle que I_n soit équivalent à $C\ln(n)$ pour n tendant vers l'infini.

3. a) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la série de terme général $\dfrac{n.\mathrm{e}^{-k}}{1+nk}$ (k décrivant $\mathbb{N}$) est convergente. On note alors $S(n)$ sa somme.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leqslant S(n) - n \leqslant I_n$.

c) En déduire une constante D telle que $S(n)$ soit équivalent à nD lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. La règle de Riemann prouve donc la convergence de cette intégrale.

2. a) $\ln(n) - J_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \frac{du}{u} - \int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}du = \int_{1/n}^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du$

Comme $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u} = 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est positive et bornée sur $[0,1]$; si on note M un majorant de cette fonction, on a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \ln(n) - J_n \leqslant M$$

En particulier $J_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln(n)$.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt = \mathrm{e}^{1/n}\int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy$ (on a effectué le changement de variable $y = t + \dfrac{1}{n}$)

Soit : $I_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} \displaystyle\int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy = \int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,dy \underset{(n\to\infty)}{\sim} \ln(n)$. Donc $C = 1$.

3. a) On a : $0 \leqslant \dfrac{n.\mathrm{e}^{-k}}{1+nk} \leqslant n.\mathrm{e}^{-k}$. La série majorante est une série géométrique de raison e^{-1}, donc convergente et la convergence de la série proposée s'en déduit, pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où :

$$\forall\, k \geqslant 1, \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\frac{1}{n}+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{n}+t}\,dt$$

En sommant, pour k variant de 1 à l'infini et en ajoutant le terme d'indice $k = 0$, on obtient :

$$0 \leqslant S(n) - n \leqslant I_n$$

c) Il résulte du b) que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} = 1$, *i.e.* $S(n) \underset{(\infty)}{\sim} n$

Exercice 1.8.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

Montrer que cette intégrale est convergente. Calculer I_0 et I_1.

Étudier la monotonie de la suite (I_n). En déduire sa convergence.

2. a) Montrer que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite (I_n).

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}I_n$.
Montrer que les suites (J_n) et (K_n) sont adjacentes.
En déduire l'existence d'un réel α strictement positif tel que $I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$ au voisinage de $+\infty$.

4. a) A l'aide de la relation de récurrence de la question 2. a), trouver une expression de I_n utilisant C_{2n}^n.

b) On admettra la formule de Stirling : au voisinage de $+\infty$, $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
Déterminer α.

Solution :

1. $\star$ La fonction à intégrer est continue sur $[0,1[$ et équivalente en 1 à $\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$; la règle de Riemann montre que l'intégrale converge.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \big[-2\sqrt{1-x}\big]_0^1 = 2.$$
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1-(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = I_0 - \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = 2 + \frac{2}{3}\big[(1-x)^{3/2}\big]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$\star$ Enfin, $\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ donne $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

2. a) En intégrant par parties, pour $n \geqslant 1$:

$$I_n = \big[x^n(-2\sqrt{1-x})\big]_0^1 + 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx = 2n\int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

soit : $I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$ et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$$

b) $v_n = \ln\big(\frac{I_n}{I_{n-1}}\big) = -\ln\big(1 + \frac{1}{2n}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

La série de terme général v_n est une série à termes tous négatifs. Son terme général est équivalent à celui d'une série divergente : $\sum v_n$ diverge et on peut même dire que ses sommes partielles tendent vers $-\infty$.

Par télescopage : $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\big(\frac{I_n}{I_0}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(I_n) = -\infty$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

3. Pour $n \geqslant 2$:

$\star$ $\dfrac{J_n}{J_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times \dfrac{2n}{2n+1} > 1$ (en élevant au carré) : (J_n) croît.

$\star$ $\dfrac{K_n}{K_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \dfrac{2n}{2n+1} < 1$ (encore en élevant au carré) : (K_n) décroît.

$\star$ $K_n - J_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})I_n = \dfrac{I_n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Les suites (J_n) et (K_n) sont bien adjacentes, donc sont convergentes de même limite notée α et on a $\alpha \geqslant J_1 > 0$.
Ainsi $\sqrt{n}I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et : $\quad I_n \sim \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

4. a) $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{2}{3}\, I_0 = \dfrac{2(2^n.n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)\mathrm{C}_{2n}^n}$

b) On a $\mathrm{C}_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}2\pi n} = 2^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, d'où :

$$I_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \qquad \text{d'où } \alpha = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 1.9.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points b et 1, démontrer que, pour tout réel b de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leqslant b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

4. On pose, pour tout entier n non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ est convergente (utiliser la formule de la question 2 puis un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{t^{\alpha n}}$. Comme $\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$, on a $\alpha n > 1$ et la convergence de l'intégrale résulte de la règle de Riemann.

2. En intégrant par parties, directement avec la borne $+\infty$, puisque cela n'introduit pas d'ambiguté :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\, dt = \Big[-t \times \frac{\alpha n t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \Big]_0^{+\infty} + \alpha n \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt$$

Soit : $u_n(\alpha) = \alpha n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + t^\alpha - 1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\, dt = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$

c'est-à-dire :

$$\forall\, n \geqslant 1, u_{n+1}(\alpha) = \frac{\alpha n - 1}{\alpha n}\, u_n(\alpha)$$

et, par récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 1, u_n(\alpha) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\alpha(n-k) - 1)}{\alpha^{n-1}(n-1)!} u_1(\alpha)$$

3. a) $\forall t \geqslant 0, 1+t^\alpha \geqslant 1$, donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ et en intégrant :

$$u_{n+1}(\alpha) \leqslant u_n(\alpha)$$

La suite $(u_n(\alpha))_n$ est décroissante et minorée par 0, donc est convergente.

b) $\star$ Clairement $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant b$

$\star$ De même $\displaystyle\int_b^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant (1-b)\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}$

$\star$ Enfin, sur $[1, +\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$, d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \leqslant \Big[\frac{1}{(1-\alpha n)t^{\alpha n-1}}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha n-1}$$

D'où le résultat par application de la relation de Chasles.

c) b étant fixé, par prolongement des inégalités à la limite, on obtient :

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n(\alpha) \leqslant b$$

et ceci étant valable pour tout $b \in]0,1[$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(\alpha) = 0$.

4. a) Pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = \ln\big(\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\big) + \dfrac{1}{\alpha}\ln\big(1+\dfrac{1}{n}\big)$

Or $\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = 1 - \dfrac{1}{\alpha n} \implies \ln\big(\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}\big) = -\dfrac{1}{\alpha n} - \dfrac{1}{2\alpha^2 n^2} + o(n^{-2})$, et :

$$\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(n^{-2})$$

Donc $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\dfrac{1}{2n^2}\big(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\big) + o(n^{-2})$ et la règle de Riemann donne la convergence de la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$, c'est-à-dire, par télescopage, de la suite $w_n(\alpha)$.

b) En notant $T(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(\alpha)$, on a donc :

$\ln u_n(\alpha) + \dfrac{1}{\alpha}\ln n = T(\alpha) + o(1)$, *i.e.* :

$$u_n(\alpha) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\mathrm{e}^{T(\alpha)+o(1)} \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}}\mathrm{e}^{T(\alpha)}, \text{ donc } K(\alpha) = \mathrm{e}^{T(\alpha)}$$

Exercice 1.10.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On lui associe la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \geqslant 0$, par :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Pour tout x réel tel que les séries suivantes convergent, on pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \geqslant 0, a_n = (-1)^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions a et A.

b) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge et déterminer sa valeur.

2. Soit α un réel non nul. On pose dans cette question, pour tout $n \geqslant 0, a_n = \alpha^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions a et A.

b) Déterminer, suivant les valeurs de α, l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$.

c) Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge-t-elle ? Déterminer alors sa valeur.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est convergente. On note $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

a) Soit (c_n) une suite de réels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}\Big) = 0$$

b) En utilisant le reste de la série convergente $\sum\limits_n a_n$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x)$ existe et la calculer.

Solution :

1. a) On a immédiatement :

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x}, A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Ces deux fonctions sont définies pour tout x réel.

b) Il est immédiat que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}A(x) = \frac{1}{2}$.

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}a(x)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}dx = \frac{1}{2}$.

2. a) On a : $a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Cette fonction est définie pour tout x réel. De plus :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

et :

$$A(x) = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\alpha^{n+1})\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-\alpha}(\mathrm{e}^{x} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha x})$$

Cette fonction est définie pour tout x réel.

b) On a :

$$\mathrm{e}^{-x}A(x)=\frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-1)x})$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}A(x)$ existe si et seulement si $\alpha<1$. Sa valeur est alors $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

c) On a $\mathrm{e}^{-x}a(x)=\mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}a(x)dx$ converge si et seulement si $\alpha<1$.
Dans ce cas, sa valeur est $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

3. a) Soit $\varepsilon>0$. Il existe N tel que si $n\geqslant N$, alors $|c_n|\leqslant\varepsilon$. Écrivons

$$\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\frac{x^n}{n!}\Big)=\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{N}c_n\frac{x^n}{n!}\Big)+\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty}c_n\frac{x^n}{n!}\Big)$$

On a :

$$\Big|\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty}c_n\frac{x^n}{n!}\Big)\Big|\leqslant\varepsilon.\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)<\varepsilon$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{N}c_n\frac{x^n}{n!}\Big)=0$$

puisque le second terme de ce produit est un polynôme.

b) On écrit $A_n=A-R_n$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}R_n=0$. On a alors :

$$\mathrm{e}^{-x}A(x)=\mathrm{e}^{-x}\Big[Ae^x-\sum_{n=0}^{+\infty}R_n\frac{x^n}{n!}\Big]$$

et, par la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}A(x)=A=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.$$

Exercice 1.11.

Soient $A=(0,1)$, $B=(-1,1)$, $C=(-1,-1)$, $D=(0,-1)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=-2x^3-x^2-y^2+5$.

1. Montrer que la restriction de f au rectangle $ABCD$ (notée encore f) est bornée.

2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur le rectangle $ABCD$.

Solution :

1. La fonction f est continue sur le fermé borné $ABCD$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes.

2. Soit (x,y) un point où f admet un extremum. Si (x,y) appartient à (l'ouvert) l'intérieur du rectangle, f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en (x,y) , et (x,y) est un point critique de f. Il vérifie donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x^2 - 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y = 0$$

Il existe deux solutions : $O = (0,0), E = (-1/3, 0)$, mais seul le second appartient à l'intérieur du rectangle.

En ce second point, on a avec les notations de Monge : $r = 2$, $s = 0$, $t = -2$, $s^2 - rt = 4 > 0$. Il s'agit d'un point col.

Les extremums de f se trouvent donc à la frontière de $ABCD$.

- Sur $[AB]$, $y = 1, x \in [-1,0]$, $f(x,y) = -2x^3 - x^2 + 4$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1,0]$ montre que son maximum est atteint en $x = -1$ et vaut 5, et que son minimum est atteint en $x = -1/3$ et vaut 107/27.
- Sur $[BC]$, $x = -1, y \in [-1,1]$, $f(x,y) = 6 - y^2$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1,0]$ montre que son maximum est atteint en $x = 0$ et vaut 6, et que son minimum est atteint en $x = 1$ et $x = -1$ et vaut 5.
- Sur $[AD]$, $x = 0, y \in [-1,1]$, $f(x,y) = 5 - y^2$. Une étude de cette fonction sur l'intervalle $[-1,1]$ montre que son maximum est atteint en $y = 0$ et vaut 5, et que son minimum est atteint en $y = 1$ et $y = -1$ et vaut 4.

En conclusion, le maximum de f vaut 6 et est atteint en $(-1,0)$ et le minimum de f vaut 107/27 et est atteint en $(-1/3, 1)$ et $(-1/3, -1)$.

Exercice 1.12.

1. Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = \mathrm{e} - 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = -1 + nu_{n-1}$.
Quelles sont les limites possibles de cette suite ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} dx$.

a) Déterminer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers l'infini.

b) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la limite de la suite (u_n) puis que :

$$I_n = n!\big(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big)$$

3. Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $v_0 = a - 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = -1 + nv_{n-1}$.
Montrer que si $a \neq \mathrm{e}$, la suite (v_n) est divergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

5. Pourquoi la plupart des calculatrices sur lesquelles on programme la suite (u_n) vous inciteront à une mauvaise conclusion sur la limite de cette suite ?

Solution :

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.
Si on avait $\ell 0$, alors $n.u_{n-1}$ serait de limite infinie et la relation $u_n = -1 + nu_{n-1}$ conduit à une contradiction. La seule limite réelle possible est donc 0 (mais *a priori* rien ne dit que la suite converge et on ne peut exclure que la suite soit de limite infinie).

2. a) On peut écrire :

$$\int_0^1 x^n dx \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n dx$$

Donc : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

b) Une intégration par parties donne facilement

$$I_n = -1 + nI_{n-1}.$$

c) $\star$ Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}dx = \mathrm{e}-1$, les suites (I_n) et (u_n) vérifient la même relation de récurrence à un cran et ont même terme initial, donc concident.
En particulier :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

$\star$ La relation $I_n = -1 + nI_{n-1}$ donne, en divisant par $n!$:

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{-1}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

En sommant ces relations à partir de $n = 1$, et avec $I_0 = \mathrm{e}-1$, il vient :

$$I_n = n!\big(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\big)$$

3. Posons pour tout $n \geqslant 0, w_n = u_n - v_n$. Alors $w_0 = \mathrm{e} - a$, et pour tout $n \geqslant 1, w_n = nw_{n-1}$.
Ainsi pour tout $n \geqslant 0, w_n = n!w_0$. Cette dernière suite ne converge que si $w_0 = 0$.
La suite (u_n) étant convergente, la suite (v_n) converge si et seulement si $v_0 = u_0$.

4. Les relations :

$$\begin{cases} u_{n+2} &= -1 + (n+2)u_{n+1} \\ u_{n+1} &= -1 + (n+1)u_n \end{cases}$$

donnent :

$$u_{n+2} = -n - 3 + (n+2)(n+1)u_n$$

soit :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{n+3}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, pour n assez grand $|u_n| \leqslant 1$ et $\left|\dfrac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Le terme prépondérant est donc $\dfrac{1}{n+1}$ et :

$$u_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

5. La valeur de e contenue en mémoire des calculatrices numériques est une valeur approchée de la valeur exacte de e (car une calculatrice ne reconnait que des nombres décimaux, ou parfois aussi des nombres rationnels). Ainsi, la suite (u_n) programmée sur une telle calculatrice est en fait une suite (v_n) qui divergera vers l'infini.

Exercice 1.13.

On considère deux nombres réels strictement positifs u_0 et v_0. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ en posant pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] \\ \dfrac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}\right] \end{cases}$$

1. Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que l'on a :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. On se propose de montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

a) Montrer par récurrence que $v_n \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

c) Terminer en montrant que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

3. Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

Solution :

1. Après réduction, l'inégalité $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ est équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui semble raisonnable !
De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si $a = b$.

2. a) On voit par une récurrence immédiate que u_n et v_n sont deux réels positifs, pour tout $n \geqslant 1$. On applique l'inégalité de la question précédente et il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \geqslant \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} = v_{n+1}$$

b) Comme $v_n \leqslant u_n$, il vient :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n$$

Ainsi la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a également :

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right] \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n}\right] = \frac{1}{v_n}$$

Ainsi la suite $(v_n)_n$ est croissante.

c) Les relations de récurrence impliquent que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \leqslant \frac{u_n - v_n}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ et par récurrence :

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$$

et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
Ceci achève de prouver que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

3. Soit ℓ la limite commune de ces deux suites. On remarque que :

$$v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \implies u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n = \cdots = u_0v_0.$$

Par passage à la limite, il vient $\ell^2 = u_0v_0$ et par positivité :

$$\ell = \sqrt{u_0v_0}.$$

Exercice 1.14.

On désignera par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}.$$

a) Etudier les branches infinies de f.

b) Faire une étude des variations, de la convexité de f et donner une représentation graphique de f.

c) Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

2. On considère la fonction g définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par

$$g(x,y) = x\ln y - y\ln x$$

a) Montrer que g est de classe C^∞.

b) Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de g.

c) Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de g.

Solution :

1. a) Par les théorèmes de comparaison, il vient $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = -\infty$.

Ainsi la droite d'équation $t = 0$ est asymptote à la courbe représentant f au voisinage de 0^+.

De plus

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) - t = -\infty$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, on a une direction asymptotique d'équation $y = t$ et la courbe représentative présente une branche parabolique oblique.

b) La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et un calcul élémentaire donne, pour tout $t > 0$:

$$f'(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} > 0, \qquad f''(t) = \frac{t-2}{t^3}$$

Il en découle que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, admet un point d'inflexion en $t = 2$, est concave sur l'intervalle $]0,2]$ et convexe sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

c) Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et comme

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = -\infty, \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty,$$

par le théorème de la bijection, il existe une seule valeur de $t > 0$ pour laquelle $f(t) = 0$; cette valeur est $t = 1$.

2. a) La fonction g est de classe C^2 sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, en utilisant les théorèmes du cours sur les sommes et produits de fonctions deux fois dérivables.

b) Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \ln y - \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y} - \ln x$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

c) Les points critiques sont donnés par $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, soit :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{\ln x} \\ \ln x - \ln(\ln x) - \dfrac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

Par la première question, le seul point critique est le point (e,e). D'autre part, avec les notations de G. Monge, en ce point :

$$r = \frac{1}{\mathrm{e}}, s = 0, t = -\frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ d'où } s^2 - rt > 0.$$

Le point (e,e) n'est donc pas un extremum local. Donc ce n'est pas non plus un extremum global.

Exercice 1.15.

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la relation $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x \sin t}\, dt$.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, \mathrm{e}^{|u|}$.

2. En déduire que, pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Big|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t} \sin t\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{2}\, h^2\, \mathrm{e}^{|h|}\, \varphi(x).$$

3. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t} \sin t\, dt.$$

Indiquer sans démonstration pourquoi φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée seconde.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$.

5. Étudier la variation de $x \mapsto x - \varphi(x)$ et montrer qu'il existe un et un seul réel x tel que $\varphi(x) = x$.
On note α ce réel. Montrer que $0 < \alpha < 1$. *On justifiera (et utilisera) que, pour tout* $t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$. *On admettra que* $\frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) < 0{,}993$.

On considère maintenant une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi\big(\varphi(x)\big) < \frac{\pi}{2}\cdot$
(*Par conséquent,* $0 < u_2 < \frac{\pi}{2}\cdot$)
Montrer aussi que, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$, $-1 < \varphi'(x) < 0$.

7. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_2 = \alpha$?

8. On suppose que $u_2 < \alpha$. Montrer que $u_2 < \alpha < u_3$ et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$.
Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.
Montrer que, pour tout $x \in [u_2, u_3]$, $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(u_2)| < 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

9. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_2 > \alpha$?

Solution :

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment $[0,u]$ donne :

$$|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} \sup_{[0,u]} |\exp''|$$

Si $u > 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''| = \mathrm{e}^u$, si $u \leqslant 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''| = \mathrm{e}^0 = 1$, et dans les deux cas on a bien : $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^{|u|}$.

2. En plaçant tout sous la même intégrale :

$$\begin{aligned}
\Delta(h) &= \left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t} \sin t\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}(\mathrm{e}^{-h\sin t} - 1 - h\sin t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}|\mathrm{e}^{-h\sin t} - 1 - h\sin t|\,dt \\
&\leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\frac{h^2\sin^2 t}{2}\mathrm{e}^{|h|\sin t}\,dt \leqslant \frac{h^2\mathrm{e}^{|h|}}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\,dt \leqslant \frac{h^2\mathrm{e}^{|h|}}{2}\varphi(x).
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a donc :

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} -\,\mathrm{e}^{-x\sin t}\sin t\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}|h|\mathrm{e}^{|h|}\varphi(x)$$

Par encadrement, on en déduit que φ est dérivable au point x, avec :

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\sin t\,dt$$

Le même type de calcul montre que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\sin t}\sin^2 t\,dt$$

4. Le théorème de positivité de l'intégrale montre que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) < 0 \text{ et } \varphi''(x) > 0.$$

5. La fonction $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle s'annule donc en au plus un réel.

$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0$
$\delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0$

En effet, par concavité de la fonction sinus sur $[0,\pi/2]$, on a $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$ et donc

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\sin t}dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2t/\pi}dt = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) < 1.$$

De tout ceci, il résulte qu'il existe un unique α tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$.

6. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x \sin t}$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration $[0, \pi/2]$, on a $\varphi(x) > 0$. Comme φ est strictement décroissante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

Soit $x > 0$, on sait déjà que $\varphi'(x) < 0$. Comme φ' est strictement croissante :

$$\forall\, x > 0, \varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$$

7. Si $u_2 = \alpha$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 2. On peut même dire que cette suite est constante, puisque φ étant injective l'équation $\varphi(x) = \alpha$ n'admet que la solution α et donc $u_1 = \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

8. $\star$ Comme φ décroît strictement : $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$, soit $u_3 > \alpha$, et par une récurrence simple :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$$

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\exists\, c \in [\alpha, u_n] \subset \mathbb{R}_+^*, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(c)(u_n - \alpha)$$

Il s'ensuit que $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$.
La suite de terme général $|u_n - \alpha|$ est strictement décroissante et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \alpha - u_{2n+2} < \alpha - u_{2n}, \text{ soit } u_{2n} < u_{2n+2}.$$

On conclut que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ croît (strictement) et comme φ est décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît (strictement).
$\star$ Pour tout $x \in [u_2, u_3], \varphi'(u_2) \leqslant \varphi'(x) < 0$ et $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(u_2)| < 1$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |\varphi'(u_2)|.|u_n - \alpha|$.
Ainsi $\forall\, n \geqslant 2, |u_n - \alpha| \leqslant |\varphi'(u_2)|^{n-2}|u_2 - \alpha|$ et donc :

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

9. Si $u_2 > \alpha$, alors $0 < u_1 < \alpha$ et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs.

Exercice 1.16.

1. Étudier la convergence de la suite de terme général $p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs telle que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que la série de terme général u_k converge.
[On pourra chercher à majorer $\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k$, pour $p \geqslant 1$.]

Solution :

1. Étudions la suite $\big(\ln(p_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+\frac{1}{2^k})$$

Or $v_k = \ln(1+\dfrac{1}{2^k})$ est positif et $v_k \sim \dfrac{1}{2^k}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi la série de terme général v_k est convergente et si on note ℓ sa somme, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite e^{ℓ}.

2. On remarque que pour tout $p \geqslant 1$

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k = \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k + \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \leqslant \big(1+\frac{1}{2^{p-1}}\big) \sum_{k=1}^{2^{p-1}} u_k$$

soit : $\sigma_p \leqslant \big(1+\frac{1}{2^{p-1}}\big)\sigma_{p-1}$.

Par récurrence, il vient donc : $\sigma_p \leqslant \sigma_0 \prod\limits_{k=1}^{p} \big(1+\frac{1}{2^{k-1}}\big) = u_1 \prod\limits_{k=0}^{p-1} \big(1+\frac{1}{2^k}\big)$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la première question étant convergente, la suite $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par une constante M (que l'on peut prendre égale à $u_1\mathrm{e}^{\ell}$, puisque la suite (p_n) est croissante).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant 2^{p_n}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sigma_{p_n} \leqslant M$$

La série $\sum u_n$ étant à terme positifs et ses sommes partielles étant majorées, cela signifie qu'elle converge.

Exercice 1.17.

Soit f l'application définie par : $f(x) = \exp(-\lambda x^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > \frac{\mathrm{e}}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}$ et que ℓ vérifie : $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.

3. a) On pose $g = f \circ f$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ ne peut admettre de solution que sur $]0,1[$. Vérifier que $g(\ell) = \ell$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet trois solutions sur $]0,1[$: a, b et ℓ. Vérifier que ℓ est strictement compris entre a et b.

c) Déterminer les limites des suites (u_{2n}) et de (u_{2n+1}).

Solution :

1. f est à valeurs strictement positives, donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}^-$.
En revanche $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $\varphi(0) = 1$,

$$\varphi(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}) = \mathrm{e}^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} > 0 \text{ et } \varphi(1) = \mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$$

Ainsi φ s'annule en un point ℓ et un seul et $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$.

2. Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la suite (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$.
La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$ et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires (le signe de $u_{n+2} - u_n$ est le signe contraire de celui de $u_{n+1} - u_{n-1}$, donc celui de $u_n - u_{n-2}$). Comme $u_2 > 0 = u_0$ on peut même dire que (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante. De plus ces deux suites sont bornées et sont donc convergentes.

3. a) Déjà : $f(\ell) = \ell \implies g(\ell) = f\big(f(\ell)\big) = \ell$.
D'autre part, $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \in]0,1]$, donc *a fortiori* $g(x) \in]0,1]$ et l'équation $g(x) = x$ ne peut admettre des solutions que dans l'intervalle $]0,1]$ et on vérifie aisément que $g(1)1$.

b) $g(x) = x \iff -\lambda[f(x)]^2 = \ln x \iff \ln\lambda - 2\lambda x^2 = \ln(-\ln x)$
Soit $h : x \mapsto \ln(-\ln x) + 2\lambda x^2 - \ln\lambda$, pour $0 < x < 1$. La fonction h est dérivable et : $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\big(1 + 4\lambda x^2 \ln x\big)$.
Posons $k : x \mapsto 1 + 4\lambda x^2 \ln x$, on a $k'(x) = 4\lambda x(2\ln x + 1)$ et comme $k(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}) < 0$:

x	0		α		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$		β		1
$k'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$k(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Ce qui donne :

x	0		a		α		ℓ		β		b		1
$h'(x)$		$-$		$-$	0		$+$		0	$-$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(Comme $h(\ell) = 0$ et h croissante sur $[\alpha, \ell]$, on a $h(\alpha) < 0$ et l'équation $h(x) = 0$ a une solution entre 0 et α ; même raisonnement entre ℓ et β ...).
Comme $g(x) = x \iff h(x) = 0$, la question est achevée :

l'équation $g(x) = x$ admet trois solutions : a, ℓ, b.

c) On a $u_0 = 0 < a$. Par croissance stricte de $g = f \circ f$, on a donc :
$u_2 = g(u_0) < g(a) = a$, puis par récurrence $\forall\, n, u_{2n} < a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} \leqslant a$.

La suite (u_{2n}) converge vers un point fixe de g (car g est continue), donc nécessairement vers a.
Alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a) > \ell$, et comme (u_{2n+1}) converge aussi vers un point fixe de g, elle converge vers b.

Exercice 1.18.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{ et } \quad M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k \geqslant 1)$$

2. On suppose $M \neq 0$.
   a) Montrer que $F(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Mx$.
   b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est-elle convergente ?
3. On suppose $M = 0$.

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Solution :

1. Par le changement de variable $t = kT + u$:

$$u_k = \int_0^T \frac{|f(u)|}{u + kT}\,du \geqslant \frac{1}{(k+1)T}\int_0^T |f(u)|\,du$$

Comme $\displaystyle\int_0^T |f(u)|\,du > 0$, la règle de Riemann donne la divergence de la série de terme général positif u_k. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$ et par la règle de comparaison série-intégrale, l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ est divergente.

2. a) Soit $x > 0$, posons $p_x = \lfloor x/T \rfloor$ et $y = x - p_x T$. Par découpage et périodicité :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt + \int_{p_xT}^{p_xT+y} f(t)\,dt = p_x MT + \int_{p_xT}^{p_xT+y} f(t)\,dt$$

On a : $\displaystyle\Big|\int_{p_xT}^{p_xT+y} f(t)\,dt\Big| \leqslant \int_{p_xT}^{(p_x+1)T} |f(t)|\,dt = \int_0^T |f(t)|\,dt$, et $p_x \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{x}{T}$.

Le terme résiduel est borné, donc négligeable devant le premier terme et :

$$F(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} p_x TM \underset{(x\to+\infty)}{\sim} xM$$

b) En intégrant par parties :

$$\int_T^X \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{F(X)}{X} - \frac{F(T)}{T} + \int_T^X \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

On a $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{F(X)}{X} = M$ et $\displaystyle\frac{F(t)}{t^2} \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \frac{M}{t}$. La règle de Riemann prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est divergente et $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ aussi.

3. Le calcul fait au début de la question 2. montre que dans le cas $M = 0$, la fonction F est bornée. En reprenant l'intégration par parties faite en 2. b), la règle de Riemann prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ aussi(et on a vu en 1. que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente).

Exercice 1.19.

Pour α et β réels, on considère l'intégrale

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta\,dt$$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition D de I :

$$D = \Big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\ ,\ I(\alpha,\beta) \text{ converge}\Big\}$$

2. a) Montrer que, pour $(\alpha,\beta) \in D$,

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^\beta\,dx$$

b) Calculer $I(n,0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha,0) \in D$, on a :

$$I(\alpha,n) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) En déduire un équivalent de $I(\alpha,n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$, à n fixé.

c) Déterminer $\lim I(\alpha,n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$, à n fixé.

Solution :

1. Soit $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto (-\ln t)^\alpha(1-t)^\beta$. La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

⋆ On a : $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(0^+)}{\sim} (-\ln t)^\alpha = o(t^{-1/2})$ et par la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est convergente.

⋆ On a : $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{(1^-)}{\sim} (1-t)^{\alpha+\beta}$ (car $\ln t \underset{(1^-)}{\sim} t-1$) et par la règle de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

Ainsi $I(\alpha,\beta)$ existe si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

2. a) Par le changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$, il vient, pour $\alpha+\beta > -1$:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^\beta\,dx$$

b) En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$: $I(n,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = n!$.

3. a) Si $(\alpha,0) \in D$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha,n) \in D$ et toutes les intégrales écrites étant convergentes :

$$I(\alpha,n) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k \mathrm{e}^{-kx}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-(k+1)x}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u} du \quad [\text{on a posé } u = (k+1)x\ ]$$

Soit :

$$I(\alpha,n) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) Si n est fixé, lorsque α tend vers l'infini, tous les termes de la somme ont pour limite 0, sauf celui pour $k=0$ qui vaut 1, donc :

$$I(\alpha,n) \underset{(\alpha\to+\infty)}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$$

c) Or : $\Gamma(\alpha+1) \geqslant \displaystyle\int_2^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}dx \geqslant 2^\alpha \int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où toujours pour n fixé :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha,n) = +\infty$$

Exercice 1.20.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ et f la fonction définie sur D par

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. La fonction f admet-elle des extremums ?

