1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit f la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x_1,\ldots,x_n) = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big)\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\big)$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.

3. On se propose de montrer qu'en ces points, f admet un *minimum* global :

Première méthode

On pose, pour tout réel t, $P(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(t\sqrt{x_k} + \dfrac{1}{\sqrt{x_k}}\big)^2$.

Développer $P(t)$ en ordonnant suivant les puissances de t. En considérant le discriminant de $P(t)$, prouver l'inégalité demandée. A quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?

Deuxième méthode

a) Pour toute famille $y_1,\ldots,y_n$ de réels strictement positifs, montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} y_k \geqslant n$$

(On procèdera par récurrence, et, dans le passage du rang n au rang $n+1$, on utilisera, après avoir justifié leur existence, deux termes y_j et y_k tels que $y_j \leqslant 1 \leqslant y_k$.)

b) On pose $P = \big(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\big)^{1/n}$. Montrer que pour tout réel α, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{\alpha} \geqslant n.P^{\alpha}$ et en déduire le résultat demandé.

Troisième méthode

Pour tout réel x strictement positif, montrer l'inégalité : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
Vérifier que $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\Big) = n + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Big(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\Big)$ et en déduire le résultat demandé.

Solution :

1. L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, comme somme d'applications de classe $\mathcal{C}^2$.
L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^*)^n$, comme somme d'applications de classe $\mathcal{C}^2$.
Le produit est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^*)^n$, *a fortiori* sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Un calcul immédiat donne, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} + \sum_{j=1}^{n} x_j\Big(-\frac{1}{x_k^2}\Big)$$

Ainsi le gradient de f s'annule si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\Big(-\dfrac{1}{x_k^2}\Big) = 0$, ou encore : $x_k^2 = \dfrac{\sum\limits_j x_j}{\sum\limits_j \frac{1}{x_j}}$
Ceci montre que les x_k sont tous égaux.
Réciproquement, on vérifie que pour tout $a > 0$, le point $(a, \ldots, a)$ est un point critique de f, et que $f(a, \ldots, a) = n^2$.

3. a) Immédiatement :

$$P(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} x_k + 2nt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Le trinôme P est positif sur $\mathbb{R}$, son discriminant (réduit) est donc toujours négatif ou nul. Donc :

$$n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Le discriminant de P est nul si et seulement si P possède une racine double t_0, c'est–à–dire si et seulement s'il existe un réel t_0 tel que $P(t_0) = 0$. Donc :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \big(t_0\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}}\big)^2 \implies \forall\, k \in [\![1, n]\!], t_0\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}} = 0$$

ce qui montre qu'on a égalité si et seulement si les x_k sont tous égaux.

b) La relation est évidente pour $n = 1$.

Supposons l'implication vérifiée pour $n \geqslant 1$ et considérons $(n+1)$ réels strictement positifs tels que $\prod_{k=1}^{n+1} y_k = 1$. Si, pour tout k, $y_k < 1$, cette égalité est impossible. De même, si pour tout k, $y_k > 1$.
Il existe donc deux indices $i \neq j$ tels que $y_i \leqslant 1 \leqslant y_j$. On écrit alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} y_k = (y_i y_j) \prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n+1} y_k = 1$$

On a donc un produit de n réels qui vaut 1.
Par l'hypothèse de récurrence, on sait que :

$$y_i y_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n+1} y_k \geqslant n$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n+1} y_k \geqslant n + y_j + y_i - y_i y_j$$

Or $y_j + y_i - y_j y_i = y_j(1-y_i) + y_i \geqslant 1 - y_i + y_i = 1$, ce qui termine la démonstration.

On a $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^\alpha}{p^\alpha}\right) = 1$, d'où, par le résultat précédent $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^\alpha}{p^\alpha} \geqslant n$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent pour $\alpha = 1/2$, puis $\alpha = -1/2$. Il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant n\sqrt{P}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{P}}$$

On obtient le résultat souhaité en effectuant le produit membre à membre.

c) Il suffit d'écrire que $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$
On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i} + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{x_i}{x_j} = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$$

Or :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2 = 2\binom{n}{2}$$

ce qui avec l'inégalité précédente, donne le résultat souhaité.

Exercice 1.2.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   a) Étudier la suite (a_n) définie par $a_n = H_n - \ln n$.

   b) Montrer qu'il existe un réel γ de $[0,1]$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. On se propose d'étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big).$$

a) Soit (b_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$.

Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes et en déduire que la série de terme général $(-1)^n b_n$ est convergente.

b) Montrer que $\ln u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2} H_n + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(\ln u_n + \dfrac{1}{2} \ln n\big) = L$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Solution :

1. a) On a l'inégalité classique, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

que l'on obtient par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln n, \text{ d'où } a_n \geqslant 0$$

D'autre part, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, et les inégalités précédentes montrent que $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

b) La suite (a_n) est une suite de réels positifs, décroissante. Elle converge donc vers un réel γ. On écrit ainsi $a_n = \gamma + o(1)$, ou $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. De plus $0 \leqslant a_n \leqslant a_1 \implies 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

2. a) Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
En effet :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+3} \geqslant 0$$

et :

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = b_{2n+2} \to 0$$

b) Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite S, ce qui prouve que la suite (S_n) tend également vers S.

c) Par positivité :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big)$$

Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc :

$$\ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}} + o\big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\big)$$

Les séries $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}}$ et $\sum o\big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\big)$ sont absolument convergentes. Ainsi, il existe une série $\sum w_k$ absolument convergente telle que

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} H_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

Par la question 2.a), on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ existe, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k$ existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$, ce qui entraîne par continuité de la fonction exponentielle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On remplace H_n par $\ln n + \gamma + o(1)$. Il vient :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

ou

$$\ln u_n + \frac{\ln n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}(+\gamma + o(1)) + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln u_n + \frac{\ln n}{2}\big) = L$. Par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} u_n = \mathrm{e}^L \neq 0$$

soit :

$$u_n \sim \frac{\mathrm{e}^L}{\sqrt{n}}$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Exercice 1.3.

Soit f la fonction définie sur $]0, \pi]$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^x \ln(2 \sin \frac{t}{2})\, dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, \pi]$ et admet un prolongement par continuité en $x = 0$.

2. On pose $I = f(\pi)$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \ln(2 \cos \frac{t}{2})\, dt$.

Montrer que $I = J$, puis, en utilisant $I + J$, montrer que $f(\pi) = 0$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \int_{\pi}^{x} \ln(2 \sin \frac{t}{2})\, dt$$

4. a) Étudier la dérivabilité de f sur $]0, \pi]$.

b) Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Montrer que f admet un extremum valant $\alpha = -2\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{x \cos x}{\sin x}\, dx$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto \ln\big(2\sin(t/2)\big)$. La fonction φ est continue sur $]0, \pi]$.
Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\ln\big(2\sin(t/2)\big) = \ln\big(t + o(t)\big) = \ln(t) + o(1)$$

La fonction φ est donc équivalente à la fonction $t \mapsto \ln t$ qui est intégrable sur $]0, a]$.

Donc $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\, dt$ est bien définie sur $]0, \pi]$.

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0 \ldots$ suffit à prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, on peut donc poser $f(0) = 0$.

2. On montre que $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2\cos t/2)dt$ existe, en raisonnant comme dans la question précédente.
Le changement de variable $u = \pi - t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif montre que $J = I$.
Donc :

$$2I = I + J = \int_0^{\pi} \ln(4 \sin t/2 \cos t/2)\, dt = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, dt$$

$$\begin{aligned} 2I &= \pi \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt \\ &= \pi \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt + \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin u)(-du) \\ &= \pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln(\sin u/2)\, du = I \end{aligned}$$

Donc

$$I = J = 0.$$

3. a) On sait que si $t \in [0, \pi/2]$, $\dfrac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t$ (étudier les variations de fonctions associées ou invoquer la concavité de la fonction sin sur $[0, \pi/2]$).

Donc, pour $t < 1$, $\ln(2 \sin t/2) \leqslant \ln t \leqslant 0$, et :

$$f(x) \leqslant \int_0^x \ln t \, dt = x \ln x - x$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \ln x - 1, \text{ ce qui entraîne } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

b) Comme $f(\pi) = 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^x \ln(2 \sin t/2) \, dt = -\int_x^\pi \ln(2 \sin t/2) \, dt = \int_\pi^x \ln(2 \sin t/2) \, dt$$

4. a) La fonction φ étant continue sur $[x, \pi]$, l'égalité précédente et le théorème fondamental du calcul intégral montrent que f est dérivable en tout $x \in]0, \pi]$ et que $f'(x) = \ln(2 \sin x/2)$.

b) L'équation $f'(x) = 0$ n'admet qu'une solution : $x = \pi/3$. La fonction f est décroissante sur $[0, \pi/3]$, puis croissante sur $[\pi/3, \pi]$.

Elle atteint un *minimum* $\alpha < 0$ en $\pi/3$ qui vaut, après intégration par parties :

$$\alpha = \int_0^{\pi/3} \ln(2 \sin t/2) \, dt = -2 \int_0^{\pi/6} \frac{x \cos x}{\sin x} \, dx < 0$$

Exercice 1.4.

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le pavé $[a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b$ et $c < d$) et f une fonction définie sur U, à valeurs réelles, et de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, t) \, dt$.

a) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d], \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leqslant M$$

b) Soit $x \in \,]a, b[$, h un réel non nul tel que $x + h \in \,]a, b[$. Montrer que :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt \right| \leqslant |h|(d - c) \frac{M}{2}$$

c) En déduire que F est dérivable sur $]a, b[$ et donner une expression de sa dérivée.

2. On se place dans les hypothèses précédentes.

a) Soit H la fonction de deux variables définie par $H(x, y) = \displaystyle\int_c^y f(x, t) \, dt$. Donner les dérivées partielles de H.

b) Soit u, v des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs respectivement dans $[a, b]$ et $[c, d]$, on pose $G(z) = \displaystyle\int_c^{v(z)} f(u(z), t) \, dt$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

3. Pour $z > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $F_n(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{t^n}{(1 + zt)^n} \, dt$.

Montrer que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire que F_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F définie sur $[a,b]$ par :

$$F(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^n}{n!} f(t)\,dt$$

a) Calculer, en justifiant l'existence, $F^{(p)}(z)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n+1$.

b) Calculer $F^{(p)}(a)$, pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Solution :

1. a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]\times[c,d]$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$ est continue sur le fermé borné $[a,b]\times[c,d]$, elle est donc bornée par une constante M que l'on peut choisir strictement positive.

b) On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta &= \Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\Big|\\ &= \frac{1}{|h|}\Big|F(x+h)-F(x) - h\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\Big|\\ &= \frac{1}{|h|}\Big|\int_c^d f(x+h,t)-f(x,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\Big|\end{aligned}$$

$$\Delta \leqslant \frac{1}{|h|}\int_c^d \Big|f(x+h,t)-f(x,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\,dt$$

On applique l'inégalité de Taylor à la fonction $x \mapsto f(x,t)$, à t fixé. Il vient :

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_c^d \frac{h^2}{2}M\,dt = |h|(d-c)\frac{M}{2}$$

c) On déduit de la question précédente que la fonction F est dérivable en tout x, et que

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

2. a) On a :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = f(x,y), \qquad \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

b) Par la formule de composition des dérivées, il vient :

$$G'(z) = u'(z)\frac{\partial H}{\partial x}(u(z),v(z)) + v'(z)\frac{\partial H}{\partial y}(u(z),v(z))$$

soit :

$$G'(z) = u'(z)f(u(z),v(z)) + v'(z)\int_0^{u(z)} \frac{\partial f}{\partial v}(v(z),t)\,dt$$

3. On se trouve dans la situation de la question précédente avec $u(z) = v(z) = z$ et $f(x,t) = \dfrac{1}{(1+xt)^n}$. On obtient donc :

$$F_n'(z) = \frac{z^n}{(1+z^2)^n} - n\int_0^z \frac{t^{n+1}}{(1+tz)^{n+1}}\,dt = \frac{z^n}{(1+z^2)^n} - nF_{n+1}(z)$$

Comme F_{n+1} est dérivable, cette dernière formule montre que F_n est deux fois dérivable, puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence.

4. a) On applique la même méthode. Il vient :

$$F'(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\,dt$$

et, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:

$$F^{(p)}(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^{n-p}}{(n-p)!}\, f(t)\,dt$$

En particulier $F^{(n)}(z) = \displaystyle\int_a^z f(t)\,dt$, et $F^{(n+1)}(z) = f(z)$

b) Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $F^{(p)}(a) = 0$. Donc :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^k}{k!}\, F^{(k)}(a) + \int_a^z \frac{(z-t)^n}{n!}\, F^{(n+1)}(t)\,dt$$

On retrouve la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 1.5.

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions h continues sur $]-1,+\infty[$ vérifiant pour tout x et tout y de $]-1,+\infty[$ la relation :

$$h(x) + h(y) = h(x+y+xy)$$

Pour f solution de ce problème, on note F la primitive de f nulle en 0.

1. a) Montrer que si x et y sont deux éléments de $]-1,+\infty[$, il en est de même de $x+y+xy$.

b) Déterminer, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, un changement de variable affine ($t = au+b$) et une fonction g_x tels que :

$$\forall\, y \in]-1,+\infty[, \int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y g_x(t)dt$$

c) Soit $y \neq 0$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $F(x), F(y)$ et $F(x+y+xy)$. En déduire la dérivabilité de f sur $]-1,+\infty[$.

2. a) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f'(x+y+xy)$ pour x et y dans $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout y dans $]-1,+\infty[$, $f'(0) = (1+y)f'(y)$.

c) En déduire l'expression d'une fonction vérifiant la relation proposée.

d) Conclure.

Solution :

1. a) On a les équivalences suivantes :

$$x + y + xy > -1 \iff x + 1 + y(x + 1) > 0 \iff (x + 1)(y + 1) > 0$$

Donc

$$x > -1, y > -1 \implies x + y + xy > -1$$

b) On a l'équivalence :

$$\begin{cases} x = b \\ x + y + xy = ay + b \end{cases} \iff \begin{cases} b = x \\ a = 1 + x \end{cases}$$

Ainsi :

$$\int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y f\big((1 + x)u + x\big)(1 + x)\,du$$

ou :

$$\int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y [f(x) + f(u)](1 + x)\,du$$

c) On a :

$$F(x + y + xy) - F(x) = y(1 + x)f(x) + (1 + x)F(y)$$

Donc, pour tout $x > -1$, pour tout $y \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{y}\Big[\frac{F(x + y + xy) - F(x)}{1 + x} - F(y)\Big]$$

Comme F est dérivable sur $]-1, +\infty[$, il en est de même pour f.

2. a) Il suffit de dériver la relation de départ par rapport à x, à y fixé, pour obtenir :

$$f'(x) = f'(x + y + xy)(1 + y)$$

b) Avec $x = 0$, pour tout $y > -1$, il vient $f'(0) = (1 + y)f'(y)$.

c) Pour $y > -1$

$$f'(y) = \frac{f'(0)}{1 + y} \implies f(y) - f(0) = \int_0^y f'(u)\,du = f'(0)\ln(1 + y)$$

On vient ainsi de montrer que si le problème admet une solution, celle–ci est de la forme :

$$f(y) = a + b\ln(1 + y)$$

d) Réciproquement, si f est de la forme $f(y) = a + b\ln(1 + y)$, alors f vérifie l'équation $f(x) + f(y) = f(x + y + xy)$ si et seulement si $a = 0$ et b est quelconque.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est

$$\{x \longmapsto b\ln(1 + x), b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 1.6.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. a) Montrer que cette intégrale est convergente pour tout $n \geqslant 1$.

b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

Dans la suite, on pose $u_n = n^{1/3} I_n$, $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

2. a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de w_n.
Quelle est la nature de la série de terme général w_n ? En déduire la nature de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

b) Montrer que, au voisinage de l'infini, I_n est équivalente à $\dfrac{k}{n^{1/3}}$, où k est une constante que l'on ne demande pas de déterminer.
Que peut-on en déduire quant à la nature de la série de terme général I_n ?

3. a) Soit $J_n = (-1)^n I_n$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} J_k$.

Montrer que $S_n = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{2+x^3}\, dx$

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n} = 0$.

c) Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n I_n$?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+x^3)^n} \leqslant \frac{1}{x^{3n}}$$

ce qui montre que l'intégrale I_n existe.

b) On écrit

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx$$

et, pour $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx = \int_0^A \frac{x}{3n} \times \frac{n3x^2}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3n}\left[\frac{-x}{(1+x^3)^n}\right]_0^A + \frac{1}{3n}\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient :

$$I_{n+1} = \tfrac{3n-1}{3n} I_n$$

2. a) Il vient

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\big) = \frac{1}{3}\ln\big(\frac{n+1}{n}\big) + \ln\big(\frac{I_{n+1}}{I_n}\big) \\ &= \frac{1}{3}\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) + \ln\big(1-\frac{1}{3n}\big) \\ &= \frac{1}{3}\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\big) + \big(-\frac{1}{3n}-\frac{1}{18n^2}\big) + o\big(\frac{1}{n^2}\big) \\ &= -\frac{2}{9n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) \end{aligned}$$

La série de terme général w_n est de signe constant et son terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente. Elle converge. Soit S sa somme. Alors :

$$\sum_{k=1}^{N-1} w_k = v_n - v_1 \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = v_1 + S$$

Par continuité de la fonction exponentielle, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{v_1+S} = C > 0$$

b) La série $\sum I_n$ diverge, puisque par la question précédente $I_n = \dfrac{u_n}{n^{1/3}} \sim \dfrac{C}{n^{1/3}}$.

3. a) Comme somme finie d'intégrales convergentes :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{-1}{1+x^3}\big)^k\,dx = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{1+x^3}\,\frac{1-(\frac{-1}{1+x^3})^n}{1+\frac{1}{1+x^3}}\,dx \\ &= -\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2+x^3} + (-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n} \end{aligned}$$

b) Comme

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} = I_{n+1} \sim \frac{C}{n^{1/3}} \longrightarrow 0,$$

on conclut à la convergence de la suite (S_n).

c) La série $\sum(-1)^n I_n$ est donc convergente sans être absolument convergente.

Exercice 1.7.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$.

Pour tout t réel, on pose $L_X(t) = E(\mathrm{e}^{-tX})$, $\varphi(t) = \ln L_X(t)$. On note I le domaine de définition de φ.

Enfin, pour tout a réel, on pose

$$h(a) = \sup_{t\in I}\big(ta - \varphi(t)\big) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

1. On suppose dans cette question que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

a) Calculer $L_X(t), \varphi(t)$ ainsi que I.

b) Déterminer $h(a)$ (on s'attachera plus particulièrement aux valeurs de a pour lesquelles $h(a)$ est fini.)