2. Déterminer les points critiques de f. Déterminer les extremums de f.

Solution :

1. La fonction f est continue sur le fermé borné D, donc est bornée et atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

2. La fonction f est polynomiale, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + 2y$$

Ainsi le seul point critique de f est $(0,0)$. Or $f(x,x) = 6x^2$ et $f(-x,x) = -2x^2$, alors que $f(0,0) = 0$. Il n'y a donc pas d'extremum en ce point.

Les extremums de f sur D sont donc atteints en des points de la frontière de D. Or :

$\star$ Pour $x = -1$, $f(-1,y) = y^2 - 4y + 1 = (y-2)^2 - 3$ est maximal pour $y = -1$ de maximum 6 et minimum pour $y = 1$ de minimum -2.

$\star$ Pour $y = 1$, $f(x,1) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, qui est maximal pour $x = 1$, de maximum 6 et minimum pour $x = -1$, de minimum -2.

$\star$ Pour $y = x$, $f(x,x) = 6x^2$, maximal en 1, de maximum 6 et minimal en 0, de minimum 0.

Finalement f est minimale au point $(-1,1)$, de minimum -2 et maximale aux points $(-1,-1)$ et $(1,1)$ de maximum 6.

Remarque : on pouvait noter que $f(x,y) = f(y,x)$ et ne faire l'étude que sur la moitié de la frontière.

Exercice 1.21.

1. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \frac{e}{n+1}$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = e^a - 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On note F_n l'application de $[0,+\infty[$ dans lui-même définie par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$.

a) Montrer que F_n est une bijection. On note x_n sa bijection réciproque ; ainsi, pour tout réel y positif ou nul, $x_n(y)$ est l'unique réel positif ou nul tel que $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = y$.

b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : y \mapsto x_n(y)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

c) Montrer que x_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Dans cette question y est fixé tel que $y < e - 1$.

a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $x_n(y) < 1$.

b) Pour $n \geqslant N$, comparer les trois réels $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$, $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$.

En déduire les variations de la suite $(x_n(y))$ pour $n \geqslant N$ et la convergence de la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$. On note ℓ sa limite.

c) Démontrer, pour $n \geqslant N$, l'inégalité $\displaystyle\left|\int_\ell^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt\right| \leqslant e|x_n(y)-\ell|$

En déduire l'expression de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$ en fonction de y puis l'expression de ℓ en fonction de y.

Solution :

1. a) Pour $t \in [0,a]$, $\dfrac{t^n e^t}{1+t^n} \leqslant t^n e^a \leqslant t^n e$, d'où en intégrant :

$$0 \leqslant \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \frac{ae}{n+1} \leqslant \frac{e}{n+1}$$

b) $\displaystyle e^a - 1 - \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^a e^t dt - \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n}\,dt$, d'où, par l'encadrement vu en a) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = e^a - 1$$

2. a) F_n est la primitive nulle en 0 de l'application $t \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^n}$, continue sur $\mathbb{R}^+$, donc F_n est dérivable de dérivée $F_n'(x) = \dfrac{e^x}{1+x^n}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi F_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $[0, \lim\limits_{+\infty} F_n[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$ est trivialement divergente, donc $\lim\limits_{+\infty} F_n = +\infty$ et F_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) La bijection réciproque x_n est donc également strictement croissante, de limite $+\infty$ en $+\infty$.

c) x_n est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que bijection réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée ne s'annule pas.

3. a) $\displaystyle\int_1^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = y - \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y - e + 1 < 0.$

A partir d'un certain rang N, on a donc $\displaystyle\int_1^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt < 0$, ce qui, compte tenu de la positivité de la fonction intégrée, impose $x_n(y) < 1$ à partir de ce même rang.

b) Pour $n \geqslant N$, on a $\forall\, t \in [0, x_{n+1}(y)] \subset [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^{n+1}}$, d'où :

$$\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{n+1}}\,dt = y = \int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$$

et comme la fonction intégrée, dans les termes extrêmes, est positive on en déduit $x_{n+1}(y) \leqslant x_n(y)$.

La suite $(x_n(y))_n$ est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0, donc est convergente vers $\ell \in [0,1[$.

c) Pour $n \geqslant N$, on a $\ell \leqslant x_n(y) < 1$ et pour tout $t \in [\ell, x_n(y)]$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} \leqslant$ e, d'où pour $n \geqslant N$:

$$0 \leqslant \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \int_\ell^{x_n(y)} \mathrm{e}\,dt = \mathrm{e}(x_n(y) - \ell)$$

et, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = 0$.

Or $\displaystyle\int_0^\ell \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = \int_0^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt - \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y - \int_\ell^{x_n(y)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\ell \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,dt = y$ et d'après la première question, cette limite vaut également $\mathrm{e}^\ell - 1$, donc $y = \mathrm{e}^\ell - 1$, soit $\ell = \ln(y+1)$.

Exercice 1.22.

Pour n entier naturel non nul, on définit l'application f_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

1. Déterminer l'ensemble A des entiers naturels pour lesquels l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente. Lorsque n appartient à A, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

2. a) A l'aide d'un encadrement de $\dfrac{f_n(x)}{f_2(x)}$, montrer que la suite (I_n) est majorée par la suite de terme général $\dfrac{B}{n!}$ pour une valeur convenable de B.

b) Préciser la nature de la série de terme général I_n.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $H_n \sim \ln n$.

b) Calculer $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, puis, encadrer à l'aide de termes de la suite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la quantité $-\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ pour x élément de $[0,1]$.

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{1}{n!\ln n}$

4. Montrer que pour $n \in A$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = nI_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n.

Solution :

1. L'application f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^n}$. Donc $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n > 1\} = \{n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2\}$.

2. a) Si $n > 2$, on a pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant \frac{f_n(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)\dots(x+n)} \leqslant \frac{2}{n!}$$

d'où, en multipliant par $f_2(x)$ qui est strictement positif et en intégrant :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2I_2}{n!}$$

b) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ étant convergente, on en déduit, par majoration, la convergence de la série de terme général I_n.

3. a) Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, on a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ et par sommation, en mettant à part le terme d'indice 1 dans la somme de droite :

$$\ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

D'où $H_n \sim \ln n$.

b) Pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \frac{d}{dx}[\ln f(x)] = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$. Ainsi pour $x \in [0,1]$:

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

c) Les termes étant tous positifs, on déduit de l'encadrement précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \frac{-f_n'(x)}{H_n} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{-f_n'(x)}{H_{n+1}-1}$$

d'où, en intégrant, compte tenu du fait que :

$$\int_0^1 -f_n'(x)\,dx = f_n(0) - f_n(1) = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\frac{n}{(n+1)!H_n} \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{n}{(n+1)!(H_{n+1}-1)}$$

Finalement, d'après a) :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{n}{(n+1)!\ln n} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

4. $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$

Or, par le changement de variable $x+1=t$:

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+3)\dots(t+n+1)}\,dt$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} - \frac{1}{(x+2)\dots(x+n+1)}\Big)\,dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{(x+1)\dots(x+n+1)}\,dx = nI_{n+1}\end{aligned}$$

On en déduit $I_{n+1} \sim \dfrac{1}{(n+1)!\ln n}$ et donc :

$$I_n \sim \frac{1}{n!\ln(n-1)} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

Exercice 1.23.

Dans cet exercice E désigne l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et I_E désigne l'application identité de E dans lui-même.
Si $f \in E$, on note $u(f)$ la primitive de f sur $[0,1]$ nulle en 0 et $v(f)$ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1], v(f)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\,dt$$

1. Montrer que u et v définissent deux applications de E dans lui-même.

2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$, puis que $u \circ v(f) = v(f) - u(f)$.

   b) Calculer les composées $(I_E - u) \circ (I_E + v)$ et $(I_E + v) \circ (I_E - u)$.

3. Soit g l'élément de E, affine sur les segments $\big[0, \frac{1}{2}\big]$ et $\big[\frac{1}{2}, 1\big]$, et tel que $g(0) = g(1) = 0$, $g\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe un unique élément f de E tel que, pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$f(x) - \int_0^x f(t)\,dt = g(x)$$

et le déterminer.

4. On définit par récurrence u^n, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u^0 = I_E \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u \circ u^n$$

   a) Montrer que si $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$,

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt.$$

b) Montrer que si $f \in E$ et $x \in [0,1]$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u^n(f)(x)$ est convergente et que : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u^n(f)(x) = v(f)(x)$.

Solution :

1. Si $f \in E$, f est continue sur $[0,1]$; elle y admet donc des primitives. Ainsi $u(f)$ existe et $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et *a fortiori* appartient à E.

On remarque que si $f \in E$, pour tout $x \in [0,1], v(f)(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt$, donc $v(f)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc élément de E.

2. a) $\star$ En intégrant par parties, pour tout $x \in [0,1]$:

$$v \circ u(f)(x) = \big[-\mathrm{e}^{x-t} u(f)(t) \big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\, dt = -u(f)(x) + v(f)(x)$$

Donc $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$.

$\star$ $u \circ v(f)$ a pour dérivée $v(f)$ et :

$$[v(f) - u(f)]'(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt + \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} f(x) - f(x) = v(f)(x)$$

Donc $u \circ v(f)$ et $v(f) - u(f)$ diffèrent d'une constante ; étant nulles en 0, elles sont égales.

b) $(I_E - u) \circ (I_E + v) = I_E + v - u - u \circ v = I_E$ et comme u et v commutent (question a)), on a aussi $(I_E + v) \circ (I_E - u) = I_E$.

3. $I_E - u$ est bijective de bijection réciproque $I_E + v$. Il existe donc un unique élément f de E tel que $f - u(f) = g$, qui est $f = g + v(g)$.

$\star$ Pour $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = x + \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x-t} t\, dt = \mathrm{e}^x - 1$.

$\star$ Pour $x \in [1/2, 1]$, $f(x) = x + \displaystyle\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{x-t} t\, dt + \int_{1/2}^x \mathrm{e}^{x-t}(1-t)\, dt = 1 - 2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^x$.

4. Si f appartient à E, $u^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\big((u^n)(f)\big)^{(k)} = u^{n-k}(f)$; en particulier pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\big((u^n)(f)\big)^{(k)}(0) = 0$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ sur le segment $[0,x]$ se réduit donc à :

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \big(u^n(f)\big)^{(n)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

b) Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v(f)(x)-\sum_{k=1}^{n}u^k(f)(x)=\int_0^x\big(\mathrm{e}^{x-t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\big)f(t)\,dt$$

Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, pour tout $t\in[0,x]$:

$$\Big|\mathrm{e}^{x-t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\Big|\leqslant\frac{|x-t|^n}{n!}\sup_{[0,x-t]}|\mathrm{e}^u|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{|x|}$$

D'où : $\Big|v(f)(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}u^k(f)(x)\Big|\leqslant\dfrac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{|x|}\Big|\displaystyle\int_0^x|f(t)|\,dt\Big|$.

Ce majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc par encadrement :

$$v(f)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u^k(f)(x)$$

Exercice 1.24.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y)(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

 b) Etudier l'existence des dérivées partielles de f.

2. On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(x,0)-1$.

 a) Etudier les variations de h.

 b) En déduire que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

3. Déterminer les points critiques de f.

4. a) Montrer que $\forall\, x\geqslant 0, f(x,y)\geqslant h(x)+1$.

 b) En déduire que f admet en $\big(\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\big)$ un minimum local.

5.On pose $g(x)=f(x,1)-f(0,1)$.

 a) Montrer que $g(x)$ est du signe de x.

 b) En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.

Solution :

1. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme somme, produit, composée de fonctions continues.

Posons $u=(x,y)$ et $||u||^2=x^2+y^2$. Alors :

$$|x\ln(x^2+y^2)|\leqslant||u||.\ln(||u||^2)$$

Donc $\lim\limits_{||u||\to0}|x\ln(x^2+y^2)|=0$ et $\lim\limits_{||u||\to0}\mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)}=1$, ce qui signifie que f est continue en $(0,0)$.

b) On a
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{\mathrm{e}^{x\ln x^2}-1}{x}\underset{(0)}{\sim}\ln x^2=2\ln|x|$$
d'où :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-\infty,$$
ce qui signifie que f n'est pas dérivable par rapport à x en $(0,0)$.
En revanche :
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
Enfin, en tout point $(x,y)\neq(0,0)$, f admet des dérivées partielles par rapport à x et y et :
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\big[\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\big](x^2+y^2)^x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy(x^2+y^2)^{x-1}\end{cases}$$

2. a) Il vient pour $x0$, $h(x)=\mathrm{e}^{x\ln x^2}-1$. Donc $h'(x)=(\ln x^2+2)\mathrm{e}^{x\ln x^2}$. Ainsi $h'(x)=0\iff x=\pm\mathrm{e}^{-1}$, ce qui donne les variations de h :

x	$-\infty$		$-\mathrm{e}^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après la question précédente :

- si $x\in\,]0,1/\mathrm{e}]$, alors $f(x,0)-f(0,0)<0$,
- si $x\in\,]-1/\mathrm{e},0[$, alors $f(x,0)-f(0,0)>0$.

Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3. On a vu que pour $(x,y)\neq(0,0)$
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\big[\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\big](x^2+y^2)^x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy(x^2+y^2)^{x-1}\end{cases}$$
Les points critiques sont donnés par :
$$\begin{cases}\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0\\ 2xy=0\end{cases}$$
système qui admet 4 solutions : $(0,1),(0,-1),(1/\mathrm{e},0),(-1/\mathrm{e},0)$.

4. a) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ et $x>0$, on a :
$$f(x,y)=(x^2+y^2)^x\geqslant x^{2x}=f(x,0)=h(x)+1$$

b) Or on sait que h admet en $1/\mathrm{e}$ un minimum local ; donc f admet en $(1/\mathrm{e},0)$ un minimum local.

5. a) On a $g(x)=(x^2+1)^x-1$. Donc $g'(x)=[\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}]\,\mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)}$ et $g'(x)$ est du signe de $k(x)=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$. Or :

$$k'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\times\frac{x^2+3}{x^2+1} \text{ est du signe de } x$$

Comme $k(0)=0$, la fonction k est positive, donc la fonction g' aussi et comme $g(0)=0$, g est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$, donc du signe de x.

Ainsi $f(x,1)-f(0,1)$ est du signe de x et f n'admet pas d'extremum en $(0,1)$.

Exercice 1.25.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose, pour tout élément f de E, $\|f\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$

On définit la fonction K de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{x} & \text{si } x>t\\ \dfrac{x^2}{t} & \text{si } x<t\\ x & \text{si } x=t\end{cases}$$

Pour $f\in E$, on pose $T(f):[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\displaystyle\int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt$.

1. a) Calculer $T(f)(0)$.

   b) Montrer que $\forall f\in E, \forall x\in\,]0,1], |T(f)(x)|\leqslant\|f\|_\infty\big(\frac{x^2}{3}-x^2\ln x\big)$.

   c) Montrer que T est un endomorphisme de E.

   d) T est-il surjectif ?

2. Montrer que $T(f)\in\mathcal{C}^1([0,1])$.

3. Calculer $T(f)(1)+[T(f)]'(1)$.

Solution :

1. a) On a $K(0,t)=0$ et donc $T(f)(0)=0$.

   b) Par la relation de Chasles, pour $x\in\,]0,1]$:

$$\begin{aligned}T(f)(x)&=\int_0^x K(x,t)f(t)\,dt+\int_x^1 K(x,t)f(t)\,dt\\&=\frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\,dt+x^2\int_x^1\frac{f(t)}{t}\,dt\quad(*)\end{aligned}$$

D'où : $|T(f)(x)|\leqslant\dfrac{\|f\|_\infty}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\,dt+x^2\|f\|_\infty\int_x^1\frac{1}{t}\,dt$, c'est-à-dire :

$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \big(\frac{x^2}{3} - x^2 \ln x \big)$$

c) La linéarité de T est évidente.
L'expression $(*)$ montre que $T(f)$ est continue sur $]0,1]$ (intégrales d'une fonction continue les bornes étant elles-mêmes des fonctions continues), et la majoration précédente prouve que $\lim\limits_{x \to 0^+} T(f)(x) = 0 = T(f)(0)$.

Donc $T(f)$ est continue sur $[0,1]$ et T est un endomorphisme de E.

d) On a vu que $T(f)(0) = 0$; $T(f)$ ne peut donc pas être la fonction constante égale à 1 qui appartient à E. Ainsi T n'est pas surjectif.

2. La relation $(*)$ montre que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, avec :

$$\forall\, x \in]0,1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 f(t)\, dt + \frac{1}{x} x^2 f(x) + 2x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt - x^2 \frac{f(x)}{x}$$

$$\forall\, x \in]0,1], [T(f)]'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 f(t)\, dt + 2x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$$

Un calcul analogue à celui effectué dans la question 1. montre que :

$$\forall\, x \in]0,1], \big|[T(f)]'(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty (\frac{x}{3} - 2x \ln x)$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} [T(f)]'(x) = 0$ et comme $T(f)$ est continue en 0, le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montre que $T(f)$ est dérivable en 0 avec

$$[T(f)]'(0) = \lim_{x \to 0} [T(f)]'(x) = 0$$

Donc $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. $T(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)\, dt$ et $[T(f)]'(1) = -\displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)\, dt$, donc :

$$T(f)(1) + [T(f)]'(1) = 0.$$

Exercice 1.26.

On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble D de définition de f.

2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y) = 0$ est la réunion de deux segments et d'une courbe C que l'on précisera.

3. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et que $D \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on pourra admettre cette question).

4. Étudier les extremums de f sur D.
(On pourra montrer que f admet un minimum et un maximum et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$.)

Solution :

1. La fonction f est définie sur l'ensemble $D = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - 2y^2 \geqslant 0\}$

2. L'équation $f(x, y) = 0$ admet comme solutions tous les couples $(x, y) \in D$ tels que :

$$x = 0, \text{ ou } y = 0, \text{ ou } x^2 + 2y^2 = 1$$

Comme on sait également que $x^2+2y^2 \leqslant 1$, on obtient la réunion des segments $\{(0, y) \mid -1/\sqrt{2} \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{2}\}$, $\{(x, 0) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ et de la courbe C d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

3. On vérifie aisément que l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi D est la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^2, N)$: c'est donc un fermé borné.

De même $U = D \setminus C = \{(x, y) \mid N(x, y) < 1\}$. C'est la boule unité ouverte du même espace.

4. On a pour tout $(x, y) \in D$, $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$ et donc $f(-x, -y) = f(x, y)$. On peut donc se contenter de faire l'étude avec $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Par les théorèmes du cours, on sait qu'il existe au moins un couple $(A, B) \in D^2$ tel que pour tout $(x, y) \in D$, $f(A) \leqslant f(x, y) \leqslant f(B)$.

On vérifie que $(1/2, 1/2) \in U$ et que $f(1/2, 1/2) > 0$; ainsi $\max\limits_D f > 0$ et par ce qui précède, $\min\limits_D f < 0$.

Les extremums de f ne sont donc pas nuls et sont atteints en des points de l'ouvert U et sont nécessairement des extremums locaux.

Par symétrie et compte tenu des résultats précédents, il suffit de chercher ces extrémums locaux sur l'ouvert $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2+2y^2 < 1\}$.

Pour tout $(x, y) \in U_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \times \dfrac{1 - 2x^2 - 2y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \times \dfrac{1 - x^2 - 4y^2}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \end{cases}$$

Ainsi, sur U_1, les points critiques vérifient

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x, y) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$, avec en ce point $f(x, y) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Comme on trouve un seul point critique dans U_1, celui-ci correspond nécessairement à un extremum et en conclusion :

f admet un maximum $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ atteint en $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ et en $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$ et un minimum qui vaut $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ atteint en $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ et en $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6})$.

Exercice 1.27.

On administre à un patient q unités d'un médicament. Après t minutes la quantité de médicament active dans le sang est $q.\mathrm{e}^{-ct}$, où c est une constante strictement positive. La même dose de médicament est injectée régulièrement toutes les T minutes.

1. Déterminer la quantité $A(k)$ de médicament encore active dans le sang immédiatement après la $k^{\text{ème}}$ injection.

2. Calculer la borne supérieure de la quantité de médicament présente dans le sang après un nombre indéterminé d'injections. En déduire l'intervalle de temps le plus court à respecter entre deux doses pour que $A(k)$ ne dépasse pas un niveau $M > q$ donné.

3. On sait que si on administre une quantité q de médicament, alors au bout de 2 heures la quantité de médicament encore active dans le sang est de $q/2$. On administre des doses de 50 mg. Sachant que la dose maximale supportée est de 500 mg, à quelle fréquence peut–on administrer le médicament en toute sécurité ?

Solution :

1. Juste après la k-ième injection, la dose de médicament présente dans le sang est :

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} q\mathrm{e}^{-ncT} = q \sum_{n=0}^{k-1} (\mathrm{e}^{-ct})^n = q\frac{1-\mathrm{e}^{-kcT}}{1-\mathrm{e}^{-cT}}$$

2. La suite $\big(A(k)\big)_{k\geqslant 0}$ est la suite des sommes partielles d'une série géométrique de raison e^{-cT} appartenant à $[0,1[$. Cette suite est donc croissante et convergente et a pour limite la somme de la série. Ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} A(k) = \frac{q}{1-\mathrm{e}^{-cT}}$$

et ce nombre est le meilleur majorant de la suite $\big(A(k)\big)_{k\geqslant 0}$.

La dose de médicament ne dépassera pas M si et seulement si $\dfrac{q}{1-\mathrm{e}^{-cT}} \leqslant M$, inéquation équivalente à $T \geqslant -\frac{1}{c}\ln\big(1-\frac{q}{M}\big)$.

3. Si la demi–vie du médicament est de 120 minutes, on a :

$$\mathrm{e}^{-120c} = \frac{1}{2},\ i.e.\ c = \frac{\ln 2}{120}$$

L'intervalle minimal séparant deux injections successives est donc :

$$T_m = -\frac{120}{\ln 2}\ln\left(1-\frac{50}{500}\right) \simeq 18{,}24 \text{ mn}$$

Ainsi une prise de médicament toutes les 20 minutes sera satisfaisante.

Exercice 1.28.

1. Pour quelles valeurs réelles de x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$ est-elle convergente ?

2. Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$. On veut écrire $f(x)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k}+R_n(x)$, avec $R_n(x)$ à déterminer, en vue d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$.

a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $I_k=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^k.e^{-xt}\,dt$. Etablir la convergence de cette intégrale et donner sa valeur.

b) Montrer que pour tout $t\geqslant 0$ et tout $n\geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)^2}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kt^{k-1}+(-1)^n\frac{nt^{n+1}+(n+1)t^n}{(1+t)^2}$$

c) En déduire que $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k}+R_n(x)$, avec un $R_n(x)$ que l'on donnera sous forme d'une intégrale convergente.

d) Montrer que pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $|R_n(x)|\leqslant (n+x)\dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$

3. En déduire une valeur approchée décimale de $f(100)$ à 10^{-6} près.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Si $x\geqslant 0$ elle est majorée par $t\mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale proposée est convergente.
Si $x<0$, alors pour t assez grand, cette fonction est minorée par 1 et la divergence de l'intégrale est triviale.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt \text{ converge} \iff x\geqslant 0$$

2. a) La convergence est évidente et par le changement de variable $u=xt$, il vient :

$$I_k=\frac{1}{x^{k+1}}\int_0^{+\infty}u^k e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(k+1)}{x^{k+1}}=\frac{k!}{x^{k+1}}$$

b) Par l'identité géométrique, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

Par dérivation :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k t^{k-1} = -\frac{1}{(1+t)^2} + (-1)^n \frac{(n+1)t^n(1+t)-t^{n+1}}{(1+t)^2}$$

Ce qui est le résultat demandé, aux positions des termes près.

c) Ainsi, toutes les intégrales rencontrées étant convergentes :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k I_{k-1} + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1}+(n+1)t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{e}^{-xt}dt$$

Soit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{x^k} + R_n(x),$$

avec $R_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nt^{n+1}+(n+1)t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{e}^{-xt}dt$

d) $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}(nt^{n+1}+(n+1)t^n)\mathrm{e}^{-xt}dt = nI_{n+1}+(n+1)I_n$

Donc : $|R_n(x)| \leqslant n\dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}} + (n+1)\dfrac{n!}{x^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}(n+x)$

3. Avec $x = 100$, on veut $\dfrac{(n+1)!}{100^{n+2}}(n+100) \leqslant 10^{-6}$. On voit alors que ceci est réalisé pour $n \geqslant 3$ et donc :

$$f(100) \simeq \frac{1}{100} - \frac{2}{10000} + \frac{6}{1000000} = 0{,}009806$$

l'erreur commise étant majorée par 10^{-6}.

Exercice 1.29.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x - \sin x$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique x_n appartenant à $]n\pi, n\pi+\pi/2[$ tel que $f(x_n) = 0$.

2. Donner un équivalent simple u_n de x_n lorsque n tend vers l'infini.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n - n\pi]$.

Solution :

1. L'étude de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $I_n =]n\pi, n\pi+\pi/2[$ est équivalente à l'étude de l'équation $g(x) = x - \tan x = 0$ sur le même intervalle. La fonction $x \mapsto g(x)$ y est de classe C^1 et $g'(x) = -\tan^2(x) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur I_n et induit une bijection de I_n sur $]n\pi, -\infty[$. Il existe donc un unique x_n appartenant à I_n tel que $g(x_n) = 0$, donc tel que $f(x_n) = 0$.

2. Comme $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2$, on a immédiatement $x_n \sim n\pi$.

3. Posons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n$. On sait déjà que $0 < \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$.

On a $n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right) = \dfrac{1}{\tan(\varepsilon_n)}$.

Par conséquent $\tan(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} [x_n - n\pi] = \frac{\pi}{2}$$

1

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ strictement stochastique, ce qui signifie que les coefficients $p_{i,j}$ de P sont tous des réels *strictement* positifs et que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.
Bien que les coefficients de P soient réels, nous considérons dans la suite que P appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il s'ensuit que les valeurs propres de P sont éléments de $\mathbb{C}$ et que ses colonnes propres sont éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de P et donner l'exemple d'une colonne propre de P associée à 1.

2. Montrer que toute valeur propre λ de P est de module inférieur ou égal à 1.
On considérera une colonne propre de P associée à λ et on utilisera la norme infinie canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

3. Montrer que toute valeur propre λ de P de module égal à 1 est elle-même égale à 1 et que son sous-espace propre associé est une droite (à préciser).
On considérera une colonne propre C de P associée à λ telle que $\|C\|_\infty = 1$ et on montrera que les parties réelles des composantes de C sont toutes égales.

4. Montrer que toute matrice strictement stochastique appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable et préciser, en fonction de ses coefficients, ses valeurs propres ainsi qu'une base de colonnes propres.

5. Quelles sont les valeurs propres de la matrice strictement stochastique :

$$M_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Est-elle diagonalisable ?

La matrice strictement stochastique $M_2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Soit Γ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont toutes les composantes sont égales à 1. On voit aisément que $P\Gamma = \Gamma$, donc 1 est valeur propre de P et Γ est une colonne propre associée à 1.

2. Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une colonne propre de P associée à λ. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} c_j$ et donc $|\lambda|.|c_i| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} |c_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} \|C\|_\infty = \|C\|_\infty$.
Il s'ensuit que $|\lambda|.\|C\|_\infty \leqslant \|C\|_\infty$ et comme $C0$, $|\lambda| \leqslant 1$.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ une colonne propre de P associée à λ. Quitte à multiplier C par l'inverse de sa norme, on peut supposer que C est de norme 1.
Comme $\|PC\|_\infty = \|\lambda C\|_\infty = |\lambda|.\|C\|_\infty = 1$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$, tel que $\big|\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j} c_j\big| = 1$ et donc : $\exists\, \theta$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j} c_j = \mathrm{e}^{i\theta}$.
Ainsi $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}(1 - \mathrm{e}^{-i\theta} c_j) = 0$ et en particulier $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{k,j}(1 - \mathrm{Ré}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j)) = 0$.
Or, pour tout j, $\mathrm{Ré}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j) \leqslant |\mathrm{e}^{-i\theta} c_j| = |c_j| \leqslant 1$. La somme précédente ne peut donc être nulle que si tous ses termes sont nuls, c'est-à-dire :$\forall\, j, \mathrm{Ré}(\mathrm{e}^{-i\theta} c_j) = 1$. Or un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1 dont la partie réelle vaut 1 est le nombre 1 et pour tout j, $c_j = \mathrm{e}^{i\theta}$.
Donc C est colinéaire à Γ, ce qui prouve que $\lambda = 1$ et que le sous-espace propre de P associé à 1 est la droite de base Γ.

4. M est de la forme $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, avec a et b dans $]0, 1[$.
$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$(1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab = 0$$

et cette équation admet deux racines distinctes : 1 et $1-a-b$ et donc M est diagonalisable. Enfin, on voit aisément que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1, tandis que $\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $1-a-b$.

5. $\star$ Les valeurs propres de M_1 sont 1 (et le sous-espace propre associé est une droite) et $-1/4$ et le sous-espace propre associé à $-1/4$ est la droite de base $\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$: la matrice M_1 n'est pas diagonalisable.

$\star$ La matrice M_2 est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Exercice 2.2.

On note $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,1]$.
Soit $u : f \in E \mapsto u(f)$ définie par :

$$\forall\, x\in[0,1], u(f)(x)=\int_0^1 \min(x,t)f(t)\,dt.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2. Soient f et g deux fonctions de E telles que $u(f)=g$.
   a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
   b) Calculer $g(0)$ et $g'(1)$.

3. Montrer que u est injectif.

4. Déterminer l'image Im u de u.

5. On pose, pour $x\in[0,1]$, $f_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $f_2(x)=\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.
   a) Vérifier que (f_1,f_2) est une famille libre de E.
   b) Soit F le sous espace vectoriel engendré par $\{f_1,f_2\}$. Montrer que F est stable par u.
   c) Donner dans la base (f_1,f_2) la matrice de la restriction à F de u.

Solution :

1. On a immédiatement

$$u(f)(x)=\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt$$

ce qui montre la continuité de $u(f)$ sur $[0,1]$, dès que f l'est elle même.
La linéarité de u provient de la linéarité de l'intégrale.

2. a) Comme, pour tout $x \in [0,1]$
$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$$
g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et :
$$g'(x) = \int_x^1 f(t)dt$$
De la même façon g est de classe C^2 et $g''(x) = -f(x)$.

b) $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$.

3. Soit $f \in \operatorname{Ker} u$. Pour tout $x \in [0,1]$, $u(f)(x) = 0$, ce qui donne en dérivant deux fois : $-f(x) = [u(f)]''(x) = 0$.
Ainsi u est injectif.

4. Par la seconde question, on sait que
$$\operatorname{Im} u \subseteq G = \{g \in C^2[0,1] \mid g(0) = 0, g'(1) = 0\}.$$
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in G$, alors $-g'' \in E$ et, en utilisant plusieurs intégrations par parties, il vient :
$$\begin{aligned} u(-g'')(x) &= -\int_0^x tg''(t)dt - x\int_x^1 g''(t)dt \\ &= [tg'(t)]_0^x + \int_0^x g'(t)dt - x\,[g'(t)]_x^1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

5. a) On pose $af_1(x) + bf_2(x) = 0$ et on donne à x deux valeurs particulières (par exemple, 1 et 3) pour obtenir $a = b = 0$.

b) Pour montrer la stabilité de F par u, il suffit de calculer les images de f_1 et f_2 par cet endomorphisme ; il vient :
$$u(f_1) = \frac{4}{\pi^2}f_1 \quad ; \quad u(f_2) = \frac{4}{9\pi^2}f_2$$
c) La matrice demandée s'en déduit immédiatement. C'est
$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\pi^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{9\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^m est défini par :
$$u^0 = Id, \forall\, m \geqslant 1, u^m = u \circ u^{m-1}.$$

On note D l'application dérivation qui à tout $P \in E$ associe le polynôme dérivée P'.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant :
$$(\star) \text{ il existe } (k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tels que } f^k = D^m$$

1. Montrer que D est un endomorphisme surjectif de E. En déduire que f est un endomorphisme surjectif de E.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} D^m$.

3. Montrer que pour tout $p \in [\![0,k]\!], \operatorname{Ker} f^p$ est de dimension finie.

4. Soit $p \in [\![0,k]\!]$ et φ l'application définie sur $\operatorname{Ker} f^p$ par $\varphi(P) = f(P)$.
 a) Montrer que φ est une application linéaire de $\operatorname{Ker} f^p$ dans $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.
 b) Déterminer son noyau et montrer que φ est surjective.
 c) Déterminer une relation entre la dimension de $\operatorname{Ker} f^p$ et celle de $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

5. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f^p$ en fonction de p et de la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la relation $(\star)$ soit vérifiée.

Solution :

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}[X]$. Alors $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ est un polynôme dont la dérivée est P. Ceci implique que l'application D est surjective.
L'application D étant surjective, D^m l'est également, ainsi donc que f^k.
Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = f^k(Q) = f(f^{k-1}(Q))$.
Ainsi l'application f est surjective.

2. Si $P \in \operatorname{Ker} D^m$, alors $P^{(m)} = 0$. Ceci entraîne que P est de degré inférieur ou égal à $m-1$. La réciproque est évidente. Finalement $\operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

3. On montre aisément que :
$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} D^m = \mathbb{R}_{m-1}[X]$$
Ce dernier espace étant de dimension m, chacun des noyaux est de dimension finie.

4. a) L'application φ étant l'application induite par f sur $\operatorname{Ker} f^p$, est linéaire.
Si $P \in \operatorname{Ker} f^p$, alors :
$$0 = f^p(P) = f^{p-1}(f(P)) = f^{p-1}(\varphi(P))$$
L'application φ est donc à valeurs dans $\operatorname{Ker} f^{p-1}$.

b) Si $\varphi(P) = 0$, alors, $P \in \text{Ker } f^p \cap \text{Ker } f = \text{Ker } f$.

Soit $Q \in \ker f^{p-1}$. L'application f étant surjective, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = f(P)$, et :

$$0 = f^{p-1}(Q) = f^p(P)$$

Ainsi $P \in \text{Ker } f^p$, et φ est une application surjective.

c) Appliquons le théorème du rang à φ.

$$\dim \text{Ker } f^p = \dim \text{Ker } \varphi + \text{rang}(\varphi) = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } f^{p-1}$$

5. On sait donc que :

$$\dim \text{Ker } f^p - \dim \text{Ker } f^{p-1} = \dim \text{Ker } f$$

Ainsi, par télescopage, $\dim \text{Ker } f^p = p \times \dim \text{Ker } f$.

6. Supposons qu'il existe (k, m) tels que $f^k = D^m$. Par la question précédente, $k \times \dim \text{Ker } f = m$, et k divise m.

Réciproquement, si k divise m, il existe p tel que $m = pk$ et $D^m = (D^p)^k$. Il suffit de prendre $f = D^p$.

Exercice 2.4.

Pour tout $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients réels.

Dans cet exercice, n et p désignent deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1 et A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA = 0$ si et seulement si $A = 0$.

On suppose désormais que $A \neq 0$.

2. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont toutes deux diagonalisables dans une base orthonormée.

3. A tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on associe la norme : $\|X\|_r = \sqrt{{}^tXX}$.

a) Soit W un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ. Calculer $(\|AW\|_n)^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

b) En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs ou nuls.

4. a) Montrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b) Montrer que $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker } A$ et que $\text{Ker}(A\,{}^tA) = \text{Ker } {}^tA$. En déduire que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont même rang.

c) Quelle relation existe entre les valeurs propres de ces deux matrices ?

Solution :

1. La matrice ${}^tAA$ est un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. L'égalité ${}^tAA = 0$ signifie que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), {}^tAAX = 0$.

Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = 0$, soit $||AX||^2 = 0$.
Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0$, donc $A = 0$.
La réciproque est évidente.

2. Les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont toutes deux symétriques réelles, et donc diagonalisables dans une base orthonormée.

3. a) Soit $W \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAAW = \lambda W$. En multipliant à gauche par ${}^tW$, il vient :

$$||AW||_n^2 = \lambda ||W||_p^2.$$

b) Ainsi la valeur propre λ vérifie :

$$\lambda = \frac{||AW||_n^2}{||W||_p^2} \geqslant 0$$

4. a) Soit λ une valeur propre non nulle de ${}^tAA$; il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que : $(\star)\quad {}^tAAX = \lambda X$.
Donc $A^tA(AX) = \lambda AX$.

- si $AX \neq 0$, alors AX un vecteur propre de A^tA associé à la valeur propre λ.

- si $AX = 0$, la relation $(\star)$ entraîne que $\lambda X = 0$, et comme $X \neq 0$, ceci entraîne que $\lambda = 0$ en contradiction avec l'hypothèse de cette question.

Ainsi : $\lambda \in \mathrm{Spec}({}^tAA) \setminus \{0\} \implies \lambda \in \mathrm{Spec}(A^tA) \setminus \{0\}$

La démonstration de l'implication contraire est identique, en échangeant les rôles de A et ${}^tA$.

b) Soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$: alors ${}^tAAX = 0$, d'où ${}^tX{}^tAAX = 0$, ou $||AX||^2 = 0$, ce qui entraîne que $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}\,A$.

Réciproquement, si $AX = 0$, alors ${}^tAAX = 0$.
Ainsi :

$$\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}\,A.$$

La démonstration de $\mathrm{Ker}(A\,{}^tA) = \mathrm{Ker}({}^tA)$ est identique, en échangeant les rôles.

$\star$ La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang indique que : $p = \dim \mathrm{Ker}\,A + \mathrm{rg}\,A$.

$\star$ La matrice ${}^tA$ représente une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Le théorème du rang indique que : $n = \dim \mathrm{Ker}({}^tA) + \mathrm{rg}({}^tA)$.

Or les matrices A et ${}^tA$ ont même rang. Ainsi, par la question précédente :

$$\mathrm{rg}({}^tAA) = p - \dim \mathrm{Ker}\,A = n - \dim \mathrm{Ker}({}^tA) = \mathrm{rg}(A^tA)$$

c) Les matrices ${}^tAA$ et A^tA ont les mêmes valeurs propres non nulles. Leurs spectres ne diffèrent donc éventuellement que de 0. Elles ont également même rang. La dimension du sous-espace propre associé à 0, lorsque 0 est valeur propre de l'une et/ou l'autre, est donc bien déterminé, dès que l'on connaît ce rang.

Exercice 2.5.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (x,0,y)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Soit $E = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer $f(E)$ et $f^{-1}(E)$.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution :

1. On a par définition
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1.
De même $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2 et est caractérisée par
$$\operatorname{Im} f = \{(x,0,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. E est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
Il vient :
$$f(E) = \operatorname{Im}(f_{|_E}) = \{(x,0,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Im} f$$
Enfin :
$$\begin{aligned} f^{-1}(E) &= \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \in E\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (x,0,y) \in E\} = \{(x,0,z)\} = f(E) \end{aligned}$$

3. Le noyau de f étant de dimension 1, on sait que $\lambda = 0$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker} f$.
Si λ est une valeur propre non nulle de f, $f(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$ est équivalent à
$$\begin{cases} x = \lambda x \\ 0 = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases}$$
$\star$ Si $\lambda 1$, il vient $x = y = z = 0$ et λ n'est pas valeur propre.

$\star$ Si $\lambda = 1$, il vient $y = z = 0$ et 1 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension 1.

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.6.

Soient $n \geqslant 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (on confondra polynôme et fonction polynôme associée), $b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : E \to E, f \mapsto \varphi(f)$ défini par :
$$\varphi(f)(x) = (x-b)\big(f'(x) + f'(b)\big) - 2\big(f(x) - f(b)\big).$$

où f' désigne la dérivée du polynôme f.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer le plus grand entier k vérifiant :
$$\forall f \in E, \exists \delta \in E, \varphi(f)(x) = (x-b)^k \delta(x).$$

3. Déterminer le noyau et l'image de φ.

4. Déterminer, pour $k \geqslant 3$, $\varphi(f)$ lorsque $f(x) = (x-b)^k$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. La linéarité de φ est claire, par linéarité de la dérivation et propriétés des opérations et si $f \in \mathbb{R}_n[X]$, il en est de même de $\varphi(f)$.

2. Pour tout f, $\varphi(f)(b) = 0$.
On a : $[\varphi(f)]'(x) = f'(x) + f'(b) + (x-b)f''(b) - 2f'(x)$, donc $[\varphi(f)]'(b) = 0$.
De plus $[\varphi(f)]''(x) = -f''(x) + f''(b)$, donc $[\varphi(f)]''(b) = 0$.
Enfin $[\varphi(f)]^{(3)}(x) = -f'''(x)$, qui n'est pas nécessairement nul.
Ainsi b est racine au moins triple de $\varphi(f)$, mais n'est pas nécessairement racine d'ordre plus élevé.
L'entier k maximal tel que pour tout $f \in E$, $\varphi(f)(x) = (x-b)^k\delta(x)$ est $k = 3$.

3. D'après la question précédente, si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $f''' = 0$; donc
$$\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \mathbb{R}_2[X].$$
De même, si $g \in \operatorname{Im}\varphi$, alors $(x-b)^3$ divise g. Donc
$$\operatorname{Im}\varphi \subseteq F = \{P \in E \mid P(x) = (x-b)^3 Q(x)\}$$
Si l'une des deux inclusions précédentes était stricte, comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et $\dim F = n-2$, on aurait une contradiction vis à vis du théorème du rang. Ainsi :
$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_2[X], \qquad \operatorname{Im}\varphi = F$$

4. Un calcul immédiat donne pour $f(x) = (x-b)^k$ et pour $k \geqslant 3$,
$$\varphi(f)(x) = (k-2)f(x).$$
Le noyau de φ est de dimension 3 et $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles, chaque sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle étant de dimension au moins égale à 1.
Les sous-espaces propres de φ étant en somme directe, chaque sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est exactement de dimension 1 et ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n+1$ et φ est diagonalisable.

Exercice 2.7.

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ défini, dans la base canonique de cet espace, par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer $u \circ u \circ u$.

b) En déduire tous les sous-espaces de dimension 1 stables par u .

2. Soit P un plan stable par u et soit v la restriction de u à P.

a) Montrer que v n'est pas l'endomorphisme nul.

b) Montrer que $v \circ v = 0$.

c) Montrer qu'il existe x dans P tel que $\big(x, v(x)\big)$ est une base de P.

d) Comparer P et l'image de u. Conclure.

3. Déterminer tous les sous-espaces de E stables par u.

Solution :

1. a) Un calcul matriciel donne $u^3 = 0$.

b) La seule valeur propre de u est donc 0. On détermine alors le noyau de u qui est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc de dimension 1.

C'est le seul sous-espace stable de dimension 1, puisque si F est un tel sous-espace, et si x en est une base, alors $U(F) \subset F \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que F est un sous-espace propre.

2. a) Si v était identiquement nul, l'endomorphisme u aurait un noyau de dimension supérieure ou égale à 2, ce qui n'est pas le cas.

b) Supposons $v^2 \neq 0$: il existe $x \in P$ tel que $v^2(x) \neq 0$. Montrons que la famille $(x, v(x), v^2(x))$ est libre.
Si $ax + bv(x) + cv^2(x) = 0$, en appliquant v^2, il vient $a = 0$, puis en revenant au départ et en appliquant v, on obtient $b = 0$, enfin $c = 0$.
Or ces trois vecteurs sont éléments de P ; ceci est en contradiction avec la dimension de P et $v^2 = 0$.

c) Comme $v \neq 0$, il existe $x \in P$ tel que $v(x) \neq 0$. Une démonstration analogue à la démonstration précédente montre que $\big(x, v(x)\big)$ est une base de P.

d) On remarque d'abord que $\big(x, v(x)\big) \in \operatorname{Ker} u^2$ (question 2.b). Montrons ensuite que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^2$.
En effet, comme $u^3 = 0$, on a $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} u^2$. Enfin ces deux sous-espaces de E sont de dimension 2 (par le théorème du rang et parce que $u^2 \neq 0$).

Ainsi $P = \operatorname{Im} u$.

3. On vient de déterminer les sous-espaces stables de dimension 1 ($\operatorname{Ker} u$) et de dimension 2 ($\operatorname{Im} u$). Il reste les deux sous-espaces stables triviaux $\{0\}$ et E.

Exercice 2.8.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geqslant 2$ et soit u un endomorphisme de E .

1. Dans cette question uniquement on suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
   a) Montrer que $u \circ p = 0$.
   b) En déduire que $u \circ u = 0$.

2. Dans cette question uniquement on suppose que $u \circ u = 0$.
   a) Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$.
   b) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que : $\operatorname{Im}(u) \subset H \subset \operatorname{Ker}(u)$ et soit S un supplémentaire de H. Soit q la projection sur H parallèlement à S. Calculer $q \circ u - u \circ q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
Cette condition étant supposée remplie, y-a-t'il toujours unicité du projecteur p ?

4. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est égale à $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Solution :

1. a) $u = p \circ u - u \circ p \implies p \circ u = p^2 \circ u - p \circ u \circ p = p \circ u - p \circ u \circ p$, d'où :
$$p \circ u \circ p = 0$$
De même, $u \circ p = p \circ u \circ p - u \circ p^2 = -u \circ p$, d'où :
$$u \circ p = 0$$
   b) D'où $u = p \circ u$ et donc $u^2 = p \circ (u \circ p) \circ u = 0$.

2. a) Soit $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$ et $u(x) = u^2(z) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$, ce qui prouve l'inclusion demandée.
   b) On a $u \circ q = 0$ (car $H \subset \operatorname{Ker} u$) et pour tout $x \in E$, $q\big(u(x)\big) = u(x)$ (car $u(x)$ appartient à $\operatorname{Im} u$, donc à H). Ainsi :
$$q \circ u - u \circ q = u$$

3. Ce qui précède montre que la condition nécessaire et suffisante cherchée est $u^2 = 0$.

Il y a en général plusieurs façons de choisir H (si $\operatorname{Im} u \operatorname{Ker} u$), ce qui conduit à plusieurs choix du projecteur p.

4. Ici $D = \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(2,1)$. N'importe quel projecteur d'image D convient. On peut proposer celui dont la matrice est $\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.9.

Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$. On note $\mathcal{H}_p$ l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_p$ est un espace vectoriel réel de dimension p.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{H}_p$ par, pour tout $U = (u_n) \in \mathcal{H}_p$:

$$\varphi(U) = \sum_{k=0}^{p-1} u_k$$

est linéaire.

3. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ converge.

On pose $f_U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Calculer $f_U(x)$ en fonction de $P_U(x)$ où $P_U = \sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k X^k$.

En déduire que $f_U(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si $U \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Solution :

1. $\mathcal{H}_p$ est l'ensemble des suites de période p.

- la suite identiquement nulle est un élément de $\mathcal{H}_p$: cet ensemble est donc non vide.
- on montre aisément que si U et V sont deux suites de période p, alors, pour tout scalaire λ, la suite $U + \lambda V$ est périodique de période p.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{H}_p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que :

$$T(U) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$$

Cette application est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels, ce qui montre que $\mathcal{H}_p$ est de dimension p. En effet :

- elle est trivialement linéaire ;
- si $T(U) = 0$, la suite U étant p-périodique, alors $U = 0$; ainsi T est injective ;

- toute suite p-périodique est entièrement déterminée par ses p premiers éléments $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$; ainsi T est surjective (notons d'ailleurs que ceci montre en une seule fois que T est bijective).

2. La linéarité de φ se déduit de la linéarité de l'application somme.

3. La suite U étant périodique, elle est bornée par $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |u_i|$. Ainsi, pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant 0$, $|u_n x^n| \leqslant M|x|^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente puisque $|x| < 1$.

La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ étant convergente, pour tout $x \in [0,1[$, on peut écrire :

$$f_U(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{kp} u_n x^n$$

Or, par p-périodicité :

$$\sum_{n=0}^{kp} u_n x^n = P_U(x)(1 + x^p + x^{2p} + \cdots x^{kp}) = P_U(x) \frac{1 - x^{(k+1)p}}{1 - x^p}$$

Ce qui entraîne que :

$$f_U(x) = \frac{P_U(x)}{1 - x^p}$$

- si $U \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors $P_U(1) = 0$, ce qui entraîne que le polynôme P_U est divisible par $X - 1$.

Or, $1 - X^p = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1})$.
Après simplification par $x - 1$, le passage à la limite lorsque x tend vers 1 est alors licite et :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{P_U(x)}{1 - x^p} = \ell \in \mathbb{R}$$

- si $U \notin \operatorname{Ker} \varphi$, alors $P_U(1) \neq 0$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{x \to 1^-} \left| \frac{P_U(x)}{1 - x^p} \right| = +\infty.$$

Exercice 2.10.

Dans tout l'exercice on confond polynôme et fonction polynôme associée.
1. On considère l'application $\Phi : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(P, Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1 - x}} dx.$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ qu'on notera $\langle \; , \; \rangle$.
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle orthogonale pour ce produit scalaire ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme non nul A de degré a inférieur ou égal à n on note R_A l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme P, associe le reste de la division euclidienne de P par A.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $A(X) = 1 + X + X^2$.

Donner la matrice de R_A sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser le noyau et l'image de R_A.

3. Dans la suite, n est un entier supérieur ou égal à 2 et A un polynôme de degré a non nul.

a) Montrer que R_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que R_A est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image en en donnant des bases respectives.

c) Donner les valeurs propres de R_A ainsi que les sous-espaces propres associés.
Préciser les cas $a = 0$ et $a = n$.

4. a) On suppose que A n'admet pas de racine réelle dans $[0,1]$.
Montrer alors que 1 et A ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

b) On suppose a est supérieur ou égal à 1 et que A admet une racine réelle x_0 appartenant à $[0,1]$, c'est-à-dire que $A = (X - x_0)B$ où B est un polynôme de degré $a - 1$.
Montrer que B et $(X - x_0)^2 B$ ne sont pas orthogonaux.

c) En déduire que si $a \neq 0$ et $a \neq n$, R_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Solution :

1. $\star$ Φ est bien définie, car une fonction polynôme est bornée sur $[0,1]$ et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0,1], \dfrac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t}} \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-t}}$. La convergence de l'intégrale de la fonction majorante donne la convergence (absolue) de l'intégrale proposée.

$\star$ Φ est banalement bilinéaire symétrique et positive. Enfin le théorème de positivité de l'intégrale montre que si $\Phi(P,P) = 0$, alors le polynôme P s'annule en tout point de $[0,1]$, donc est le polynôme nul.

$$\Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]$$

$\Phi(1, X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx > 0$, donc 1 et X ne sont pas orthogonaux.

2. On a :

$$\begin{cases} 1 = 0(1 + X + X^2) + 1 \\ X = 0(1 + X + X^2) + X \\ X^2 = 1(1 + X + X^2) - 1 - X \\ X^3 = (X - 1)(1 + X + X^2) + 1 \end{cases}, \text{ soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clairement $\operatorname{Ker} R_A$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $1 + X + X^2$ et $\operatorname{Im} R_A = \operatorname{Vect}(1, X)$

3. a) Si $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$, avec $\deg R_1 < a$ et $\deg R_2 < a$, alors, pour tout scalaire λ : $P_1 + \lambda P_2 = A(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$, avec $\deg(R_1 + \lambda R_2) < a$.

Ainsi $R_A(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = R_A(P_1) + \lambda R_A(P_2)$ et R_A est linéaire.

Enfin, comme $a \leqslant n$, R_A est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Comme $\deg(R_A(P)) < a$, on a $R_A(P) = 0.A + R_A(P)$ et par conséquent $R_A(R_A(P)) = R_A(P)$, donc $R_A \circ R_A = R_A$ et R_A est un projecteur.

Le noyau de R_A est formé des polynômes multiples de A et une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ est par exemple $(A, AX, AX^2, \ldots, AX^{n-a})$.

L'image de R_A est $\mathbb{R}_{a-1}[X]$, dont une base est $(1, X, \ldots, X^{a-1})$.

c) R_A étant un projecteur, ses valeurs propres ne peuvent être que 0 et 1, avec $E_{(0)} = \operatorname{Ker} R_A$ et $E_{(1)} = \operatorname{Im} R_A$, lorsque ces sous-espaces ne sont pas réduits au vecteur nul.

⋆ Si $a = 0$, alors $R_A = 0$ et 0 est la seule valeur propre.
⋆ Si $a = n$, alors $E_{(0)} = \operatorname{Vect}(A)$ et $E_{(1)} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. a) A garde un signe constant sur $[0, 1]$, donc $\Phi(1, A) = \displaystyle\int_0^1 \frac{A(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt 0$ et $A \in \operatorname{Ker} R_A$, $1 \in \operatorname{Im} R_A$.

b) $(X - x_0)^2 B^2$ reste positif ou nul sur $[0, 1]$, mais n'est pas le polynôme nul, donc : $\Phi(B, (X - x_0)^2 B) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t - x_0)^2 B^2(t)}{\sqrt{1-t}}\, dt > 0$ et B et $(X - x_0)^2 B$ ne sont pas orthogonaux.

Or $(X - x_0)^2 B \in \operatorname{Ker} R_A$ et $B \in \operatorname{Im} R_A$, puisque $\deg B < \deg A$ et le degré de $(X - x_0)^2 B$ n'excède pas n.

c) Ainsi, sous les conditions imposées, dans tous les cas on a trouvé un vecteur de l'image et un vecteur du noyau non orthogonaux : R_A n'est pas un projecteur orthogonal.

Exercice 2.11.

On rappelle que la donnée d'une fonction polynomiale sur $[0, 1]$ définit entièrement cette fonction sur $\mathbb{R}$.

1. A toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}[X]$ on associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(P)(x) = \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

a) Rappeler pourquoi la famille $\mathcal{B} = (1, 1 - X, \ldots, (1 - X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'image par φ de $(1 - X)^p$.

c) Montrer que l'application $P \mapsto \varphi(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, préciser le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.

d) L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Quelles sont les valeurs propres éventuelles de φ ?

2. a) Soit F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ de base $\mathcal{B}'$ définie par :

$$\mathcal{B}' = \big((1-X), (1-X)^2, \dots, (1-X)^{n+1}\big).$$

Montrer que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = F_n$.

Soit Ψ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble de départ et à F_n comme ensemble d'arrivée.

b) Écrire la matrice M_n de Ψ_n relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
En déduire que Ψ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur F_n. Déterminer M_n^{-1} ainsi que $\Psi_n^{-1}((1-X)^k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$.
Préciser les valeurs propres de M_n.

c) Soit k un entier tel que $2 \leqslant 2k \leqslant n$. Soit $P_k(X) = X^k(1-X)^k$.
Montrer que P_k est un élément de F_n. Le décomposer sur la base $\mathcal{B}'$.
Déterminer $\Psi_n^{-1}(P_k)$. En déduire les antécédents de P_k par φ.

Solution :

1. a) La famille $\mathcal{B} = \big(1, 1-X, \dots, (1-X)^n\big)$ est à degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P_p(X) = (1-X)^p$. On a

$$\varphi(P_p)(x) = \sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{(1-t)^p}{\sqrt{1-t}}dt$$

Cette intégrale est convergente, car la fonction à intégrer est $(1-t)^{p-\frac{1}{2}}$, qui est une fonction de référence (Riemann). Un calcul immédiat donne

$$\varphi(P_p)(x) = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+\frac{1}{2}}$$

c) La linéarité de φ est évidente et on vient de montrer que l'image d'un élément de la base $\mathcal{B}$ est un multiple de l'élément « suivant » de cette base. φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
Toujours par la question précédente, il vient $\deg\varphi(P) = \deg P + 1$.

d) Comme $\deg\varphi(P) = \deg P + 1$, l'application φ est injective. Par contre, elle n'est pas surjective, puisque $\mathbb{R}_0[X]$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im}\varphi$.
Enfin, quel que soit λ réel, l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ n'a pas de solution non nulle, puisque :

⋆ pour $\lambda 0$ et $P 0$, $\deg\varphi(P) = \deg P + 1 \deg P = \deg(\lambda P)$;

⋆ pour $\lambda = 0$, l'équation $\varphi(P) = 0$ n'admet que la solution $P = 0$.

Ainsi : $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}}\varphi = \emptyset$.

2. a) Cela résulte du calcul fait en 1. b).

b) Et encore par les calculs faits en 1. b) :

$$M_n = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{1/2}, \frac{1}{3/2}, \dots, \frac{1}{n+1/2}\Big) = \mathrm{diag}\Big(2, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{2n+1}\Big)$$

Cette matrice est évidemment inversible, et :

$$M_n^{-1} = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2n+1}{2}\Big)$$

Ainsi $\Psi_n^{-1}\big((1-X)^k\big) = \dfrac{2k-1}{2}(1-X)^{k-1}$. La matrice M_n étant diagonale, ses valeurs propres sont évidentes.

c) On a $P_k(1) = 0$ et P_k est de degré $2k \leqslant n$; ainsi $P_k \in F_n$.
On écrit alors :

$$P_k(X) = (1-X)^k X^k = (1-X)^k((1+(X-1))^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathrm{C}_k^i (1-X)^{k+i}$$

Donc :

$$\Psi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathrm{C}_k^i \frac{2(k+i)-1}{2}(1-X)^{k+i-1}$$

Pour terminer, on se rappelle que Ψ_n est la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble de départ et à F_n comme ensemble d'arrivée, ce qui permet d'achever la question.

Exercice 2.12.

Soit A la matrice d'ordre 3 définie par

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A

(on pourra utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).

b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soit e un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre -1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un réel $\lambda(u)$ tel que

$$u = \lambda(u)e + u', \text{ avec } \langle u', e\rangle = 0$$

Déterminer $\lambda(e)$.

3. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, f(u)\rangle = 0\}$.

a) Montrer que $u \in F$ si et seulement si $|\lambda(u)| = ||u'||$.

b) Soient $(u, v) \in F^2$. Montrer que $u + v \in F$ si et seulement si (u, v) est lié.

c) Quels peuvent être les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ?

Solution :

1. a) On s'aperçoit que $A - I = -\dfrac{2}{3}J$.

La matrice J vérifie $J^2 = 3J$. Ses valeurs propres sont donc incluses dans l'ensemble $\{0, 3\}$. Or elle est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Comme $J0$ et $J3I$, ses valeurs propres sont exactement 0 et 3.

les valeurs propres de A sont alors ± 1.

Proposons une seconde méthode : la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. On s'aperçoit que ses colonnes sont deux à deux orthogonales et normées : c'est une matrice orthogonale. Elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont alors ± 1.
On pourrait également remarquer que $A^2 = I$.

b) Nous avons déjà répondu à cette question. Les sous-espaces propres de f sont

$$E_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \quad ; \quad E_{-1} = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$$

2. Le sous-espace propre E_{-1} est de dimension 1, engendré par exemple par le vecteur $(1, 1, 1)$. Il est orthogonal à E_1 qui est de dimension 2.
L'endomorphisme f étant diagonalisable, ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, tout vecteur u se décompose sous la forme :

$$u = \lambda(u)e + u', \text{ avec } \langle u', e\rangle = 0.$$

Comme $e = e + 0$, l'unicité de cette décomposition entraîne $\lambda(e) = 1$.

3. On remarquera que F n'est pas un sous-espace vectoriel.

a) Soit $u \in F$. Alors

$$\langle \lambda(u)e + u', -\lambda(u)e + u'\rangle = 0$$

Et comme $\langle e, u'\rangle = 0$, cela est équivalent à $\lambda(u)^2 = ||u'||^2$.

b) Dire que $u + v \in F$ signifie que $\langle u + v, f(u) + f(v)\rangle = 0$. Comme $u \in F$ et $v \in F$, ceci est équivalent à :

$$\langle u, f(v)\rangle + \langle v, f(u)\rangle = 0$$

ou, par un calcul immédiat :

$$-2\lambda(u)\lambda(v) + 2\langle u', v'\rangle = 0$$

Or les hypothèses de la question sont équivalentes à :

$$|\lambda(u)| = ||u'|| \quad ; \quad |\lambda(v)| = ||v'||$$

Ainsi $u + v \in F$ est équivalent à $|\langle u', v'\rangle| = ||u'|| \cdot ||v'||$, c'est-à-dire le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Les vecteurs u' et v' sont donc liés. Écrivons alors : $v' = \alpha u'$.
On a

$$\lambda(u)\lambda(v) = \alpha\langle u', u'\rangle = \alpha(\lambda(u))^2$$

Si on avait $\lambda(u) = 0$, alors on aurait $u = u'$, avec $||u'|| = |\lambda(u)| = 0$, donc $u = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $\lambda(u)0$ et en simplifiant : $\lambda(v) = \alpha\lambda(u)$, ce qui entraîne que u et v sont liés.
La réciproque est évidente.

c) On déduit de la question précédente que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ne peuvent être que des droites vectorielles.