2. On revient maintenant au cas général.

a) Exprimer $L_X(t)$ en fonction d'une somme finie.

b) Calculer $L'_X(t)$ puis $L''_X(t)$. Montrer que pour tout t réel

$$(L'_X(t))^2 \leqslant L_X(t) \times L''_X(t)$$

c) Montrer que φ est une fonction de classe C^2, convexe sur I. Déterminer le signe de φ' ainsi que ses variations.

d) Montrer que lorsque $h(a)$ est fini :

$$h(a) = a \times (\varphi')^{-1}(a) - \varphi\big((\varphi')^{-1}(a)\big)$$

Solution :

1. a) On a :

$$L(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{tk} p^k (1-p)^{n-k} = (p.\mathrm{e}^t + 1 - p)^n$$

Ainsi $\varphi(t) = n \ln(p.\mathrm{e}^t + 1 - p)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) La fonction $\psi : t \mapsto ta - \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout t réel :

$$\psi'(t) = a - n\,\frac{p.\mathrm{e}^t}{p.\mathrm{e}^t + q}$$

Donc :

$$\psi'(t) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^t = \frac{qa}{p(n-a)}$$

• si $a \geqslant n$, cette équation n'a pas de solution. La fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.

• si $a \leqslant 0$, cette équation n'a pas de solution. La fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.

• si $0 < a < n$, cette équation a comme unique solution $t = \ln\big(\dfrac{qa}{p(n-a)}\big)$. La fonction ψ passe par un *maximum* en ce point, *maximum* qui vaut

$$h(a) = a \ln\big(\frac{qa}{p(n-a)}\big) - n \ln\big(\frac{qn}{n-a}\big)$$

2. a) On a immédiatement :

$$L_X(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k.\mathrm{e}^{tk}$$

Donc

$$L'_X(t) = \sum_{k=1}^{n} k p_k.\mathrm{e}^{tk}, L''_X(t) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k.\mathrm{e}^{tk}$$

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, avec :

$$\begin{cases} a_k = ke^{tk/2}\sqrt{p_k} \\ b_k = e^{tk/2}\sqrt{p_k} \end{cases}$$

$$L'_X(t)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathrm{e}^{tk} p_k\Big) \times \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tk} p_k\Big) = L''_X(t) L_X(t)$$

c) On a $I = \mathbb{R}$, en effet $\varphi(t) = \ln L_X(t)$ existe pour tout t réel, puisque $L_X(t) > 0$. Bien évidemment :

$$\varphi'(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)} > 0, \quad \varphi''(t) = \frac{L_X(t)L'' - X(t)}{L_X^2(t)} \geqslant 0$$

Puis $\psi'(t) = a - \varphi'(t)$, et :

$$\psi'(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} (a-k)p_k.\mathrm{e}^{kt}}{L_X(t)}$$

Donc

- si $a \geqslant n$, la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.
- si $a \leqslant 0$, la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.
- si $0 < a < n$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi'(t_0) = 0$, ou $\varphi'(t_0) = a$. Les variations de φ' sont celles de ψ'. Donc φ' est une fonction continue, monotone et $(\varphi')^{-1}$ existe.

d) Enfin $h(a) = t_0 a - \varphi(t_0)$, avec $t_0 = (\varphi')^{-1}(a)$. Donc :

$$h(a) = a(\varphi')^{-1}(a) - \varphi\big((\varphi')^{-1}(a)\big)$$

Exercice 1.8.

1. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$

2. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

3. Démontrer la proposition suivante :

$$\forall\, n \geqslant 3, \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,dt + \frac{\ln 2}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,dt + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

et en déduire un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$

4. On se propose de démontrer l'existence d'un nombre réel c tel que :

$$\forall\, n \geqslant 2, S_n = \frac{1}{2}\ln^2(n) + c + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ln^2(n) - \ln^2(n-1) = 2\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2} + o\big(\dfrac{\ln n}{n^2}\big)$.

b) On pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{2}\big(\ln^2 n - \ln^2(n-1)\big)$.

Montrer que $\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$

c) Conclure.

Solution :

1. La série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ diverge, car pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la divergence de la série harmonique donne le résultat.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle n'est pas prolongeable par continuité en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Par contre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, puis décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = \mathrm{e}$ qui vaut $1/\mathrm{e}$.

3. Pour tout $k \geqslant 3$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. D'où :

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Pour tout $k \geqslant 4$,

$$\frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln(k-1)}{k-1}$$

Donc

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

En sommant sur $k \in [\![4, n]\!]$, il vient :

$$\int_4^n f(x)\,dx \leqslant \int_4^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^n f(x)\,dx$$

ou

$$\int_4^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} \leqslant S_n \leqslant \int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

et par la première inégalité :

$$\int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} \leqslant S_n \leqslant \int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

Enfin

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\ln^2(3)$$

Donc

$$S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$$

4. a) En mettant n en facteur, il vient :

$$\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \ln^2 n - \big(\ln n + \ln(1 - \tfrac{1}{n})\big)^2$$

$$= -2\ln n \ln\big(1-\frac{1}{n}\big) - \ln^2\big(1-\frac{1}{n}\big)$$

Or $\ln\big(1-\frac{1}{n}\big) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$. Après quelques calculs et le fait que $\frac{1}{n^2} = o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$, on obtient :

$$\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$$

b) Résultat immédiat par « télescopage »

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$$

c) On écrit

$$u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)\Big) = -\frac{\ln n}{2n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$$

Ainsi u_n est de signe constant et équivalent au terme général d'une série convergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} = 0$.

Notons $\sum\limits_{k=2}^{\infty} u_k = c$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \frac{\ln^2 n}{2} = c$
ou

$$S_n = \frac{\ln^2 n}{2} + c + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

Exercice 1.9.

Pour $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose : $I_k(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}\,du$.

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I_k(a)$.

2. a) Trouver une relation entre $I_{k+1}(a)$ et $I_k(a)$.

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_0(a) = I_{n+1}(a) + \sum_{k=0}^{n}(k-\frac{1}{2})I_{k+1}(a) + e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

3. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ a^{k+\frac{1}{2}}\, e^a I_{k+1}(a)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$.

4. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exprimer $1-\Phi(x)$ en fonction de $I_0(\frac{x^2}{2})$ pour $x \neq 0$.

5. En déduire un développement asymptotique de $1-\Phi(x)$ du type $P_n(\frac{1}{x})\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, où P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Solution :

1. Soit $a > 0$. La fonction $f_k : u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{u\to+\infty} u^2 f_k(u) = 0$$

Cela entraîne, par la règle de Riemann, que $I_k(a)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. a) Une intégration par parties sur $[a, A]$, puis un passage à la limite quand A tend vers l'infini, donnent :

$$I_k(a) = \big(k + \frac{1}{2}\big) I_{k+1}(a) + \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

b) En sommant ces égalités pour $k \in [\![0, n]\!]$, il vient :

$$I_0(a) = I_{n+1}(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(k - \frac{1}{2}\big) I_{k+1}(a) + \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

3. On peut écrire :

$$0 \leqslant I_{k+1}(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}\, du \leqslant \mathrm{e}^{-a} \int_a^{+\infty} \frac{du}{u^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{2.\mathrm{e}^{-a}}{(2k+3)a^{k+\frac{3}{2}}}$$

Donc :

$$0 \leqslant a^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{a} I_{k+1}(a) \leqslant \frac{1}{a}$$

et

$$\lim_{a\to+\infty} a^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{a} I_{k+1}(a) = 0$$

4. On sait que :

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^2/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \frac{I_0(x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

5. Or :

$$\begin{aligned} I_0(x^2/2) &= I_{n+1}(x^2/2) + \sum_{k=0}^{n} \big(k - \frac{1}{2}\big) I_{k+1}(x^2/2) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x^2/2)^{k+\frac{1}{2}}} \\ &= R_n(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1/2}}{x^{2k+1}} \end{aligned}$$

Posons $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{k+\frac{1}{2}} X^{2k+1}$. Ainsi P_n est un polynôme de degré $(2n+1)$ et :

$$I_0(x^2/2) = R_n(x) + P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

On sait, par la question 3, que, pour $k \geqslant 1$:

$$I_{k+1}\big(\frac{x^2}{2}\big) = o\Big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{k+\frac{1}{2}}}\Big) = o\Big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

Chaque terme de $R_n(x)$ est ainsi négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc :

$$R_n(x) = o\Big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}\Big), \text{ et } \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}} \sim P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Finalement,

$$I_0(x^2/2) = R_n(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{x^{2k+1}}$$

donne :

$$I_0(x^2/2) \sim P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

et, au voisinage de $+\infty$:

$$1 - \Phi(x) \sim \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{P_n(\frac{1}{x})}{\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 1.10.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurence sur n en posant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left[a - u_n^2\right]$$

1. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $a < 0$?

2. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $a = 0$ et lorsque $a = 4$.

3. Dans cette question, on suppose que $a \in \,]0, 4[$.

a) Montrer que $\frac{a}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (on pourra étudier l'image du segment $[a/2, 2]$ par la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$).

b) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \max\big(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\big)\,|u_n - \sqrt{a}|$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

4. Dans cette question on va raisonner par l'absurde pour prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente lorsque $a > 4$. Dans un premier temps, on va donc supposer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ.

a) Quelle sont les valeurs possibles pour ℓ ?

b) En déduire que dans chacun des cas, il existe un entier n_0 tel que :

$$|u_{n+1} - \ell| \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\,|u_n - \ell|$$

pour tout $n \geqslant n_0$. Obtenir une contradiction et conclure.

Solution :

1. Le scalaire a étant strictement négatif, il est immédiat que la suite (u_n) est décroissante.
Supposons qu'elle soit minorée. Dans ce cas elle converge vers le point fixe de l'application $x \mapsto x + \frac{1}{2}\big(a - x^2\big)$, point fixe ℓ qui vérifie l'équation $\ell^2 = a < 0$, ce qui est impossible.

La suite (u_n) diverge donc vers $-\infty$.

2. Si $a=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ et si $a=4$, pour tout $n \geqslant 1, u_n = 2$

3. a) Une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{2}\big(a - x^2\big)$ montre que

- f est croissante sur $]-\infty, 1]$
- f est décroissante sur $]1, +\infty[$
- elle admet un *maximum* en $x = 1$, qui vaut $\dfrac{a+1}{2}$.

La fonction f étant continue, l'image de tout segment de $\mathbb{R}$ est un segment. Aussi

- si $a \in]0, 2]$, alors $0 < \frac{a}{2} \leqslant 1$ et on montre que $f\big([\frac{a}{2}, 2]\big) \subset [\frac{a}{2}, 2]$,
- si $a \in]2, 4]$, alors $\frac{a}{2} \geqslant 1$ et on montre que $f\big([\frac{a}{2}, 2]\big) = [f(2), f(\frac{a}{2})] \subset [0, 2]$.

b) On remarque que :

$$|\sqrt{a} - u_{n+1}| = |\sqrt{a} - u_n|.\big|1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}\big|$$

Or,

- comme $u_n \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$

$$1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{a} + a/2}{2} \leqslant \max\big(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\big)$$

- comme $u_n \leqslant 2$

$$-\max\big(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\big) \leqslant -\frac{\sqrt{a}}{2} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}$$

c) Soit $k = \max\big(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\big) \in]0, 1[$. Par la question précédente, il vient, pour tout $n \geqslant 1$:

$$|\sqrt{a} - u_n| \leqslant k^{n-1}\sqrt{a}$$

Il en résulte que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

4. La fonction f étant continue, les seules limites possibles sont les points fixes de f, soit $\ell = \pm\sqrt{a}$.

- si $\ell = \sqrt{a}$, on sait que

$$|\sqrt{a} - u_{n+1}| = |\sqrt{a} - u_n|\big|1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}\big|$$

Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} \big|1 - \dfrac{\sqrt{a} + u_n}{2}\big| = \sqrt{a} - 1 > 1$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\big|1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}\big| > \frac{\sqrt{a}}{2} > 1$$

- si $\ell = -\sqrt{a}$, on sait que

$$|\sqrt{a} + u_{n+1}| = |\sqrt{a} + u_n|\big|1 + \frac{\sqrt{a} - u_n}{2}\big|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|1+\frac{\sqrt{a}-u_n}{2}\right| = 1+\sqrt{a} > \frac{\sqrt{a}}{2}$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\right| > \frac{\sqrt{a}}{2} > 1$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée.

b) Lorsque $a > 4$, la suite $(|u_n - \ell|)$ est coissante donc, pour tout $n \geqslant 1, |u_n - \ell| \geqslant |u_0 - \ell| = \sqrt{a}$.

Elle ne peut converger vers $\sqrt{a}$ que si elle est constante, c'est-à-dire $u_n = \ell$, pour tout $n \geqslant 1$, ce qui n'est déjà pas vérifié pour u_1.

Exercice 1.11.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ \quad 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est ainsi bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et préciser sa valeur

(on pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u^2}{2}$)

b) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on précisera l'équation.

3. Montrer que la courbe représentative de f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$.

Solution :

1. La fonction $g : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Au voisinage de 0, elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$, dont l'intégrale est convergente sur tout intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Si l'on écrit :

$$f(x) = x\int_0^1 g(t)\,dt + x\int_1^x g(t)\,dt = Cx + x\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt$$

on voit que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, puisque g est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \int_0^1 g(t)\,dt + xg(x) + \int_1^x g(t)\,dt = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \frac{x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On a clairement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0, dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Enfin

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \frac{x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{-x} \right) = 0$$

ce qui entraîne que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Au voisinage de 0, elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$, qui est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on a $|g(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement, I existe.
Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a > 0$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} 2.\mathrm{e}^{-u^2}\,du$$

En prenant la limite lorsque a tend vers 0, il vient $I = \sqrt{\pi}$.

b) Ainsi $f(x) \sim x\sqrt{\pi}$, au voisinage de $+\infty$.

c) On a

$$f(x) - x\sqrt{\pi} = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

et, pour $x \geqslant 1$

$$|f(x) - x\sqrt{\pi}| \leqslant x\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = x.\mathrm{e}^{-x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - x\sqrt{\pi}| = 0$$

et la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \sqrt{\pi}x$ comme asymptote en $+\infty$.

3. Pour tout $x < 0$, si $y = -x$

$$f(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{-t}}\,dt = -x\int_0^{-x} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\sqrt{u}}\,du = y\int_0^y \frac{\mathrm{e}^{u}}{\sqrt{u}}\,du$$

Or, pour $u > 0, e^u \geqslant 1$ et

$$f(x) \geqslant y\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2y^{3/2}$$

Cela entraîne que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Exercice 1.12.

Pour $a \in]-1, 1[$, soit f_a la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f_a(x) = 1 + a^2 - 2a \cos x$$

1. a) Montrer que $\forall a \in]-1, 1[, \forall x \in [0, \pi], (1 - |a|)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant (1 + |a|)^2$.

b) Montrer que $\forall a \in]-1, 1[, \forall x \in [0, \pi], f_a(\pi - x) = f_{-a}(x)$.

c) Montrer que : $\forall a \in]-1, 1[, \forall x \in [0, \pi], f_{a^2}(x) = f_a(\frac{x}{2})f_{-a}(\frac{x}{2})$.

2. On pose, pour $a \in]-1, 1[$, $g(a) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(f_a(x))\, dx$.

a) Montrer que g est une fonction paire.

b) Montrer que : $\forall a \in]-1, 1[, g(a^2) = 2g(a)$.

c) Montrer que g est continue en 0.

d) En déduire que : $\forall a \in]-1, 1[, g(a) = 0$.

Solution :

1. a) On peut évidemment démontrer les inégalités demandées en distinguant selon le signe de a et en développant. On peut aussi remarquer que :

$$f_a(x) = (1 - a.\mathrm{e}^{ix})(1 - a.\mathrm{e}^{-ix}) = |1 - a.\mathrm{e}^{ix}|^2$$

Or par l'inégalité du triangle :

$$1 - |a| = |1 - |a|| \leqslant |1 - ae^{ix}| \leqslant 1 + |a|$$

Il reste à élever au carré.

b) La relation demandée est évidente car $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

c) Ici encore, on peut faire un calcul trigonométrique direct, ou écrire :

$$\begin{aligned} P &= |1 - a.\mathrm{e}^{ix/2}|^2.|1 + a.\mathrm{e}^{ix/2}|^2 \\ &= (|1 - a.\mathrm{e}^{ix/2}||1 + a.\mathrm{e}^{ix/2}|)(|1 - a.\mathrm{e}^{-ix/2}||1 + a.\mathrm{e}^{-ix/2}|) \\ &= (1 - a^2\mathrm{e}^{ix})(1 - a^2\mathrm{e}^{-ix}) = |1 - a^2\mathrm{e}^{ix}|^2 \end{aligned}$$

2. a) Par la question précédente a), la fonction g est bien définie. On montre qu'elle est paire en utilisant la question b) et le changement de variable affine $u = \pi - x$ dans l'intégrale définissant g.

b) Question évidente, par ce qui précède et les propriétés du logarithme.

c) Par la question 1. a) : $\ln((1 - |a|)^2) \leqslant \ln f_a(x) \leqslant \ln((1 + |a|)^2)$. Donc :

$$\pi \ln((1 - |a|)^2) \leqslant g_a(x) \leqslant \pi \ln((1 + |a|)^2)$$

Il reste à prendre la limite lorsque a tend vers 0 pour conclure.

d) Comme $g(a^2) = 2g(a)$, une récurrence immédiate donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$g(a) = \frac{1}{2^n} g\big(a^{2^n}\big)$$

Or $|a| < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a^{2^n} = 0$. On conclut par la continuité de g en 0.

Exercice 1.13.

On note $I = \mathbb{R}_+^*$ et $C = C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

On pose également :

$$L = \left\{ f \in C / \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge absolument } \right\} \text{ et}$$

$$E = \left\{ f \in C / \ \forall\, x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt \text{ converge absolument } \right\}.$$

Pour tout $f \in E$ et $x \in I$, on notera $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt$.

1. a) Vérifier que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

b) A–t–on $E \subset L$? A–t–on $L \subset E$?

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α définie par $f_\alpha(t) = t^{\alpha-1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha \in E$.

Montrer qu'alors $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α (on ne cherchera pas à calculer le coefficient de proportionnalité).

2. a) Soit $f \in L$ telle que $t \mapsto tf(t) \in L$. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt$$

Peut–on en déduire un équivalent de $\widehat{f}(x)$ lorsque x tend vers l'infini ?

b) Vérifier que pour tout $(x,t) \in I^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{t+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{x^{k+1}} + (-1)^{n+1}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{n+1} \frac{1}{t+x}$$

c) On suppose que $f \in L$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \mapsto t^k f(t) \in L$. Montrer que $\widehat{f}(x)$ admet un développement asymptotique à tout ordre lorsque $x \to +\infty$.

d) Qu'obtient–on pour $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$?