Exercice 2.13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Phi : P \longmapsto X(1-X)P'' + (1-2X)P'$$

Pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on considère le polynôme $U_p = X^p(1-X)^p$ et $L_p = \dfrac{1}{p!}(U_p)^{(p)}$, où $(U_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de U_p.

1. Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner la matrice de Φ relativement à sa base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.

2. Donner les valeurs propres de Φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Calculer le degré et le coefficient dominant de L_p.

4. On pose $L_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \ell_{p,k} X^k$. Démontrer que :

$$\ell_{p,k} = (-1)^k C_p^k C_{p+k}^k$$

5. a) Trouver une relation de récurrence entre $\ell_{p,k}$ et $\ell_{p,k+1}$.

b) Écrire un programme Pascal permettant d'obtenir les coefficients de L_p. En voici l'entête :

```
Program Calcul ;
Const Deg_Max = 100 ;
Type Polynome = Array[0..Deg_Max] Of LongInt ;
Procedure Calcul_Lp(
```

6. Montrer que L_p est vecteur propre de Φ.

Solution :

1. La linéarité de Φ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétés des opérations. D'autre part, si $\deg P = k \leqslant n$, alors $\deg \Phi(P) \leqslant k \leqslant n$, donc Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(X^k) &= X(1-X)k(k-1)X^{k-2} + (1-2X)kX^{k-1}\\ &= -k(k+1)X^k + k^2X^{k-1},\end{aligned}$$

tandis que $\Phi(1) = 0$ et $\Phi(X) = -2X + 1$, d'où :

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & -2 & 4 & & & \\ & & -6 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & n^2 \\ & & & & & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

Les coefficients $m_{i,j}$ tels que $i > j$ ou $j > i+1$ étant tous nuls.

2. M est trigonale supérieure, ses valeurs propres sont donc en évidence sur la diagonale, il s'agit des nombres deux à deux distincts : $-k(k+1)$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ admet $n+1$ valeurs propres, donc est diagonalisable.

3. $U_p = (-1)^p X^{2p} + \cdots$, donc $U_p^{(p)} = (-1)^p(2p)(2p-1)\ldots(p+1)X^p + \cdots$,
Par conséquent L_p est de degré p et de coefficient dominant :

$$(-1)^p \frac{(2p)!}{p!p!} = (-1)^p \mathrm{C}_{2p}^p$$

4. On a $U_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (-1)^k x^{p+k}$ et comme $x \mapsto \dfrac{i!}{(i-p)!} x^{i-p}$ est la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto x^i$ (pour $i \geqslant p$), il vient :

$$p! L_p(x) = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{C}_p^i (-1)^i \frac{(i+p)!}{i!}\, x^i, \text{ soit :}$$

$$\forall\, k \in [\![0, p]\!], \ell_{p,k} = (-1)^k \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^k$$

5. a) Le retour aux factorielles donne, pour $k < p$:

$$\ell_{p,k+1} = -\frac{(p-k)(p+k+1)}{(k+1)^2}\, \ell_{p,k}$$

b)

```
Program Calcul ;
Const Deg_Max = 100 ;
Type Polynome = Array[0..Deg_Max] Of LongInt ;
Procedure Calcul_Lp(Var L :polynome ; p :integer) ;
   Var k :integer
   Begin
     L[0] :=1 ;
     For k :=0 to p-1 do
```

```
        L[k+1] :=(-(p-k)*(p+k+1)*L[k]/((k+1)*(k+1)) ;
    End ;
```

6. On a, pour tout p : $(X-X^2)U_p' = p(1-2X)U_p$ et en dérivant $p+1$ fois, grâce à la formule de Leibniz :

$$(X-X^2)U_p^{(p+2)} + (p+1)(1-2X)U_p^{(p+1)} - p(p+1)U_p^{(p)}$$
$$= p(1-2X)U_p^{(p+1)} - 2p(p+1)U_p^{(p)}$$

En divisant par $p!$, et en simplifiant il reste :

$$\Phi(L_p) = -p(p+1)L_p$$

Exercice 2.14.

1. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f_A l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f_A(X) = XA$.

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer M sa matrice associée dans la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la trace de f_A (ou de M). (La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale et on rappelle que deux matrices semblables ont la même trace).

c) Montrer que f_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer f_A^{-1}.

2. On souhaite maintenant généraliser la question précédente. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$.

Soit C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_C l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_C(X) = XC$.

a) Montrer que si C est p-nilpotente (c'est-à-dire si $C^p = 0$) il en est de même pour f_C.

b) Déterminer la trace de f_C (on pourra commencer par calculer $f_C(E_{i,j})$).

c) Montrer que f_C est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si C est inversible.

Solution :

1. a) f_A est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même et sa linéarité est évidente.

On a : $f_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2}$;

$$f_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_{1,1} + 4E_{1,2} \,;$$
$$f_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = E_{2,1} + 2E_{2,2} \,;$$
$$f_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 3E_{2,1} + 4E_{2,2} \,;$$
$$M(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) D'où : $\operatorname{tr}(f_A) = 10 = 2\operatorname{tr}(A)$.

c) la matrice précédente est inversible, d'inverse : $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) On a $f_C^2(X) = f_C(XC) = (XC)C = XC^2$ et, par récurrence $f_C^p(X) = XC^p$. Ainsi si $C^p = 0$, alors $f_C^p = 0$ et f_C est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) La matrice $f_C(E_{i,j}) = E_{i,j}C$ a toutes ses lignes nulles, sauf sa i-ième où on effectue une recopie de la j-ième ligne de C. En notant $C = (c_{i,j})$, on a donc :

$$f_C(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}E_{i,k}$$

Ainsi la coordonnée de $f_C(E_{i,j})$ sur $E_{i,j}$ vaut $c_{j,j}$ et :

$$\operatorname{tr}(f_C) = \sum_{i,j} c_{j,j} = n\operatorname{tr}(C)$$

c) $\star$ Si C est inversible, alors on peut définir $f_{C^{-1}}$ et :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_{C^{-1}} \circ f_C(X) = (XC)C^{-1} = X,\ i.e.\ f_{C^{-1}} \circ f_C = id$$

On peut vérifier que l'on a aussi $f_C \circ f_{C^{-1}} = id$, mais c'est inutile puisque l'on manipule des endomorphismes d'un espace de dimension finie n^2.

Bref si C est inversible, alors $f_C \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Réciproquement, supposons que $f_C \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f_C(D) = I_n$, c'est-à-dire telle que $DC = I_n$, ce qui prouve que C est inversible, d'inverse D.

Exercice 2.15.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x \mid y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note par $\|x\|$ la norme euclidienne du vecteur x (ainsi $\|x\|^2 = \langle x \mid x \rangle$). Si E est un sous–espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on désigne par $E^\perp$ le sous espace des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{Im}(B) \subseteq \operatorname{Im}(A)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un unique vecteur y appartenant à $(\operatorname{Ker}(A))^\perp$ tel que $Bx = Ay$. On notera $u(x)$ cet unique vecteur y.

b) Vérifier que l'application u ainsi définie est linéaire. On notera X sa matrice.

c) Montrer que X est l'unique matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$B = AX,\ \operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} B \text{ et } \operatorname{Im}(X) \subseteq (\operatorname{Ker} A)^\perp.$$

On appelle cette solution X la *solution réduite* de l'équation $AY = B$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $AY = B$, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, admet au moins une solution si et seulement si $\operatorname{Im}(B) \subseteq \operatorname{Im}(A)$. A quelle condition cette équation admet-elle une unique solution ?

3. Dans cette question, on se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que l'équation $AY = B$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet des solutions.

b) Déterminer la solution réduite de cette équation.

Solution :

Dans tout cet exercice, on confond vecteur de $\mathbb{R}^p$ et matrice colonne canoniquement associée.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}^p$, comme $\operatorname{Im} b \subset \operatorname{Im} A$, on voit qu'il existe $a \in \mathbb{R}^p$ tel que $Bx = Aa$.

Décomposons le vecteur a selon la somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}^p = (\operatorname{Ker} A) \oplus (\operatorname{Ker} A)^\perp$$

sous la forme $a = b + y$, il vient $Bx = Ay$.

De plus, si $y_1 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ est tel que $Bx = Ay_1$, on voit que le vecteur $y - y_1$ appartient à l'espace $\operatorname{Ker} A \cap (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et par conséquent est nul.

L'existence et l'unicité sont donc prouvées.

b) La linéarité de X s'obtient en utilisant l'unicité du vecteur $y = Xx$ dans $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ tel que $Bx = Ay$.

c) Si $Xx = 0$, il est clair que $Bx = AXx = 0$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} B$, on a $Bx = 0 = A0$ et par conséquent $Xx = 0$ ($0 \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$). On a donc $\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} B$ et X vérifie bien toutes les conditions demandées.

Maintenant, si Y satisfait $AY = B$, avec $\operatorname{Ker} Y = \operatorname{Ker} B$ et $\operatorname{Im} Y \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $Xx - Yx \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$. Il en résulte que l'on a $X = Y$, ce qui prouve l'unicité de la solution réduite.

2. Lorsque $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$, on obtient avec la question 1. une solution de l'équation $AY = B$.
Réciproquement, il est clair que l'existence d'une matrice Y telle que $AY = B$ entraîne l'inclusion $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.
De plus, on remarque qu'il y a une unique solution si et seulement si la matrice A (*i.e.* l'endomorphisme canoniquement associé) est injective, donc bijective.

3. a) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On observe facilement que :

$$Be_1 = A(e_1 + e_2),\ Be_2 = A(e_2 + e_3) \text{ et } Be_3 = A(e_1 + e_3)$$

D'où $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$ et par conséquent l'équation proposée admet des solutions. Il y en a plusieurs car la matrice A n'est pas injective.

b) On trouve $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Vect}(u, v)$, avec $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il existe donc deux réels α et β tels que $Xe_1 = \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. D'où :

$$Be_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = AXe_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, d'où $Xe_1 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deux systèmes du même type permettent de trouver $Xe_2 = u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis

$Xe_3 = \dfrac{1}{3}(u + v) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.16.

1. On rappelle que $\forall \theta_1 \in \mathbb{R},\ \forall \theta_2 \in \mathbb{R},\ \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$.

Soit $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ deux nombres complexes non nuls.
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur θ_1 et θ_2 pour que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Généraliser à n nombres complexes ($n \geqslant 3$), c'est-à-dire, si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pour que :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$$

On suppose de plus que $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a) Montrer que le réel 1 est valeur propre de A.

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$, et si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.

3. On suppose la matrice A diagonalisable. Que peut-on dire de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$?

Solution :

1. $\star$ On a :
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| & \\ &\iff (\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2)^2 + (\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2)^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\ &\iff \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\ &\iff \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \text{ (car } \rho_1 0 \text{ et } \rho_2 0) \\ &\iff z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument modulo } 2\pi. \end{aligned}$$

Le résultat reste valable si z_1 ou z_2 est nul, puisqu'alors son argument est quelconque.

Supposons alors que pour $n - 1$ nombres complexes, le module de la somme soit égal à la somme des modules si et seulement si ces $n - 1$ nombres ont le même argument modulo 2π, et considérons n nombres complexes tels que l'on ait :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |z_k| + |z_n| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\Big| + |z_n|$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |z_k| = \Big|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\Big|$ et les $n-1$ nombres complexes $z_1, \dots, z_{n-1}$ ont le même argument modulo 2π. On peut donc écrire $z_1 = \rho_1 \mathrm{e}^{i\theta}, \dots, z_{n-1} = \rho_{n-1}\mathrm{e}^{i\theta}$ et en posant $z' = z_1 + \cdots + z_{n-1} = (\rho_1 + \cdots + \rho_{n-1})\mathrm{e}^{i\theta}$, l'hypothèse devient :

$$|z' + z_n| = |z'| + |z_n|$$

et donc z_n a même argument que z'. Finalement tous les nombres ont même argument, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang n.

On conclut par le principe de récurrence.

2. a) Si C est la colonne dont tous les coefficients valent 1, on a $AC = C$ et 1 est bien valeur propre de A.

b) $\star$ Soit λ une valeur propre de A (a priori complexe) et $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une colonne propre (donc non nulle) associée. On a :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Soit i tel que $|x_i| = \max\limits_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$, comme $C0$, on a $|x_i| > 0$ et :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \implies |\lambda|.|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \text{ (les } a_{i,j} \text{ sont des réels positifs)}$$

Ainsi, par le choix de l'indice i :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{|x_j|}{|x_i|} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

$\star$ Si $|\lambda| = 1$, les inégalités précédentes sont des égalités et comme les $a_{i,j}$ sont **strictement** positifs : $\forall\, j \in [\![1, n]\!], |x_j| = |x_i|$ et :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = |\lambda| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\Big| = \sum_{j=1}^{n} \Big|a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\Big|$$

Ainsi tous les nombres $a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ ont le même argument, soit celui de $a_{i,i}\dfrac{x_i}{x_i}$, *i.e.* 0. Ayant le même module et le même argument, tous les x_j sont égaux et la colonne C est propre pour la valeur propre 1 , soit $\lambda = 1$.

3. Si A est diagonalisable, il existe P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D.$$

Alors $A^p = PD^pP^{-1}$ et quitte à renuméroter les valeurs propres, on peut supposer $\lambda_1 = 1$ et $\forall\, k > 1, |\lambda_k| < 1$ (en effet A est diagonalisable et le sous-espace propre associé à 1 est la droite engendrée par la colonne dont tous les coefficients valent 1).

Par conséquent la suite (A^p) converge (la convergence s'entendant coefficient par coefficient) et sa limite est la matrice $P\,\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)P^{-1}$ qui est la matrice d'un projecteur de rang 1.

Exercice 2.17.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \ | \ \rangle$. Dans les questions 1. et 2. on ne suppose pas que E est de dimension finie.

1. Soit f une **application** de E dans E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

 (i) : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x)|y\rangle = -\langle x|f(y)\rangle$

 (ii) : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E,\ \langle f(x)|x\rangle = 0$. ($\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.)

f est dite antisymétrique si et seulement si elle vérifie (i) ou (ii).

2. Soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) et f antisymétrique.

 a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, f$.

 b) On pose $s = f \circ f$. Montrer que
 - s est symétrique (c'est-à-dire, $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle$),
 - toute valeur propre de s est réelle et négative ou nulle et $\mathrm{Im}\, s \subset \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, s = \mathrm{Ker}\, f$.

3. On suppose que E est de dimension finie et l'on considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Montrer qu'un endomorphisme f de E est antisymétrique si et seulement si la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tA = -A$.

Solution :

1. ii) $\Longrightarrow$ i). En effet, $\forall (x, y) \in E^2$:

$0 = \langle f(x + y), x + y\rangle = \langle f(x) + f(y), x + y\rangle$

$\quad = \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle = \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle$

On a donc bien : $\langle f(x), y\rangle = -\langle f(y), x\rangle$.

 i) $\Longrightarrow$ ii).

Montrons déjà que f est linéaire. Soit $(x, y, z) \in E^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$\delta = \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), z\rangle = \langle f(\alpha x + y), z\rangle - \alpha\langle f(x), z\rangle - \langle f(y), z\rangle$

et en utilisant la propriété i) :

$\delta = -\langle \alpha x + y, f(z)\rangle + \alpha\langle x, f(z)\rangle + \langle y, f(z)\rangle = \langle \alpha x + y - (\alpha x + y), f(z)\rangle = 0.$

Ainsi, pour tout z, $\langle f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y),z\rangle = 0$ et donc :

$$f(\alpha x+y)-\alpha f(x)-f(y)=0$$

Ceci étant vrai pour tout $x,y\in E$ et tout scalaire α, f est bien linéaire.

On a alors, grâce à i) : $\forall\, x\in E, \langle f(x),x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$ et donc $\langle f(x),x\rangle = 0$.

2 a) Soit $x\in \operatorname{Ker} f$ et $z\in \operatorname{Im} f$, il existe $y\in E$ tel que $z=f(y)$ et :

$$\langle x,z\rangle = \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x),y\rangle = -\langle 0,y\rangle = 0$$

Ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f$ est orthogonal à $\operatorname{Im} f$.

b) • En utilisant deux fois i), pout tout $(x,y)\in E^2$:

$\langle s(x),y\rangle = \langle f(f(x)),y\rangle = -\langle f(x), f(y\rangle = +\langle x, f(f(y))\rangle = \langle x, s(x)\rangle$.

L'endomorphisme s est bien symétrique.

• Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé :

$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = -\langle x, f(f(x))\rangle = -\langle x, s(x)\rangle = -\lambda\langle x,x\rangle = -\lambda\|x\|^2$, et donc $\lambda\in\mathbb{R}^-$.

• $s=f\circ f$, donc clairement $\operatorname{Im} s\subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f\subset \operatorname{Ker} s$.

• Soit $x\in\operatorname{Ker} s$, alors : $0=\langle s(x),x\rangle = -\langle f(x),f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2$. Ainsi $f(x)=0$ et $x\in\operatorname{Ker} f$.

Finalement, on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} s$.

3. Soit $A=(a_{i,j})$ la matrice de f relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\langle f(e_j),e_i\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}e_k, e_i\rangle = a_{i,j}$$

$\star$ Si f est antisymétrique, $\langle f(e_j),e_i\rangle = -\langle e_j, f(e_i)\rangle$, soit $a_{i,j}=-a_{j,i}$ et A est antisymétrique.

$\star$ Si A est antisymétrique, pour tout $(x,y)\in E^2$, en notant X et Y les matrices colonnes associées relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\langle f(x),y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX(-A)Y = -{}^tX(AY) = -\langle x, f(y)\rangle$$

et f est bien antisymétrique.

Exercice 2.18.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_n$ définis par $P_0=1$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_{n+1} est la primitive de P_n pour laquelle on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$.

1. Déterminer P_1.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si P_n est une fonction impaire, il en est de même de P_{n+2}.
En déduire que pour tout n impair différent de 1, $P_n(1)=0$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\mathrm{d}t \ = \ 2P_{n+1}(1)$$

4. On considère sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, l'application :

$$\phi \ : \ (P,Q) \ \longmapsto \ \phi(P,Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

5. Soient m et n deux entiers vérifiant $m \geqslant n > 0$. Justifier les égalités :

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}P_{m+n}(1) \text{ et } \phi(P_n, P_0) = 0$$

6. On pose $E_n = \mathrm{Vect}\{P_{2k}, 0 \leqslant 2k \leqslant n\}$ et $F_n = \mathrm{Vect}\{P_{2k+1}, 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n\}$. Montrer que E_n et F_n sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. P_1 est de la forme $P_1(t) = t + a$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t+a)\,dt = 0 \iff a = 0$, donc $P_1(t) = t$.

2. Remarquons que pour $n \geqslant 2, P_n(1) - P_n(-1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)\,dt = 0$.

Supposons P_n impair, alors P_{n+1} (primitive de P_n) est pair et P_{n+2} est de la forme $Q + b$, où Q est un polynôme impair et b une constante. La nullité de l'intégrale sur $[-1, 1]$ impose alors $b = 0$ et P_{n+2} est impair. Comme P_1 est impair, on conclut par le principe de récurrence : pour tout n impair, P_n est impair (et donc si n est pair P_n, qui est une primitive de P_{n-1} est pair).

Pour n impair, on a donc $P_n(-1) = -P_n(1)$ et comme on a remarqué que pour $n \geqslant 2$, $P_n(-1) = P_n(1)$, il vient :

$$n \text{ impair} \geqslant 2 \implies P_n(1) = 0$$

3. Pour $n \geqslant 1$, on a $n + 1 \geqslant 2$ et en intégrant par parties :

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\,dt = \big[tP_{n+1}(t)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)\,dt = P_{n+1}(1) + P_{n+1}(-1)$$

Soit, compte tenu de la remarque faite au début de la question 2. :

$$\int_{-1}^{1} tP_n(t)\,dt = 2.P_{n+1}(1)$$

4. On vérifie facilement que ϕ est un produit scalaire (produit scalaire de référence).

5. Intégrons par parties, en dérivant P_n en P_{n-1} et en intégrant P_m en P_{m+1} :

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = \Big[P_n(t)P_{m+1}(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt$$

Si $n \geqslant 2$, on a *a fortiori* $m+1 \geqslant 2$ et le crochet de l'intégration par parties s'évanouit, soit :

$$\phi(P_n, P_m) = -\phi(P_{n-1}, P_{m+1})$$

D'où, par récurrence : $\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}\phi(P_1, P_{m+n-1})$, évidemment valable pour $n = 1$.

D'après la question 3. on a donc :

$$m \geqslant n \geqslant 1 \implies \phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1}P_{m+n}(1).$$

Enfin

$$2\phi(P_n, P_0) = \int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(-1) = 0, \text{ puisque } n+1 \geqslant 2.$$

6. E_n et F_n sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$ (car la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degrés, donc est une base de cet espace). Il reste à vérifier que pour tout k et tout j, P_{2k} et P_{2j+1} sont ϕ-orthogonaux. Or :

$\star$ d'après 5. $\phi(P_0, P_{2j+1}) = 0$;

$\star$ et pour $k \geqslant 1$, d'après 5. et 2., $\phi(P_{2k}, P_{2j+1}) = (-1)^{2k-1}P_{2(k+j)+1}(1) = 0$.

Ce qui achève la vérification.

Exercice 2.19.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, avec $A_n = (a_{i,j}(n))$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, la suite $n \mapsto a_{i,j}(n)$ converge vers $\ell_{i,j}$. On note alors $L = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geqslant 2$. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_n = \begin{pmatrix}\alpha_{1,n}\\ \vdots \\ \alpha_{p,n}\end{pmatrix}$, avec :

$U_0 = \begin{pmatrix}\alpha_{1,0}\\ \vdots \\ \alpha_{p,0}\end{pmatrix}$ est donnée et pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout k de $[\![1,p]\!]$:

$$\alpha_{k,n+1} = \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{p} \alpha_{i,n}$$

1. a) Pour tout n on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{k,n}$. Exprimer s_n en fonction de s_0.

b) Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, en déduire une relation entre $\alpha_{k,n+1}$ et $\alpha_{k,n}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On note J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les termes valent 1 et on pose $A = J - I_p$, où I_p est la matrice unité d'ordre p.

a) Exprimer U_{n+1} à l'aide de A et U_n.

b) A l'aide des résultats de la question 1., déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) En déduire la convergence de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

ainsi que la limite de cette suite.

Solution :

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n+1} = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\neq k} \alpha_{i,n} = \frac{p-1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} = s_n$$

Donc la suite (s_n) est constante et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0$.

b) D'où : $\alpha_{k,n+1} = \dfrac{1}{p-1}(s_n - \alpha_{k,n}) = \dfrac{1}{p-1}(s_0 - \alpha_{k,n})$.

c) Pour tout k fixé, la suite $n \mapsto \alpha_{k,n}$ est donc arithmético-géométrique, de raison $-\dfrac{1}{p-1}$ et de point fixe $\dfrac{s_0}{p}$.

$\star$ Si $p \geqslant 3$, la suite $(\alpha_{k,n})_n$ converge vers $\dfrac{s_0}{p}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \begin{pmatrix} s_0/p \\ \vdots \\ s_0/p \end{pmatrix}$$

$\star$ Si $p = 2$, on a $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, etc. Par conséquent la suite $(U_n)_n$ converge si et seulement si $a = b$.

2. a) Clairement $U_{n+1} = \dfrac{1}{p-1} A U_n$.

b) Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \big(\dfrac{1}{p-1}\big)^n A^n U_0$.

Or, comme : $\alpha_{k,n} - \dfrac{s_0}{p} = \big(-\dfrac{1}{p-1}\big)^n (\alpha_{k,0} - \dfrac{s_0}{p})$, il vient :

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{p}\big[1 - (-\frac{1}{p-1})^n\big] \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,0} + (-\frac{1}{p-1})^n \alpha_{k,0}$$

C'est-à-dire $U_n = B_n U_0$, avec $B_n = \dfrac{1}{p}\big[1 - (-\dfrac{1}{p-1})^n\big] J + (-\dfrac{1}{p-1})^n I_p$.

Ainsi, quel que soit U_0, on a $\big[\big(\dfrac{1}{p-1}\big)^n A^n - B_n\big] U_0 = 0$, soit $A^n = (p-1)^n B_n$ et finalement :

$$A^n = (-1)^n I_p + \frac{1}{p}[(p-1)^n - (-1)^n]J$$

c) Par conséquent : $M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_p + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{(p-1)^k - (-1)^k}{k!} J.$

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$, le passage à la limite est légitime et donne :

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \mathrm{e}^{-1} I_p + \frac{1}{p}[\mathrm{e}^{p-1} - \mathrm{e}^{-1}]J$$

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{2n})$.
Si $P \in E$, P' désigne le polynôme dérivé de P.

On considère Φ définie sur E par :

$$\Phi(P)(X) = \big(\frac{1}{4} - X^2\big)P'(X) + 2nXP(X)$$

1. Vérifier que Φ définit un endomorphisme de E.

2. a) Soit λ entier relatif tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant n$. Déterminer (α, β) de $\mathbb{N}^2$ pour que le polynôme $P(X) = \big(X + \frac{1}{2}\big)^{\alpha}\big(X - \frac{1}{2}\big)^{\beta}$ de E vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.

b) En déduire les valeurs propres et les polynômes propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

3. Déterminer la matrice A de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

4. Déterminer une matrice A' dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \ldots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5. Construire un endomorphisme Λ de E tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant $0, 1, 4, 9, \ldots, (2n)^2$ comme valeurs propres.

Solution :

1. La linéarité de Φ est claire, et :
   - $\star$ $\Phi(1) = 2nX$ (où 1 désigne le polynôme constant égal à 1) ;
   - $\star$ Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\Phi(X^k) = (2n-k)X^{k+1} + \frac{k}{4}X^{k-1}$.

Ainsi :

$$\Phi(X^{2n}) = \frac{n}{2}X^{2n-1} \text{ et pour } k \in [\![1, 2n-1]\!], \deg \Phi(X^k) = k+1 \leqslant 2n.$$

Par conséquent Φ est bien une application de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ vers lui-même et est donc un endomorphisme de cet espace.

2. a) Soit $P = \big(X + \frac{1}{2}\big)^{\alpha}\big(X - \frac{1}{2}\big)^{\beta}$, le calcul donne :

$$\Phi(P) - \lambda P = \Big(-(\alpha+\beta)X + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2nX - \lambda\Big)P$$

Ceci est le polynôme nul si et seulement si $\alpha + \beta = 2n$ et $\alpha - \beta = 2\lambda$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = n + \lambda$ et $\beta = n - \lambda$.

Ces deux nombres étant bien des entiers naturels et leur somme n'excédant pas $2n$, on conclut :

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda} \text{ est propre pour la valeur propre } \lambda$$

b) On connaît donc $2n+1$ valeurs propres de l'endomorphisme Φ. Comme l'espace est de dimension $2n+1$, on les connaît toutes et chaque sous-espace propre est de dimension 1, donc engendré par le polynôme trouvé à la question précédente.

Ainsi l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

3. Les calculs ont été faits en 1. et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2n & 0 & 2/4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 2n/4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Les valeurs propres de A sont $-n, -n+1, \dots, n-1, n$, donc les valeurs propres de $A' = A + nI_{2n+1}$ sont $0, 1, \dots, 2n$, et A' a tous ses coefficients diagonaux égaux.

Ainsi $A' = A + nI_{2n+1}$ convient.

5. A'^2 a pour valeurs propres $0, 1, 4, \dots, (2n)^2$.

Donc l'endomorphisme associé à cette matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ convient.

Cet endomorphisme n'est autre que $\Lambda = (\Phi + n.id)^2$ et, tous calculs faits, on trouve :

$$\Lambda(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)^2 P'' + \left(\frac{1}{2} - 2X^2\right)((2n-1)X + n)P' \\ + \left(n^2(2X+1)^2 + 2n\left(\frac{1}{4} - X^2\right)\right)P$$

Exercice 2.21.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble formé des endomorphismes bijectifs.

Un sous-espace F de E est dit stable par $GL(E)$ si, pour tout $u \in GL(E)$, $u(F) \subset F$.

1. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe $u \in GL(E)$ tel que $u(x) = y$.

2. Montrer que si F est stable par $GL(E)$, alors $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Solution :

1. Considérons deux cas :

• la famille (x, y) est liée : il existe alors $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$. Par le théorème de la base incomplète, on construit une base $\mathcal{B}$ de E de la forme $(x, e_2, \ldots, e_n)$. On définit parfaitement u linéaire par :

$$u(x) = y, u(e_2) = e_2, u(e_3) = e_3, \ldots, u(e_n) = e_n$$

La matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1)$. L'endomorphisme u est donc inversible.

• la famille (x, y) est libre : il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E de la forme $(x, y, e_3, \ldots, e_n)$. On définit parfaitement u linéaire par :

$$u(x) = y, u(y) = x, u(e_3) = e_3, \ldots, u(e_n) = e_n$$

L'endomorphisme u est inversible, puisque l'image par u de la base $\mathcal{B}_1$ est une base de E.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k, avec $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. On choisit alors un vecteur y non nul tel que $y \notin F$ et un vecteur x non nul de F.
Par la question précédente il existe un automorphisme u de E tel que $u(x) = y$ et donc F n'est pas stable par cet automorphisme. Donc F n'est pas stable par $GL(E)$.

Comme il est clair que $\{0\}$ et E sont stables par $GL(E)$, on a la conclusion voulue.

Exercice 2.22.

La lettre $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle E.
Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de f et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ les sous-espaces propres de f respectivement associés, ainsi que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ les valeurs propres (distinctes) de g et $G_1, G_2, \ldots, G_q$ les sous-espaces propres de g respectivement associés.
Enfin, pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$, on note $H_{i,j} = F_i \cap G_j$.

1. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on définit le polynôme $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \mp$

1. a) Soit $(k, j) \in \{1, 2, \ldots, p\}^2$. Montrer que, quel que soit $v \in F_j$:

$$L_k(f)(v) = \begin{cases} 0_E & \text{si} \quad k \neq j, \\ v & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

b) Soit maintenant U un sous-espace de E stable par f.
Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, U est stable par $L_k(f)$.

Déduire des deux résultats précédents que $U \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

Conclure que $U = \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

Montrer enfin que l'endomorphisme de U induit par f est diagonalisable.

2. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, G_j est stable par f.

3. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $G_j = \bigoplus_{i=1}^{p} H_{i,j}$.

4. En déduire qu'il existe une base de E entièrement constituée de vecteurs propres à la fois de f et de g.

5. Montrer que tout endomorphisme de E appartenant à $\text{Vect}(id, f, g, g \circ f)$ est diagonalisable.

Solution :

1. a) Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $(f - \lambda_i Id)(v) = (\lambda_j - \lambda_i)v$. Il s'ensuit immédiatement que :

$$L_k(f)(v) = \Big(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \Big) v = \begin{cases} 0_E & \text{si} \quad k \neq j, \\ v & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

b) $\star$ Soit $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, U est stable par l'endomorphisme $f - \lambda_i Id$. Ainsi U est stable par toute composée de ces endomorphismes et donc par $L_k(f)$.

$\star$ Remarquons d'abord que, comme la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est une somme directe, et comme pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $U \cap F_i \subset F_i$, la somme

$$(U \cap F_1) + (U \cap F_2) + \cdots + (U \cap F_p)$$

est également directe.

Soit x un élément de U. Comme f est diagonalisable, $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$, et il existe donc $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$.
Pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $L_j(f)(x) = L_j(f)(u_j) = u_j$, et donc $u_j \in U$.
On en conclut que $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$, donc que $U \subset \bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i)$.

D'autre part, il est évident que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $U \cap F_i \subset U$, donc que $\bigoplus_{i=1}^{p} (U \cap F_i) \subset U$.

Finalement, on a obtenu : $\bigoplus_{i=1}^{p}(U \cap F_i) = U$.

$\star$ Notons φ l'endomorphisme de U induit par f. Comme $\bigoplus_{i=1}^{p}(U \cap F_i) = U$, U est égal à la somme directe de sous-espaces propres de φ ; ainsi φ est diagonalisable.

2. Soit $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Pour tout $x \in G_j$,

$$g(f(x)) = f(g(x)) = f(\mu_j x) = \mu_j f(x).$$

Par conséquent $f(x) \in G_j$, ce qui signifie que G_j est stable par f.

3. Soit $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Comme G_j est stable par f, on peut écrire grâce à la première question que :

$$G_j = \bigoplus_{i=1}^{p}(G_j \cap F_i) = \bigoplus_{i=1}^{p} H_{i,j}.$$

4. La somme de $(G_j)_j$ étant directe et égale à E, on montre facilement qu'il en est de même pour la somme de $(H_{i,j})_{i,j}$. En concaténant des bases de tous ceux des $H_{i,j}$ qui ne sont pas réduits à $\{0\}$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f et g.

5. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f et g, donc également de $f \circ g$ et bien entendu de id ; ainsi si $h \in \mathrm{Vect}(id, f, g, g \circ f)$, tout vecteur de cette base est un vecteur propre de h.

1

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

1. b) On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $E(X)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.

En déduire que la série de terme général $P(X > n)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X).$$

1. c) On suppose que la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $kP(X = k)$ converge et que X admet une espérance.

1. d) Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

2. Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.

Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes.
On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des n narcisses.

2. a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.

2. b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.

3. Déterminer un équivalent simple de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction $x \mapsto 1 - \big(1 - (1-p)^x\big)^n$ *ainsi que le changement de variable* $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} kP(X > k)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum_{j=0}^{n} jP(X > j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - nP(X > n)\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) = n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k)$ (la dernière série converge, car X admet une espérance).

Comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il vient par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} nP(X > n) = 0$$

Il résulte alors du a) que la série de terme général $P(X > n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = E(X)$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} P(X > j)$ (car la dernière série est à termes positifs et convergente).

On en conclut que la série de terme général positif $kP(X = k)$ converge et donc que X admet une espérance.

d) On vient de montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

2 a) Il est clair que $X = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit $k \in \mathbb{N}$; par indépendance on a :

$P(X \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} [1-(1-p)^k] = [1-(1-p)^k]^n$, ainsi :

$$P(X > k) = 1 - [1-(1-p)^k]^n$$

b) $\lim_{k\to\infty} (1-p)^k = 0$ et on sait qu'au voisinage de 0 (pour h) : $(1+h)^n - 1 \sim nh$

En conséquence : $P(X > k) \underset{(k\to\infty)}{\sim} n(1-p)^k$

Il s'ensuit que la série de terme général positif $P(X > n)$ converge, puisque celui-ci est équivalent au terme général d'une série géométrique convergente.

On conclut que X admet une espérance, avec :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} [1-(1-(1-p)^k)^n]$$

3. la fonction $f : x \mapsto 1-(1-(1-p)^x)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = n(1-(1-p)^x)^{n-1}(1-p)^x \ln(1-p) \leqslant 0$$

Donc f est décroissante et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{m+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{m} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^m f(x)\,dx$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1-(1-p)^m]$ vers $[0, m]$ et donne :

$$\int_0^m f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^{1-(1-p)^m} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = -\frac{1}{\ln(1-p)}\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k}\Big]_0^{1-(1-p)^m}$$

Quand m tend vers l'infini, $1-(1-p)^m$ tend vers 1 et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$ tend vers $-\dfrac{1}{\ln(1-p)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

En passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$-\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant E(X) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

On conclut classiquement que l'on a :

$$E(X) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln(1-p)}$$

Exercice 3.2.

Une urne U_1 contient n boules blanches et une urne U_2 contient n boules noires.

On tire à chaque tirage simultanément une boule dans U_1 que l'on met dans U_2 et une boule dans U_2 que l'on met dans U_1.

On note, pour $k \geqslant 1$, X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage, et X_0 la variable constante égale à n.

On pose, pour $k \geqslant 0$, $Z_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice A_n telle que, pour $k \geqslant 1$, $Z_k = \dfrac{1}{n^2} A_n Z_{k-1}$.

b) Quelle est la probabilité qu'au bout de n tirages on n'ait que des boules noires dans U_1 ? Quel(s) coefficient(s) de A_n^n peut-on en déduire ?

2. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Etudier la suite de terme général $E(X_k)$.

b) Montrer que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A_2.

c) En remarquant que $Z_0 = \frac{1}{6} Y_1 + \frac{1}{3} Y_2 - \frac{1}{2} Y_3$, déterminer Z_k pour $k \geqslant 1$.

d) En déduire, pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, la limite de $P(X_k = i)$ lorsque k tend vers l'infini.

Solution :

1. a) Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on peut écrire

$$P(X_k = i) = \sum_{j=0}^{n} P(X_k = i / X_{k-1} = j) P(X_{k-1} = j)$$

Or, si $i \notin \{j-1, j, j+1\}$, $P(X_k = i / X_{k-1} = j) = 0$ et

$$P(X_k = j-1 / X_{k-1} = j) = \frac{j^2}{n^2}\ ;\ P(X_k = j / X_{k-1} = j) = \frac{2j(n-j)}{n^2}\ ;$$

$$P(X_k = j+1 / X_{k-1} = j) = \frac{(n-j)^2}{n^2}$$

Donc :

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = 1), P(X_k = n) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = n-1)\ ;$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$P(X_k = i) = \frac{(n-i-1)^2}{n^2} P(X_{k-1} = i-1) + \frac{2i(n-i)}{n^2} P(X_{k-1} = i) + \frac{(i+1)^2}{n^2} P(X_{k-1} = i+1)$$

ce qui donne :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n^2 & 2(n-1) & 2^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & (n-1)^2 & 4(n-2) & 3^2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 2^2 & 2(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Le nombre de boules blanches dans U_1 diminue d'au plus une unité à chaque tirage. Il diminue de n en n tirages si et seulement s'il diminue d'une unité à chaque tirage, c'est-à-dire si et seulement si à chaque tirage on tire une boule noire de U_2 et une boule blanche de U_1.
Ainsi :

$$P(X_n = 0) = \prod_{k=0}^{n} \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$$

or : $Z_n = \big(\frac{1}{n^2}\big)^n A_n^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est de premier coefficient $P(X_n = 0)$

On en déduit que le coefficient $A_{1,n+1}$ de A_n^n vaut $(n!)^2$.

2. Il vient $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A_2 \begin{pmatrix} P(X_{k-1} = 0) \\ P(X_{k-1} = 1) \\ P(X_{k-1} = 2) \end{pmatrix}$

a) Un calcul élémentaire donne, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= P(X_k = 1) + 2P(X_k = 2) \\ &= P(X_{k-1} = 0) + \frac{1}{2} P(X_{k-1} = 1) + P(X_{k-1} = 2) + 2\frac{1}{4} P(X_{k-1} = 1) \\ &= P(X_{k-1} = 0) + P(X_{k-1} = 1) + P(X_{k-1} = 2) = 1 \end{aligned}$$

b) Il suffit d'effectuer le calcul pour voir que :

$$A_2 Y_1 = 4Y_1, A_2 Y_2 = -2Y_2, A_2 Y_3 = 0$$

c) On a :

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{4^k} A_2^k Z_0 = \frac{1}{4^k} \big(\frac{1}{6} A_2^k Y_1 + \frac{1}{3} A_2^k Y_2 - \frac{1}{2} A_2^k Y_3\big) = \frac{1}{4^k} \big(\frac{1}{6} 4^k Y_1 + \frac{1}{3} (-2)^k Y_2\big) \\ &= \frac{1}{6} Y_1 + \frac{1}{3 \times 2^k} (-1)^k Y_2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} Z_k = \frac{1}{6}Y_1$.

d) Par suite, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=0) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=2) = \frac{1}{6} \\ \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=1) = \frac{2}{3} \end{cases}$

Exercice 3.3.

On étudie dans une population une grandeur X suivant une loi uniforme sur un intervalle de longueur 1 : $[\theta, \theta+1]$ et on cherche à estimer θ.

On considère donc un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ indépendant extrait de la loi uniforme sur $[\theta, \theta+1]$.

On pose $S_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ et $I_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. En remarquant que $I_n = -\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(-X_i)$, donner l'espérance et la variance de I_n.

3. On pose, pour $\alpha \in [0,1]$, $\Theta_n(\alpha) = \alpha(S_n - 1) + (1-\alpha)I_n$.

a) Déterminer α pour que $\Theta_n(\alpha)$ soit un estimateur sans biais de θ. On note Θ_n l'estimateur ainsi obtenu.

b) En admettant que $\mathrm{Cov}(S_n, I_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$, calculer la variance de Θ_n.

4. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\Theta'_n = \overline{X_n} - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que Θ'_n est un estimateur sans biais et convergent de θ.

b) Si vous deviez estimer θ, quel estimateur choisiriez-vous et pourquoi ?

Solution :

1. On a $S_n(\Omega) = [\theta, \theta+1]$, et pour tout x de cet intervalle :

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leqslant x) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x)\big) = [F_X(x)]^n = (x-\theta)^n$$

Ainsi, S_n admet comme densité :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1} & \text{si } x \in [\theta, \theta+1] \\ 0 & \text{si } x \notin [\theta, \theta+1] \end{cases}$$

Une intégration par parties donne

$$E(S_n) = \int_{\theta}^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}d\theta = \theta + \frac{n}{n+1}$$

puis $V(S_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $-X_i$ suit la loi uniforme sur $[-\theta-1,-\theta]$. La loi de $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(-X_i)$ est celle d'une variable S_n correspondant à $\theta' = -\theta - 1$.

Son espérance est alors $-\theta - \dfrac{1}{n+1}$ et sa variance est $\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

Enfin comme $I_n = -\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(-X_i)$, il vient :

$$E(I_n) = \theta + \frac{1}{n+1} \quad ; \quad V(I_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

3. a) Par linéarité de l'espérance, $\Theta_n(\alpha)$ est un estimateur sans biais de θ si et seulement si :

$$\theta + \frac{1-2\alpha}{n+1} = \theta, \text{ i.e. } \alpha = \frac{1}{2}$$

b) On a :

$$V(\Theta_n) = \frac{1}{4}V(S_n) + \frac{1}{4}V(I_n) + \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(S_n, I_n) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

4. a) Un calcul élémentaire donne $E(\Theta'_n) = E(\overline{X_n}) - \frac{1}{2} = \theta$.

De plus, $V(\Theta'_n) = V((\overline{X_n}) = \dfrac{1}{12n}$, qui admet pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Θ'_n est donc un estimateur sans biais et convergeant du paramètre θ.

b) On remarque que $V(\Theta'_n) \geqslant V(\Theta_n)$, car $\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{12n}$ équivaut à $(n-1)(n-2) \geqslant 0$.

Donc Θ_n est plus fiable que Θ'_n.

Exercice 3.4.

Préliminaire :

tan désigne la fonction tangente. On pose $g(x) = \tan x$, pour tout réel x strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Montrer que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque g^{-1} est notée Arc tan.

Montrer que Arc tan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arc}\tan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

En déduire que, pour tout réel strictement positif c, et pour tous réels A et B,

$$\int_A^B \frac{c}{c^2+t^2}\,dt = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{B}{c}\right) - \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{A}{c}\right).$$

On se donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes, de densités

respectives f_X et f_Y, avec $f_X(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}$ et $f_Y(t) = \dfrac{b}{\pi(b^2+t^2)}$, pour tout réel t.
(a et b désignent deux réels strictement positifs.)
On pose $Z = \sup(X, Y)$, et $V = X^2$.

1. Vérifier que f_X et f_Y sont bien des densités de probabilité.

2. a) Déterminer une densité de Z.
   b) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

3. a) Déterminer une densité de V.
   b) La variable aléatoire V possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

Solution :

Préliminaire :
La fonction $g = \tan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $g'(x) = 1+\tan^2 x > 0$, donc g réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image qui est $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque g^{-1}, notée $\operatorname{Arc}\tan$, réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \operatorname{Arc}\tan'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arc}\tan t)} = \frac{1}{1+t^2}$$

On a alors, par le changement de variable $u = \dfrac{t}{c}$:

$$\int_A^B \frac{c}{c^2+t^2}\, dt = \big[\operatorname{Arc}\tan(\tfrac{t}{c})\big]_A^B = \operatorname{Arc}\tan\frac{B}{c} - \operatorname{Arc}\tan\frac{A}{c}$$

1. La fonction f_X est continue sur $\mathbb{R}$, positive et paire. D'après le préliminaire :

$$\int_0^A f_X(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arc}\tan\frac{A}{a} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t)\, dt$ est convergente de valeur $\dfrac{1}{2}$; on conclut de même, par parité, sur $\mathbb{R}^-$ que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ converge et vaut 1. Donc f_X est bien une densité de probabilité. Il ne semble pas nécessaire de recommencer pour f_Y.

2. a) Pour $t \in \mathbb{R}$, par définition du sup et indépendance de X et Y :

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t) = F_X(t)F_Y(t)$$

Or, comme $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arc}\tan = -\pi/2$, on a :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a}{\pi(a^2+u^2)}\, du = \frac{1}{\pi}\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)$$

D'o :

$$F_Z(t) = \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc\,tan}\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\big(\operatorname{Arc\,tan}\big(\frac{t}{b}\big) + \frac{\pi}{2}\big)$$

Une densité f_Z de Z s'obtient alors par dérivation :

$$f_Z(t) = \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc\,tan}\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\frac{b}{b^2+t^2} + \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc\,tan}\big(\frac{t}{b}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\frac{a}{a^2+t^2}$$

b) Au voisinage de $+\infty$, on a $f_Z(t) \sim \dfrac{a+b}{\pi}\dfrac{1}{t^2}$, donc $tf_Z(t) \sim \dfrac{a+b}{\pi}\dfrac{1}{t}$, qui est d'intégrale divergente pour la borne $+\infty$.
Ainsi Z n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance.

3. a) V est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, par parité de f_X, pour $u \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant u) = P(-\sqrt{u} \leqslant X \leqslant \sqrt{u}) = 2P(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{u}) = 2\int_0^{\sqrt{u}} f_X(t)\,dt,$$

soit :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+, P(V \leqslant u) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\big(\frac{\sqrt{u}}{a}\big)$$

Par dérivation, une densité f_V de V est :

$$\forall\, u \leqslant 0, f_V(u) = 0\,;\ \forall\, u > 0, f_V(u) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{u}(a^2+u)}$$

b) On a : $u f_V(u) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{a}{\pi}\dfrac{1}{u^{1/2}}$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u f_V(u)\,du$ est divergente et suffit pour affirmer que V n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance.

Exercice 3.5.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.

1. Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n.

2. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$
Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

3. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a}(M_n - 1)$.

Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?

Solution :

1. De manière classique :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = [F(x)]^n \end{aligned}$$

2. On peut écrire :

$$P(Z_n \leqslant x) = P(\lambda M_n - \ln n \leqslant x) = P\big(M_n \leqslant \frac{x+\ln n}{\lambda}\big) = \big[F\big(\frac{x+\ln n}{\lambda}\big)\big]^n$$

Or :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} \big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big)^n & \text{si } x + \ln n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, assez grand, on a $x + \ln n \geqslant 0$, et :

$$\ln\big[\big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big)^n\big] = n \ln\big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n\big(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on a donc : $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$

Ainsi pour tout x réel, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = G(x)$.

Pour terminer cette question, il suffit de vérifier que G est effectivement la fonction de répartition d'une variable à densité : la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$.

3. Selon le même principe :

$$\begin{aligned} P(Z_n \leqslant x) &= P(n^{1/a}(M_n - 1) \leqslant x) = P(M_n \leqslant n^{-1/a}x + 1) \\ &= F^n(n^{-1/a}x + 1). \end{aligned}$$

- si $x \geqslant 0$, alors $F(n^{-1/a}x+1) = 1$, donc, pour tout n, $F^n(n^{-1/a}x+1) = 1$,
- si $x \leqslant 0$, alors pour n assez grand $-n^{1/a} \leqslant x$, et dans ce cas :

$$F(n^{-1/a}x+1) = \big(1 - (-n^{-1/a}x)^a\big)^n = \big(1 - \frac{1}{n}(-x)^a\big)^n$$

qui admet comme limite $\mathrm{e}^{-(-x)^a}$ lorsque n tend vers l'infini.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = H(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-x)^a} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que H est effectivement une fonction de répartition, ce qui ne pose pas de problème.

Lorsque $a = 1$, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, et Z_n tend en loi vers une variable aléatoire Y de fonction de répartition :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

($-Y$ suit donc la loi exponentielle de paramètre 1).

Exercice 3.6.

On dispose d'une infinité de pièces. La $k^{\text{ème}}$ pièce donne Pile avec la probabilité $p_k \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q_k = 1 - p_k$. On effectue une infinité de lancers, le $k^{\text{ème}}$ lancer utilisant la $k^{\text{ème}}$ pièce.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire réelle Y_n par

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si Face est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 1 & \text{si Pile est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}$$

On pose de plus $Y_0 = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$X_n = n - \max\{0 \leqslant i \leqslant n \mid Y_i = 0\}$$

1. a) Que représente la variable aléatoire X_n ?

b) Déterminer la loi de X_n.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \inf\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$, si cet ensemble est non vide et $T = 0$ si $\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$ est vide.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(T = 0)$.

b) Montrer que $P(T = 0) = 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} (1-p_k)$ diverge.

3. On suppose désormais que pour tout $k \geqslant 1, p_k = p$. Pour $n \geqslant 1$, calculer la probabilité $P(T = n)$.
Quelle est la loi de $T - 1$? En déduire l'espérance de T.

Solution :

1. a) X_n représente la longueur de la dernière séquence de Pile, après le dernier Face, à l'issue du n-ième lancer (cette séquence pouvant être de longueur nulle).

b) On a $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$. De plus :

• l'événement $(X_n = 0)$ est l'événement « le dernier lancer est Face » ; donc $P(X_n = 0) = 1 - p_n$.

• L'événement $(X_n = 1)$ correspond à « on a eu Pile au n-ième lancer et Face au $(n-1)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = 1) = p_n(1 - p_{n-1})$.

• Plus généralement, pour tout $k \geqslant 2$, l'événement $(X_n = k)$ correspond à « on a eu Pile aux lancers $n, n-1, \ldots, n-k+1$ et Face au $(n-k)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = k) = p_n p_{n-1} \ldots p_{n-k+1}(1 - p_{n-k})$.

2. a) La variable aléatoire T représente l'instant d'apparition du premier Face. L'événement $(T = 0)$ est donc l'événement « pour tout $m \geqslant 1, X_m \neq 0$ », et on a $P(X_m \neq 0) = p_m$. Donc, par le théorème de limite monotone :

$$P(T=0) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcap_{m=1}^{n} (X_m \neq 0)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} P(X_m \neq 0)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} p_m = \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} (1-q_m)$$

b) Posons $u_n = \prod_{m=1}^{n} (1-q_m)$. On a $\ln u_n = \sum_{m=1}^{n} \ln(1-q_m)$.

- si la série $\sum q_m$ converge, alors, $\lim_{m\to+\infty} q_m = 0$ et $\ln(1-q_m) \sim q_m$.

Ceci implique que la série $\sum \ln(1-q_m)$ converge, donc que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = a$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^a > 0.$$

- si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln \ell$.

Ainsi la série $\sum \ln(1-q_m)$ converge, ce qui entrane $\lim_{n\to+\infty} \ln(1-q_m) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} q_m = 0$ et $\ln(1-q_m) \sim -q_m$.

Par la règle d'équivalence pour les séries à termes de signe fixe, la série $\sum q_m$ converge.

Ainsi $P(T=0) = 0$ si et seulement si $\sum q_m$ diverge.

3. On a $P(T=1) = 1-p$ et pour tout $n \geqslant 2, P(T=n) = p^{n-1}(1-p)$. Ainsi $T-1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$ et par propriété de l'espérance

$$E(T) = E(T-1) + 1 = 1 + \frac{1}{1-p}.$$

Exercice 3.7.

On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \text{ et pour tout } k \geqslant 2 \quad P_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$$

1. Montrer que pour tout n entier naturel, il existe $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ tels que $X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$

Ces réels sont-ils déterminés de manière unique ?

2. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$, et Y une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
Pour tout réel x strictement positif, on pose $G(x) = E(x^Y)$, où $E(Z)$ représente l'espérance d'une variable aléatoire Z.

a) Montrer que G est de classe C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(1)) = E(P_k(Y))$, où $G^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction G.

b) En déduire que $E(Y^k) = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} G^{(i)}(1)$.

3. On suppose que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p. En utilisant uniquement les questions précédentes, calculer $E(Y^2)$ et $E(Y^3)$.

Solution :

1. La famille $(P_n)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Aussi, existe–t–il $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ déterminés de manière unique tels que :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$$

2. Par le théorème de transfert :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)x^k$$

C'est une fonction polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$G(1) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1 = E(P_0(Y))$$

De plus :

$$G'(1) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = E(Y) = E(P_1(Y)),$$

et pour tout $\ell \leqslant n$:

$$G^{(\ell)}(x) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\ldots(j-\ell+1)P(Y=j)x^{j-\ell}$$

donc :

$$G^{(\ell)}(1) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\ldots(j-\ell+1)P(Y=j) = E(P_\ell(Y))$$

Par linéarité de l'espérance, il vient, pour tout k :

$$E(Y^k) = E\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{j,n}P_j(Y)\Big) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}E(P_j(Y)) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}G^{(j)}(1)$$

3. Lorsque Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, il vient :
$G(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} x^k = (px+q)^n$, soit $G'(1) = np$.
De plus :
$X^2 = X(X-1)+X$, d'o : $E(Y^2) = G''(1) + G'(1) = n(n-1)p^2 + np$
Enfin $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, donne :
$E(Y^3) = G'''(1) + 3G''(1) + G'(1) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$

Exercice 3.8.

On considère deux pièces truquées A et B ; A donne Pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne Pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance ; si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geqslant 2$).

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au k-ième lancer.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au k-ième lancer.

3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Solution :

1. Notons les événements :
A_n : « on lance la pièce A au n-ième lancer »,
B_n : « on lance la pièce B au n-ième lancer »,
C_n : « Pile sort au n-ième lancer ».
On peut écrire :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n).$$

Or si on lance la pièce A au n-ième lancer, la probabilité de la relancer au coup suivant est égale à celle de faire Pile avec cette pièce, soit a. De même, si on lance la pièce B au n-ième lancer, la probabilité de relancer la pièce A au coup suivant est égale à celle de faire Face avec la pièce B, soit $(1 - b)$. Donc :

$$P(A_{n+1}) = aP(A_n) + (1 - b)(1 - P(A_n)) = (a + b - 1)P(A_n) + 1 - b$$

Le point fixe de cette récurrence arithmético-géométrique est $\ell = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ et classiquement :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(A_k) = \ell + (a + b - 1)^{k-1}\left(\frac{1}{2} - \ell\right)$$

2. De la même façon, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P(C_k/A_k)P(A_k) + P(C_k/B_k)P(B_k) \\ &= aP(A_k) + b(1 - P(A_k)) = (a - b)P(A_k) + b \end{aligned}$$

et il suffit de remplacer $P(A_k)$ par sa valeur.

3. Comme $a, b \in]0, 1[$, on a $-1 < a + b - 1 < 1$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} P(A_k) = \ell$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = (a - b)\ell + b = (a - b)\frac{1-b}{2-a-b} + b.$$

Ce raisonnement est encore valable lorsque $a = 1$ et $0 < b < 1$ (on a encore $-1 < a + b - 1 < 1$) ; dans ce cas $\ell = 1$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = 1.$$

Ce résultat est logique ; en effet si on lance au départ la pièce A, on obtient Pile puisque $a = 1$, et on la relance. Ainsi tous les lancers s'effectueront avec la pièce A. On est donc certain d'obtenir Pile au k-ième lancer.

Par contre, si on commence avec la pièce B, comme $b < 1$, on finira presque sûrement par changer de pièce. A partir de ce moment on n'obtiendra que des Pile et on ne lancera plus que la pièce A. Donc, asymptotiquement, la probabilité de jouer avec la pièce A et de ne faire que des Pile vaut 1.

Exercice 3.9.

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f : x \mapsto px^2 + 1 - p$$

1. Étudier les variations de f sur $[0, 1]$.

2. Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1 - p$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. On s'intéresse à sa descendance et on note X_n le nombre de descendants issus de la n-ième génération, *i.e.* le nombre de descendants de la plante à la $(n + 1)$-ième génération.

a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0)$ en fonction de u_n.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter le résultat trouvé.

Solution :

1. f est dérivable et $f'(x) = 2px$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 1 - p$ et $f(1) = 1$.

2. $\star$ $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, donc (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$.

$\star$ La fonction f étant croissante, la suite (u_n) est monotone, et comme :

$$u_1 = p(1 - p)^2 + 1 - p = (1 - p)(p(1 - p) + 1) > 1 - p = u_0,$$

la suite (u_n) est croissante et comme elle est bornée elle converge.

$\star$ $f(x) = x \iff px^2 - x + 1 - p = 0 \iff x \in \{1, \dfrac{1-p}{p}\}$, mais la seconde racine $r = \dfrac{1-p}{p}$, qui est positive, appartient à $[0, 1]$ si et seulement si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, la suite (u_n) est croissante bornée, donc converge vers l'unique point fixe de f, à savoir 1.

Si $p > \dfrac{1}{2}$, alors $u_0 = 1 - p < \dfrac{1-p}{p} = r < 1$. Par croissance de f on en déduit par récurrence : $\forall\, n, u_n < r$ et la suite (u_n) converge vers r.

3. a) $\star$ $p_0 = P(X_0 = 0) = 1 - p$;

Pour $n \in \mathbb{N}$, utilisons le système complet $\big((X_0 = 0), (X_0 = 2)\big)$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1}=0) \\ &= P(X_0=0)P(X_{n+1}=0/X_0=0)+P(X_0=2)P(X_{n+1}=0/X_0=2) \end{aligned}$$

Or $P(X_{n+1}=0/X_0=0)=1$ (s'il n'y a pas de descendants à la première génération, il n'y en aura pas plus tard) ;
$P(X_{n+1}=0/X_0=2)=[P(X_n=0]^2$, car cela signifie que chacun des deux descendants de première génération n'a pas de descendant de n-ième génération et on conclut par indépendance.

Ainsi $p_{n+1}=(1-p)+p.p_n$ et la suite (p_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n). Comme les termes initiaux sont les mêmes, on conclut :

$$\forall n\in\mathbb{N}, P(X_n=0)=u_n$$

b) Par conséquent :

si $p\leqslant \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=0)=1$, et si $p>\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=0)=\dfrac{1-p}{p}$

Ceci n'est pas étonnant, car $2p$ est l'espérance du nombre de descendants directs de chaque plante. Ainsi, si $2p<1$, la tendance est à la raréfaction et on s'attend à ce que l'espèce disparaisse, tandis que si $2p>1$, la disparition est possible mais n'est pas quasi-certaine.

Exercice 3.10.

Pour tout a réel, on pose : $M_a=\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & -3\end{pmatrix}$

1. a) Déterminer en fonction de a les valeurs propres de M_a, considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Pour quelles valeurs de a ces valeurs propres sont–elles réelles ?

c) Pour quelles valeurs de a, la matrice M_a est–elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0,2]$. Pour tout $\omega\in\Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega=\begin{pmatrix}1 & -X(\omega)\\ X(\omega) & -3\end{pmatrix}$$

Soit Y la variable aléatoire définie par « $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de M_ω ».
Déterminer une densité de la loi de Y.

Solution :

1. a) Un calcul rapide montre que les valeurs propres de M_a sont $\lambda=-1-\sqrt{4-a^2}$ et $\mu=-1+\sqrt{4-a^2}$. Ces valeurs propres sont réelles si et seulement si $|a|\leq 2$.

b) Lorsque $a \notin \{-2, 2\}$, ces deux valeurs propres sont distinctes et M_a est diagonalisable. Les sous-espaces propres associés sont $E_\lambda = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{4-a^2} \\ a \end{pmatrix}$ et $E_\mu = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{4-a^2} \\ a \end{pmatrix}$.

Lorsque $a \in \{-2, 2\}$, il existe une unique valeur propre valant -1. Les matrices M_2 et M_{-2} ne sont pas diagonalisables car autrement seraient égales à $-I$, ce qu'elles ne sont pas.