Solution :

1. a) E est un sous–espace vectoriel de C, puisque $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda|.|f| + |g|$ et puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \in E$.

b) Pour tout $t \geqslant 0$, $\Big|\dfrac{f(t)}{t+x}\Big| \leqslant \dfrac{1}{x}\,|f(t)|$.

Donc $L \subset E$. Par contre $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$ est élément de E sans être élément de L. L'inclusion précédente est donc stricte.

c) La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Au voisinage de 0, on a $f_\alpha(t) \sim \dfrac{t^{\alpha-1}}{x}$. Cette dernière fonction, positive, admet une intégrale convergente sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $f_\alpha(t) \sim t^{\alpha-2}$. Cette dernière fonction, positive, admet une intégrale convergente sur $[1,+\infty]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Ainsi $f_\alpha \in E$ si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

Le changement variable linéaire $t = xu, (x > 0)$ donne :

$$\widehat{f_\alpha}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+x}\,dt = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du = f_\alpha(x)\widehat{f_\alpha}(1)$$

2. a) On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\Big| &= \Big|\int_0^{+\infty} \frac{-t}{x(t+x)}\,f(t)\,dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt = o\big(\frac{1}{x}\big)\end{aligned}$$

Donc, si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$, $\widehat{f}(x) \sim \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) Pour $t > 0, x > 0$, il vient (série géométrique) :

$$\frac{1}{t+x} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{t}{x}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^k}{x^{k+1}} + (-1)^{n+1}\big(\frac{t}{x}\big)^{n+1}\times\frac{1}{t+x}.$$

c) Comme $f \in L \subset E$, on sait que $\widehat{f}$ existe. De plus

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt + R_n(x)$$

avec

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^{n+1}|f(t)|\,dt = o\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

Ceci donne le développement asymptotique dans les puissances de $\dfrac{1}{x}$ de $\widehat{f}(x)$ à l'ordre n.

d) Lorsque $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ (qui appartient à L), pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t} \in L$, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Gamma(k+1) = k!$$

Donc, pour tout $n \geqslant 0$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + o\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

Exercice 1.14.

Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.

A toute liste $(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ de nombres réels positifs ou nuls telle que $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$, avec $p_0 \neq 1$, on associe le polynôme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$$

1. Montrer que la fonction polynôme P réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[p_0, 1]$.

2. On note E l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = x$ sur le segment $[0,1]$.

a) Montrer que E est non vide.

b) En discutant selon la valeur de $P'(1)$, déterminer le nombre de solutions de cette équation.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = P(0)$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = P(u_n)$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) A quelle condition a-t-on $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$?

Solution :

1. On a $P'(x) = \sum_{i=1}^{k} i p_i x^{i-1}$ et comme $p_0 \neq 1$, l'un au moins des p_i est strictement positif et pour $x > 0$, on a $P'(x) > 0$. La fonction polynôme P est une fonction continue strictement croissante de $[0,1]$ sur $[P(0), P(1)] = [p_0, 1]$.

2. a) E n'est pas vide, puisque $P(1) = 1$.

b) Soit $f : x \mapsto P(x) - x$. La fonction f est de classe C^∞ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = P'(x) - 1, \quad f''(x) = P''(x) \geqslant 0$$

Sur $[0,1]$, la fonction f' est croissante de $p_1 - 1 \leqslant 0$ à $P'(1) - 1$. Donc

• si $P'(1) - 1 \leqslant 0$, la fonction f' reste négative sur $[0,1]$ et f est décroissante de p_0 vers 0 et est donc positive sur $[0,1]$. L'unique solution de l'équation $P(x) = x$ est donc $x = 1$.

• si $P'(1) - 1 > 0$, la fonction f' s'annule en $\alpha \in]0,1[$ et f est décroissante sur $[0,\alpha]$ de p_0 vers $f(\alpha)$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$ vers 0. Donc $f(\alpha) < 0$, et comme $p_0 \geqslant 0$, il existe $a \in [0,\alpha]$ tel que $f(a) = 0$. Ainsi l'équation $P(x) = x$ admet deux solutions sur $[0,1]$, qui sont a et 1.

3. a) Par une récurrence immédiate, $u_n \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 0$ et par la question précédente on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

• si $P'(1) - 1 \leqslant 0$, $f(u_n) \geqslant 0$; la suite (u_n) est croissante majorée : elle converge vers le seul point fixe de P qui est 1.

• si $P'(1) - 1 > 0$, comme $u_0 \in [0, a]$, la fonction P étant croissante de $[0, a]$ sur $[p_0, a] \subset [0, a]$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0, a]$ et $f(u_n) \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante, majorée par a, elle converge vers l'unique point fixe de P de $[0, a]$ qui est a.

b) D'après la question précédente, la suite (u_n) tend vers 1 si et seulement si $P'(1) \leqslant 1$.

Exercice 1.15.

On note E l'ensemble constitué des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$,
ii) Il existe au moins un réel x tel que $f(x) < 1$.

1. a) Déterminer un élément de E non identiquement nul.

b) Soit a un réel non nul, et $f \in E$. On définit g par $g(x) = f(ax)$. Montrer que g est élément de E.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f est un élément non nul de E.

2. a) Calculer $f(0)$

b) Comparer pour tout x réel les valeurs $f(x)$ et $f(-x)$.

c) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x/2)$.

d) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) + 1 \geqslant 0$.

3. On suppose dans cette question que f est un élément de E qui ne s'annule jamais (*i.e.* $f(x) \neq 0$, pour tout x réel).

a) Étudier le signe de f.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 1$.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(2^n a)$. Montrer que cette suite est convergente. Déterminer sa limite.

c) La fonction f admet–elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto \cos x$ vérifie les deux conditions de l'énoncé.

b) Il vient :

$$g(x + y) + g(x - y) = f(ax + ay) + f(ax - ay) = 2f(ax)f(ay) = 2g(x)g(y)$$

De plus, si $f(x_0) < 1$, alors $g(x_0/a) = f(x_0) < 1$, donc $g \in E$.

2. a) En prenant $x = y = 0$ dans la relation i), il vient $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Supposons que $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$, il vient $2f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est identiquement nulle, ce qui est exclu. Ainsi $f(0) = 1$.

b) En prenant $x = 0$, il vient, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$. Ainsi $f(y) = f(-y)$ et f est paire.

c) En penant $x = y$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) + 1 = 2f(x)^2$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$$

d) Immédiatement $f(x) + 1 \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$, elle est donc positive sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 1$. Le relation 2. c) donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = 2u_{n-1}^2 - 1$$

Cette relation de récurrence est de la forme $u_n = \varphi(u_{n-1})$, avec $\varphi(x) = 2x^2 - 1$. Comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $u_0 > 0$, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. De plus la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$; cela entraîne que la suite (u_n) est monotone.

Enfin, $u_0 < 1$ et si on suppose $u_n \leqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1 \leqslant 2{\times}1 - 1 \leqslant 1$.
En résumé :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant 1$ et la suite (u_n) est monotone

Qu'elle soit croissante ou décroissante, on peut conclure qu'elle converge vers ℓ tel que $\ell = 2\ell^2 - 1$, soit $\ell \in \{1, -1/2\}$. Donc la suite (u_n) tend vers 1.

c) Supposons que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. En appliquant la relation i) avec $y = a$, et en passant à la limite lorsque x tend vers l'infini, il vient

$$2\lambda = 2\lambda f(a)$$

Comme $f(a) < 1$, cela entraîne que $\lambda = 0$. Mais $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ entraîne que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, en contradiction avec le résultat de la question précédente. Ainsi f n'a pas de limite en l'infini.

Exercice 1.16.

Si (u_n) est une suite réelle, on note $\prod\limits_{k=1}^{n} u_k$ le produit $u_1{\times}u_2{\times}\dots{\times}u_n$.

Pour tout a réel et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n(a) = \prod_{k=1}^{n}(1 + a^{2^k}), \quad U_n(a) = \frac{a^{2^n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a^{2^k})}$$

1. Discuter, en fonction du paramètre a, l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(a)$.

2. Discuter, en fonction du paramètre a, l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(a)$.

3. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n(a)$ (on pourra écrire $a^{2^n} = a^{2^n}+1-1$).

4. a) Étudier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} U_n(a)\,da$.

b) Étudier la convergence, et calculer éventuellement la somme, de la série de terme général I_n.

5. a) Montrer que $P_n(a) = \sum\limits_{p=0}^{2^n-1} a^{2p}$. Retrouver ainsi les résultats de la question 1.

b) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(a)$ lorsqu'elle converge.

Solution :

1. On sait que $P_n(a) > 0$. En prenant le logarithme : $\ln P_n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a^{2^k})$.

• Si $|a| < 1$, $\ln(1+a^{2^k}) \sim a^{2^k}$ et la série $\sum a^{2^k}$ converge. Donc la suite $(P_n(a))$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

• Si $|a| = 1$, $\ln(1+a^{2^k}) = \ln 2$ et la série $\sum \ln(1+a^{2^k})$ diverge vers $+\infty$. Donc la suite $(P_n(a))$ tend vers $+\infty$.

• Si $|a| > 1$, $\ln(1+a^{2^k}) \sim 2^k \ln|a|$ et la série $\sum \ln(1+a^{2^k})$ diverge vers $+\infty$. Donc la suite $(P_n(a))$ tend vers $+\infty$.

2. On a $U_n(a) = \dfrac{a^{2^n}}{P_n(a)}$. Donc :

• Si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(a) = 0$.

• Si $|a| = 1$, $U_n(a) = \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Si $|a| > 1$, $U_n(a) \leqslant \dfrac{1}{P_{n-1}(a)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On a : $U_n(a) = \dfrac{1}{P_{n-1}(a)} - \dfrac{1}{P_n(a)}$, et :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} U_k(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{P_n(a)}$$

Ainsi :

• Si $|a| < 1$, $\lim P_n(a) = \ell(a)$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(a) = 1 - \dfrac{1}{\ell(a)}$.

• Si $|a| \geqslant 1$, $\lim P_n(a) = +\infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(a) = 1$.

4. a) Si $n = 1$, $U_1(a) = \dfrac{a^2}{1+a^2}$ n'a pas d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.
Pour tout $n \geqslant 2$, l'encadrement

$$0 \leqslant U_n(a) \leqslant \frac{1}{1+a^2} \times \frac{a^{2^n}}{1+a^{2^n}} \leqslant \frac{1}{1+a^2}$$

montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_n(a)\, da$ existe.

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \int_1^{+\infty} U_k(a)\, da = \int_1^{+\infty} \sum_{k=2}^{n} U_k(a) da = \int_1^{+\infty} \frac{1}{P_1(a)}\, da - \int_1^{+\infty} \frac{1}{P_n(a)}\, da$$

Or

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{da}{P_n(a)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{da}{a^{2^n}} = \frac{1}{2^n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{\infty} I_k = \int_1^{+\infty} \frac{da}{1+a^2} = \frac{\pi}{4}$$

5. a) On procède par récurrence sur n :
• pour $n = 1$, $P_1(a) = 1 + a^2$,
• supposons que $P_n(a) = \sum\limits_{p=0}^{2^n-1} a^{2p}$. Alors :

$$P_{n+1}(a) = P_n(a)(1 + a^{2^{n+1}}) = \sum_{p=0}^{2^n-1} a^{2p} + \sum_{p=0}^{2^{n-1}} a^{2(p+2^n)} = \sum_{p=0}^{2^{n+1}-1} a^{2p}$$

D'où le résultat au rang $n + 1$ et la conclusion.

b) On a donc

$$P_n(a) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}$$

et si $|a| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(a) = \frac{1}{1-a^2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_n(a) = 1 - (1 - a^2) = a^2$$

Exercice 1.17.

On considère la fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par la relation $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln x\, dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx,$$

après avoir justifié, s'il y a lieu, la convergence des intégrales généralisées qui sont mises en jeu dans cette relation.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx$.

3. Montrer que la suite $\displaystyle\Big(\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. En déduire que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ est égale à la somme d'une série numérique (à préciser).

6. *On admet que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Solution :

1. $\star$ La fonction f est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1.
Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n} f(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi : x \mapsto x^{2k} \ln x$, est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité à droite en 0.
Aucune intégrale généralisée (à improprement parler) n'est par conséquent mise en jeu dans la relation à établir.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k-2} = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2k} \ln x = (x^{2n}-1) f(x).$$

Il s'ensuit, par linéarité de l'intégrale, que :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx = \lim_{t\to 0^+} \Big[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ln x\Big]_t^1 - \frac{1}{2k+1}\int_0^1 x^{2k}\, dx = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

3. Notons $\hat{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[0,1]$. La fonction $\hat{f}$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée. Soit K un majorant de $|\hat{f}|$: pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\Big| = \Big|\int_0^1 x^{2n} \hat{f}(x)\, dx\Big| \leqslant \int_0^1 x^{2n} |\hat{f}(x)|\, dx \leqslant K \int_0^1 x^{2n}\, dx$$
$$\leqslant \frac{K}{2n+1}$$

On conclut d'après le théorème de l'encadrement, que la suite $\left(\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. En faisant tendre n vers $+\infty$ on conclut que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n et S_n les sommes partielles d'ordre n respectives des séries (convergentes) $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{2n+1} = 1 + S_n + \frac{1}{4} Q_n$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Exercice 1.18.

Soit f une fonction continue strictement positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$.

1. Montrer que F_a est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On suppose dorénavant que l'intégrale de f diverge en $+\infty$.

2. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel noté $\varphi(a)$ tel que :

$$\int_a^{\varphi(a)} f(t)\, dt = 1.$$

b) Exprimer la fonction φ en fonction d'une primitive de f. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. a) Montrer que $\varphi(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de φ.

b) On suppose que f est une fonction paire. Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie du graphe de φ.

4. On pose $f(x) = \exp(x^2)$. Montrer que f vérifie les hypothèses de l'introduction. Préciser l'asymptote et l'axe de symétrie du graphe de φ et représenter graphiquement cette fonction.

Solution :

1. F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitive d'une fonction continue et $F'_a = f$ est continue donc F_a est de classe $\mathcal{C}^1$. La dérivée vérifie $F'_a(x) = f(x) > 0$ donc F_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Comme l'intégrale de f diverge en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_a(x) = +\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à F_a, il existe un unique réel $\varphi(a)$ tel que $\displaystyle\int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1$.

b) Notons $F = F_0$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F(\varphi(a)) - F(a) = 1$. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive, F^{-1} existe et est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors $\varphi(a) = F^{-1}(F(a) + 1)$. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

3. a) Comme f est positive et que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,dt = 1$, il est clair que $\varphi(x) > x$.

Soit $A > 0$ et $M > 0$ tels que pour $x \geqslant M$, $f(x) \geqslant A$. Alors pour $a \geqslant M$, on a :

$$1 = \int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1 \geqslant \int_a^{\varphi(a)} M\,dt = M(\varphi(a) - a).$$

On a donc $\varphi(a) - a \leqslant \dfrac{1}{M}$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\varphi(x) - x) = 0$ et que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f.

b) Soit $a \geqslant 0$. On a $\displaystyle\int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1$. Par parité, on a $\displaystyle\int_{-\varphi(a)}^{-a} f(t)\,dt = 1$, donc $\varphi(-\varphi(a)) = -a$. Or les points $(a, \varphi(a))$ et $(-\varphi(a), -a)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = -x$, d'où le résultat.

4. Il est clair que $f : x \mapsto \exp(t^2)$ vérifie les hypothèses du 1. De plus c'est une fonction paire, son intégrale diverge en $+\infty$ et elle tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc strictement croissante et admet $y = -x$ comme axe de symétrie.

Exercice 1.19.

On se donne une suite $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et on pose $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha(k)$.

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On pose dans toute la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \alpha(n)u_{\varphi(n)}$, $w_0 = \sum\limits_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum\limits_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$

2. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

3. Montrer que si $\sum u_n$ converge, il en est de même pour $\sum v_n$.

4. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rapport $\dfrac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}$ soit inférieur ou égal à M.
Montrer que si $\sum v_n$ converge il en est de même pour $\sum u_n$.

5. On pose $\alpha(n) = 2^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge $\iff \beta > 1$.

6. On pose $\alpha(n) = (n!)^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.
   a) Montrer que $((\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$
   b) Montrer que $\big(\ln(\alpha(n))\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(n^2 \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Etudier la convergence de $\sum v_n$. Conclusion ?

Solution :

1. $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \alpha(n+1) > 0$ donc φ est strictement croissante donc injective.

2. Notons respectivement U_n et W_n les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum w_n$. Alors $W_n = U_{\varphi(n)}$. Si (U_n) converge la suite extraite (W_n) converge donc $\sum w_n$ converge.

Inversement si $\sum w_n$ converge alors $U_{\varphi(n)} = W_n \leqslant W$ où $W = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$. Comme la suite (U_n) est croissante et qu'une sous-suite converge, elle converge.

3. Comme la suite (u_n) est décroissante, on a :

$$w_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k \geqslant \alpha(n) u_{\varphi(n)} = v_n.$$

Comme $\sum w_n$ converge, $\sum v_n$ converge.

4. Par un calcul analogue, on obtient :

$$w_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k \leqslant \alpha(n) u_{\varphi(n-1)} \leqslant \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)} v_{n-1} \leqslant M v_{n-1}.$$

La convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum w_n$ et donc celle de $\sum u_n$.

5. On a $v_n = 2^n \dfrac{1}{2^n [\ln(2^n)]^\beta} = \dfrac{1}{n^\beta [\ln 2]^\beta}$.

Par la règle de Riemann, cette série converge si et seulement si $\beta > 1$.

6. a) Pour $k < n$, on a $(k!)^k \leqslant ((n-1)!)^{n-1}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k!)^k \leqslant n((n-1)!)^{n-1} \leqslant (n!)^{n-1} = \frac{1}{n!}(n!)^n = o\big((n!)^n\big).$$

Donc

$$\varphi(n) = (n!)^n + o\big((n!)^n\big) \sim (n!)^n.$$

b) Comme $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$, on a :

$$\ln(\varphi(n)) \sim \ln(\alpha(n)) \text{ soit } n^2 \ln n \sim \ln(\alpha(n)).$$

c) Par le 5., $\sum u_n$ diverge.

Par ailleurs, $v_n = \dfrac{\alpha(n)}{\varphi(n)\ln(\varphi(n)} \sim \dfrac{1}{\ln(\alpha(n))} \sim \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ donc $\sum v_n$ diverge.

Ainsi la réciproque du 3. n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 1.20.

On définit les deux fonctions :

$\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi], t \mapsto \varphi(t) = t - \sin t\,;$

$\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \psi(t) = 1 - \cos t.$

1. a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, 2\pi]$ dans $[0, 2\pi]$. En déduire que sa fonction réciproque φ^{-1} est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.

On pose $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$.

b) Montrer que f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$.

c) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est axe de symétrie de la représentation graphique de f. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

d) Représenter graphiquement f.

2. a) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, où f désigne la fonction définie au 1.

b) On pose $g(x) = \dfrac{1}{3\pi} f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ et $g(x) = 0$ sinon.

Montrer que g est une densité de probabilité.

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de densité g.

Solution :

1. a) On a $\varphi'(t) = 1 - \cos t$ pour $x \in [0, 2\pi]$. De plus φ' est continue, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $1 - \cos t > 0$ pour $t \in]0, 2\pi[$ et que φ continue à droite en 0 et à gauche en π, elle est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$.

On en déduit que sa fonction réciproque φ^{-1} est continue sur $[\varphi(0), \varphi(2\pi)] = [0, 2\pi]$. Elle est dérivable sur $]0, 2\pi[$, car φ' ne s'annule pas sur cet intervalle.

b) Par composition, f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$.

c) On a pour $x \in]0, 2\pi[$, $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))\varphi'(x) = \sin(\varphi^{-1}(x))(1-\cos x)$. Comme $\varphi^{-1}(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, \pi]$ et $\varphi^{-1}(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\pi, 2\pi]$ et que $1 - \cos x \geqslant 0$ sur $]0, 2\pi[$, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement qi $x \in [0, \pi]$.

De plus $f(2\pi - x) = f(x)$ donc la droite d'équation $x = \pi$ est axe de symétrie du graphe.

On a $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$

On a $\dfrac{\psi'(u)}{\varphi'(u)} = \dfrac{\sin u}{1 - \cos u} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{2}{u}$ qui tend vers $+\infty$ quand u tend vers 0.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \varphi^{-1}(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$.

On en déduit que le graphe de f admet une tangente verticale en 0.

d) La représentation graphique est maintenant sans difficulté (la courbe obtenue s'appelle une « arche de cyclode »).

2. a) En effectuant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \psi(t)\varphi'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3\pi.$$

b) La fonction g est continue positive sur $\mathbb{R}$ et on a clairement

$$\int_0^{2\pi} g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1.$$

On obtient ainsi une densité de probabilité dite cyclodique.

Avec le même changement de variable qu'au 2. a) on a :

$$E(X) = \int_0^{2\pi} xg(x)\, dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2\, dt$$

En enlevant les termes dont l'intégrale est clairement nulle pour des questions de périodicité, on obtient :

$$E(X) = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t)\, dt = 1.$$

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

A toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe le nombre réel $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, appelé «trace» de la matrice M.

1. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$ et que si deux matrices sont semblables, leurs traces sont égales.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose que chaque coefficient de A vaut 0 ou 1 et qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & k \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. En déduire que U est vecteur propre de A^2 et que que $n = k^2 - k + 1$.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A^2.

Solution :

1. Avec des notations évidentes, on écrit :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(MN) &= \sum_{i=1}^{n}(MN)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i}m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}(NM)_{k,k} = \operatorname{tr}(NM)\end{aligned}$$

Soit alors A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$ et :

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$$

2. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $a_{i,j} = a_{j,i}$. L'élément générique de A^2 s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k}$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}a_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}^2$$

Comme chaque $a_{i,\ell}$ appartient à $\{0, 1\}$, il en résulte que A possède un nombre de 1 exactement égal à k sur chaque ligne, le reste étant des 0. Donc :

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = kU$$

Ainsi $A^2U = k^2U$, d'où $k + (n-1) = k^2$, soit :

$$n = k^2 - k + 1$$

3. Posons $J = \begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$. Alors $A^2 = J + (k-1)I$.

La matrice J admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n-1)$ (car J est de rang 1). C'est l'hyperplan H d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable. La diagonale de la matrice D diagonale semblable à J est formée des valeur propres de J, et deux matrices semblables ont même trace. La valeur propre manquante de J est donc n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. C'est l'orthogonal de l'hyperplan précédent donc, $\operatorname{Vect}(U)$.

Enfin, comme $A^2 = J + (k-1)I$, les valeurs propres de A^2 sont $k-1$, le sous-espace propre étant l'hyperplan H, et $n - k + 1 = k^2$ de sous-espace propre associé $\operatorname{Vect}(U)$.

Exercice 2.2.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

On note
$\|X\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$. Montrer que $\forall\, i \in [\![1,n]\!], |\lambda x_i| \leq r_i\|X\|$ et en déduire qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$, tel que $|\lambda| \leq r_i$.

2. Soit $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose $P(X) = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et on note $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ -c_{j-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

a) Montrer que les valeurs propres complexes de M sont les racines du polynôme P.

b) On pose $R = \max(|c_0|, 1+|c_1|, 1+|c_2|, \ldots, 1+|c_{n-1}|)$.
Déduire de ce qui précède que toutes les racines complexes de P ont un module inférieur ou égal à R.

3. Soit a, b, c, d quatre entiers naturels non nuls deux à deux distincts.
Montrer que l'équation, d'inconnue x,

$$x^a + x^b = x^c + x^d$$

n'admet pas d'autre solution que 0 et 1 dans $\mathbb{N}$.

Solution :

1. Par hypothèse, on a $AX = \lambda X$. Donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$. Ainsi :

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ ||X|| = r_i||X||$$

De plus, comme $X \neq 0$, il existe i_0 tel que $x_{i_0} = ||X||$, ce qui entraîne :

$$|\lambda x_{i_0}| = |\lambda|\ ||X|| \leqslant r_{i_0}||X|| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant r_{i_0}$$

2. a) La matrice M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \ldots & \ldots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -c_0 x_1 - c_1 x_2 - \cdots - c_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \qquad\vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

Or $X \neq 0$ si et seulement si $x_1 \neq 0$ (car $x_1 = 0$ donne banalement en remplaant dans les équations successives : $x_2 = x_3 = \ldots = 0$) et donc λ valeur propre de $M \implies P(\lambda) = 0$.

b) Les matrices M et M^T ont les mêmes valeurs propres (car $M - \lambda I$ et $(M - \lambda I)^T = M^T - \lambda I$ ont même rang).
Avec les notations de la première question, on a, pour M^T :

$$r_1 = |c_0|, r_2 = 1 + |c_1|, \ldots, r_n = 1 + |c_{n-1}|$$

Donc, $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si λ est valeur propre de M^T et il existe r_i tel que $|\lambda| \leqslant r_i$. Donc $|\lambda| \leqslant \max(r_i) = R$.

3. Les solutions de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont les racines d'un polynôme P pour lequel $R = 2$. Les solutions dans $\mathbb{N}$ ne peuvent donc être que $0, 1, 2$ (question 2.b).
On remarque que $0, 1$ sont solutions. Par contre 2 ne peut être solution. En effet, on peut supposer, par symétrie des rôles, que $a = \min(a, b, c, d)$. On aurait alors

$$1 + 2^{b-a} = 2^{c-a} + 2^{d-a}$$

ce qui est absurde car le membre de gauche est impair et celui de droite pair.

Exercice 2.3.

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application f de E dans E définie par

$$f(P) = (X - 1)\big(P - \frac{(X - 1)^3}{6} P'''\big)$$

où P''' désigne la dérivée tierce (troisième) de P.

1. a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que si $P \in \operatorname{Im} f$, alors 1 est racine de P.

c) L'application f est-elle surjective ?

2. a) Calculer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$ si $\deg P \neq 3$.

b) Soit P un vecteur propre de f. Montrer que $\deg P = 3$.

3. a) Montrer que $f(E_3) \subset E_3$. On appelle g l'endomorphisme de E_3 défini par $f(P) = g(P)$ pour tout $P \in E_3$.

b) Montrer que g n'est pas injectif.

c) On note $Q_k = (X-1)^k$ pour $k \in [\![0,3]\!]$. Donner la matrice A de g dans la base $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

d) En déduire que A est de rang 3 et que seul 0 est valeur propre de g.

4. On revient à l'étude de f et on recherche les sous-espaces vectoriels de E de dimension finie stables par f, c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^3$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, stables par f.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, stable par f. Montrer que $F \subset E_3$ puis que $F = \{0\}$ ou $F = \operatorname{Ker} f$, ou $F = \operatorname{Ker} f^2$ ou $F = \operatorname{Ker} f^3$.

Solution :

1. a) La linéarité de f est celle de la dérivation.

b) Il est évident que $f(P)(1) = 0$.

c) L'application f n'est pas surjective, puisque $\operatorname{Im} f$ est contenu dans le sous-espace vectoriel, strictement inclus dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes s'annulant en 1.

2. a) Choisissons comme base de $\mathbb{R}[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n, \ldots)$, et regardons, pour tout $k \geqslant 0, f((X-1)^k)$.

- si $k \leqslant 2$, $f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}$.
- si $k \geqslant 3$, $f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}\big(1 - \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}\big)$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant 0$:

$$f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}\big(1 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\big)$$

Ainsi, si le degré de P est p, celui de $f(P)$ est $p+1$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \neq 0$ tel que $f(P) = \lambda P$. On a alors $\deg f(P) = \deg P$, si $\lambda \neq 0$.

La seule valeur propre possible est donc $\lambda = 0$ et dans ce cas $f(P) = 0$. En écrivant P dans la base $\mathcal{B}$, la seule possibilité est $1 - \dfrac{p(p-1)(p-2)}{6} = 0$, soit $p = 3$

3. a) Le choix de la base $\mathcal{B}$ et l'expression de f dans cette base rend cette question évidente.

b) Comme dans la première question g n'est pas surjective.

c) La matrice demandée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Il est évident que A est de rang 3 (les trois première colonnes sont libres, la dernière est nulle) et que $A^4 = 0$. Ainsi 0 est la seule valeur propre de A.

4. a) Un calcul immédiat donne :

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((X-1)^3)$, $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2)$,

$\operatorname{Ker} f^3 = \operatorname{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2, (X-1))$, $\operatorname{Ker} f^4 = E_3$.

b) Soit F un sous-espace de dimension finie stable par f. Supposons que F contienne un polynôme P de degré $p > 3$. Alors F contient $f(P)$ de degré $p+1$, contient également $f^2(P)$ de degré $p+2$, etc. en contradiction avec sa dimension finie. Donc $F \subseteq E_3$

Evidemment $\{0\}$ est stable. Si $F \neq \{0\}$, notons $k = \dim F$, avec $1 \leqslant k \leqslant 3$. L'application restreinte f_F est un endomorphisme de F et est nilpotent (puisque f l'est). L'ordre de nilpotence de f_F est inférieur ou égal à la dimension de F, soit k. Donc $(f_F)^k = 0$, et

$$F = \operatorname{Ker}(f_F)^k \subseteq \operatorname{Ker} f^k$$

On conclut que $F = \operatorname{Ker} f^k$ par égalité des dimensions.

Exercice 2.4.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes de E, u et v vérifiant la relation suivante :

$$u^3 + u^2 + u = v.$$

1. Soit λ une valeur propre de u associée à un vecteur propre x. Montrer que x est vecteur propre de v associé à une valeur propre que l'on déterminera.

2. On suppose dans cette question uniquement que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Montrer que v admet également n valeurs propres distinctes, $\mu_1, \dots, \mu_n$ que l'on exprimera à l'aide des $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

3. Montrer que si u est diagonalisable, alors v l'est également.

4. Montrer que si v est inversible, alors u l'est également. Donner un exemple en dimension 2 où la réciproque n'est pas vérifiée.

Solution :

1. Soit x un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
Une récurrence facile monre que, pour tout $k \geqslant 1, u^k(x) = \lambda^k x$, d'où :

$$v(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

2. On vient que montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$ est valeur propre de v. Démontrer la question revient à montrer que, pour tout (λ, μ) valeurs propres de u :

$$\lambda \neq \mu \implies \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \neq \mu^3 + \mu^2 + \mu$$

Pour cela, il suffit d'étudier la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + x^2 + x$ et de vérifier qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est quasiment évident puisque sa dérivée est $x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ qui reste strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. La première question montre que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de v. L'endomorphisme v est donc diagonalisable.

4. a) Supposons que u ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de u et il existe au moins un vecteur propre (donc non nul) x associé. La première question montre que 0 est valeur propre de v et que le même vecteur x lui est associé. Donc v n'est pas inversible. Ainsi, par contraposée, v inversible $\implies$ u inversible.

b) En dimension 2, prenons la rotation d'angle $2\pi/3$ de matrice

$$U = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Par calculs, les valeurs propres de U sont complexes et valent $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et j^2. Sur $\mathbb{C}$, U admet deux valeurs propres distinctes non nulles et donc U est inversible.
Mais comme $0 = j(j^2 + j + 1) = j^3 + j^2 + j$, la seule valeur propre de $V = U^3 + U^2 + U$ est 0 et V n'est pas inversible.

Exercice 2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On recherche les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM - MA = A$.

1. Traiter le cas particulier $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si l'équation proposée a au moins une solution, alors elle en admet une infinité.

3. On suppose que l'équation proposée admet M pour solution.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, on a alors $A^pM - MA^p = pA^p$.

b) En considérant l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(N) = NM - MN$, en déduire qu'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. En déduire une matrice A' simple semblable à A.

Proposer alors une méthode pour trouver les matrices M solutions.

Solution :

1. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis on effectue le calcul $AM - MA$, et on résout l'équation $AM - MA = A$, ce qui donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

2. S'il existe M telle que $AM - MA = A$, alors pour tout réel λ, $M + \lambda I$ vérifie la même relation.

3. a) La relation demandée est banale pour $p = 0$ et vérifiée pour $p = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour un certain entier p, soit : $A^pM - MA^p = pA^p$. Alors :

$$A^{p+1}M - AMA^p = pA^{p+1}$$

et en multipliant à droite $AM - MA = A$ par A^p, il vient :

$$AMA^p - MA^{p+1} = A^{p+1}$$

Il reste à sommer ces deux dernières égalités, ce qui donne :

$$A^{p+1}M - MA^{p+1} = pA^{p+1} + A^{p+1} = (p+1)A^{p+1}$$

et la relation est encore valide au rang $p+1$, d'où la conclusion.

b) Soit M une solution de l'équation. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \neq 0$, A^p est vecteur propre de φ associé à la valeur propre p. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ ne peut admettre une infinité de valeurs propres : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

4. La matrice A vérifie $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$; elle représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, nilpotent d'ordre n. Soit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Il est classique (et on montre aisément) que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre donc constitue une base de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette base, u s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}A'P$. On a alors :

$$AM - MA = A \iff A'(PMP^{-1}) - (PMP^{-1})A' = A'$$

soit $A'N - NA' = A'$, ce qui est plus simple à résoudre par un calcul direct, vu le nombre d'éléments nuls de A'.

Exercice 2.6.

Si k est un entier naturel, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k. Dans l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Déterminer trois polynômes A, B, C à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$\begin{cases} A(-1) = 1 \\ A(0) = 0 \\ A(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(-1) = 0 \\ B(0) = 1 \\ B(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C(-1) = 0 \\ C(0) = 0 \\ C(1) = 1 \end{cases}$$

b) La famille (A, B, C) obtenue est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$$

Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on déterminera le noyau et l'image.

3. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] v(P) = P(0)A + P(1)B + P(-1)C$$

a) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de v.

b) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il un polynôme R tel que $u = R(v)$? Existe-t-il un polynôme S tel que $v = S(u)$?

Solution :

1. a) Les conditions $A(0) = A(1) = 0$ et $A \in \mathbb{R}_2[X]$ entraînent que

$$A(X) = \lambda X(X-1).$$

La condition $A(-1) = 1$ donne $\lambda = 1/2$, et $A = \frac{1}{2}X(X-1)$.

On trouve de même que $B = (1 - X^2)$ et $C = \frac{1}{2}X(X+1)$.

b) Si $P = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, alors :

$$\alpha = P(-1) = 0, \quad \beta = P(0) = 0, \quad \gamma = P(1) = 0$$

La famille (A, B, C) est formée d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, libre de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est une base de cet espace.

2. Au vu de la définition de u, il vient : $u^2(A) = u(A)$, $u^2(B) = u(B)$, et $u^2(C) = u(C)$, donc par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$u^2(P) = u(P)$$

ce qui signifie que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le noyau $\operatorname{Ker} u$ est formé des polynômes s'annulant en $\{-1, 0, 1\}$ donc de la forme $(X+1)X(X-1)Q(X)$. L'image $\operatorname{Im} u$ est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$, et comme la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$ est l'identité, on a $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_2[X]$.

3. a) On constate que :

$$\operatorname{Ker} v = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} = \operatorname{Ker} u$$

D'autre part, $v(A) = C, v(B) = A, v(C) = B$. Cela montre que $v^3 = u$.

Les valeurs propres de v vérifient $\lambda^3 \in \{0, 1\}$ et comme elles sont réelles, il vient $\lambda \in \{0, 1\}$.

On a vu que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$. Donc 0 est valeur propre de v, le sous–espace propre associé étant $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = (X^3 - X)Q(X)\}$, qui est de dimension $n - 2$.

D'autre part, $v(A + B + C) = A + B + C$ montre que 1 est valeur propre de v. De plus le sous–espace propre $E_1(v)$ est inclus dans $\operatorname{Im} v = \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi l'équation $v(P) = P$ donne $P(0) = P(1) = P(-1)$, et $P \in \operatorname{Vect}(A+B+C)$. Le sous–espace propre associé à la valeur propre 1 est donc une droite vectorielle.

b) La somme des dimensions des sous–espaces propres est égale à $n - 1 < n + 1$. L'endomorphisme v n'est pas diagonalisable.

c) On a $u = R(v)$, avec $R(X) = X^3$. Il ne peut exister un polynôme S tel que $v = S(u)$, car sinon, v serait diagonalisable puisque u l'est.

Exercice 2.7.

Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle trace d'une matrice carrée A et on note $\operatorname{tr} A$ la somme de ses coefficients diagonaux. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques (c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$).

1. Vérifier que :
 $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
 la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$;
 $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA)$.

En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

3. On suppose dans cette question que A est symétrique.
Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les termes diagonaux d'une matrice diagonale D, semblable à A.

4. Calculer $\langle A, I_n\rangle$ et montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min\limits_{B\in\mathcal{S}} \|A - B\|$.

Solution :

1. Cette question, sur la trace d'une matrice, a été résolue maintes fois dans les annales des années précédentes.

2. Il est évident que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^TB)$ est bilinéaire, car l'application trace est linéaire, comme la transposition.
Cette application est symétrique, par la question précédente.
De plus $\mathrm{tr}(A^TA) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$ et donc $\mathrm{tr}(A^TA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe ainsi une matrice P orthogonale, une matrice D diagonale telle que $A = P^TAP$. Par les deux questions précédentes, il vient :

$$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A^TA) = \mathrm{tr}(P^TD^2P) = \mathrm{tr}(D^2)$$

et par définition de D, $\mathrm{tr}(D^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, où les (λ_i) sont les valeurs propres de A.