2. D'après la question précédente, $Y = -1 + \sqrt{4 - X^2}$ et Y prend ses valeurs entre -1 et 1.
La fonction $t \mapsto -t^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$, donc la fonction $f : t \mapsto -1 + \sqrt{4 - t^2}$ également.
Comme f est continue strictement décroissante sur $[0, 2]$, elle induit une bijection de $[0, 2]$ sur son image $[-1, 1]$. On a, pour $x \in [-1, 1]$:

$$P(Y \leqslant x) = P(X \geqslant f^{-1}(x)) = 1 - P(X < f^{-1}(x)) = 1 - P(X \leqslant f^{-1}(x))$$

Ainsi : $F_Y(x) = 1 - F_X(f^{-1}(x))$.
Un calcul élémentaire donne $f^{-1}(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ (on doit prendre la solution positive de l'équation en t : $-1 + \sqrt{4 - t^2} = x$).
On a alors $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{1+x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.
Comme $f_Y(x) = -f_X(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{2}(f^{-1})'(x)$, une densité de Y est donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2\sqrt{3-2x-x^2}} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.11.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs réelles, de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x/2}(1 + \dfrac{x}{2}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction F est–elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Interpréter ce résultat.

3. Déterminer une densité de probabilité f de X.

4. Étudier les variations de f et représenter l'allure du graphe de cette fonction.

Solution :

1. La fonction F est manifestement continue sur $\mathbb{R}^*$. Sa continuité en 0 se déduit des limites à droite et à gauche en ce point qui sont nulles.

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\big(1+\frac{x}{2}\big)=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, ce qui n'a rien de surprenant puisque F représente une fonction de répartition !

3. Pour déterminer une densité f de X, il suffit de dériver F, soit :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\big(1+\frac{x}{2}\big) & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

ou encore :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{4}x.\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Notons que l'on obtient bien une fonction positive !

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et tend vers 0 en $+\infty$. De plus pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{1}{8}x.\mathrm{e}^{-x/2}=\dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-x/2}(2-x)$.

On en déduit que f est croissante sur $]-\infty,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty[$ et donc que F est convexe sur le premier intervalle et concave sur le second.

Exercice 3.12.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} C.\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } x\in[-1,1] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. a) Déterminer la constante C pour que f soit une densité de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi admettant f pour densité.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X admette f pour densité et telles que Y suive une loi uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$. Déterminer la loi suivie par la variable $X-Y$.

3. Le livreur L d'un supermarché décide de passer livrer chez Madame M entre 9h et 11h du matin ; il attendra M pendant 15 minutes (si elle n'est pas là !). Pour sa part M rentrera chez elle entre 9h et 11h et y restera pendant une demi-heure. On prend comme origine des temps 10h et comme unité l'heure. On suppose que L et M agissent indépendamment et que leurs instants d'arrivée chez M sont des variables aléatoires qui suivent respectivement une loi de densité f, et une loi uniforme sur le segment $[-1,1]$.

Calculer la probabilité que M soit livrée par L.

Solution :

1. a) La fonction f est positive pour $C\geqslant 0$, continue sur $\mathbb{R}$, sauf en -1 et 1, points o elle admet une limite à gauche et une limite à droite. Pour que

f soit une densité de probabilité, il suffit de vérifier que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Or :

$$C\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|x|}dx = 1 \Longleftrightarrow 2C\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}dx = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$$

Il faut donc prendre $C = \dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$.

b) Par symétrie X est d'espérance nulle et un calcul élémentaire (par intégration par parties) donne :

$$V(X) = \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}-1}.$$

2. Comme Y suit la loi uniforme sur $[-1,1]$, $-Y$ suit également la loi uniforme sur $[-1,1]$. Comme $X - Y = X + (-Y)$ et X et $-Y$ sont indépendantes, on peut obtenir une densité f_{X-Y} de $X - Y$ par convolution :

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt = C\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|t|} f_Y(x-t)\,dt$$

Or $f_Y(u) = \dfrac{1}{2}$ si $-1 \leqslant u \leqslant 1$ et 0 sinon.
Comme $x-t \in [-1,1] \Longleftrightarrow t \in [x-1, x+1]$, il convient de distinguer plusieurs cas :

- si $x > 2$, alors $x - 1 > 1$ et $f_{X-Y}(x) = 0$,
- si $x \in [1,2]$, alors $[x-1, x+1] \cap [-1,1] = [x-1,1]$ inclus dans $[0,1]$ et :

$$f_{X-Y}(x) = \frac{C}{2}\int_{x-1}^{1} \mathrm{e}^{-t}dt = \frac{C}{2}(\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{-1})$$

- si $x \in [0,1]$, alors $[x-1, x+1] \cap [-1,1] = [x-1,1]$, mais ici $x - 1 \leqslant 0$, donc :

$$f_{X-Y}(x) = \frac{C}{2}\int_{x-1}^{0} \mathrm{e}^{t}dt + \frac{C}{2}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-t}dt = \frac{C}{2}(2 - \mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{-1})$$

Enfin, on remarque que $X - Y$ est une variable aléatoire paire (puisque X et $-Y$ le sont), donc f est paire, ce qui évite de considérer le cas $x \leqslant 0$.

3. Soit X la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée de L et Y la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée de M. Ainsi l'événement « L et M se rencontrent » est l'événement « $\left[X, X+\frac{1}{4}\right] \cap \left[Y, Y+\frac{1}{2}\right] \neq \emptyset$ », ce qui est équivalent à :

$$-\frac{1}{4} < X - Y < \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité p que M soit livrée est égale à :

$$\int_{-1/4}^{1/2} f_{X-Y}(x)dx = \frac{C}{2}\int_{-1/4}^{0} (2 - \mathrm{e}^{-x-1} - \mathrm{e}^{-1})dx + \frac{C}{2}\int_{0}^{1/2} (2 - \mathrm{e}^{-x-1} - \mathrm{e}^{-1})dx$$

Soit :

$$p = \frac{\mathrm{e}}{4(\mathrm{e}-1)}\left(\frac{3}{2} + \frac{5\mathrm{e}^{-1}}{4} - \mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-3/4}\right)$$

Exercice 3.13.

Soient n et r deux entiers strictement positifs. Lors de la kermesse d'une association, n personnes sont présentes. On tire r fois au sort une personne (avec remise) pour offrir r lots aux personnes présentes.

1. a) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité qu'une personne donnée P_1 ne reçoive aucun lot.

b) Soit k un entier inférieur strictement à n. Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que les personnes $P_1, P_2, \dots, P_k$ ne reçoivent aucun lot.

2. a) Rappeler la formule du crible.

b) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que chaque personne ait reçu au moins un lot.

3. a) Soit m un entier inférieur strictement à n. Déduire de la question précédente le calcul, en fonction de n, r et m, de la probabilité p_m qu'exactement m personnes, parmi les n personnes présentes, n'aient rien reçu.

b) Comment calculer la probabilité q_m qu'au moins m personnes n'aient rien reçu ?

Solution :

1. a) Notons A_i l'événement « la personne P_i n'a rien reçu ». Les tirages ayant lieu avec remise, à chaque tirage on évite la personne P_1 avec la probabilité $1 - \dfrac{1}{n}$ et par indépendance :

$$P(A_1) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^r$$

b) Le même raisonnement donne :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \big(1 - \frac{k}{n}\big)^r$$

2. a) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$, avec :

$$S_i = \sum_{1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_i \leqslant n} P(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \ldots \cap A_{n_i})$$

b) L'événement G : « Tout le monde gagne au moins un lot » est l'événement contraire de l'événement $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Donc :

$$P(G) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

Dans l'application de la formule du crible, on remarque que la somme S_i comporte C_n^i termes qui valent tous $\big(1 - \frac{i}{n}\big)^r$, soit en intégrant le premier terme « 1 » à la sommation :

$$P(G) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \big(1 - \frac{k}{n}\big)^r$$

3. a) $p_m = P\big(\bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}\big[(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})\bigcap(\bigcap_{j\notin\{i_1,\ldots,i_m\}}\overline{A_j})\big]\big)$
(en clair : on choisit de toutes les façons possibles les m personnes qui ne reçoivent rien et les autres reçoivent quelque chose).
La réunion étant disjointe :
$p_m = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} P\big((A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})\bigcap(\bigcap_{j\notin\{i_1,\ldots,i_m\}}\overline{A_j})\big)$
Tous les événements ayant la même probabilité :
$p_m = \mathrm{C}_n^m.P\big(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m\cap\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\big)$
$\quad = \mathrm{C}_n^m P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)P(\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)$
$\quad = \mathrm{C}_n^m\big(1-\dfrac{m}{n}\big)^r.P(\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)$
Pour conclure, il suffit d'appliquer le résultat de 2. b) avec $n-m$ personnes au lieu de n :

$$p_m = \mathrm{C}_n^m\big(1-\frac{m}{n}\big)^r\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\mathrm{C}_{n-m}^k\big(1-\frac{k}{n-m}\big)^r, \text{ soit :}$$

$$p_m = \mathrm{C}_n^m\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\mathrm{C}_{n-m}^k\big(1-\frac{m+k}{n}\big)^r$$

b) On a $q_m = \sum_{k=m}^{n-1} p_k$ (car p_n est nul).

Exercice 3.14.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et pour $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant 2$, $Q_k = X(X-1)\ldots(X-k+1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de E.

2. On note F l'ensemble des polynômes $P\in E$ tels que $p_n = \dfrac{P(n)}{\mathrm{e}.n!}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe Y telle que $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $\forall n, P(Y=n)=p_n$). Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $Q_k\in F$.

3. Montrer que F est convexe, c'est-à-dire que si $P_1, P_2\in F$ et $\lambda\in[0,1]$, alors $\lambda P_1+(1-\lambda)P_2\in F$. En déduire que si $P\in E$ a pour degré p et si $P = \sum_{k=0}^{p}\alpha_k Q_k$ avec $\alpha_k\in[0,1]$ et $\sum_{k=0}^{p}\alpha_k = 1$, alors $P\in F$.

4. Soit $P = \sum_{k=0}^{p}\alpha_k Q_k\in F$ avec $\alpha_k\in[0,1]$ et $\sum_{k=0}^{p}\alpha_k = 1$ et soit Y une variable aléatoire suivant la loi de probabilité associée.
Écrire XQ_k dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'espérance de Y en fonction des α_k.

Solution :

1. La famille $\mathcal{B}$ est graduée en degrés, donc est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $Q_k(n)$ n'est non nul que pour $n \geqslant k$ et est alors positif. La convergence étant évidente, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e} = 1$$

Donc $Q_k \in F$.

3. Si P_1 et P_2 sont dans F, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{N}$ et, toutes les convergences étant encore évidentes, on peut « casser » la sommation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2](n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(n)}{\mathrm{e}.n!} + (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_2(n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Donc $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in F$.

De la même façon, si $P_1, \ldots, P_n$ appartiennent à F et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs de somme 1, alors $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in F$.

Comme $Q_0, \ldots, Q_p$ appartiennent à F, on a la conclusion voulue.

4. On a $XQ_k = Q_{k+1} + kQ_k$. Si on note Z_k une variable aléatoire suivant la loi associée à Q_k, on a :

$$E(Z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{k+1}(n)}{\mathrm{e}.n!} + k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = 1 + k$$

Par linéarité de l'espérance, on conclut :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (1+k) = 1 + \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k$$

Exercice 3.15.

On observe depuis le bord d'une route R à sens unique le passage des voitures à partir d'un instant 0.

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture, puis pour tout $n \geqslant 2$, T_n le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture.

On suppose que les T_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda} > 0$.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le temps d'attente de la $n^{\text{ème}}$ voiture. Y_0 est la variable certaine égale à 0.

Rappeler la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

b) Pour tout $T > 0$, on note C_T la variable égale au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et T.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, comparer les événements $[C_T \geqslant k]$ et $[Y_k \leqslant T]$.

En déduire une expression intégrale de $P[C_T \geqslant k]$ puis, à l'aide d'une intégration par parties, la loi de C_T.

2. Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que le point d'observation se situe à la jonction de deux routes R et R' (à sens unique).

On note T_1 (resp. T'_1) la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture venant de R (resp. de R'), puis pour tout $n \geqslant 2$, T_n (resp T'_n) le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture venant de R (resp de R').

On suppose que les T_k (resp. les T'_k) suivent la loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ (resp. d'espérance $\dfrac{1}{\lambda'}$).

On suppose en outre l'indépendance mutuelle de toutes ces variables.

a) Pour tout $T > 0$ on note C_T et C'_T les variables respectivement égales au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et T venant de R et de R'.

On note S_T la variable $C_T + C'_T$ égale au nombre total de voitures passant devant l'observateur.

Quelle est la loi de S_T ?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de C_T conditionnellement à $[S_T = n]$.

Une voiture passe. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la route R ?

Solution :

1. a) Les variables T_k suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, c'est-à-dire la loi Γ de paramètres 1 et $\dfrac{1}{\lambda}$. Par indépendance supposée, on en déduit que $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ suit la loi $\Gamma(n, \dfrac{1}{\lambda})$, d'espérance $\dfrac{n}{\lambda}$ et de variance $\dfrac{n}{\lambda^2}$.

Rappelons qu'une densité de Y_n est $t \mapsto \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, pour $t \geqslant 0$ et 0 sinon.

b) De façon évidente, $(C_T \geqslant k) = (Y_k \leqslant T)$, d'o, pour $k \geqslant 1$ et $T \geqslant 0$:

$$P(C_T \geqslant k) = \int_0^T \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

et en intégrant par parties pour $k \geqslant 2$:

$$P(C_T \geqslant k) = \Big[-\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, \lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^T + \int_0^T \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}\, t^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

c'est-à-dire : $P(C_T \geqslant k) = -\dfrac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda T} + P(C_T \geqslant k-1)$

or : $P(C_T \geqslant k-1) - P(C_T \geqslant k) = P(C_T = k-1)$, d'o :

$$P(C_T = k-1) = \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda T}$$

Le résultat reste valable pour $k = 1$ et $C_T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda T)$.

2. a) C_T et C'_T étant indépendantes, par stabilité des lois de Poisson :

$$C_T + C'_T \hookrightarrow \mathcal{P}((\lambda + \lambda')T)$$

b) Pour $k > n$, $P(C_T = k/S_T = n) = 0$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(C_T = k/S_T = n) &= \frac{P[(C_T = k) \cap (S_T = n)]}{P(S_T = n)} \\ &= \frac{P[(C_T = k) \cap (C'_T = n - k)]}{P(S_T = n)} \\ &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} \frac{(\lambda' T)^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda')T} \frac{n!}{[(\lambda + \lambda')T]^n} \mathrm{e}^{(\lambda+\lambda')T} \\ &= \mathrm{C}_n^k \big(\frac{\lambda}{\lambda + \lambda'}\big)^k \big(\frac{\lambda'}{\lambda + \lambda'}\big)^{n-k} \end{aligned}$$

Ainsi la loi conditionnelle de C_T conditionnée par la réalisation de l'événement $(S_T = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda'})$.

En particulier $P(C_T = 1/S_T = 1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda'}$.

Exercice 3.16.

Pour toute variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et pour $B \in \mathcal{B}$ tel que $P(B)0$, sous réserve d'existence, on note $E(X/B)$ et on appelle espérance conditionnelle de X à B, l'espérance de X pour la loi conditionnelle à B.

On admet le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire quelconque et N une variable discrète telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout n, $E(X/N = n)$ existe alors $E(X)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(X/N = n)$

A l'instant 0 un piéton se trouve sur le bord d'une route à sens unique qu'il désire traverser.

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture, puis plus généralement, T_i pour $2 \leqslant i$, le temps entre le passage de la $(i-1)^{\text{ème}}$ voiture et la $i^{\text{ème}}$.

On suppose que les T_i sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ.

Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant t que si la première voiture visible est éloignée de lui de plus d'une certaine distance de sécurité. Le temps mis pour parcourir cette distance par une voiture est a.

On note X la variable égale à l'instant où le piéton va traverser la route et N le nombre de voitures qui passeront avant qu'il ne puisse le faire.

On pose $p = \mathrm{e}^{-\lambda a}$, $q = 1 - p$.

1. a) Comparer $[X = 0]$ et $[T_1 > a]$. En déduire $P[X = 0]$ et $P[N = 0]$ en fonction de p.

b) Pour $n \geqslant 1$ déterminer $P\big([T_1 \leqslant a]\cap[T_2 \leqslant a]\cap\ldots\cap[T_n \leqslant a]\cap[T_{n+1} > a]\big)$ en fonction de p. En déduire la loi de N.

c) Soit $n \geqslant 1$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $t > 0$ comparer les probabilités conditionnelles $P([T_i \leqslant t] \;/\; [N = n])$ et $P([T_i \leqslant t] \;/\; [T_i \leqslant a])$.
Déterminer $P([T_i \leqslant t] \;/\; [T_i \leqslant a])$ (on distinguera les cas $t \leqslant a$ et $t > a$)
En déduire une densité de T_i pour cette loi conditionnelle.

2. a) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer l'espérance de T_i pour la loi conditionnelle à $[N = n]$, $n \geqslant 1$.

b) Déterminer l'espérance conditionnelle de X conditionnellement à la réalisation de $[N = n]$.

c) En déduire l'espérance de X en fonction de a.

Solution :

1. a) De manière évidente $[X = 0] = [T_1 > a]$ et :

$$P(X = 0) = P(T_1 > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = p = P(N = 0).$$

b) Les variables aléatoires $(T_i)_i$ étant indépendantes, on a :
$P(T_i \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a} = q$ et $P(T_{n+1} > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = p$. Donc

$$P[(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)] = q^n p$$

Comme $[N = n] = [(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)]$, N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$.

c) On a :

$$\begin{aligned} P[T_i \leqslant t/N = n] &= P[T_i \leqslant t/(T_1 \leqslant a)\cap(T_2 \leqslant a)\cap\ldots\cap(T_n \leqslant a)\cap(T_{n+1} > a)] \\ &= \frac{P(T_i \leqslant t) \cap (T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)}{P(N = n)} \end{aligned}$$

et par indépendance des variables aléatoires en jeu et puisque

$$P(N = n) = P[(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)],$$

il vient :

$$P[T_i \leqslant t/N = n] = \frac{P[(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a)]}{P[T_i \leqslant a]} = P(T_i \leqslant t/T_i \leqslant a)$$

Ainsi :

- si $t \leqslant a$, $(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a) = (T_i \leqslant t)$; donc $P(T_i \leqslant t/T_i \leqslant a) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}$,
- si $t > a$, $(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a) = (T_i \leqslant a)$, donc $P(T_i \leqslant t/T_i \leqslant a) = 1$.

Si l'on note f une densité de T_i pour la loi $P_{T_i \leqslant a}$, on peut prendre :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > a \\ \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) La loi conditionnelle de T_i conditionnellement à $(T_i \leqslant a)$ est la même que la loi conditionnelle de T_i conditionnellement à $(N = n)$. Aussi, à l'aide d'une intégration par parties :

$$E(T_i/N = n) = \int_0^a \frac{\lambda t}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}} \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}$$

b) On a : $E(X/N = n) = E(T_1 + T_2 + \cdots + T_n/N = n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(T_i/N = n)$

Soit :

$$E(X/N = n) = n\Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}\Big)$$

c) Par la propriété admise en début d'exercice :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X/N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}\Big)pq^n$$
$$= \frac{e^{\lambda a} - 1 - \lambda a}{\lambda(e^{\lambda a} - 1)} pq \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{e^{\lambda a} - 1 - \lambda a}{\lambda(e^{\lambda a} - 1)} \times \frac{q}{p} \mp$$

Exercice 3.17.

On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un étang.
On prélève dans l'étang un échantillon de m poissons. On les marque et on les remet dans l'étang.
On propose deux méthodes différentes d'estimation de N.

Méthode 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant m$.
On prélève des poissons dans l'étang, au hasard et avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour obtenir n poissons marqués.
Pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, on pose $D_i = X_i - X_{i-1}$. On pose de plus $D_1 = X_1$ et on suppose que les D_i sont des variables aléatoires indépendantes.
1. a) Déterminer, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la loi de D_i, son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de X_n.

b) On pose $A_n = \dfrac{m}{n} X_n$. Montrer que A_n est un estimateur sans biais de N.

2. a) Pour n assez grand, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_n}{n}$?

b) On a marqué 200 poissons, puis effectué 450 prélèvements pour obtenir 50 poissons marqués.
On pose $\sigma = \sigma(A_n)$, l'écart-type de A_n. On a pu prouver par ailleurs que $\sigma \leqslant 100$.
Déterminer, en fonction de σ, un intervalle de confiance pour N au seuil de $0,9$. (On donne $\Phi(1,64) \simeq 0{,}95$.)

Méthode 2

On prélève successivement et avec remise n poissons. Soit Y_n le nombre de poissons marqués parmi eux.

1. Montrer que $\dfrac{1}{nm}Y_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{N}$.

2. Pour quelle raison évidente ne peut-on prendre $\dfrac{nm}{Y_n}$ comme estimateur de N ?

On pose alors $B_n = \dfrac{m(n+1)}{Y_n+1}$.

a) Calculer l'espérance de B_n.

b) Est-il un estimateur sans biais de N ?

Solution :

Première méthode.

1. a) La variable aléatoire D_i représente le nombre de poissons que l'on a pêché pour obtenir un nouveau poisson marqué. Les prélèvements se faisant au hasard et avec remise, D_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{m}{N}\big)$. Ainsi :

$$E(D_i) = \frac{N}{m} \quad ; \quad V(D_i) = \frac{N(N-m)}{m^2}$$

De manière évidente, on a $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

Par indépendance des variables aléatoires (D_i), il vient :

$$E(X_n) = n\frac{N}{m} \quad ; \quad V(X_n) = nV(D_i) = n\frac{N(N-m)}{m^2}$$

b) On a $E(A_n) = N$. Donc, A_n, fonction des (D_n) est un estimateur sans biais de N.

2. a) Par le théorème de la limite centrée, la loi de $\overline{X_n} = \dfrac{X_n}{n} = \dfrac{A_n}{m}$, peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(E(\overline{X_n}), \sigma(\overline{X_n}))$, soit $\mathcal{N}\big(\frac{N}{m}, \frac{\sigma}{m}\big)$, avec :

$$\sigma^2 = V(A_n) = \frac{N(N-m)}{n}.$$

b) Si T suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $P(|T| \leqslant 1{,}64) = 2\Phi(1{,}64) - 1 \simeq 0{,}9$.

Ainsi : $P\Big(-1.64 \leqslant \dfrac{\frac{X_n}{n} - \frac{N}{m}}{\frac{\sigma}{m}} \leqslant 1.64\Big) \simeq 0{,}9$, soit :

$$P\Big[\frac{mX_n}{n} - 1{,}64\sigma \leqslant N \leqslant \frac{mX_n}{n} + 1{,}64\sigma\Big] \simeq 0{,}9$$

Ici $m = 200$, $n = 50$ et on a réalisé $X = 450$. L'intervalle de confiance cherché est :

$$[1800 - 1{,}64\sigma, 1800 + 1{,}64\sigma]$$

Si $\sigma \leqslant 100$, cet intervalle est inclus dans $[1636, 1964]$.

Seconde méthode.

1. La variable aléatoire Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, m/N)$. Aussi :

$$E(Y_n) = \frac{nm}{N}, \text{ donc } E\Big(\frac{Y_n}{nm}\Big) = \frac{1}{N}$$

et $\dfrac{Y_n}{nm}$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{N}$.

2. La variable aléatoire Y_n peut prendre la valeur 0 avec une probabilité non nulle, donc $\dfrac{nm}{Y_n}$ n'est pas définie sur un ensemble de probabilité non nulle et n'a pas le statut de variable aléatoire.

a) Par le théorème de transfert :

$$E(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \Big(\frac{m}{N}\Big)^k \Big(1 - \frac{m}{N}\Big)^{n-k} \times \frac{m(n+1)}{k+1}$$

Comme $\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$, il vient :

$$\begin{aligned} E(B_n) &= N \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} \Big(\frac{m}{N}\Big)^{k+1} \Big(1 - \frac{m}{N}\Big)^{n+1-k-1} \\ &= N \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} \Big(\frac{m}{N}\Big)^{k} \Big(1 - \frac{m}{N}\Big)^{n+1-k}, \text{ soit :} \end{aligned}$$

$$E(B_n) = N\Big(1 - \big(1 - \frac{m}{N}\big)^{n+1}\Big)$$

b) De manière générale, B_n n'est pas un estimateur sans biais de N. En revanche $\lim\limits_{n \to +\infty} E(B_n) = N$, donc B_n est asymptotiquement sans biais.

Exercice 3.18.

On se donne un tableau A à n éléments distincts ($n \geqslant 2$). Que fait l'algorithme suivant :

```
mini :=1 ; maxi :=1 ;
for j := 2 to n do
if A[j]<A[mini] then mini := j else
if A[j]>A[maxi] then maxi := j ;
```

1. Évaluer le nombre minimal, puis le nombre maximal de comparaisons faites.

On cherche à déterminer un équivalent du nombre de comparaisons faites en moyenne. Pour cela, on considère que A contient les éléments de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on associe donc à chaque tableau une permutation sur E_n. On suppose enfin que toutes les permutations sont équiprobables.

2. Pour toute permutation σ, on appelle minimum local un entier j tel que :

$$\forall i, 1 \leqslant i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$$

On convient que 1 est toujours un minimum local.
Exprimer le nombre de comparaisons effectuées par l'algorithme en fonction du nombre de minimum locaux de σ.

3. On note $u_{n,k}$ le nombre de permutations sur E_n qui possèdent k minimum locaux. Montrer que

$$\begin{cases} u_{n,0} = 0, \quad u_{n,n} = 1 \\ u_{n,k} = (n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1} \ (1 \leqslant k \leqslant n) \end{cases}$$

4. Soit (P_n) la famille de polynômes définie par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k} x^k$$

a) Déterminer une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1}. En déduire une expression de P_n.

b) Exprimer la dérivée P_n' en fonction de P_n.

5. Déterminer le nombre moyen de minimum locaux dans les permutations de E_n et en déduire un équivalent du nombre moyen de comparaisons de l'algorithme.

Solution :

L'algorithme proposé détermine la place dans le tableau du maximum et du minimum (mais pas leur valeur).

1. Le nombre minimal de comparaisons est obtenu si on ne fait jamais le second «if» (car on fera toujours le premier). Il vaut donc $(n-1)$ et c'est le cas lorsque les éléments du tableau A sont rangés par ordre décroissant.
Le nombre maximal de comparaisons est obtenu lorsqu'on effectue toujours les deux «if». Il vaut $2(n-1)$: c'est le cas lorsque les éléments du tableau A sont rangés par ordre croissant.

2. Montrons que j est un minimum local si et seulement si $A[j] < A[\text{mini}]$:

- si $A[j] < A[\text{mini}]$, j sera le nouveau mini et pour $1 \leqslant i < j$, on a $\sigma(i) > \sigma(j)$ (puisque $\sigma(i) \geqslant \sigma(\text{mini})$).
- si pour $1 \leqslant i < j$, on a $\sigma(i) > \sigma(j)$, alors $\sigma(j) > \sigma(\text{mini})$.

Soit p le nombre de minimums locaux ; le nombre de comparaisons vaut alors : $(p-1) + 2((n-1) - (p-1)) = 2n - p - 1$.

3. Toute permutation possède au moins un minimum local ; donc $u_{n,0} = 0$.
Il n'y a qu'une permutation qui possède n minimums locaux : celle où les éléments sont rangés par ordre décroissant.

Notons $U_{n,k}$ l'ensemble des permutations sur E_n possédant k minimums locaux. On peut diviser cet ensemble en deux sous–ensembles disjoints :

- celui où le dernier élément n est un minimum local ; c'est en fait le minimum de la permutation ($\sigma(n) = 1$). Si on le supprime, il restera $(n-1)$ éléments avec $(k-1)$ minimums locaux ;

- celui où le dernier élément n n'est pas un minimum local ; on a $\sigma(n) = m$, avec $2 \leqslant m \leqslant n$. Si on le supprime, il restera $(n-1)$ éléments avec k minimums locaux et on a $(n-1)$ possibilités pour m.

Finalement, il vient :

$$u_{n,k} = (n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1}.$$

4. a) On a :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k}x^k = \sum_{k=1}^{n} ((n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1})x^k$$
$$= (n-1)\sum_{k=1}^{n} u_{n-1,k}x^k + x\sum_{k=1}^{n} u_{n-1,k-1}x^{k-1} = (n-1+x)P_{n-1}(x)$$

Par une récurrence immédiate : $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

b) Par dérivation d'un produit de facteurs, il vient :

$$P_n'(x) = P_n(x) \times \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}\Big)$$

5. le nombre moyen de minimums locaux est :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ku_{n,k} = \frac{P_n'(1)}{n!} = \frac{P_n(1)}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Il est classique (comparaison suite-intégrale) que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n$.

Le nombre moyen de comparaisons est donc de l'ordre de $2n - \ln n$, donc est équivalent à $2n$.

Exercice 3.19.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $U_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$. Déterminer la loi de U_k.

2. Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire réelle V par :

$$V = \begin{cases} X_1 & \text{si } N = 0 \\ U_k & \text{si } N = k > 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de V et une densité de cette variable aléatoire.

Solution :

1. De manière classique et par indépendance des variables aléatoires en jeu :

$$P(U_k > x) = P(\bigcap_{i=1}^{k} X_i > x) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i > x) = \big(1 - F(x)\big)^k$$

où F représente la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

Notons F_k la fonction de répartition de U_k. Alors :

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto F_k(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et sa dérivée à une limite à droite et à gauche aux points limites. Ainsi, par dérivation U_k admet une densité f_k donnée par :

$$f_k(x) = \begin{cases} k(1-x)^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Utilisons le système complet d'événements $(N=k)_{0\leqslant k \leqslant n}$. On peut écrire, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} P(U \leqslant x) &= \sum_{k=0}^{n} P[(U \leqslant x) \cap (N=k)] \\ &= P[(X_1 \leqslant x) \cap (N=0) + \sum_{k=1}^{n} P[(U_k \leqslant x) \cap (N=k)]. \end{aligned}$$

Les variables aléatoires étant indépendantes de N, il vient pour tout x réel :

$$P(U \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)P(N=0) + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)P(N=k)$$

Aussi, $P(U \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, et si $x \in [0,1]$:

$$P(U \leqslant x) = xq^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(1-(1-x)^k)$$

$$P(U \leqslant x) = xq^n + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(1-x)^k$$

$$P(U \leqslant x) = xq^n + (p+q)^n - (p(1-x)+q)^n = xq^n + 1 - (1-px)^n$$

Une densité f de U est alors donnée par dérivation :

$$f(x) = \begin{cases} q^n + np(1-px)^{n-1} & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.20.