4. On sait que $\langle A, I_n\rangle = \mathrm{tr}(A)$. De plus, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\,\mathrm{tr}(A)| = |\langle A, I_n\rangle| \leqslant ||I_n||.||A|| = \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$$

5. Le cours nous dit que le minimum recherché est atteint par le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$. Or on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. On écrit donc A sous la forme $S + U$, avec $S \in \mathcal{S}, U \in \mathcal{A}$. Mais :

$$\langle S, U\rangle = \mathrm{tr}(SU) = \mathrm{tr}(-US) = -\mathrm{tr}(SU) \implies \langle S, U\rangle = 0$$

Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$ est donc $S = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$. Ainsi :

$$\min_{B\in\mathcal{S}} ||A - B|| = ||A - S|| = ||U||.$$

Exercice 2.8.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme 1. On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a.$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

2. Montrer que f_a est diagonalisable.

3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal
(c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E, alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

5. Soit b un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.

Solution :

1. Il est évident que f_a est un endomorphisme de E. Déterminons son noyau.

$$f_a(x) = 0 \iff x = 2\langle x, a\rangle a \implies \langle x, a\rangle = 2\langle x, a\rangle \|a\|^2 = 2\langle x, a\rangle$$

Donc $\langle x, a\rangle = 0$ et $x = 0$. Ainsi f_a est injectif et est un automorphisme de E.

Pour déterminer f_a^-1, il suffit de résoudre l'équation $y = x - 2\langle x, a\rangle a$ d'inconnue x. Or :

$$y = x - 2\langle x, a\rangle a \implies \langle y, a\rangle = -\langle x, a\rangle$$

Donc $x = y - 2\langle y, a\rangle a$, soit $f_a^{-1} = f_a$.

2. L'automorphisme f_a est une involution puisque $f_a^2 = I$. C'est donc une symétrie. Ses valeurs propres sont à prendre dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et :

$$E_1(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = x\} = (\overrightarrow{a})^{\perp}$$
$$E_{-1}(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = -x\} = \overrightarrow{a}$$

Ainsi f_a est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. On a :

$$\begin{aligned}\langle f_a(x), f_a(y)\rangle &= \langle x - 2\langle x, a\rangle a, y - 2\langle y, a\rangle a\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - 2\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle - 2\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle + 4\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle ||a||^2 \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

4. Soit $x \in E$,

$$f_{g_a}(g(x)) = g(x) - 2\langle g(x), g(a)\rangle g(a) = g(x) - 2\langle x, a\rangle g(a)$$

$$= g(x - 2\langle x, a\rangle a) = g(f_a(x))$$

Donc, comme g est orthogonal, il est bijectif et

$$f_{g(a)} \circ g = g \circ f_a \text{ et donc } g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$$

5. a) Supposons que $f_a = f_b$. Alors pour tout $x \in E$:

$$\langle x, a\rangle a = \langle x, b\rangle b$$

En prenant $x = a$, il vient $a = \langle a, b\rangle b$, ce qui signifie que a et b sont colinéaires. Comme ils sont de norme 1, cela entraîne que $a = \pm b$.

La réciproque est évidente.

b) Soit c unitaire tel que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$. Alors $f_c \circ f_a \circ f_c^{-1} = f_a$. Par la question 4, il vient $f_{f_c(a)} = f_a$. Comme f_c est un endomorphisme orthogonal et comme a est unitaire, $f_a(c) = b$ est unitaire et par la question précédente, on a

$$a = \pm b = \pm f_a(c) = \pm(c - 2\langle c, a\rangle a)$$

Les vecteurs a et c sont liés et de norme 1. Donc $a = \pm c$.

Exercice 2.9.

On considère $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $u \otimes v$ l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(u \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle u.$$

1.a) Soient u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; quelle est l'image de l'endomorphisme $u \otimes v$? Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $u \otimes v$. Quand est-il diagonalisable ?

b) Prouver que

$$(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)$$

où $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit λ un réel qui n'est pas une valeur propre de $u \otimes v$; montrer que l'inverse de l'endomorphisme $\lambda Id - u \otimes v$ est donné par

$$(\lambda Id - u \otimes v)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Id + \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \langle u, v\rangle)} u \otimes v$$

d) On note ${}^t f$ l'adjoint de l'endomorphisme f, il est determiné par l'égalité

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, {}^t f\,(y)\rangle$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.
Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $u \otimes v$?

e) Soient u_1, v_1, u_2, v_2 quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$; sous quelles conditions a-t-on $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$?

2. Soient g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et ${}^t g(v) = \alpha v$.

3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices des endomorphismes qui commutent avec $u \otimes v$. Quel est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution :

1. a) Posons $f = u \otimes v$. Il est clair que l'image de f est la droite engendrée par le vecteur u. On voit immédiatement que 0 est valeur propre de f et que $\operatorname{Ker} f$ est l'hyperplan $\big(\operatorname{Vect}(v)\big)^{\perp}$.
Comme tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à $\operatorname{Im} f$, il suffit d'examiner u. Or $f(u) = \langle u, v\rangle u$; donc $\lambda = \langle u, v\rangle$ est valeur propre de f.

• si u est orthogonal à v, la seule valeur propre de f est 0. Comme $f \neq 0$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable (en revanche $f^2 = 0$).

• si u n'est pas orthogonal à v, f admet deux valeurs propres (0 et λ) et la somme des dimensions des sous–espaces propres est égale à la dimension de E ; l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2)(x) &= (u_1 \otimes v_1)(\langle x, v_2\rangle u_2)\\ &= \langle u_2, v_1\rangle . \langle x, v_2\rangle u_1 = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)(x)\end{aligned}$$

c) Le scalaire λ n'étant pas valeur propre de f, on sait que $\lambda \neq 0$ et que $\lambda \neq \langle u, v\rangle$. L'endomorphisme proposé est donc bien défini.

Il suffit ensuite de faire le produit de $\lambda I - u \otimes v$ par l'endomorphisme proposé dans cette question, et d'utiliser la question précédente pour obtenir le résultat demandé.

d) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle (u \otimes v)^T(x), y\rangle &= \langle x, (u \otimes v)(y)\rangle = \langle y, v\rangle . \langle x, u\rangle\\ &= \langle v, y\rangle . \langle x, u\rangle = \langle (v \otimes u)(x), y\rangle\end{aligned}$$

Donc $(u \otimes v)^T = v \otimes u$.

e) Si u_1 ou v_1 est nul et si u_2 ou v_2 est nul, alors $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$.

Supposons qu'aucun de ces quatre vecteurs ne soit nul. L'équation $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$, s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, u_2\rangle v_2 = \langle x, u_1\rangle v_1$$

Avec $x = u_2 \neq 0$, il s'ensuit que les vecteurs (v_1, v_2) sont liés $(v_2 = \beta v_1)$. En passant au transposé, la même méthode montre que les vecteurs (u_1, u_2) sont liés $(u_2 = \alpha u_1)$, et $\alpha\beta = 1$.

Réciproquement, si $v_2 = \beta v_1$, $u_2 = \alpha u_1$, et $\alpha\beta = 1$, on montre immédiatement que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, u_2\rangle v_2 = \langle x, u_1\rangle v_1$.

2. On remarque que :

$$g(u) \otimes v = g \circ (u \otimes v) = (u \otimes v) \circ g = u \otimes g^T(v)$$

En utilisant la question précédente, il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^T(v) = \alpha v$. Cette condition est également suffisante.

3. Si M est la matrice associée à v, en utilisant la question précédente, il vient :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \alpha - (a_2 + b_2) \\ a_3 & b_3 & \alpha - (a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$

Le commutant de $u \otimes v$ est donc de dimension 5.

Exercice 2.10.

1. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Un sous–espace vectoriel F de E est dit *stable* par f si $f(F) \subseteq F$.

Montrer que tout sous–espace propre de f est stable par f. A t–on la réciproque ? Qu'en est–il si la dimension de F est égale à 1 ?

2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et g un endomorphisme de E de matrice A^T (transposée de A) dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle g(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle$.

b) Soit F un sous–espace de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est stable par g.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est–il diagonalisable ?

b) En discutant suivant leur dimension, déterminer les sous–espaces F de E stables par f.

c) Montrer que l'un des plans stables obtenus est $\mathrm{Ker}(f - 3id_E)^2$. Quel est l'autre ?

Solution :

1. Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors $f(x) = \lambda x$. Tout sous–espace propre est donc clairement stable par f.

La réciproque est fausse. Par exemple si $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3), et si f est défini par $f(e_i) = ie_i$. l'endomorphisme f admet trois sous–espaces propres, et le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f et n'est pas un sous–espace propre.

En revanche si F est stable par f et de dimension 1, F est engendré par un vecteur e qui vérifie (par stabilité et dimension) $f(e) = \lambda e$. Ainsi F est une droite propre.

2. a) L'écriture matricielle des endomorphismes dans un espace euclidien donne :

$$\langle g(y), x\rangle = (A^T Y)^T X = Y^T AX = \langle y, f(x)\rangle$$

b) Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$, avec F stable par f. On a alors $f(x) \in F$ et :

$$0 = \langle y, f(x)\rangle = \langle g(y), x\rangle, \text{ d'où } g(y) \in F^\perp$$

On a la réciproque puisque $(F^\perp)^\perp = F$.

3. a) Un calcul élémentaire donne les valeurs propres de f qui sont $1, 3$ ainsi que les sous–espaces propres associés qui sont

$$E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

La somme des dimensions des sous–espaces propres étant $2 \neq 3$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

b) L'endomorphisme f admet deux sous–espaces stables «triviaux» $\{0\}$ et E.

Les sous–espaces stables de dimension 1 sont les droites engendrées par un vecteur propre, soit E_1 et E_3.

Soit F un plan stable. Alors $F^\perp$ est une droite stable par g. Les valeurs propres de g sont celle de f, et les sous–espaces propres sont

$$G_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad G_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi f admet deux plans stables $G_1^\perp$ d'équation $x - y = 0$ et $G_3^\perp$ d'équation $z = 0$

c) On calcule $(A - 3I)^2$. Il vient :

$$B = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-3I)^2$ est le plan d'équation $x-y=0$ soit $G_1^\perp$. L'autre plan stable, $G_3^\perp$ n'est autre que $E_1 \oplus E_3$.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, toutes les matrices considérées (M, N, P, etc.) sont des matrices d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit N une telle matrice.

a) Montrer que les éléments diagonaux de N^tN sont positifs.

b) Montrer que N^tN est symétrique et a toutes ses valeurs propres réelles positives.

2. Montrer que si une matrice M est diagonalisable, alors elle est semblable à sa transposée ${}^tM$, avec une matrice de passage symétrique et dont toutes les valeurs propres sont positives.

3. Soit M une matrice, telle qu'il existe une matrice symétrique P dont toutes les valeurs propres positives, vérifiant $M = P^tMP^{-1}$.

a) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible telle que $P = Q^tQ$,

b) Montrer qu'alors $Q^{-1}MQ$ est symétrique, et en déduire que M est diagonalisable.

4. Quel résultat vient-on de démontrer ?

Solution :

1. a) Si $N = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, un calcul immédiat permet d'affirmer que les éléments diagonaux de N^TN sont les nombres $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2$ qui sont bien positifs ou nuls.

b) La matrice NN^T est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Il existe donc une matrice D diagonale réelle, une matrice P orthogonale telles que $D = PNN^TP^T = (PN)(PN)^T$.
Les éléments de D (tous diagonaux) sont ainsi positifs. La matrice NN^T a toutes ses valeurs propres positives.

2. Supposons la matrice M diagonalisable. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Alors

$$M^T = (P^{-1})^TDP^T, \text{ d'où } D = P^TM^T(P^{-1})^T$$

D'où

$$M = PP^T\ M^T\ (PP^T)^{-1}$$

Ainsi, la matrice M est semblable à sa transposée, la matrice de passage étant symétrique avec ses valeurs propres positives.

3. a) La matrice P est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P_1 orthogonale telles que

$$P = P_1 D P_1^T$$

Les éléments de D sont positifs ou nuls. Soit Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées (positives) des éléments de D. On a $\Delta^2 = D$, et

$$P = P_1 \Delta.\Delta P_1^T = QQ^T$$

b) On peut donc écrire

$$M = QQ^T M^T (Q^{-1})^T Q^{-1}$$

ou

$$Q^{-1} M Q = Q^T M (Q^{-1})^T = (Q^{-1} M Q)^T$$

Ainsi, la matrice $Q^{-1}MQ$ est symétrique, réelle, et donc diagonalisable : il existe une matrice diagonale D_1, une matrice inversible Q_1 telles que $Q^{-1}MQ = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$, et

$$M = QQ_1 D_1 Q_1^{-1} Q^{-1}$$

ce qui signifie que la matrice M est diagonalisable.

4. On vient de démontrer le résultat suivant :

Une matrice réelle M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à sa transposée, avec une matrice de passage symétrique, réelle, à valeurs propres positives.

Exercice 2.12.

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire tel que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$). On pose $v = Id - u$ où Id est l'application identique de E.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires.

2. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, u^k est un endomorphisme orthogonal de E.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n = \dfrac{1}{n}\big(Id + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\big)$ et l'on considère p, la projection orthogonale de E sur $\operatorname{Ker} v$.

a) Soit $x \in E$. En écrivant, après justification, x sous la forme $x = y + z$ où $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in \operatorname{Im} v$, montrer que :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z).$$

b) Montrer qu'il existe $t \in E$ tel que : $f_n(x) = y + \dfrac{1}{n}(t - u^n(t))$.

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Solution :

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y \in \operatorname{Im} v$. On sait que $x = u(x)$ et qu'il existe $z \in E$ tel que $y = z - u(z)$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, z - u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, u(z)\rangle \\ &= \langle x, z\rangle - \langle u(x), u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle = 0\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\operatorname{Ker} v \subseteq (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

Or, le théorème du rang et le théorème sur la dimension de l'orthogonal :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v, \dim E = \dim \operatorname{Im} v + \dim(\operatorname{Im} v)^{\perp}$$

entraînent que $\dim \operatorname{Ker} v = \dim(\operatorname{Im} v)^{\perp}$. Finalement :

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$$

2. Cette question évidente, se traite par récurrence.

3. a) On a montré que

$$E = (\operatorname{Im} v)^{\perp} \oplus \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v$$

Aussi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \operatorname{Ker} v \times \operatorname{Im} v$ tel que $x = y + z$.

Donc $f_n(x) = f_n(y) + f_n(z)$. Or $y \in \operatorname{Ker} v$ entraîne que $u(y) = y$ et par une récurrence immédiate, on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k(y) = y$, donc que $f_n(y) = y$. Finalement :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

b) Comme $z \in \operatorname{Im} v$, il existe $t \in E$ tel que $z = t - u(t)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$, et :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) = \frac{1}{n}(t - u^n(t))$$

c) On sait que $y = p(x)$. Donc

$$\|f_n(x) - p(x)\| \leqslant \frac{1}{n}(\|t\| + \|u^n(t)\|) \leqslant \frac{2\|t\|}{n}$$

Et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Exercice 2.13.

1. Soit T l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$T : \theta \longmapsto M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $M(\theta + \theta') = M(\theta) \times M(\theta')$. En déduire l'expression de $M(p\,\theta)$, lorsque $p \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer une matrice $A_p \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A_p^p = -I$.

2. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'application définie sur E par :

$$f : P \longmapsto f(P) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X).$$

où P' et P'' désignent respectivement les polynômes dérivés de P et de P'.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est–il diagonalisable ?

c) Déterminer, par exemple par sa matrice dans une base appropriée, un endomorphisme g de E tel que $g^2 = g \circ g = f$.

d) Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}, p > 2$, existe–il un endomorphisme h de E tel que $h^p = f$?

Solution :

1. a) Par les formules d'addition des fonctions trigonométriques, il vient :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M(p\theta) = M^p(\theta)$$

b) La matrice $A = M(\pi/2)$ vérifie $A^2 = M(\pi) = -I$, et de même la matrice $A_p = M(\pi/p)$ vérifie $A_p^p = M^p(\pi/p) = M(\pi) = -I$, pour tout $p \geqslant 2$.

2. a) L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de la dérivation, et parce que $\deg f(P) \leqslant n$.

b) Calculons l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par f. Il vient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice associée à f dans cette base est donc triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale :

$$\{0, -2, -2, 0, 4, \ldots, k(k-3), \ldots, n(n-3)\}$$

Les valeurs propres de f sont ces éléments diagonaux. Ainsi

- 0 est valeur propre, et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$.
- -2 est valeur propre, et $\operatorname{Ker}(f + 2I) = \operatorname{Vect}(X, X^2 - 1)$.

• les $(n-1)$ autres valeurs propres « n'apparaîssent » qu'une fois et les sous–espaces propres associés sont, comme toujours, au moins de dimansion 1.

En utilisant le théorème sur la somme des dimensions des sous–espaces propres, on montre ainsi que l'endomorphisme f est diagonalisable.

c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice associée à f s'écrit :

$$\operatorname{diag}(0, 0, -2, -2, 4, \ldots, k(k-3), \ldots, n(n-3))$$

La matrice associée à g répondant à la question est alors une matrice bloc diagonale, les deux premiers blocs étant formé de deux matrices d'ordre 2, les autres étant scalaires, de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & & & \\ & (\sqrt{2}A) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{k(k-3)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sqrt{n(n-3)} \end{pmatrix}$$

avec $k \geqslant 4$. (Tous les autres éléments de cette matrice sont nuls).

d) De même, la matrice associée à g répondant à la question est alors une matrice bloc diagonale, les deux premiers blocs étant formés de deux matrices d'ordre 2, les autres étant scalaires, de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & & & \\ & (\sqrt[p]{2}A_p) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt[p]{k(k-3)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sqrt[p]{n(n-3)} \end{pmatrix}$$

avec $k \geqslant 4$. (Tous les autres éléments de cette matrice sont nuls).

Exercice 2.14.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout f de E, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{pour } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $T(g)$.

2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa dérivée.

b) Justifier rapidement que l'on peut choisir l'ensemble d'arrivée pour que T soit un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

3. a) Montrer que l'on peut restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée à F et que l'endomorphisme ainsi obtenu est un automorphisme de F.

b) Est-il diagonalisable ?

4. Montrer que si f est bornée, il en est de même de $T(f)$ et qu'il existe alors une constante k telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant k|x-y|$$

Solution :

1. On remarque que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Il vient

- si $x \leqslant -1$, $Tf(x) = 0$.
- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $Tf(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} t\,dt = \frac{(x+1)^2}{2}$.
- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $Tf(x) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt + \int_1^{x+1} (2-t)\,dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.
- si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $Tf(x) = \displaystyle\int_{x-1}^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.
- si $2 \leqslant x \leqslant 3$, $Tf(x) = \displaystyle\int_{x-1}^2 (2-t)\,dt = \frac{(x-3)^2}{2}$.
- si $x \geqslant 3$, $Tf(x) = 0$.

2. a) La fonction f étant continue, si F désigne une primitive de f, alors

$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x-1).$$

Ainsi $T(f)$ est de classe C^1. Par le théorème fondamental du calcul intégral $T(f)'(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

b) Pour tout $f \in E, T(f) \in E$.