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et λ un réel strictement positif.

On considère les variables aléatoires suivantes :

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U), \ W = \lfloor V \rfloor$$

où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V puis

$$Y = V - \lfloor V \rfloor \text{ et } Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

1. Déterminer les lois de V et W.

2. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.

3. Déterminer une densité de Z.

4. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$. Déterminer la fonction de répartition de X et démontrer que $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) \geqslant 1/2$.

Solution :

1. $\star$ V prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et pour $v \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant v) = P(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}$$

V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

$\star$ W prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P(W = n) = P(n \leqslant V < n+1) = \mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}$$

Soit $P(W = n) = p(1-p)^n$, avec $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$, donc $W + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

2. $\star$ Y prend ses valeurs dans $[0, 1[$ et pour $y \in [0, 1[$:

$$P(Y \leqslant y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leqslant V \leqslant y + k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(y+k)}\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

$\star$ Par dérivation, on en déduit une densité g de Y :

$$g(y) = \frac{\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda y}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \text{ si } 0 < y < 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$\star$ $E(Y) = E(V) - E(\lfloor V \rfloor) = E(V) - E(W+1) + 1 = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}$

3. Z prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et pour $z \geqslant 0$, on a :

$$P(Z \leqslant z) = P(Y \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda(1 - \mathrm{e}^{-\lambda z})}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

Par dérivation, on en déduit une densité h de Z :

$$h(z) = \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(1 + z - \mathrm{e}^{-\lambda z})}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \text{ pour } z \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

4. X prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et :

$$\forall x \in [0, 1[, P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ et } P(X = 1) = P(V \geqslant 1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$P(2X^2 - 3X \geqslant -1) = P((X-1)(X - \frac{1}{2}) \geqslant 0) = P(X = 1) + P(X \leqslant \frac{1}{2})$

Soit : $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda/2} + \mathrm{e}^{-\lambda} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 3.21.

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et λ un réel strictement positif.

On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p et que les variables (X_i), $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

On note S la variable aléatoire $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une densité de $X_1 + \cdots + X_n$ (on pourra procéder par récurrence).

2. Montrer que :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!}\Big) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Déterminer la fonction de répartition de S. (On supposera que l'on peut intervertir l'ordre des sommations dans les expressions obtenues).

b) En déduire la loi de S et montrer que $E(S) = E(X_1)E(N)$.

Solution :

1. Les théorèmes du cours donnent :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. On a :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \lambda \int_{-\infty}^{x} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}dt$$

Une succession d'intégrations par parties donne alors :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Pour tout x, on a :

$$P(S \leqslant x) = \sum_{n=1}^{\infty} P([S \leqslant x] \cap [N = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} P([X_1 + \cdots + X_n \leqslant x] \cap [N = n])$$

Soit, par indépendance :

$$P(S \leqslant x) = \sum_{n=1}^{\infty} P([X_1 + \cdots + X_n \leqslant x])P(N = n)$$

Ainsi si $x < 0, P(S \leqslant x) = 0$ et si $x \geqslant 0$:

$$P(S \leqslant x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\big)P(N = n)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} P(N = n)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} P(N = n)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} P(N \geqslant k+1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q x)^k}{k!} = 1 - \mathrm{e}^{\lambda p x}$$

b) Ainsi S suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda p)$.

On a donc $E(S) = \dfrac{1}{\lambda p}$ et comme $E(X_1) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $E(N) = \dfrac{1}{p}$ on a la conclusion.

Exercice 3.22.

Paul possède un sac qui contient au début 3 billes ordinaires et 1 bille en agate. Il joue avec son copain Luc de la façon suivante : à chaque étape, Luc ajoute 3 billes ordinaires dans le sac, puis il tire de façon équiprobable une bille du sac et la garde. Le jeu s'arrête dès que Luc tire la bille en agate.

On note X le nombre d'étapes du jeu ; avec la convention $X = 0$ si Luc ne tire jamais la bille en agate.

1. Soit n un entier naturel. Vérifier que $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

2. En majorant la probabilité de l'événement «la bille en agate n'a pas encore été tirée à l'étape n», montrer que $P(X = 0) = 0$.

3. Déterminer la loi de X.

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Question évidente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, notons G_n l'événement «Luc ne tire pas la bille en agate à l'étape n». Il vient, pour tout n :

$$\begin{aligned} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) &= P(G_1)P(G_2/G_1)\dots P(G_n/(G_1 \cap \cdots \cap G_{n-1})) \\ &= \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{2n+4}{2n+5} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, écrivons :

$$[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \dots \times \frac{2n+4}{2n+5} \times \frac{2n+5}{2n+6}$$

Soit, par télescopage : $[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \dfrac{6}{2n+6}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Et, par le théorème de limite monotone :

$$P(X = 0) = \lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Variante : on peut aussi prouver ce résultat de façon directe. En effet :

$-\ln\big(P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \dfrac{1}{2k+4}\big)$.

Comme $\ln\big(1 + \dfrac{1}{2k+4}\big) \sim \dfrac{1}{2k+4}$, la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2k+4}$ donne la divergence de la série de terme général $\ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big)$.

Cette série étant à termes positifs, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$.

3. On a $P(X=1)=1/7$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$u_n = P(X=n) = P(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap \overline{G_n})$
$\quad = P(G_1)\ldots P(G_{n-1}/(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-2})) \times P(\overline{G_n}/G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1}))$
Soit :

$$P(X=n) = \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{2n+5}$$

4. On a :
$P(X=n) \geqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2n+3}{2n+4} \times \frac{1}{2n+5}$
Soit, encore par télescopage : $P(X=n) \geqslant \dfrac{6}{(2n+4)(2n+5)}$.

Ainsi $nP(X=n) \geqslant \dfrac{3n}{(n+2)(2n+5)}$, qui est le terme général d'une série divergente (car équivalent à $\dfrac{3}{2n}$) . Donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3.23.

Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce identique non truquée, et lancent alternativement leur pièce. On définit une variable aléatoire X_1 (respectivement X_2) comme le numéro du jet à l'issue duquel le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile pour la première fois (les jets sont comptés indépendamment pour chacun des joueurs).
La variable aléatoire X est le numéro du jet à l'issue duquel un des deux joueurs obtient pile pour la première fois.
La variable aléatoire J vaut 1 (respectivement 2) si le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs obtiennent pile en un même nombre de coups.
On cherche à montrer que conditionnellement au fait qu'ils n'obtiennent pas pile en un même nombre de coups, les variables aléatoires X et J sont indépendantes. Autrement dit, si on nomme H l'événement $(X_1 \neq X_2)$, on cherche à montrer que, pour $j = 0, 1, 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([(J=j) \cap (X>k)]/H) = P(J=j/H) \cdot P(X>k/H)$$

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k)$. Calculer $P(X_1 < X_2)$ et en déduire $P(H)$.

2. Démontrer que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $X_1 < X_2$ est une loi géométrique de paramètre $3/4$. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k / X_1 < X_2)$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(H \cap (J=1) \cap X > k) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([(J=1) \cap (X>k)]/H) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X > k/H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \text{ et que } P(J = 1/H) = P(J = 2/H) = \frac{1}{2}$$

6. Conclure.

Solution :

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 correspondent à des temps d'attente d'un premier succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On en déduit que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $1/2$. On a :

$$P(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k.$$

(On peut aussi considérer l'événement complémentaire qui est : « les k premiers essais sont des échecs ».)

La famille $(X_1 = k)_{k \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Ainsi, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, on a :

$$P(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k)P(X_2 > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$
$$= 4\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}$$

Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes et de même loi ; on en déduit par symétrie que $P(X_1 > X_2) = \dfrac{1}{3}$ et que $P(H) = 2P(X_1 < X_2) = \dfrac{2}{3}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \dfrac{P((X_1 = k) \cap (X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)}$.

Par indépendance :

$$P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \frac{P(X_1 = k)P(X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)} = \frac{(1/2)^{2k}}{1/3} = \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1},$$

ce qui montre que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $(X_1 < X_2)$ est la loi géométrique de paramètre $3/4$. Enfin :

$$P(X_1 > k/X_1 < X_2) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{j-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

3. Puisque $(J = 1) \subset H$, et que sur l'ensemble $(J = 1)$ on a $X = X_1$, il vient l'égalité des ensembles $H \cap (J = 1) \cap (X > k) = (X_1 > k) \cap (X_1 < X_2)$ et :

$$P(H \cap (J = 1) \cap (X > k)) = P(X_1 > k/X_1 < X_2)P(X_1 < X_2) = \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

4. D'après la question précédente :

$$P_H\big((J = 1) \cap (X > k)\big) = \frac{P(H \cap (J = 1) \cap (X > k))}{P(H)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. On a l'égalité d'ensembles $H \cap (J=2) \cap (X>k) = (X_2 > k) \cap (X_2 < X_1)$ et en suivant un raisonnement identique à celui développé plus haut et par symétrie :

$$P(H \cap (J=2) \cap (X>k)) = P(H \cap (J=1) \cap (X>k)) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On remarque enfin que $H \cap (J=0) = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} P_H(X>k) &= P_H\big((J=1)\cap(X>k)\big) + P_H\big((J=2)\cap(X>k)\big) \\ &= 2P_H\big((J=1)\cap(X>k)\big) = \left(\frac{1}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

6. En conclusion :

$$P_H(J=1) = \frac{P\big(H\cap(J=1)\big)}{P(H)} = \frac{P(X_1 < X_2)}{P(H)} = \frac{1}{2}$$

et puisque $P_H(J=0)=0$ on en déduit que $P_H(J=2) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.24.

1. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U.

Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \min(U_1,\ldots,U_n)$.
Montrer que la suite de variables (nZ_n) converge en loi vers Y.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.

3. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

a) $A_n = n.\min(\mathrm{e}^{-\lambda X_1},\ldots,\mathrm{e}^{-\lambda X_n})$

b) $D_n = \max(X_1,\ldots,X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.

Solution :

1. $nZ_n(\Omega) = [0,n]$ et les variables U_k étant indépendantes et de même loi que U :

$$P(nZ_n > x) = P[(U_1 > \frac{x}{n}) \cap \ldots \cap (U_n > \frac{x}{n})] = [P(U > \frac{x}{n})]^n$$

D'o :

$$P(nZ_n > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > n \\ (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, pour n assez grand, on a donc $P(nZ_n > x) = (1-\frac{x}{n})^n$, d'o :

$$\ln[P(nZ_n > x)] = n\ln(1-\frac{x}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -x, \text{ et donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to\infty} P(nZ_n > x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^-,\ \lim_{n\to\infty} P(nZ_n > x) = 1$$

La suite (nZ_n) converge donc en loi vers Y.

2. X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et Y prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Pour $x \in]0,1], F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(-\lambda X \leqslant \ln x) = P(X \geqslant -\dfrac{\ln x}{\lambda})$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda(-\frac{\ln x}{\lambda})} = x$$

Ainsi Y suit la loi uniforme sur $]0,1]$ (ou sur $[0,1]$, ce qui revient au même).

3. a) Les variables $\mathrm{e}^{-\lambda X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda X_n}$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$, donc (A_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Les variables X_i étant indépendantes et de même loi :

$$\begin{aligned} P(D_n \leqslant x) &= P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x + \ln n) \\ &= P[(X_1 \leqslant x + \ln n) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x + \ln n)] \\ &= P(X_1 \leqslant x + \ln n) \ldots P(X_n \leqslant x + \ln n) = [P(X_1 \leqslant x + \ln n)]^n \end{aligned}$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et n assez grand :

$$F_{D_n}(x) = P(D_n \leqslant x) = (1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln n)})^n = \big(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

Cette loi limite est appelée *loi de Gumbel*.

Exercice 3.25.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES crt ;
VAR h,X,n :INTEGER ;
BEGIN
RANDOMIZE ;
READLN(n) ;X :=n ;
REPEAT h :=RANDOM(n)+1 ;
IF h>X THEN X :=0 ELSE X :=h ;
WRITELN(X) ;
UNTIL X=0 ;
END.
```

On rappelle que l'instruction a :=RANDOM(n), où a et n sont des variables INTEGER, permet de mettre dans la variable a une valeur au hasard entre 0 et $n-1$. L'instruction RANDOMIZE permet d'initialiser la fonction RANDOM.

Pour tout entier naturel N, on définit la variable aléatoire X_N égale au $(N+1)$-ème nombre affiché.

1. Déterminer la loi de X_0

2. a) En déduire la probabilité de $(X_1 = k)$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Déterminer la loi de X_1.

3. a) Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X_N = k) \;=\; \frac{\mathrm{C}_{N+n-k}^{N}}{n^{N+1}}$$

b) En déduire la loi de X_N.

Solution :

1. Au premier tour, on a obligatoirement $h \leqslant X$; donc X prendra une valeur au hasard entre 1 et n.

Ainsi X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. a) Après le premier tour, lorsque $X = j$, tout se passe comme si l'on choisissait au hasard dans l'ensemble $\{1, \ldots, j, 0, \ldots, 0\}$ (les $n - j$ derniers éléments de cet ensemble sont des 0).

Utilisons le système complet d'événements $(X_0 = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Il vient :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = k / X_0 = j) P(X_0 = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} P(X_1 = k / X_0 = j) P(X_0 = j) = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{n} P(X_0 = j) \\ &= \frac{n-k+1}{n^2} \end{aligned}$$

b) Comme $X_1(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$, par la question précédente, il suffit de calculer $P(X_1 = 0)$. Il vient :

$$P(X_1 = 0) = 1 - \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

3. a) Faisons un raisonnement par récurrence. L'amorce est la question précédente. Pour l'hérédité, on utilise le même argument que précédemment, en notant que pour $k \neq 0, P(X_{N+1} = k / X_N = 0) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(X_{N+1} = k) &= \sum_{j=0}^{n} P(X_{N+1} = k / X_N = j) P(X_N = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{n} \frac{\mathrm{C}_{N+n-j}^{N}}{n^{N+1}} = \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=k}^{n} \mathrm{C}_{N+n-j}^{N} = \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=N}^{N+n-k} \mathrm{C}_j^N \\ &= \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=N}^{N+n-k} (\mathrm{C}_{j+1}^{N+1} - \mathrm{C}_j^{N+1}) = \frac{\mathrm{C}_{N+n-k}^{N}}{n^{N+2}}. \end{aligned}$$

b) On procède comme dans la question 2. b) :

$P(X_N=0)=1-\sum_{j=1}^{n}P(X_N=j)=1-\frac{1}{n^{N+1}}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{C}_{N+n-j}^{N}$

Soit, en utilisant à nouveau la formule de Pascal, donnant la «loi des colonnes» du triangle de Pascal : :

$$P(X_N=0)=1-\frac{1}{n^{N+1}}\mathrm{C}_{N+n}^{N+1}$$

Exercice 3.26.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES CRT ;
const ...
VAR   ...
FUNCTION X(a :REAL) :REAL ;
BEGIN
X :=RANDOM*a ;
END ;
BEGIN
READLN(a) ;u :=X(a) ;v :=a-u ;
w :=u ; IF u>v THEN w :=v ;
t :=u ; IF u<v THEN t :=v ;
FOR k :=1 TO n DO y[k] :=X(a) ;
...
END.
```

où la fonction RANDOM, sans paramètres, retourne, au hasard, une valeur de type REAL comprise entre 0 et 1.

1. Compléter les déclarations du programme ci-dessus.

2. On note U, V, W, T les variables aléatoires réelles égales aux valeurs se trouvant dans les variables `u`, `v`, `w` et `t` du programme ci-dessus.
Quelles sont les lois suivies par U, V, W, T ?

3. Déterminer les espérances et variances de W et T.
Comment peut-on justifier l'égalité des variances ? Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(W,T)$.

4. Compléter le programme précédent pour que Z soit la variable aléatoire égale au minimum des variables `y[1]`, `y[2]`,...,`y[n]`.

5. Déterminer la loi de Z, ainsi que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

Solution :

1. Voici une proposition

```
const n = 50 ;
Var y := array[1..n] of real ;
a,u,v,w,z : real ;
k : integer ;
```

2. $\star$ La variable aléatoire U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$; son espérance vaut $\frac{a}{2}$ et sa variance $\frac{a^2}{12}$.
$\star$ La variable $V = a - U$ suit la même loi que U.
$\star$ On a $W = \min(U, V)$. D'où, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(W > x) &= P((V > x) \cap (U > x)) = P(U > x) \cap (U < a - x)) \\ &= P(x < U < a - x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$P(W < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > \frac{a}{2} \\ 1 - \dfrac{a - 2x}{a} = \dfrac{2x}{a} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi W suit une loi uniforme sur $[0, a/2]$.
$\star$ De même $T = \max(U, V)$ suit la loi uniforme sur $[a/2, a]$.

3. Un calcul immédiat donne $E(W) = \frac{a}{4}, E(T) = \frac{3a}{4}$, $V(W) = V(T) = \frac{a^2}{48}$.
Comme $T + W = U + V = a$, on a $W = a - T$ et l'égalité des variances.
Enfin $\rho(W, T) = \rho(a - T, T) = -\rho(T, T) = -1$.

4. Voici une proposition de complément :

```
Z :=y[1] ;
For k :=2 to n do
if Z<y[k] then Z :=y[k] ;
```

5. Les variables `y[k]` suivent toutes une loi uniforme sur $[0, a]$. Supposons–les indépendantes. Alors :

$$P(Z > x) = P\big(\bigcap_k (\texttt{y[k]} > x)\big) = \prod_k P(\texttt{y[k]} > x)$$

d'où pour tout $x \in [0, a]$:

$$P(Z > x) = 1 - \big(1 - \frac{x}{a}\big)^n$$

Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul élémentaire donne :

$$E(Z) = \frac{n}{a}\int_0^a t\big(1 - \frac{t}{a}\big)^{n-1} dt = \frac{a}{n+1} \mp$$

Exercice 3.27.

On considère les lancers successifs (indépendants) d'une pièce non pipée et on note T le nombre de Face précédant le premier Pile. On propose à un joueur la suite de paris suivante :

• Pari P_0 : si $T = 0$, on perd 1 Euro ; si $T = 1$, on gagne 3 Euros ; sinon on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_1 : si $T = 1$, on perd 4 Euros ; si $T = 2$, on gagne 9 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_2 : si $T = 2$, on perd 10 Euros ; si $T = 3$, on gagne 27 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

...

• Pari P_n : si $T = n$, on perd $3^n + 1$ Euros ; si $T = n + 1$, on gagne 3^{n+1} Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

etc.

1. Chaque pari est-il favorable au joueur ?
2. Calculer l'espérance du gain Γ si le joueur parie sur la suite de tous les résultats.

Solution :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ (on a k fois de suite Face, puis Pile)
Supposons que le joueur joue sur le pari P_n et soit G_n le gain du joueur.

$\star$ $G_0(\Omega) = \{-1, 0, 3\}$ et :

$$P(G_0 = -1) = P(T = 0) = \frac{1}{2},\ P(G_0 = 3) = P(T > 1) = \frac{1}{4}$$

Donc $E(G_0) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

$\star$ Pour $n \geqslant 1$, $G_n(\Omega) = \{-(3^n + 1), 0, 3^{n+1}\}$ et :

$$P(G_n = -3^n - 1) = P(T = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$P(G_n = 3^{n+1}) = P(T = n + 1) = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Donc $E(G_n) = -(3^n + 1)\dfrac{1}{2^{n+1}} + 3^{n+1}\dfrac{1}{2^{n+2}} = \dfrac{3^n - 2}{2^{n+2}}$.
Ainsi, dans tous les cas $E(G_n) > 0$ et chaque pari est favorable au joueur.

2. Supposons que le joueur joue sur l'ensemble de tous les paris. Alors :
Si $(T = 0)$ est réalisé, le joueur perd 1 euro sur le pari P_0 et ne perd ni ne gagne rien sur les autres paris, et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
Si $(T = 1)$ est réalisé, alors P_0 est gagné (il gagne 3 euros) et P_1 est perdu (il perd 4 euros) et rien n'est gagné ni perdu sur les autres paris ; le joueur perd au total 1 euro et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
Si $(T = 2)$ est réalisé, alors le joueur gagne le pari P_1 et perd le pari P_2 (il ne gagne ni ne perd rien sur P_0 et sur les paris postérieurs) ; le joueur

gagne 9 euros et en perd 10, au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{8}$;

...

Plus généralement si $(T = n)$ est réalisé, le joueur gagne le pari P_{n-1} et perd le pari P_n (sur les paris antérieurs ou postérieurs il ne gagne ni ne perd rien). Au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^{n+1}}$

...

Finalement le joueur perd 1 euro avec la probabilité $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, soit :

$$E(\Gamma) = -1$$

Ce résultat qui peut paratre paradoxal est dû au fait que pour $n \geqslant 1$, on a : $E(G_n) = -(3^n + 1)\frac{1}{2^{n+1}} + 3^{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}$ et que dans la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(G_n)$, il n'est pas possible de calculer séparément la somme des pertes et la somme des gains, pour distinguer les paris perdus et les paris gagnés ...

Exercice 3.28.

1. Soit U et V deux variables à densité sur $\mathbb{R}_+$. On note F la fonction de répartition de U et g une densité de V.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F\big(\frac{z}{v}\big)g(v)\,dv$ converge pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

On admet que si U et V sont indépendantes, alors

$$(\forall\, z \in \mathbb{R}_+) \quad P(UV \leqslant z) = \int_0^{+\infty} F\Big(\frac{z}{v}\Big)g(v)\,dv$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_1X_2\dots X_n$ (produit des n variables $X_1,\dots,X_n$) et on note F_n (resp. f_n) la fonction de répartition (resp. une densité) de Z_n.

2. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)$ $(\forall\, z \in]0,1])$ $\quad F_n(z) = z + z\displaystyle\int_z^1 \frac{1}{u^2}\,F_{n-1}(u)\,du.$

3. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)$ $(\forall\, t \in]0,1])$ $\quad f_n(t) = \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{u}\,f_{n-1}(u)\,du$

4. En déduire une expression explicite de f_n.

5. Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n.

Solution :

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, la fonction $v \mapsto F\big(\frac{z}{v}\big)g(v)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

C'est la fonction nulle si $z = 0$.

Si $z > 0$, alors :

- elle est équivalente à $g(v)$ au voisinage de 0 et l'intégrale est donc convergente en ce voisinage,
- c'est un $o(g(v))$ au voisinage de $+\infty$, et l'intégrale est donc convergente en ce voisinage.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} F\big(\frac{z}{v}\big)g(v)\,dv$ converge pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

2. Comme $X_1, \dots X_n$ sont à valeurs dans $[0,1]$, Z_n l'est également. Soit $z \in [0,1]$, et $n \geqslant 2$. Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$ la variable $Z_{n-1} = X_1 \dots X_{n-1}$ est indépendante de X_n, qui suit la loi $\mathcal{U}([0,1])$ et donc :

$$F_n(z) = P(Z_n \leqslant z) = P(Z_{n-1}X_n \leqslant z) = \int_0^{+\infty} F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx$$
$$= \int_0^1 F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx = \int_0^z F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx + \int_z^1 F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx$$
$$= z + z\int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du$$

(changement de variable$u = \frac{z}{x}$ dans la deuxième intégrale et dans la première intégrale $\frac{z}{x} > 1$, donc la fonction à intégrer vaut 1)

d'où :

$$F_n(z) = z + z\int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du$$

3. Par dérivation, il vient, toujours pour $z \in]0,1]$:

$$f_n(z) = 1 + \int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du - \frac{1}{z}F_{n-1}(z)$$

Une intégration par parties donne :

$$f_n(z) = \int_z^1 \frac{1}{u}f_{n-1}(u)du$$

4. On se restreint à l'intervalle $]0,1]$. On a

- $f_1(z) = 1$, car $Z_1 = X_1$;
- $f_2(z) = \displaystyle\int_z^1 \frac{du}{u} = -\ln z$;
- $f_3(z) = \displaystyle\int_z^1 -\frac{\ln u}{u}du = \frac{\ln^2 z}{2}$;
- $f_4(z) = \displaystyle\int_z^1 \frac{\ln^2 u}{2u}du = -\frac{\ln^3 z}{6}$.

Supposons que $f_{n-1}(u) = \dfrac{(-\ln u)^{n-2}}{(n-2)!}$. Alors, $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ étant la dérivée de $u \mapsto \ln u$, il vient :

$$f_n(z) = \int_z^1 \frac{1}{u} \frac{(-\ln u)^{n-2}}{(n-2)!} du = \frac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

5. Soit $z \in]0,1]$. Il vient :

$$F_n(z) = \int_0^z f_n(t)dt = \left[t \frac{(-\ln t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]_0^z + \int_0^z \frac{(-\ln t)^{n-2}}{(n-2)!} dt$$

soit

$$F_n(z) = z f_n(z) + \int_0^z f_{n-1}(t)dt$$

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$F_n(z) = z \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) = z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\ln z)^k}{k!}$$

Exercice 3.29.

On considère une population dont l'effectif aléatoire à chaque instant $n = 0, 1, 2, \dots$ est noté X_n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la taille de la population est égale à 1 soit $X_0 = 1$. Entre l'instant n et l'instant $n + 1$, et indépendamment pour chaque n, la population entière double ou est totalement détruite, chacune de ces éventualités se produisant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, puis un individu s'ajoute à la population. On note Y_n la variable aléatoire égale à 1 ou à 0 selon que c'est la première ou la seconde des deux éventualités précédentes qui se produit entre les instants n et $n+1$.

1. Préciser la loi des variables aléatoires Y_n. Que peut-on dire de ces variables aléatoires ?

2. a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_{n+1} en fonction de X_n et Y_n.

b) En déduire l'ensemble E_n des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.

c) Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles indépendantes ?

d) La suite d'événements $(X_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle formée d'événements indépendants ?

3. a) Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, X_2, X_3.

b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite (X_n) converge en loi quand n tend vers l'infini et préciser sa limite.

Solution :

1. Par hypothèse, les variables aléatoires Y_n sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

2. a) En distinguant les deux cas $Y_n = 0$ et $Y_n = 1$, on obtient :

$$X_{n+1} = 2X_nY_n + 1.$$

b) Comme $2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, on montre facilement que :

$$E_n = \{2^k - 1, 1 \leqslant k \leqslant n+1\}$$

c) La suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas formée de variables indépendantes, car par exemple, $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 7)$ est l'événement impossible, alors que $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 7)$ ne sont pas de probabilité nulle.

d) Comme $(X_n = 1) = (Y_{n-1} = 0)$ et comme les variables Y_n sont indépendantes, la suite d'événements $(X_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est formée d'événements indépendants.

3. a) $\star$ $X_1(\Omega) = \{1, 3\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 3) = \dfrac{1}{2}$;

$\star$ $X_2(\Omega) = \{1, 3, 7\}$ et :

$P(X_2 = 1) = P(Y_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$; $P(X_2 = 7) = P\big((Y_0 = 1) \cap (Y_1 = 1)\big) = \dfrac{1}{4}$;

d'o $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{4}$;

$\star$ on obtient de même $X_3(\Omega) = \{1, 3, 7, 15\}$â et :

$P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{2}, P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{4}, P(X_3 = 7) = \dfrac{1}{8}, P(X_3 = 15) = \dfrac{1}{8}.$

b) On a :

$\star$ $P(X_n = 2^{n+1} - 1) = \dfrac{1}{2^n}$ (car cet événement se réalise si et seulement si on réalise $Y_0 = 1, Y_1 = 1, \ldots, Y_{n-1} = 1$)

$\star$ $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ (car la population a été détruite entre l'instant $n-1$ et l'instant n, *i.e.* $(Y_{n-1} = 0)$ est réalisé et ce qui s'est passé avant est sans incidence)

$\star$ $P(X_n = 3) = \dfrac{1}{4}$ (car la population a été détruite entre l'instant $n-2$ et l'instant $n-1$, *i.e.* $(Y_{n-2} = 0)$ est réalisé, puis on réalise $(Y_{n-1} = 1)$ et ce qui s'est passé avant l'instant $n-2$ est sans incidence)

$\star$ Plus généralement et soit directement, soit par récurrence :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], P(X_n = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k}$$

c) $E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2^k - 1)\dfrac{1}{2^k} + (2^{n+1} - 1)\dfrac{1}{2^n} = n - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 - \dfrac{1}{2^n}$, *i.e.* :

$$E(X_n) = n + 1$$

4. Soit $E = \{2^k - 1, k \in \mathbb{N}^*\}$. Alors pour tout n on a $X_n(\Omega) \subset E$, et pour chaque valeur de k dans $\mathbb{N}^*$, dès que $n \geqslant k$, on a :

$$P(X_n = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2^k}$$

Ainsi la suite (X_n) converge en loi vers une variable X telle que :

$$X(\Omega) = E, \forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(X = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k}$$

(On remarque que l'on a bien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = 2^k - 1) = 1$)

Exercice 3.30.

Dans tout l'exercice $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, ¶)$ et à valeurs dans $[0,1]$, qui sont indépendantes, à densité et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. On note pour n entier naturel non nul, f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

a) Indiquer une relation entre f_{n+1} et f_n.

b) En déduire l'expression de $F_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

c) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier k tel que F_n soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\omega \in \Omega$ on pose $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n(\omega) > 1\}$, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) > 1$ et sinon, on pose $N(\omega) = 0$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

b) Montrer que N possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Donner la valeur de $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\big)$

Solution :

1. a) On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et X_{n+1} est indépendante de S_n (car S_n ne dépend que de $X_1, \dots, X_n$). Une densité f_{n+1} de S_{n+1} s'obtient donc par convolution de f_n et d'une densité de X_{n+1} :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\,dt = \int_{x-1}^{x} f_n(t)\,dt$$

b) S_n prend ses valeurs entre 0 et n, donc pour $x \in [0,1]$, l'intervalle utile d'intégration est $[0,x]$:

$$\forall\, x \in [0,1], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = F_n(x) - F_n(0) = F_n(x)$$

Ainsi, $\forall\, x \in [0,1], F_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x F_n(t)\,dt$

Comme $\forall\, x \in [0,1], F_1(x) = x$, une récurrence simple donne :

$$\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*, F_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_n(x-1)$.
Ainsi si F_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors f_{n+1} aussi et F_{n+1}, qui est une primitive de f_{n+1}, est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme F_1 est seulement continue sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas dérivable en 0 et en 1), une récurrence simple montre que F_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$, sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Par construction, N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$\star$ L'événement $(N=0)$ est l'événement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \leqslant 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N=0) \leqslant P(S_n \leqslant 1) = F_n(1) = \frac{1}{n!}$$

Donc $P(N=0) = 0$ et $(N=0)$ est donc quasi-impossible.
$\star$ Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}, P(N>n) = P(S_n \leqslant 1) = \dfrac{1}{n!}$ (ceci vaut même pour $n=0$) et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = P(N>n-1) - P(N>n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

b) Pour $n \geqslant 2$, $n.P(N=n) = n\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc N admet une espérance et comme $P(N=1)=0$:

$$E(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n.P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \mathrm{e}$$

De même, les convergences étant évidentes :

$$E(N^2) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-2)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} = 3.\mathrm{e}$$

et :

$$V(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e})$$

3. On a $(S_n \geqslant n-1) = (n - S_n \leqslant 1)$, or $n - S_n = (1-X_1) + \cdots + (1-X_n)$ et chaque X_i ayant même loi que $(1-X_i)$, et les variables $(1-X_i)$ étant indépendantes, $(n-S_n)$ a même loi que S_n, donc $P(S_n \geqslant n-1) = \dfrac{1}{n!}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big) \leqslant P(S_k \geqslant k-1) = \dfrac{1}{k!}$, soit :

$$P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big) = 0$$

Exercice 3.31.

1. Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt.$

2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = (i+j-2)!$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

a) Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels et qu'on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$^tXAX = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right)^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

b) En déduire que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. A est-elle inversible ?

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles positives pour laquelle il existe n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que X admette pour densité la fonction f définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \big) \mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 0, \text{ et } \forall\, t < 0, f(t) = 0$$

a) Préciser la valeur de $\sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, (i-1)!$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et exprimer $m_k = E(X^k)$ en fonction des x_i.

c) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est entièrement déterminé par le $(n-1)$ uplet $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ pour que X suive la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Solution :

1. La connaissance de la fonction Γ permet d'affirmer que pour tout polynôme P à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t} dt$ est combinaison linéaire d'intégrales convergentes, donc est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$$

2. a) D'une part : $^tXAX = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i,j} (i+j-2)! x_i x_j$.

D'autre part :

$$\int_0^{+\infty} \big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \big)^2 \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} \mathrm{e}^{-t} dt = \sum_{i,j} x_i x_j (i+j-2)!$$

D'o l'égalité souhaitée.

b) Soit λ une valeur propre de A (A est symétrique réelle, donc $\lambda \in \mathbb{R}$) et X un vecteur colonne propre associé, de terme générique x_i. Alors :

$$^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda({}^tXX) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Or, d'après a) : $^tXAX = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\Big)^2 \mathrm{e}^{-t} dt > 0$, car la fonction à intégrer est continue, positive et différente de la fonction nulle (il existe au moins un x_i non nul).

Ainsi $\lambda > 0$ et comme 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible.

3. a) f est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(i-1)! = 1$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt$ est convergente, et :

$$m_k = E(X^k) = \int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} x_i t^{i+k-1} \mathrm{e}^{-t} dt = \sum_{i=1}^{n} x_i(i+k-1)!$$

c) Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d'o $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}$

ce qui prouve que la connaissance des moments $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ détermine parfaitement les valeurs des x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

d) Pour une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, le moment d'ordre k vaut $k!$.

Par suite, une variable aléatoire X du type précédent suit la loi $\mathcal{E}(1)$ si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], E(X^k) = k!$.

Exercice 3.32.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de N boules numérotées de 1 à N où $N = an$, a étant un entier fixé non nul. On place « au hasard » et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes (chaque boule est donc placée avec la probabilité $\dfrac{1}{n}$ dans l'urne numéro k).

On note :

Y_n le nombre d'urnes vides.

T_i la variable qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide et 0 sinon.

$S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Donner la loi de T_i et son espérance.
2. Calculer $E(T_iT_j)$ et $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$.

3. Calculer $E(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
4. Calculer $V(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
5. a) Vérifier que $\forall\,\omega \in \Omega, |S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \leqslant |S_n(\omega) - E(S_n)| + |E(S_n) - \mathrm{e}^{-a}|$.
   b) En déduire que :
   $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_0, \forall\, n \geqslant n_0, P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|S_n(\omega) - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$.
   c) Montrer que $\forall\,\varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Solution :

1. Par indépendance des résultats des différents placements, on a :

$$P(T_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na}$$

Ainsi $T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^N\right)$ et :

$$E(T_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N ; V(T_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N\right].$$

2. De même T_iT_j ne prend que les valeurs 0 et 1 et prend la valeur 1 avec la probabilité $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^N$. Ainsi $E(T_iT_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^N$ et :

$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^N - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2N}$$

3. On a $Y_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, donc par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N$$

D'o : $\ln(E(S_n)) = N \ln(1 - \frac{1}{n}) = na \ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{(\infty)}{\sim} na(-\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -a$, et

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n) = \mathrm{e}^{-a}$$

4. $V(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} V(T_k) + 2\sum\limits_{i<j} \mathrm{Cov}(T_i, T_j)\right)$. Il y a dans cette somme n variances toutes égales et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ covariances toutes égales, d'o :

$$V(S_n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}\right] + \frac{n-1}{n}\left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2an}\right]$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an} = \mathrm{e}^{-2a}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2an} = \mathrm{e}^{-2a}$, d'o :

$$\lim_{n\to\infty} V(S_n) = 0$$

5. a) Il s'agit de l'inégalité triangulaire.
   b) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} E(S_n) = \mathrm{e}^{-a}$, on a :
   pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant n_0 \implies |E(S_n) - \mathrm{e}^{-a}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, si l'événement $|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon$ est réalisé, alors l'événement $|S_n(\omega) - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ est également réalisé, ce qui donne l'inégalité demandée par croissance d'une probabilité.

c) Or, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|S_n - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big) \leqslant \frac{4V(S_n)}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et, *a fortiori* : $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.

Exercice 3.33.

On admettra, sans démonstration, la formule :

$$\forall\, x \in [0,1[, \forall\, r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{r+k}^{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

On dispose d'une urne contenant une proportion p de boules rouges et $q = 1 - p$ de boules vertes ($0 < p < 1$). On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on note, pour $r \in \mathbb{N}^*$, X_r la variable aléatoire définie par :

$X_r = k$ si k est le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition de la $r^{\text{ème}}$ème boule rouge et $X_r = -1$ si l'on obtient jamais r boules rouges.

On dit que X_r suit la loi $J(r,p)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

2. a) Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_r = k)$.

b) Que vaut $P(X_r = -1)$?

c) Calculer $E(X_r)$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes telles que, pour tout n, X_n suit la loi $J(n, p_n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-p_n) = \lambda$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

4. On suppose dans cette question que X suit la loi $J(2,p)$.

a) Montrer que $\forall\, x \in [0,1[, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

(on remarquera que $\dfrac{x^k}{k} = \displaystyle\int_0^x t^{k-1}\, dt$).

b) Calculer $E\big(\dfrac{1}{X+2}\big)$.

Solution :

1. $X_1 + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, d'o $E(X_1) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$.

2. a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $(X_n = k)$ est réalisé si et seulement si les $k+n-1$ premiers tirages amènent $n-1$ boules rouges, le tirage de rang $k+n$ amenant la n-ième boule rouge. Les tirages ayant lieu avec remise, il vient :

$$P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^{n-1} p = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^n$$

b) Par la formule admise :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1$$

D'o $P(X_n = -1) = 0$.

c) Soit Y_k le nombre de boules vertes obtenues entre les $(k-1)$-ième et k-ième boules rouges obtenues (on pose $Y_1 = X_1$). Par indépendance, chaque Y_k suit la même loi que $Y_1 = X_1$, d'espérance $\dfrac{q}{p}$.

Comme $X_r = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$, par linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(X_r) = \frac{rq}{p}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k p_n^n$.

$\star$ $\ln(p_n^n) = n \ln(p_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n(p_n - 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$\star$ $\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} = \dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots n}{k!} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$, donc :

$$\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k \sim \frac{[n(1-p_n)]^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ainsi, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, ce qui signifie que la suite (X_n) converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

4. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$, soit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - R_n(x), \text{ avec } 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-x}\, dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

b) $\dfrac{1}{X+2}$ est une variable bornée, donc admet une espérance, et :

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}(k+1) q^k p^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k p^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} q^k p^2 = p^2 \frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^k}{k} \\ &= p - \frac{p^2}{q^2}\big(-\ln(1-q) - q\big) \end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

$$E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} \ln p$$

Exercice 3.34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2, ..., deux boules portent le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant, si les deux boules portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ paire de boules portant le même numéro, **à partir du retrait** d'une $(i-1)^{\text{ème}}$ paire de boules.

1. a) Quelle relation lie X_n à $Y_1, \dots, Y_n$?

b) Déterminer la loi de Y_1. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_i. Quelle est son espérance ?

c) En déduire que $E(X_n) = n^2$.

2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b) On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \frac{1}{2}\Big[\big(\tfrac{4}{5}\big)^{k-2} - \big(\tfrac{2}{3}\big)^{k-2}\Big]$$

3. On revient au cas général.

a) Montrer que $P(X_n = n) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!} \mp$

b) Exprimer $P(X_n = n+1)$ à l'aide de termes de la suite (h_k) définie, pour $k \geqslant 1$, par $h_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \mp$

Solution :

1. a) Clairement : $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, si $(i-1)$ paires ont déjà été retirées, il reste $2(n-i+1)$ boules dans l'urne et le tirage d'une paire est de probabilité :

$$p_i = \frac{n-i+1}{\mathrm{C}^2_{2(n-i+1)}} = \frac{1}{2(n-i)+1}$$

Ainsi Y_i suit la loi géométrique de paramètre p_i et $E(Y_i) = \dfrac{1}{p_i} = 2(n-i)+1$.

c) Par linéarité de l'espérance :

$E(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} [2(n-i)+1] = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

Soit :

$$E(X_n) = n(n-1) + n = n^2$$

2. a) $\star$ Pour $n = 1$, X_1 est la constante égale à 1.

$\star$ Pour $n = 2$, on attend une première paire (loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$) puis on conclut au tirage suivant :

$$X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![, \forall\, k \geqslant 2, P(X_2 = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{3}$$

b) Pour $n = 3$, $X_3 = Y_1 + Y_2 + 1$, o $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{5})$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$, Y_1 et Y_2 étant indépendantes. Donc, par convolution discrète :

$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \sum_{i=0}^{n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^i \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3-i} \left(\frac{1}{3}\right)$$

Soit, par la relation $x^n - y^n = (x-y) \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$:

$$P(X_3 = k) = \frac{1}{15} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. a) Pour réaliser $(X_n = n)$, il faut gagner à chaque essai, *i.e.* réaliser $(Y_1 = 1)$, $(Y_2 = 1)$, $\ldots$,$(Y_n = 1)$. On obtient donc par indépendance :

$$P(X_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2(n-i)+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{2n} k} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

b) De même pour réaliser $(X_n = n+1)$, il faut obtenir une paire à chaque essai, sauf une fois (pas la dernière) o l'on doit s'y prendre à deux fois ! En clair :

$(X_n = n+1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \left((Y_i = 2) \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j i}}^{n-1} (Y_j = 1)\right)$

Avec les notations de la question 1., $P(Y_i = 1) = p_i$ et $P(Y_i = 2) = (1-p_i)p_i$, d'o par disjonction, puis indépendance :

$$P(X_n = n+1) = p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (1-p_j) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\right)$$

$$= \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\right)$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$, soit finalement :

$$P(X_n = n+1) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - h_{2n} + \frac{1}{2} h_n\right)$$

1

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, $(n \geqslant 2)$. Soit f un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité et pour tout j entier naturel, f^j représente l'endomorphisme de E défini par :

$$f^0 = I, \text{ et si } j \geqslant 1, f^j = f \circ f^{j-1}$$

On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que :

$$f^{n-1}(x) \neq 0, \text{ et } f^n(x) = 0$$

1. Montrer que $\big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

2. On pose $\mathcal{F} = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\big\}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et qu'une base de $\mathcal{F}$ est $(I, f, \ldots, f^{n-1})$.

3. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et que la matrice associée à f dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice et déterminer $\mathcal{F}$.

Solution :

1. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = 0$.

En appliquant f^{n-1}, il reste $a_0 f^{n-1}(x) = 0$, d'où $a_0 = 0$;
En appliquant maintenant f^{n-2}, il reste $a_1 f^{n-1}(x) = 0$, d'où $a_1 = 0$;
et ainsi de suite. Donc tous les coefficients sont nuls et la famille est bien libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de l'espace, on a :

$$\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big) \text{ est une base de } E$$

2. $\star$ $\mathcal{F}$ est non vide, car il contient l'endomorphisme nul, f, id, etc. De plus, en vertu des propriétés des opérations, $\mathcal{F}$ est stable par combinaison linéaire. Donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

$\star$ • Clairement $id, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ commutent avec f, donc f commute avec toute combinaison linéaire de ces endomorphismes.

• Soit g qui commute avec f, alors $g(x)$ se décompose sur la base précédente :

$$\exists!(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x),$$

et g commute avec les puissances de f, donc :

$$g\big(f^p(x)\big) = f^p\big(g(x)\big) = f^p\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\Big)\big(f^p(x)\big)$$

Ainsi les endomorpismes g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur la base $\big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$, donc sont égaux, ce qui prouve que $g \in \text{Vect}\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$.

• Enfin $\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$ est une famille libre, puisque si $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$, alors en particulier $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = 0$ et on sait que ceci entraîne la nullité de tous les coefficients.

Ainsi $\mathcal{F} = \text{Vect}\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$, la famille $\big(id, f, \dots, f^{n-1}\big)$ est une base de $\mathcal{F}$.

3. On a $f(e_n) = e_{n-1}$, $f(e_{n-1}) = e_{n-2}, \dots, f(e_2) = e_1$ et $f(e_1) = 0$.
Ainsi f vérifie les conditions précédentes avec $x = e_n$.

Les matrices de $f^2, f^3, \dots$ s'obtiennent par simples décalages et $\mathcal{F}$ est donc formé des endomorphismes associés aux matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.2.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 + (1 + f'(x))^2 = 1$$

1. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f admet une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe une suite (x_n) telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$$

4. En déduire f.

Solution :

1. Supposons qu'il existe un point x tel que $f'(x) > 0$, alors $1+f'(x) > 1$ et la condition de l'énoncé est impossible. Donc $\forall\, x, f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante.

2. La condition de l'énoncé impose d'avoir $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Ainsi f est monotone et bornée, donc admet une limite (finie) en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel il existe A tel que $x \geqslant A$ implique $f'(x) \leqslant -\varepsilon$, alors pour $x \geqslant A$, il vient en intégrant :

$$f(x) - f(A) \leqslant -\varepsilon(x - A)$$

Et alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

Ainsi : $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, A, \exists\, x \geqslant A$, tel que $-\varepsilon \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ et $A = n$, il existe donc $x_n \geqslant n$ tel que $-\dfrac{1}{n} \leqslant f'(x_n) \leqslant 0$.

On a donc bien $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$.

4. Par la relation de définition : $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ et puisque f admet une limite en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Le même raisonnement que celui fait dans la question précédente montre qu'il existe une suite (y_n) tendant vers $-\infty$ et telle que $\lim_{n\to+\infty} f'(y_n) = 0$, donc telle que $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. Ainsi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

La fonction f étant monotone, on en conclut $f = 0$.

Réciproquement la fonction nulle vérifie évidemment la propriété exigée.

Exercice 4.3.

1. Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π.

Montrer que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\,dt$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^n dt$ et l'on considère l'application f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos t)dt$$

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que c'est une fonction paire.

Dorénavant on considère que x est élément de $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in [-\pi, \pi]$,

$$\exp(x\cos t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!} + R_n(x,t)$$

où

$$|R_n(x,t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Montrer que : $|R_n(x,t)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)$.

4. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} I_k\Big| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} I_n$.

Solution :

1. Plus généralement, soit $x \in \mathbb{R}$ et $h : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+2\pi} g(t)\,dt$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g(x+2\pi) - g(x) = 0$, donc h est constante et en particulier $h(0) = h(-\pi)$.

2. $\star$ Pour tout x, la fonction à intégrer est continue sur $[-\pi, \pi]$ et f est bien définie.

$\star$ On a $f(-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-x\cos t)\,dt$.

Par le changement de variable $u = t + \pi$, $f(-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(x\cos u)\,du$ et en appliquant le résultat précédent : $f(-x) = f(x)$.

3. $\star$ Par convergence de la série exponentielle :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \exp(x\cos t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k \cos^k t}{k!}$$

et, pour $x \geqslant 0$, $\left|R_n(x,t)\right| = \Big|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x^k \cos^k t}{k!}\Big| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = R'_n$

$\star$ $R'_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\big(1 + \dfrac{x}{n+2} + \dfrac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \dfrac{x^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\big).$

Or $n+2 \geqslant 1$, $(n+2)(n+3) \geqslant 2!$, ... Par conséquent :

$$R'_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x$$

4. En plaant tout sous la même intégrale :

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} I_k\Big| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\exp(x\cos t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cos^k t}{k!}\Big| dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x)\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (il s'agit même du terme général d'une série convergente) et donc, par encadrement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} I_k$$

Exercice 4.4.

1. Pour $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{n,p} = \int_1^{+\infty} t^n \exp(-pt)\,dt$$

a) Montrer que ces intégrales convergent.

b) Déterminer une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$ et en déduire $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

2) Soit $\lambda > 0$, on pose $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X et donner sa fonction de répartition.

Un appareil possède n composants ($n \in \mathbb{N}^*$). Chacun des composants a une durée de vie donnée par une variable aléatoire dont f est une densité. On supposera ces variables indépendantes.

3. L'appareil tombe en panne dès que l'un (au moins) de ses composants tombe en panne (montage en série). Soit Y la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'appareil.
Exprimer l'espérance $E(Y)$ de Y, en fonction des intégrales de la question 1.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue sur $[1, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 . t^n \mathrm{e}^{-pt} = 0$. La règle de Riemann donne alors la convergence de l'intégrale proposée.

En intégrant par parties : $\displaystyle\int_1^X t^n . \mathrm{e}^{-pt}\, dt = \frac{X^n}{p}\mathrm{e}^{-pX} - \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{n}{p}\int_1^X t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\, dt$

et en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$:

$$\forall\, n \geqslant 1, I_{n,p} = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{n}{p} I_{n-1,p}$$

Posons alors $u_n = \dfrac{I_{n,p}}{n!}$, on obtient : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{p}u_{n-1}$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_n & = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{p}u_{n-1} \\ u_{n-1} & = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{p}u_{n-2} \\ & \vdots \\ u_1 & = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{p}u_0 \end{cases}$$

On multiplie alors la deuxième relation par $\dfrac{1}{p}$, la troisième par $\dfrac{1}{p^2}$, ...puis on somme. Puisque $u_0 = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}$, il vient : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{p^k (n-k)!}$, soit :

$$I_{n,p} = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{p^k}\mathrm{C}_n^k$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive. On vérifie que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$, ce qui résultera d'ailleurs du calcul suivant.

En intégrant par parties dans le cas $x \geqslant 0$, on obtient :

$$F_X(x) = 0, \text{ si } x \leqslant 0 \text{ et } F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}, \text{ si } x \geqslant 0.$$

3. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$, les variables X_i étant indépendantes de même loi que X : $P(Y > x) = P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\big) = [P(X > x)]^n$. D'où :

$$P(Y \leqslant x) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^n$$

Par dérivation, on en déduit une densité f_Y de Y :

$$\forall\, x \leqslant 0, f_Y(x) = 0 \text{ et } \forall\, x > 0, f_Y(x) = n f(x)\big(1 - F_X(x)\big)^{n-1}$$

Soit : $\forall\, x > 0, f_Y(x) = n\lambda^2 x . \mathrm{e}^{-\lambda n x}(\lambda x + 1)^{n-1}$.

La convergence de l'intégrale étant évidente, on a :

$E(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} n\lambda^2 x^2 . \mathrm{e}^{-\lambda n x}(\lambda x + 1)^{n-1}\, dx$,

et en effectuant le changement de variable $u = \lambda x + 1$:

$$E(Y) = n\lambda e^n \int_1^{+\infty} (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) e^{-nu}\, du, \text{ i.e. :}$$

$$E(Y) = n\lambda e^n (I_{n+1,n} - 2I_{n,n} + I_{n-1,n})$$

Exercice 4.5.

On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées $1, 2, \ldots, N$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule avec remise à chaque fois de la boule tirée. Soit $r \in [\![1, N]\!]$. On choisit r numéros entre 1 et N et l'on note Y_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les r numéros choisis.

1. Dans cette question, $r = 1$. Déterminer la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

2. Dans cette question,$r = 2$. Déterminer la loi de Y_2, son espérance (on vérifiera que la somme des probabilités vaut 1).

3. Désormais, r est quelconque.

 a) Déterminer $Y_r(\Omega)$.

 b) Calculer $P(Y_r = r)$.

 c) Déterminer l'espérance de Y_r.

Solution :

1. Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{N}$, donc :

$$E(Y_1) = N \text{ et } V(Y_1) = N(N-1).$$

2. On a $Y_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit alors $n \geqslant 2$; l'événement $(Y_2 = n)$ est réalisé si on obtient un des deux numéros choisis à un certain rang k compris entre 1 et $n-1$, puis le deuxième numéro choisi au n-ième tirage. Ainsi les tirages dont le rang est compris entre 1 et $k-1$ (s'il y en a) amènent l'un des $N-2$ autres numéros, le k-ième tirage amène l'un des deux numéros choisis, les tirages de rang compris entre $k+1$ et $n-1$ (s'il y en a) n'amènent pas l'autre numéro choisi et le n-ième tirage amène l'autre numéro choisi. Bref, par équiprobabilité de toutes les listes de tirages :

$$P(Y_2 = n) = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} (N-2)^{k-1} 2(N-1)^{n-k-1}$$

$$= \frac{2(N-2)^{n-2}}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{k-1}$$

Par l'identité géométrique, on en déduit, après simplification :

$$\forall n \geqslant 2, P(Y_2 = n) = \frac{2}{N}\Big(\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{N-2}{N}\Big)^{n-1}\Big)$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer $P(Y_2 \geqslant n)$, pour en déduire la loi de Y_2 par différence ...

Par sommation de séries géométriques convergentes :

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(Y_2 = n) = \frac{2}{N}\Big(\frac{1}{1-\frac{N-1}{N}} - \frac{1}{1-\frac{N-2}{N}}\Big) = \frac{2}{N}\big(N - \frac{N}{2}\big) = 1$$

3. a) $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty [\![$.

b) $(Y_r = r)$ est réalisé si et seulement si les r premiers tirages amènent les r numéros choisis, mais dans un ordre quelconque, donc :

$$P(Y_r = r) = \frac{r!}{N^r}$$

c) Pour $i \in [\![2, r]\!]$, notons X_i la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un i-ième numéro choisi, après en avoir déjà obtenu $i-1$, et X_1 la variable aléatoire qui mesure le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir un premier numéro choisi.

On a $Y_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ et pour tout i, X_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{r-i+1}{N}$, d'où :

$$E(Y_r) = N\big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\big)$$

Exercice 4.6.

On considère l'application f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{A}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$$

où A est une constante réelle.

1. Déterminer A pour que f soit une densité de probabilité.

2. On suppose que A a la valeur trouvée précédemment et on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. Montrer que X admet des moments à tous les ordres.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,dt$.

Montrer que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, I_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt + R_N$$

avec

$$R_N = (-1)^{N+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} dt$$

4. Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} R_N = 0$, et en déduire une expression de I_n sous forme de série.

Solution :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$, paire , positive si $A \geqslant 0$ et en écrivant $f(t) = A\,\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$, il vient : $\displaystyle\int_0^X f(t)\,dt = A(\mathrm{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) - \mathrm{Arc}\tan 1) = A(\mathrm{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) - \frac{\pi}{4})$.
Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{Arc}\tan(\mathrm{e}^{2X}) = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^+$ est convergente, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = A\frac{\pi}{4}$.
Bref, par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = A\frac{\pi}{2}$ et f est une densité de probabilité pour $A = \dfrac{2}{\pi}$.

2. Par négligeabilité classique et parité : $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^2.t^n f(t) = 0$, ce qui prouve que l'intégrale définissant le moment d'ordre n de X est absolument convergente. Donc X admet des moments de tous ordres (et par parité les moments d'ordre impair sont nuls).

3. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$ et par l'identité géométrique (la raison valant $-\mathrm{e}^{-2t}$, donc étant différente de 1) :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{-2kt} + (-1)^{N+1}\frac{\mathrm{e}^{-2(N+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$$

Ainsi : $\displaystyle\frac{t^{2n}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^{2n}\mathrm{e}^{-(2k+1)t} + \frac{(-1)^{N+1}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}t^{2n}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$

Toutes les intégrales écrites étant convergentes, par négligeabilité classique, on en déduit :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, I_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2k+1)t}dt + R_N$$

avec :

$$R_N = (-1)^{N+1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}dt$$

4. On a :
$\displaystyle |R_N| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)t} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2N+2)t} g(t)\,dt$, avec : $g(t) = t^{2n}\mathrm{e}^{-t}$.
La fonction g est positive, continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée
sur $\mathbb{R}^+$ et si on note $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} g$, alors $\displaystyle |R_N| \leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2N+2)t}\,dt = \frac{M}{2N+2}$.
Ceci montre que $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$ et donc :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{2n} \mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt$$

Notons que le changement de variable $u = (2k+1)t$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} \mathrm{e}^{-(2k+1)t} dt = \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n} \mathrm{e}^{-u} du = \frac{(2n)!}{(2k+1)^{2n+1}},$$

ce qui permet d'écrire I_n comme somme d'une série numérique explicite.

Exercice 4.7.

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est–elle diagonalisable ?

2. Calculer A^n, pour tout n entier naturel.

3. Montrer que l'inverse A^{-1} de A existe, et calculer A^{-n}, pour tout n entier naturel.

4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X = n)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+2} = -p_{n+1} + \frac{3}{4} p_n$.
Déterminer l'expression de p_n en fonction de n, et reconnaître la loi suivie par X.

5. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 6.\mathrm{e}^{-3x/2} + 2.\mathrm{e}^{2x}, \qquad g(x) = -3.\mathrm{e}^{-3x/2} + 3.\mathrm{e}^{2x}$$

a) Exprimer les dérivées f' et g' en fonction de f et g.

b) Comment déterminer une fonction F, combinaison linéaire de f et g, telle que la dérivée 2002$^{\text{ème}}$ de F soit f ?

Solution :

1. Les valeurs propres de A sont $-3/2$ et $1/2$ et :

$$E_{-3/2}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme A est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres, A est diagonalisable. Plus précisément si $P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$ et :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$, ce qui conduit à :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^{n+2}} + \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} & \dfrac{3}{2^{n+3}} - \dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} \\ \dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n} & \dfrac{3}{2^{n+2}} + \dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}$$

3. Comme 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible et le calcul précédent est valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$; la relation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, d'où $X_n = A^n X_0$, et on pourrait achever le calcul matriciellement, ce qui prouve que p_n est combinaison linéaire de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$: $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, p_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(-\frac{3}{2}\right)^n$.

On peut calculer λ et μ en fonction de p_0 et p_1 (ce que l'on peut aussi voir directement en étudiant la récurrence linéaire d'ordre 2 de définition).

Il vaut mieux remarquer qu'une probabilité devant être toujours comprise entre 0 et 1, on a nécessairement $\mu = 0$, d'où $p_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et la somme des probabilités valant 1, on a $\lambda = \dfrac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Ainsi, $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

5. a) On a : $f' = -f + g$ et $g' = \dfrac{3}{4}f$, soit $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = A^{2002}A^{-2002}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. On peut donc choisir pour fonction F le premier élément de la matrice $A^{-2002}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, ce qui conduit à :

$$F = 2^{2000}\left[\left(1 + \frac{1}{3^{2001}}\right)f + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2002}}\right)g\right]$$

Exercice 4.8.

E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie et f et g sont deux applications linéaires de E dans F.

On rappelle que le rang d'une application linéaire u, noté $\mathrm{rg}(u)$, est la dimension de son image $\mathrm{Im}(u)$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. En déduire que :

$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

b) Montrer que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

2. Dans cette question, on suppose que l'on a $E = F$ et que f et g sont tels que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$$

a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E, ainsi que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.

c) En conclure que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Solution :

1. a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f+g)$, il existe $z \in E$ tel que $x = (f+g)(z) = f(z) + g(z)$. Or $f(z) \in \mathrm{Im}\, f$ et $g(z) \in \mathrm{Im}\, g$, donc $x \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$, ce qui donne l'inclusion voulue.

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(f+g) = \dim \mathrm{Im}(f+g) &\leqslant \dim(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g)\\ &\leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)\\ &\leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g\end{aligned}$$

b) On a $f = (f+g) + (-g)$, donc : $\mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g)$.

De même $g = (f+g) + (-f)$, et : $\mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(f)$.

Ainsi $\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$ et $\mathrm{rg}\, g - \mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$, soit :

$$|\,\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$$

2. Notons $n = \dim E$. Le théorème du rang permet d'écrire :

$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n \quad (1)$; $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = n \quad (2)$

$\dim \mathrm{Im}(f+g) + \dim \mathrm{Ker}(f+g) = n \quad (3)$

Et les hypothèses donnent :

$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) = n \quad (4)$

$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = n \quad (5)$

a) En faisant $(1) + (2) - (4) - (5)$, il vient :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$

D'où : $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$

b) Donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ et par (4) $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g = n$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont supplémentaires dans E.

De même $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ et (5) montrent que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ sont supplémentaires dans E.

c) Le premier résultat de la question b) montre que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n$. Il reste donc à montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = n$, *i.e.* que $f+g$ est surjectif, ce qui équivaut à dire que $f+g$ est injectif ($f+g$ est un endomorphisme de E qui est de dimension finie).

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. On a donc $g(x) = -f(x)$.

Or $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, donc $g(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ et $g(x) = 0$.

Par conséquent $g(x) = f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$, soit $x = 0$.

Ainsi $f+g$ est bien injectif, donc surjectif et $\mathrm{rg}(f+g) = n$, ce qu'il fallait démontrer.