⋆ L'application linéaire T n'est pas injective. Par exemple si $f : x \mapsto \sin(\pi x)$, $T(f)(x) = 0$.

⋆ L'application linéaire T n'est pas surjective, puisque si f est continue alors $T(f)$ est de classe C^1 et qu'il existe dans E des fonctions qui ne sont pas de classe C^1 (par exemple la fonction valeur absolue).

3.a) Si $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors :

$$T(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x+1)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-1)^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}[(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}]$$

Donc $T(f)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, car

$$(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1} = 2(k+1)x^k + \cdots.$$

La même démonstration montre que T est bijectif puisque $\deg(T(X^k)) = k$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

b) La matrice de T dans la base canonique de F est triangulaire, et les éléments de la diagonale sont tous égaux à 2.
L'endomorphisme T n'admet qu'une seule valeur propre (à savoir 2) et n'est donc pas diagonalisable, puisque T n'est pas l'homothétie de rapport 2.

4. Utilisons l'inégalité des accroissements finis

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant |F(x+1) - F(y+1)| + |F(x-1) - F(y-1)|$$
$$\leqslant \sup|f|.|x-y| + \sup|f|.|x-y| = (2\sup|f|)|x-y|$$

Exercice 2.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'objet de cet exercice est de chercher une solution approchée de l'équation $AY = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne fixée.
On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |a_i| > n-1$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X = 0$, en déduire que A est inversible. (On pourra écrire le système $AX = 0$ et utiliser une ligne L_j où j est tel que $|x_j| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$).

2. a) Montrer que l'équation $AY = B$ admet une solution et une seule que l'on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = A - M$.
Montrer que $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

b) On définit la suite de vecteurs (X_m) par : $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B$.
Exprimer $X_{m+1} - Y$ en fonction de D, M et $X_m - Y$.

c) On pose $X_m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$ et on définit la suite (u_m) par :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ u_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^m - y_i|.$$

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|} u_m$.

d) En déduire la convergence la suite (X_m) vers Y (c'est-à-dire, la convergence de la suite (x_i^m) vers y_i pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$).

Solution :

1. L'équation $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \end{cases}$$

Supposons $X \neq 0$. Soit alors j tel que $|x_j| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. En utilisant la j–ème ligne, il vient :

$$|a_j||x_j| = \big|\sum_{i \neq j} x_i\big| \leqslant \sum_{i \neq j} |x_i|$$

et :

$$|a_j| \leqslant \sum_{i \neq j} \frac{|x_i|}{|x_j|} \leqslant n - 1$$

en contradiction avec l'hypothèse. Donc $X = 0$.
Le noyau de la matrice carrée A étant réduit à $\{0\}$, A est inversible.

2. a) Comme A est inversible, $Y = A^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation $AY = B$.

La matrice D est inversible, car aucun des a_i n'est nul.

Posons $Z = -D^{-1}MY + D^{-1}B$. Alors :

$$DZ = -MY + B = (-M + A)Y = DY, \text{ donc } Z = Y$$

b) On sait que

$$\begin{cases} X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B \\ Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B \end{cases}$$

Par soustraction $X_{m+1} - Y = -D^{-1}M(X_m - Y)$.

c) Par calcul immédiat :

$$-D^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 1/a_1 & \dots & 1/a_1 \\ 1/a_2 & 0 & \dots & 1/a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1/a_n & 1/a_n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x_1^{m+1} - y_1 = -\dfrac{1}{a_1} \sum\limits_{i \neq 1} (x_i^m - y_i) \\ \vdots \\ x_n^{m+1} - y_n = -\dfrac{1}{a_n} \sum\limits_{i \neq n} (x_i^m - y_i) \end{cases}$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $|x_i^{m+1} - y_i| \leqslant \dfrac{1}{|a_i|}(n-1)u_m$

et en posant $a = \min\limits_i |a_i|$: $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{a} u_m$.

d) Par une itération immédiate, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_m \leqslant \left(\frac{n-1}{a}\right)^m u_0$$

Comme $a > n - 1$, il vient $\lim\limits_{m \to +\infty} u_m = 0$, c'est–à–dire $\lim\limits_{m \to +\infty} x_i^m = y_i$.

Exercice 2.16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme f de E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que f est un projecteur si et seulement s'il existe A, B sous–espaces vectoriels de E tels que

   i) $E = A \oplus B$

   ii) $\forall x \in A,\ f(x) = 0$

   iii) $\forall x \in B,\ f(x) = x$.

2. Soient f et g deux projecteurs de E.

a) Montrer que f et g sont deux projecteurs tels que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

3. Soient f, g deux projecteurs de E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que :

$$E = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$$

Que peut–on dire de $f \circ g$?

Solution :

1. On sait, par le cours, que si f est un projecteur de E, alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, et que $f_{|\operatorname{Im} f} = Id$, $f_{|\operatorname{Ker} f} = 0$.

Réciproquement, si les points i), ii), iii) sont vérifiés, f est le projecteur sur B parallèlement à A.

2. a) Si f, g sont deux projecteurs de E tels que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, alors pour tout $x \in E$, $f\big(g(x)\big) = g(x)$ et $g\big(f(x)\big) = f(x)$, puisque $f_{|\operatorname{Im} f} = Id$, $g_{|\operatorname{Im} g} = Id$.

Réciproquement, supposons que f, g soient deux projecteurs de E tels que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Alors :

$$f(x) \in \operatorname{Im} f \implies f(x) = g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} g, \text{ et}$$

$$g(x) \in \operatorname{Im} g \implies g(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f.$$

b) Supposons que f, g sont deux projecteurs de E tels que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Alors :

si $x \in \operatorname{Ker} g$, $f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$

si $x \in \operatorname{Im} g$, $g(x) = x$ et $f\big(g(x)\big) = f(x)$.

Donc $f \circ g = f$. Pour des raisons de symétrie des rôles de f et g, on a également $g \circ f = g$.

Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$, alors :

$$x \in \operatorname{Ker} f \implies g(x) = g\big(f(x)\big) = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} g$$

$$x \in \operatorname{Ker} g \implies f(x) = f\big(g(x)\big) = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} f.$$

3. On sait que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\operatorname{Im} f$ et $\widetilde{g} = g_{|\operatorname{Im} f}$ est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f$. L'endomorphisme $\widetilde{g}$ reste un projecteur de $\operatorname{Im} f$ (puisque g l'est). Donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \widetilde{g} \oplus \operatorname{Im} \widetilde{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} \widetilde{g} = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} \widetilde{g} = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$.

De même, comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\operatorname{Ker} f$ et $\overline{g} = g_{|\operatorname{Ker} f}$ est un endomorphisme de $\operatorname{Ker} f$. L'endomorphisme $\overline{g}$ reste un projecteur de $\operatorname{Im} f$ (puisque g l'est). Donc

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \overline{g} \oplus \operatorname{Im} \overline{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} \overline{g} = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f \\ \operatorname{Im} \overline{g} = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f)$.

Comme $f \circ g = g \circ f$, $(f \circ g)^2 = f \circ g$, et $f \circ g$ est un projecteur de E. De plus

$$\begin{cases} (f \circ g)_{| \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g} = Id, (f \circ g)_{| \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g} = 0, \\ (f \circ g)_{| \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f} = 0, (f \circ g)_{| \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ parallèlement à la somme directe des trois autres sous-espaces vectoriels.

Exercice 2.17.

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On notera A et B les matrices respectives de f et g dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

1. On suppose dans cette question que f admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a) Montrer que chaque sous espace propre de f est stable par g. En déduire que f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) Montrer qu'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P_1(K), \quad B = P_2(K)$.

2. On suppose maintenant que f et g n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.

a) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun que l'on notera e_1.

b) Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$ telle que dans cette base, les matrices respectives de f et g soient de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

c) En déduire qu'il existe deux polynômes P et Q et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P_1(K), \quad B = P_2(K)$.

Solution :

1. a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$\lambda g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$$

Si $g(x) = 0$, $g(x)$ appartient au sous–espace propre de f associé à la valeur propre λ. Si $g(x) \neq 0$, ce vecteur est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Si f est diagonalisable, alors $\mathbb{C}^2 = E_1 \oplus E_2$, chaque sous–espace propre E_i étant de dimension 1. L'endomorphisme g laissant stable chaque E_i, si $x \in E_i$, alors $g(x) = \mu_i x$. Les deux sous–espaces propres de f sont donc sous–espaces propres de g (associés à des valeurs propres différentes). Les endomorphismes f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) L'égalité matricielle demandée se vérifie immédiatement. Les matrices A et B étant diagonalisables dans une même base, il existe une matrice de passage P (inversible), deux matrices diagonales D, Δ telles que :

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}; B = P\Delta P^{-1} = P\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

En utilisant l'égalité précédente, on peut écrire :

$$D = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} I + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} J; \Delta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} I + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} J$$

et, en posant :

$$K = PJP^{-1}, P_1(X) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} X, P_2(X) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} X$$

on obtient le résultat demandé.

2. a) Comme on travaille sur $\mathbb{C}^2$, f admet au moins une valeur propre λ.
Si la dimension du sous–espace propre associé est égale à 2, alors f est diagonalisable et $f = \lambda Id$; donc f et g ont un vecteur propre en commun, puisque tous les vecteurs non nuls de E sont vecteurs propres de f.

Si la dimension du sous–espace propre associé est égale à 1, soit e_1 un vecteur propre associé (base du sous–espace propre). Alors :

$$\lambda g(e_1) = g(f(e_1)) = f(g(e_1))$$

Donc, $g(e_1) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_1) = \mu e_1$ et f et g ont un vecteur propre en commun.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ (le vecteur e_1 est celui trouvé précédemment). Dans cette base, les matrices associées à f et g sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Mais, les endomorphismes f et g n'ayant qu'une seule valeur propre, ces matrices sont de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

c) Comme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha N$,
en posant $K = PNP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, et

$$P_1(X) = \lambda + \alpha X, \quad P_2(X) = \mu + \beta X$$

on obtient le résultat demandé.

Exercice 2.18.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit a un réel fixé.
Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2} P''(a) + X^3 P'''(X).$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Cet endomorphisme est-il inversible ?

3. a) Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de u ainsi que la dimension des sous–espaces propres associés. L'endomorphisme u est–il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application u est clairement linéaire par linéarité de la dérivation.
• Si $n = 1$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) \in \mathbb{R}_1[X]$.
• Si $n = 2$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2P''(a) \in \mathbb{R}_2[X]$.
• Si $n \geqslant 3$, alors $\deg(X^3P'''(X) = \deg P(X)$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
Dans tous les cas u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \operatorname{Ker} u$.
• Si $\deg P \leqslant 2$, alors $u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2P''(a) = 0$ entraîne que l'on a : $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$, donc que $P = 0$.
• si $\deg P \geqslant 3$, alors
$u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2P''(a) + X^3P'''(X) = P_1(X) + X^3P'''(X) = 0.$
avec $\deg P_1 \leqslant 2$ et $\deg(X^3P'''(X) \geqslant 3$. Donc $P_1 = 0$ et $P'''(X) = 0$. Cela entraîne que P est de degré inférieur ou égal à 2 ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.
Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injectif, donc inversible.

3. a) On cherche la matrice M associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme :

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(X) = a + X \\ u(X^2) = a^2 + 2aX + X^2 \\ u(X^3) = a^3 + 3a^2X + 3aX^2 + 6X^3 \\ \quad\vdots \\ u(X^n) = a^n + na^{n-1}X + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}X^2 + n(n-1)(n-2)X^n \end{cases}$$

la matrice recherchée est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de u sont ses éléments diagonaux, soit :

$$\{1, 6, 24, \dots, n(n-1)(n-2)\}$$

(si $n < 3$, seule subsiste la valeur propre 1).

b) $\star$ Supposons $n < 3$. Alors 1 est la seule valeur propre et u est diagonalisable si et seulement si $u = id$, ce qui se produit lorsque $a = 0$.

$\star$ Supposons $n \geqslant 3$.
Pour $k \in [\![3, n]\!]$, par échelonnement, la matrice $M - k(k-1)(k-2)I$ est de rang $n+1-1$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $k(k-1)(k-2)$ est de dimension 1.

Par conséquent l'endomorphisme u sera diagonalisable si et seulement si le sous- espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension 3.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et supposons P au moins de degré 3. Alors $u(P) = P$ si et seulement si :

$$P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) + X^3P'''(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \sum_{k=3}^{n} a_k X^k$$

En regardant les coefficients dominants de cette égalité ($a_n \neq 0$), il vient :

$$n(n-1)(n-2)a_n = a_n, \text{ soit } n(n-1)(n-2) = 1$$

Ceci n'est pas possible. Donc $P \in E_1 \implies \deg P \leqslant 2$ et $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. On écrit alors $P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et il vient :

$$\begin{cases} 2\alpha a = 0 \\ \alpha a^2 + \beta a = 0 \end{cases}$$

- Si $a = 0$, alors $E_1 = \mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 et u est diagonalisable.
- Si $a \neq 0$, alors $\alpha = \beta = 0$ et $E_1 = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1 et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.19.

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E et I l'endomorphisme identité de E.
Soit a un réel donné non nul.

Si $k \in \mathbb{N}$, on notera f^k l'endomorphisme de E défini par récurrence par $f^0 = I$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f \neq aI, f^{n-1} \neq 0, f^{n-1} \circ (f - aI) = 0 \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ f^k \circ (f - aI) \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que les valeurs propres de f sont 0 et a.

2. a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f^{n-1})$ et $\operatorname{Ker}(f-aI)$ sont supplémentaires dans E.

b) Montrer qu'il en est de même pour $\operatorname{Ker}(f^{n-1})$ et $\operatorname{Im}(f^{n-1})$.

3. a) Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^p \subset \cdots$$

b) Montrer qu'il existe un entier naturel p, avec $p \leqslant n$, tel que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

c) Montrer qu'alors pour tout $j \geqslant 1$, on a $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+j})$.

d) Montrer que l'on a également $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$ et pour tout $j \geqslant 1$, on a $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+j})$.

e) Montrer qu'alors $\operatorname{Ker}(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E, et qu'il en est de même pour $\operatorname{Ker}(f^p)$ et $\operatorname{Ker}(f-aI)$.

f) En déduire la valeur de p.

Solution :

1. On a : $f^{n-1} \circ (f-aI) = 0$.

Si a n'est pas valeur propre de f, alors $f-aI$ est inversible, et $f^{n-1} = 0$ en contradiction avec l'hypothèse. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $(f-aI)(x) = 0$ et a est valeur propre de f.

De même si 0 n'est pas valeur propre de f, l'endomoprhisme f, donc f^{n-1} est inversible et $f - aI = 0$, en contradiction avec l'hypothèse.
Finalement, on vient de montrer que 0 et a sont valeurs propres de f.

Réciproquement s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors

$$0 = f^{n-1} \circ (f-aI)(x) = \lambda^{n-1}(\lambda - a)x$$

et $\lambda \in \{0, a\}$.

2. a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{n-1} \cap \operatorname{Ker}(f-aI)$. Alors : $f^{n-1}(x) = 0, f(x) = ax$.

Donc $f^{n-1}(x) = a^{n-1}x = 0$ et $x = 0$, soit $\operatorname{Ker} f^{n-1} \cap \operatorname{Ker}(f-aI) = \{0\}$.

Comme $f^{n-1} \circ (f-aI) = (f-aI) \circ f^{n-1} = 0$, il vient :

$$\operatorname{Im} f^{n-1} \subseteq \operatorname{Ker}(f-aI)$$

Par le théorème du rang, on obtient ainsi :

$n - \dim \operatorname{Ker} f^{n-1} \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f-aI)$, soit $\dim \operatorname{Ker} f^{n-1} + \dim \operatorname{Ker}(f-aI) \geqslant n$

D'où, la somme étant directe :

$\dim(\operatorname{Ker} f^{n-1} + \operatorname{Ker}(f-aI)) = \dim \operatorname{Ker} f^{n-1} + \dim \operatorname{Ker}(f-aI) \geqslant n$

ce qui entraîne $\dim(\operatorname{Ker} f^{n-1} + \operatorname{Ker}(f-aI)) = n$, et donc :

$$E = \operatorname{Ker} f^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(f-aI).$$

b) On sait déjà que $\operatorname{Im} f^{n-1} \subseteq \operatorname{Ker}(f - aI)$. Le théorème sur les dimensions et l'égalité de la question précédente montrent que $\operatorname{Im} f^{n-1} = \operatorname{Ker}(f - aI)$.

3. a) Les inclusions demandées se démontrent immédiatement.

b) La suite $(\dim(\operatorname{Ker} f^j))_{j \geqslant 1}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par $n = \dim E$. Elle converge, et comme ce sont des entiers, elle est stationnaire.

Soit p le premier entier tel que $\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
L'inclusion $\operatorname{Ker} f^p \subseteq \operatorname{Ker} f^{p+1}$ entraîne que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

c) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{p+2}$. Alors :

$0 = f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x))$, d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^p$ et
$f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1} \implies \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^{p+2}$.

d) Il est immédiat que :

$$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} f^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} f^j \supseteq \cdots$$

Si $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$, le théorème du rang et les inclusions précédentes montrent que $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$ et de même que $\operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+2}$.

e) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p$. Alors $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Donc :

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(y) \implies y \in \operatorname{Ker} f^{2p} = \operatorname{Ker} f^p \implies x = f^p(y) = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\}$ et on sait alors (par le théorème du rang) que

$$E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$$

Par la définition de p et la question 2. b) , on sait que $p \leqslant n - 1$. Par les questions 3. c), 3. d) et par le fait que $\operatorname{Im} f^{n-1} = \operatorname{Ker}(f - aI)$, il vient :

$$E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Ker}(f - aI)$$

f) Si $p \leqslant n-2$, on sait que $f^p \circ (f - aI) \neq 0$. Or $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Ker}(f - aI)$ entraîne que $f^p \circ (f - aI) = 0$.

En effet, pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} f^p \times \operatorname{Ker}(f - aI)$ tel que $x = x_1 + x_2$ et :

$$\begin{aligned} f^p \circ (f - aI)(x) &= f^p \circ (f - aI)(x_1 + x_2) \\ &= (f - aI)(f^p(x_1)) + f^p((f - aI)(x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.20.

1. Pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

a) Étudier l'inversibilité de $M_{a,b}$ et calculer son inverse lorsqu'elle existe.

b) La matrice $M_{a,b}$ est–elle diagonalisable ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
- $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n$ à coefficients positifs ou nuls.
- J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

2. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ si et seulement $AJ_n = J_n$.

b) Vérifier que $\mathcal{S}_n$ est stable pour la multiplication (c'est–à–dire que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_n$ est un élément de $\mathcal{S}_n$).

c) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Vérifier que $\mathcal{S}_n^+$ est stable pour la multiplication. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible. A-t-on $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$?

3. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

a) Quelle est la matrice M_σ de f_σ dans la base $\mathcal{B}$? Vérifier que $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Justifier que M_σ est inversible et déterminer son inverse en fonction de σ. Vérifier que $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible telle que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$. On note $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$ on a : $(i \neq j) \implies b_{i,k}a_{k,j} = 0$.

b) En déduire que chaque colonne de A contient un unique élément non nul.

c) En déduire qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $A = M_\sigma$.

Solution :

1. a) La matrice $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et dans ce cas :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1-b & a-1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

b) La somme des coefficient de chaque ligne valant 1, on sait que 1 est valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La seconde valeur propre est $a - b$.

- Si $a - b = 1$, comme $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, alors $a = 1, b = 0$ et $M_{1,0} = Id$ qui est diagonale.
- Si $a - b \neq 1$, la matrice $M_{a,b}$ admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

2. a) La matrice J_n n'étant formée que de 1, un calcul immédiat donne $AJ_n = J_n$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n$.

b) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$, alors $(AB)J_n = A(BJ_n) = AJ_n = J_n$. Cela prouve que $\mathcal{S}_n$ est stable par produit matriciel.

c) On a $AJ_n = J_n \implies J_n = A^{-1}J_n$. Ainsi $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$ dont les coefficients sont positifs, la formule du produit matriciel entraîne que les coefficients de AB sont positifs. Donc $A, B \in \mathcal{S}_n^+ \implies AB \in \mathcal{S}_n^+$.
La question 1.a) fournit un contre exemple à la seconde partie de cette question.

3. a) La matrice de $M_\sigma = (a_{i,j})$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifie :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Comme $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$, il vient $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

4. a) Avec les hypothèses de la question, on peut écrire :

$$\forall\, i, \forall\, j \neq i, \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

avec $a_{i,k} \geqslant 0, b_{k,j} \geqslant 0$. Donc :

$$\forall\, i, \forall\, j \neq i, \forall\, k \in [\![1, n]\!], a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

b) Chaque colonne de A possède au moins un coefficient non nul (autrement A ne peut être inversible). Supposons que deux colonnes de A aient un coefficient non nul sur la même ligne : $a_{k,j} \neq 0, a_{k,j'} \neq 0$. Alors, par la question précédente, $b_{i,k} = 0, \forall\, i \neq j$, $b_{i,k} = 0, \forall\, i \neq j'$, ce qui signifie que la k ème colonne de A^{-1} est nulle, en contradiction avec A^{-1} inversible.

Ainsi A ne possède qu'un unique élément non nul par ligne et par colonne.

c) On vient de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,j} = 1$ (car $A \in \mathcal{S}_n$). Il existe donc une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $A = M_\sigma$.

Exercice 2.21.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble F des applications Φ de E qui vérifient la relation :

$$(R) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = (1 + x^2)\Phi(x)$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.

3. Soient f et g les applications définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}; g(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F.

4. Soit h un élément de F.

a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$.

(On pourra calculer la dérivée de la fonction $\dfrac{h}{f}$.)

b) En déduire la dimension de F.

Solution :

1. F est un sous–espace vectoriel de E par linéarité de la dérivation.

2. Soient $(u, v) \in F^2$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u''(x) = (1 + x^2)u(x), \quad v''(x) = (1 + x^2)v(x)$$

En multipliant la première équation par $v(x)$ et la seconde par $u(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = (v'u - uv')'(x)$$

La fonction $v'u - uv'$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. Il suffit de dériver les fonction f et g. On obtient :

$$f'(x) = xf(x), \text{ d'où : } f''(x) = xf'(x) + f(x) = (1 + x^2)f(x)$$

et si $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$:

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x)F(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \\ g''(x) = f''(x)F(x) + f'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - x.\mathrm{e}^{-x^2/2} = (1 + x^2)g(x) \end{cases}$$

4. a) Utilisons l'indication donnée dans la question. Comme $f(x) \neq 0$, pour tout x réel, il vient, par la question 2. :

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{fh' - hf'}{f^2} = \frac{\beta}{f^2}$$

D'autre part

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{1}{f^2}$$

Donc, pour tout $h \in F$, il existe β tel que $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = \beta\left(\dfrac{g}{f}\right)'$

et pour tout $h \in F$, il existe β, et il existe α tels que

$$\frac{h}{f} = \alpha + \beta\frac{g}{f}$$

b) L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(f, g)$ et que F est de dimension 2, puisque la famille (f, g) est clairement libre.

Exercice 2.22.

Soit $n \geqslant 2$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_1 \neq 0$ et $s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

On désigne par ω une racine carrée de s.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

1. a) Déterminer le rang de M.

Montrer que 0 est valeur propre de M, déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Montrer que M admet deux autres valeurs propres distinctes et donner pour chacune d'elles un vecteur propre associé. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associé à M.

Montrer que $\mathbb{C}^{n+1} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. a) On suppose maintenant que les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont réels. On considère $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de sa structure euclidienne canonique et on appelle f l'endomorphisme associé à M sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux.

b) Ecrire la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

Solution :

1. a) Les $(n-1)$ dernières colonnes de M étant toutes proportionnelles à la seconde colonne, et les deux premières colonnes étant manifestement libres, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(M) = 2$, et donc que $\dim \mathrm{Ker}\, M = n-1$.

Ainsi 0 est valeur propre, le sous–espace propre associé étant de dimension $n-1$; ses équations sont, par exemple :

$$\{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

b) Pour déterminer les autres valeurs propres non nulles, on résout le système $MX = \lambda X$. Il vient :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda x_0 \\ \forall\, i \in [\![1, n]\!], a_i x_0 = \lambda x_i \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2}{\lambda} = \lambda \\ \forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_0 \end{cases}$$

Les deux valeurs propres manquantes sont donc $\lambda = \pm\omega$.

On a : $E_\omega(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} \omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, et $E_{-\omega}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -\omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

La matrice M est donc diagonalisable.

On voit, enfin, que :

$$\operatorname{Im} f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_\omega \oplus E_{-\omega}$$

2. a) La matrice M est désormais symétrique réelle ; elle est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie que les sous–espaces propres sont orthogonaux.

b) Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$. On sait que si (u, v) est une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$p(x) = \langle u, x\rangle u + \langle v, x\rangle v$$

Une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Donc si $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, il vient $P(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dfrac{a_1}{s} \sum a_i x_i \\ \vdots \\ \dfrac{a_n}{s} \sum a_i x_i \end{pmatrix}$ et :

$$M_p = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & a_n^2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.23.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note Id l'endomorphisme identité de E et on définit la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E par $f^0 = Id$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f^k \circ f$. On a ainsi, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et :

$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ f^p \circ f^q = f^{p+q}.$$

On suppose qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et un réel a non nul tels que :

$$\begin{cases} f^n = af^{n-1} \\ f^{n-1} \neq af^{n-2} \\ f^{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la dimension de E est supérieure ou égale à 2.

b) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Ker}(f - aId)$ sont supplémentaires dans E.

b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker}(f - aId)$ soient supplémentaires dans E.

3. a) Comparer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - aId)$ et $\operatorname{Im} f^{n-1}$ de E.

b) Déterminer le plus petit entier naturel ℓ non nul tel que $\operatorname{Ker} f^\ell$ et $\operatorname{Im} f^\ell$ soient supplémentaires dans E.

Solution :

1. a) E n'est pas réduit au vecteur nul car par hypothèse $f \neq 0$. De plus, E n'est pas une droite vectorielle car sinon f serait une homothétie de rapport non nul (toujours parce que $f \neq 0$) donc f serait bijective et de $f^n = af^{n-1}$ on déduirait, en composant à gauche par f^{-1}, $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses.
Finalement, on a $\dim E \geqslant 2$.

b) $P = X^{n-1}(X - a)$ est un polynôme annulateur de f donc $\mathrm{Spec}(f) \subset \{0, a\}$. Par ailleurs, 0 est bien valeur propre de f car, comme vu en a), f ne peut être bijectif. De même, a est effectivement valeur propre car sinon $f - aid$ serait bijectif et de $f^{n-1} \circ (f - aid) = 0$ on déduirait $f^{n-1} = 0$.
Finalement, $\mathrm{Spec}\, f = \{0, a\}$.

Si $\dim E = 2$, f est diagonalisable car endomorphisme d'un espace de dimension 2 admettant 2 valeurs propres distinctes ; si $\dim E \geqslant 3$, f n'est pas diagonalisable car sinon on aurait $f \circ (f - aid) = 0$ (vérification facile dans une base de vecteurs propres) d'où l'on déduirait $f^{n-2} \circ (f - aid) = 0$ contrairement aux hypothèses.

2. a) On montre que tout vecteur de E se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f - aid)$.

⋆ **Non multiplicité**. Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in \operatorname{Ker} f^{n-1} \times \operatorname{Ker}(f - aid)$, alors $f^{n-1}(x) = 0 + a^{n-1}z$ donc nécessairement $z = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ et $y = x - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ d'où l'unicité de y et z possibles pour un x donné.

⋆ **Existence**. Soit $x \in E$. Posons $y = x - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ et $z = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$. Alors $x = y + z$, $f(z) = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^n(x) = \dfrac{1}{a^{n-1}} af^{n-1}(x) = az$ et
$f^{n-1}(y) = f^{n-1}(x) - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{2n-2}(x) = 0$. En effet, on montre facilement par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{n+k} = a^{k+1} f^{n-1}$.

b) On remarque $\operatorname{Im}(f - aid) \subset \operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Im}(f - aid) \not\subset \operatorname{Ker} f^{n-2}$ puisque $f^{n-1} \circ (f - aid) = 0$ et $f^{n-2} \circ (f - aid) \neq 0$ donc $\operatorname{Ker} f^{n-2} \neq \operatorname{Ker} f^{n-1}$.
Or pour tout $k \in [\![0, n-2]\!], \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{n-2} \subset \operatorname{Ker} f^{n-1}$. Donc pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\operatorname{Ker} f^k$ est strictement inclus dans $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker}(f - aid)$ ne sont pas supplémentaires dans E. L'entier cherché est donc $n - 1$.

3. a) On a $(f - aid) \circ f^{n-1} = 0$ donc $\operatorname{Im} f^{n-1} \subset \operatorname{Ker}(f - aid)$.
Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(f - aid)$, $x = f^{n-1}\big(\dfrac{1}{a^{n-1}} x\big)$ donc $x \in \operatorname{Im} f^{n-1}$.
Finalement, $\operatorname{Ker}(f - aid) = \operatorname{Im} f^{n-1}$.

b) D'après a) et 2., $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Im} f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E.

Si $n = 2$, l'entier ℓ cherché est donc $1 = n - 1$.

Supposons $n \geqslant 3$ et montrons par l'absurde que si $k \in [\![1, n-2]\!]$, $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ ne sont pas supplémentaires dans E.
En effet, si on avait $E = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$ pour un $k \in [\![1, n-2]\!]$, alors pour tout x de E, il existerait $(y, z) \in \operatorname{Ker} f^k \times E$ tel que $x = y + f^k(z)$ d'où l'on déduirait $f^{n-2}(x) = 0 + f^{n+k-2}(z) = f^{n+k-2}(z)$ et

$$\begin{aligned} f^{n-1}(x) = f^{n-1+k}(z) = f^n(f^{k-1}(z)) = af^{n-1}(f^{k-1}(z)) = af^{n+k-2}(z) \\ = af^{n-2}(x), \end{aligned}$$

donc $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses. Le plus petit entier naturel non nul ℓ tel que $\operatorname{Ker} f^\ell$ et $\operatorname{Im} f^\ell$ soient supplémentaires dans E est donc dans tous les cas $n - 1$.

Exercice 2.24.

Pour tout p entier positif, on note E_p l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ; on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Si ψ est un endomorphisme d'un espace vectoriel et k un entier positif, on note ψ^k l'itéré k fois de ψ. Soient m et n deux entiers strictement positifs fixés. Pour $P \in E_m$ fixé de degré m, on note :

$$\varphi : E_n \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), Q \mapsto (PQ)^{(n)}$$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f).

1. Justifier le fait que φ est linéaire ; déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur (m,n) pour que φ soit inversible.

2. On suppose $P(X) = X^n$; déterminer les éléments propres de φ.

3. On suppose $m = n$ et on pose $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$. Établir la formule :

$$\varphi(X^k + b_{k-1}X^{k-1} + \cdots + b_0) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(n+r)!}{r!}\Big(\sum_{\ell=r}^{k} b_\ell a_{n+r-\ell}\Big)X^r$$

pour $k \leqslant n$. En déduire les valeurs propres de φ.

4 On suppose $m < n$; montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que $\varphi^{n_0-1} \neq 0$ et $\varphi^{n_0} = 0$.

Solution :

1. $Q \mapsto PQ$ est linéaire ainsi que la dérivation (n fois) donc φ aussi. On a $\deg\varphi(Q) = \deg Q + m - n$, avec la convention $\deg R < 0 \iff R = 0$. Il s'ensuit que si $m \leqslant n$, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\{\varphi(1), \cdots, \varphi(X^n)\} = E_m$, parce que ces derniers vecteurs, s'ils ne sont pas nuls, sont de degrés échelonnés, et $Ker\varphi = E_{n-m-1}$.
Si $m > n$, les degrés de $\varphi(1), \cdots, \varphi(X^n)$ sont encore échelonnés donc cette famille est libre et engendre un sous-espace de dimension $n+1$ de E_m. Dans ce cas, $Ker\varphi = \{0\}$, mais φ ne peut plus être considérée comme un endomorphisme.
Si $m = n$, φ est un automorphisme, si $m > n$, φ est injective donc $\varphi : E_n \to Im\varphi$ est inversible, et si $m < n$, φ n'est pas inversible.

2. Dans ce cas, $\varphi(X^k) = \dfrac{(n+k)!}{k!}X^k$, donc la base canonique est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres distinctes $n!, \ldots, \dfrac{(2n)!}{n!}$.

3. On a $(PQ)(X) = \sum\limits_{\ell=0}^{n+k}\Big(\sum\limits_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i}\Big)X^\ell$, avec la convention

$$a_{n+1} = \cdots = a_{n+k} = b_{k+1} = \cdots = b_{n+k} = 0 \text{ et } b_k = 1$$

donc

$$\varphi(Q)(X) = \sum_{\ell=n}^{n+k}\frac{\ell!}{(\ell-n)!}\Big(\sum_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i}\Big)X^{\ell-n} = \sum_{r=0}^{k}\frac{(n+r)!}{r!}\Big(\sum_{i=r}^{k} b_i a_{n+r-i}\Big)X^r$$

(après le changement d'indice $\ell = n + r$). Donc $\varphi(Q) = \lambda.Q$ est équivalent au système (triangulaire) :

$$\begin{cases} a_n \dfrac{(n+k)!}{k!} = \lambda \\ \dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!}(b_{k-1}a_n + a_{n-1}) = \lambda b_{k-1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ n!(b_0 a_n + \cdots + b_k a_{n-k}) = \lambda b_0 \end{cases}$$

Ce système admet encore une unique solution (en les inconnues $b_0, \ldots, b_{k-1}$), donc le spectre de φ est le même que précédemment à la constante multiplicative a_n près.

4. On a $\deg(\varphi^k(X^n) = n - k(n-m)$, donc on cherche le plus petit entier n_0 tel que $n - n_0(n-m) < 0$, soit $n_0 = \lfloor \frac{n}{n-m} \rfloor + 1$.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur ; n personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X dans les cas suivants :

a) dans le cas $p = 2$ et $n \geqslant 2$;

b) dans le cas $n = 2$ et $p \geqslant 2$.

2. On revient au cas général.

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $Y_{i,j}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $j^{\text{ème}}$ passager descend au $i^{\text{ème}}$ étage et la valeur 0 sinon.

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'ascenseur s'arrête au $i^{\text{ème}}$ étage et la valeur 0 sinon.

a) Déterminer les lois des variables $Y_{i,j}$ et X_i .

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

c) Calculer la probabilité $P(X = 1)$.

d) On note S_a^b le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal a sur un ensemble de cardinal b. Donner la loi de X en fonction des nombres S_a^b.

e) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\min(n,p)} \mathrm{C}_{p-1}^{k-1} S_n^k = p^n - (p-1)^n$.

Solution :

1. a) Dans le cas où $p = 2$ et $n \geqslant 2$, on a $X(\Omega) = \{1, 2\}$. L'événement $(X = 1)$ correspond au fait que les n personnes descendent au même étage, et il n'y a que deux étages. Donc :

$$P(X = 1) = 2\big(\frac{1}{2}\big)^n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad P(X = 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Un calcul immédiat donne :

$$E(X) = 2 - \big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}, \qquad V(X) = \big(\frac{1}{2}\big)^{n-1} - \big(\frac{1}{2}\big)^{2n-2}$$

b) Dans le cas où $p \geqslant 2$ et $n = 2$, on a $X(\Omega) = \{1, 2\}$. L'événement $(X = 1)$ correspond au fait que les 2 personnes descendent au même étage, et il y a p étages. Donc

$$P(X = 1) = p\big(\frac{1}{p}\big)^2 = \frac{1}{p}, \quad P(X = 2) = 1 - P(X = 1) = \frac{p-1}{p}$$

Un calcul immédiat donne :

$$E(X) = \frac{2p-1}{p}, \qquad V(X) = \frac{p-1}{p^2}$$

2. a) La variable aléatoire $Y_{i,j}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\frac{1}{p}\big)$, et à i fixé, les variables $Y_{i,j}$ $(j \in [\![1, n]\!])$ sont indépendantes. Ainsi :

$$P(X_i = 0) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} (Y_{i,j} = 0)\Big) = \big(\frac{p-1}{p}\big)^n$$

Aussi, X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big)$.

b) On sait que $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$. Donc

$$E(X) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = p\big(1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big)$$

et

$$V(X) = \sum_{i=1}^{p} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant p} \mathrm{Cov}(X_i, X_k)$$

La variable $X_i X_k$ suit une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre :

$$P(X_i X_k = 0) = P(X_i = 0) + P(X_k = 0) - P(X_i = 0 \cap X_k = 0)$$

avec

$$P(X_i = 0 \cap X_k = 0) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} (Y_{i,j} = 0) \cap (Y_{i,k} = 0)\Big) = \big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

Donc :

$$P(X_i X_k = 0) = 2\big(\frac{p-1}{p}\big)^n - \big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

Ainsi :

$$E(X_i X_k) = P(X_i X_k = 1) = 1 - 2\big(\frac{p-1}{p}\big)^n - \big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

et

$$\text{Cov}(X_i, X_k) = 1 - 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^n - \left(\frac{p-2}{p}\right)^n - \left[1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right]^2$$

On termine le calcul et il vient :

$$V(X) = \frac{p^{n-1}(p-1)^n - (p-1)^{2n} + p^{n-1}(p-1)(p-2)^n}{p^{2n-2}}$$

c) Un raisonnement identique à celui de la première question donne :

$$P(X=1) = p\left(\frac{1}{p}\right)^n = \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}.$$

d) On sait que $X(\Omega) = [\![1, \min(n,p)]\!]$. Pour obtenir l'événement $(X = k)$, on doit choisir k étages parmi les p possibles, puis l'une des S_n^k surjections des n personnes sur ces k étages. Ainsi :

$$P(X=k) = \frac{\binom{p}{k} S_n^k}{p^n}$$

e) Comme

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \frac{k\binom{p}{k} S_n^k}{p^n} = p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)$$

et comme $k\dbinom{p}{k} = p\dbinom{p-1}{k-1}$, il vient finalement :

$$\sum_{k=1}^{\min(n,p)} \binom{p-1}{k-1} S_n^k = p^n - (p-1)^n$$

Exercice 3.2.

Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et que pour $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = k)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k\}$.

On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(N = k)$.

1. a) Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.

b) Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $P(X = i)$, pour $i \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2. On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ vérifiant $\forall k \geqslant n+1, p_k = 0$ et $\forall k \leqslant n, p_k > 0$.

a) Justifier l'existence des espérances et variances de N et de X et de la covariance de N et X.

b) Trouver une relation entre $E(N)$ et $E(X)$, puis entre $V(N)$ et $\text{Cov}(N, X)$.

c) Calculer $\text{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3. On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

a) Déterminer explicitement la loi du couple (X, N) et la loi de X.

b) Les variables X et N admettent-elles une espérance ?

c) Montrer que les espérances $E\big(\frac{1}{X+1}\big)$ et $E\big(\frac{1}{N+1}\big)$ existent et les calculer.

Solution :

1. a) Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$P(X = i \cap N = k) = P(X = i/N = k)P(N = k) = \frac{p_k}{k+1}.$$

Sinon, $P(X = i \cap N = k) = 0$.

b) Immédiatement, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P(X = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = i \cap N = k) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{p_k}{k+1}$$

c) Comme $P(X - N < 0) = 0$, on peut dire que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P(N - X = i) = \sum_{k=i}^{\infty} P(N = k \cap X = k - i) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} = P(X = i)$$

Ainsi, X et $N - X$ suivent la même loi.

2. a) Les variables aléatoires N et X prennent un nombre fini de valeurs, ce qui assure l'existence de leurs moments.

b) De plus

$$E(N - X) = E(X) \implies E(N) = 2E(X)$$
$$V(N - X) = V(X) \implies V(N) = 2\,\mathrm{Cov}(N, X)$$

c) On a $\mathrm{Cov}(N, N - 2X) = V(N) - 2\,\mathrm{Cov}(N, X) = 0$.
et

$$P(N = 1) = p_1 > 0, \quad P(N - 2X = 2) \geqslant P(X = 0 \cap N = 2) = \frac{p_2}{3} > 0$$

Comme $(N = 1) \cap (N - 2X = 2)$ est impossible, il vient :

$$0 = P(N = 1 \cap N - 2X = 2) \neq P(N = 1)P(N - 2X = 2).$$

Les variables aléatoires N et $N - 2X$ ne sont pas indépendantes.

3. a) Pour $i \in [\![0, k]\!]$ et $k \geqslant 2$, on a :
$P(X = i \cap N = k) = \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)} = \dfrac{1/2}{k-1} - \dfrac{1}{k} + \dfrac{1/2}{k+1}$, ou mieux :

$$P(X = i \cap N = k) = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\Big)$$

Sinon, $P(X = i \cap N = k) = 0$.

On a, par télescopage :

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{4}$$

et pour tout $i \geqslant 2$:

$$P(X = i) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2(i-1)i}$$

b) La série harmonique étant divergente, les variables aléatoires N et X n'ont pas d'espérance.

c) Comme $\frac{1}{(n-1)n(n+1)} \sim \frac{1}{n^3}$, les variables aléatoires $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{1}{N+1}$ admettent une espérance, et :

$$E\Big(\frac{1}{X+1}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2(i-1)i(i+1)} = \frac{1}{2}$$

$$E\Big(\frac{1}{N+1}\Big) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i(i+1)} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 3.3.

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirages effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenues lors de cette série de tirages.

1. Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirages est nulle. Qu'en déduit-on ?
Préciser la loi de X.

2. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}.$$

(On pourra être amené à calculer $\lim\limits_{N\to\infty} (1-a) \sum\limits_{k=0}^{N} \binom{k+n+1}{n+1} a^k$.)

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.

4. Ecrire un programme Pascal permettant de simuler cette expérience et donnant X et Y.
(On pourra utiliser la fonction `random` qui renvoie une valeur réelle au hasard entre 0 et 1.)

Solution :

1. Notons A_0 l'événement «ne pas obtenir de boule bleue», pour tout $k \geqslant 1$, A_k l'événement «obtenir une première boule bleue au k-ième tirage», et A l'événement «obtenir au plus une boule bleue».

On peut écrire $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, cette réunion étant disjointe. On a donc :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

Pour tout $k \geqslant 1$, soit B_k l'événement «ne pas obtenir de boule bleue avant le k-ième tirage». La suite (B_k) est décroissante et $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Ainsi :

$$P(A_0) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \Big(\frac{p+q}{p+q+r}\Big)^k = 0.$$

Le raisonnement pour tout A_k (avec $k \geqslant 1$) est identique. Ainsi, pour tout $k \geqslant 0, P(A_k) = 0$ et $P(A) = 0$.

On en déduit que X est une variable aléatoire, avec $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$, et pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(X = k) = (k-1)r^2(p+q)^{k-2}$$

2. Effectuons une démonstration par récurrence sur n.

- pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$.
- supposons le résultat vérifié pour un certain rang n. Alors :

$$S = (1-a)\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k - \sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^{k+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N}\left(\binom{k+n+1}{n+1} - \binom{k+n}{n+1}\right)a^k + \binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N}\binom{k+n}{n}a^k + \binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

$$S = \sum_{k=0}^{N}\binom{k+n}{n}a^k + \binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n}{n}a^k = \dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$ par l'hypothèse de récurrence et

$$\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1} \sim \frac{(N+1)^k}{k!}a^{N+1} \implies \lim_{N\to+\infty}\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1} = 0$$

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-a)\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k = \dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$ donne

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n+1}{n+1}a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+2}}$$

Ce qui est bien le résultat attendu au rang $n+1$.

3. • si $\ell \geqslant k-1$, on a $P(X = k \cap Y = \ell) = 0$.

- si $\ell \leqslant k-2$, on a $P(X = k \cap Y = \ell) = (k-1)r^2\binom{k-2}{\ell}p^\ell q^{k-2-\ell}$.

Le coefficient $(k-1)$ correspond à l'emplacement de la première boule bleue, r^2 est la probabilité d'obtenir 2 boules bleues à des rangs donnés,

$\binom{k-2}{\ell}p^\ell q^{k-2-\ell}$ est la probabilité que les places restantes soit occupées par des boules jaunes et noires en nombres adéquats.
Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, il vient, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P(Y = \ell) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = k \cap Y = \ell) = \sum_{k=\ell+2}^{\infty} (k-1)r^2 \binom{k-2}{\ell} p^\ell q^{k-2-\ell} \\
&= r^2 p^\ell \sum_{k=\ell+2}^{\infty} (\ell+1)\binom{k-1}{\ell+1} q^{k-2-\ell} \\
&= r^2 p^\ell (\ell+1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\ell+1}{\ell+1} q^k = (1+\ell)\frac{r^2 p^\ell}{(1-q)^{\ell+2}}
\end{aligned}$$

4. Une proposition de programme

```
Program bleu
Var x,y : integer ;
  p,q,a : real ;
Begin
readln(p,q) ;
randomize ;
x :=0 ; y := 0 ;
repeat
  a := random
  If a>= 1-q then y := y+1 ;
  x := x+1 ;
until a <= p ;
writeln(x,y) ;
readln
end.
```

Exercice 3.4.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général u_n où :

$$u_n = \frac{P(X > n)}{P(X = n)}$$

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre k, avec $k > 0$. Étudier la convergence et déterminer
la limite éventuelle de la suite de terme général u_n où :

$$u_n = \frac{P(Y > n)}{P(Y = n)}$$

3. a) On pose $w_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2}$.

Déterminer un équivalent de w_n de la forme $\dfrac{C}{n^\alpha}$, où C et α sont deux constantes que l'on calculera.

b) Déterminer une variable aléatoire Z à valeurs dans N^* telle que la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(Z > n)}{P(Z = n)}$ diverge vers l'infini.

4. Soit x un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Discuter l'existence d'une variable aléatoire T telle que la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(T > n)}{P(T = n)}$ admette comme limite x.

Solution :

1. On sait que : $P(X > n) = p \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k = \dfrac{pq^n}{1-q} = q^n$ (on peut aussi se contenter de dire que, dans le modèle du temps d'attente d'un premier succès, $(X > n)$ est réalisé si et seulement si on commence par n échecs).

Donc :

$$\frac{P(X > n)}{P(X = n)} = \frac{q}{p}$$

2. On sait que

$$\begin{aligned}P(Y > n) = \sum_{p=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k} \frac{k^p}{p!} &= \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(1 + \frac{k}{n+2} + \frac{k^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots\big)\\ &\leqslant \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{k}{n+2})^j\big) = \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(\frac{1}{1-\frac{k}{n+2}}\big)\end{aligned}$$

pour n tel que $n > k-2$, d'où :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. a) En utilisant une comparaison série—intégrale, on peut écrire par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

soit :

$$\frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

Ainsi $w_n \sim \dfrac{1}{n}$.

b) Soit Z une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout $n \geqslant 1$

$$P(Z = n) = \frac{c}{n^2}$$

la constante c étant déterminée par le fait que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c}{n^2} = 1$ (on peut savoir que $c = \dfrac{6}{\pi^2}$).

On a alors : $u_n \sim \dfrac{1/n}{c/n^2} = \dfrac{n}{c} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Si $x < 0$, c'est impossible, puisque l'on travaille avec des probabilités.
Si $x \geqslant 0$, c'est possible comme le montrent les questions précédentes, puisque, lorsque p décrit $]0,1[$, alors q/p décrit $]0,+\infty[$.

Exercice 3.5.

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|) & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

b) Determiner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$ et Z une variable aléatoire à densité, indépendante de Y, telle que $X = Y + Z$. On note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x+1) - F_Z(x-1) = 2f(x)$.

b) Déterminer F_Z et en déduire la loi de Z.

3. Soient U et V deux variables à densité indépendantes de Y telles que les variables $Y+U$ et $Y+V$ suivent la même loi de densité g. On note F_U et F_V les fonctions de répartition de U et V et on pose $\Phi = F_U - F_V$.

a) Montrer que Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2-périodique, et étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Conclure.

Solution :

1. a) On vérifie de façon immédiate que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 1$ (aire d'un triangle ...).

b) L'espérance $E(X)$ est nulle, car la variable X est bornée et la fonction f est paire. Un calcul simple donne $E(X^2) = V(X) = \dfrac{2}{3}$.

2. a) On sait, par le cours, que :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t) f_Z(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_Z(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\big(F_Z(x+1) - F_Z(x-1)\big)$$

(car $-1 \leqslant x - t \leqslant 1 \Longleftrightarrow x - 1 \leqslant t \leqslant x + 1$).

b) La relation précédente permet de dire que pour tout x réel :

$$F_Z(x) = F_Z(x-2) + 2f_Z(x-1)$$

et $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2 \Longleftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$.

- si $x \leqslant -1$, $f_Z(x-1) = 0$, donc $F_Z(x) = F_Z(x-2)$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_Z(x) = F_Z(x-2n)$. Donc

$$F_Z(x) = \lim_{n\to+\infty} F_Z(x-2n) = 0$$

- si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $F_Z(x-2) = 0$ et $f(x-1) = \frac{1}{4}(2 + (x-1)) = \frac{x+1}{4}$.
- si $x \geqslant 1$, $F_Z(1) \leqslant F_Z(x) \leqslant 1$. Donc $F_Z(x) = 1$.

On voit donc que Z suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

3. a) On a de même, pour tout x réel

$$\begin{cases} F_U(x+1) - F_U(x-1) = 2g(x) \\ F_V(x+1) - F_V(x-1) = 2g(x) \end{cases}$$

Donc, pour tout réel x

$$\Phi(x+1) - \Phi(x-1) = 0$$

ce qui signifie que Φ est 2 périodique. Il est évident que Φ est continue, puisque F_U, F_V le sont. Enfin

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (F_U(x) - F_V(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (F_U(x) - F_V(x) = 0 \end{cases}$$

b) La fonction Φ étant 2-périodique, on obtient, pour tout réel x, par récurrence, que $\Phi(x) = \Phi(x-2n)$. Donc

$$\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x-2n) = 0$$

La fonction Φ est identiquement nulle, donc $F_U = F_V$. Les variables aléatoire U et V suivent la même loi.

Exercice 3.6.

Soit T une variable aléatoire positive définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, de fonction de répartition F et de densité f continue.

1. Montrer que pour tout $u > 0$:

$$\frac{1}{u}\, P(t < T < t+u \;/\; T > t) = \frac{1}{1-F(t)} \times \frac{1}{u}\int_t^{t+u} f(s)\, ds$$

En déduire que :

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\, P(t < T < t+u \;/\; T > t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

On note désormais $h_T(t)$ cette limite.

2. On suppose dans cette question que T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Calculer $h_T(t)$.

b) On suppose que la fonction h_T est constante (pour tout $t, h(t) = C$). Montrer que T suit une loi exponentielle.

3. On suppose dans cette question que T_1, T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, avec pour $i = 1, 2$, T_i suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda_i)$.
On pose $T = \sup(T_1, T_2)$.

a) Déterminer la loi de T.

b) Déterminer h_T en fonction de h_{T_1} et h_{T_2}.

c) Étudier les variations de h_T dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$.

Solution :

1. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}P(t < T < t+u/T > t) &= \frac{1}{u}\times\frac{P((t < T < t+u)\cap(T > t))}{P(T > t)}\\ &= \frac{1}{u}\times\frac{P(t < T < t+u)}{P(T > t)}\\ &= \frac{1}{1-F(t)}\times\frac{1}{u}\int_t^{t+u} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{u}\int_t^{t+u} f(s)\,ds - f(t) = \frac{1}{u}\int_t^{t+u}\big(f(s)-f(t)\big)\,ds$$

La fonction f est continue en t :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 \text{ tel que } |s-t| < \delta \implies |f(s)-f(t)| < \varepsilon.$$

Choisissons u tel que $|u| < \delta$. Alors $t < s < t+u \implies 0 < s-t < \delta$ et

$$\left|\frac{1}{u}\int_t^{t+u}\big(f(s)-f(t)\big)\,ds\right| < \varepsilon$$

2. a) Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, il vient immédiatement :

$$h_T(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda.$$

b) Réciproquement, supposons que $h_T(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)} = C > 0$.

Comme $\dfrac{d}{dt}\big(1-F(t)\big) = -f(t)$, il vient pour un certain $A \in \mathbb{R}$:

$$-\ln\big(1-F(t)\big) = Ct + A, \text{ soit } 1-F(t) = \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^{-Ct}$$

Pour $t = 0$, on obtient $e^{-A} = 1$, donc

$$f(t) = C.\mathrm{e}^{-Ct}$$

ce qui signifie que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(C)$.

3. Posons $T = \max(T_1, T_2)$. Alors :

a) $P(T \leqslant t) = P((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t)) = P(T_1 \leqslant t)P(T_2 \leqslant t) = F_1(t)F_2(t)$. Donc

$$F(t) = P(T \leqslant t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t})(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t})$$

b) Un calcul élémentaire donne :

$$h_T(t) = \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$h_T(t) = 2\lambda \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Cette fonction est dérivable et :

$$h'_T(t) = 2\lambda \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(2 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2}$$

La fonction h_T est donc croissante avec le temps t.

Exercice 3.7.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de fonction de répartition F. On dit que X est *symétrique* si pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \in -I) = P(X \in I)$$

où $-I = \{-x \ / \ x \in I\}$.

1. Montrer qu'une variable aléatoire X est symétrique si et seulement si pour tout x réel, $F(x) = 1 - F(-x)$.

Dans toute la suite X désigne une variable aléatoire symétrique.

2. Soit ε une variable aléatoire réelle, indépendante de X définie par :

$$P(\varepsilon = 1) = p, \quad P(\varepsilon = -1) = q = 1 - p, \text{ avec } 0 < p < 1$$

a) Montrer que X et $Y = \varepsilon X$ suivent la même loi.

b) On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Calculer $E(XY)$, puis $\sigma(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Quand a–t–on $\sigma(X, Y) = 0$?

3. Pour tout ensemble A, on définit la variable aléatoire 1_A par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On définit une variable aléatoire Z par :

$$Z = 1_{\{\omega \ / \ X(\omega) > 0\}} - 1_{\{\omega \ / \ X(\omega) < 0\}}$$

a) Déterminer la loi de Z.

b) Déterminer les lois des variables aléatoires X^2 et εX^2, puis calculer $\sigma(X, Z|X|)$.

Solution :

1. Si X est une variable aléatoire symétrique, prenons $I =]x, +\infty[$, ou $[x, +\infty[$. On a alors $-I =]-\infty, -x[$ ou $]-\infty, -x]$ et :

$$F(I) = P(X \in I) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x)$$
$$F(-I) = P(X \in -I) = P(X \leqslant -x)$$

Donc :

$$F(I) = F(-I) \Longleftrightarrow P(X \leqslant x) = 1 - P(X \leqslant -x), \text{ ou } F(x) = 1 - F(-x)$$

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - F(-x)$.

• si $I =]x, +\infty[$, alors $P(X \geqslant x) = P(X \leqslant -x)$ ou $F(I) = F(-I)$.

• si $I = [a, b]$, alors $F(I) = P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$ et
$F(-I) = P(X \in [-b, -a]) = F(-a) - F(-b)$.
Mais $F(b) - F(a) = 1 - F(-b) - 1 + F(-a) = F(-a) - F(-b)$, d'où le résultat.

2. a) Pour tout a réel :

$$\begin{aligned} P(\varepsilon X \leqslant a) &= P((X \leqslant a) \cap (\varepsilon = 1)) + P((X \geqslant -a) \cap (\varepsilon = -1)) \\ &= pF(a) + qF(a) = F(a) = P(X \leqslant a) \end{aligned}$$

Donc X et εX ont même loi.

b) Calculons la loi de X^2. Evidemment, si $a \leqslant 0$, $P(X^2 \leqslant a) = 0$ et si $a > 0$:

$$P(X^2 \leqslant a) = P(-\sqrt{a} \leqslant X \leqslant \sqrt{a}) = F(\sqrt{a}) - F(-\sqrt{a}) = -1 + 2F(\sqrt{a})$$

Calculons la loi de εX^2.

$$P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = P((X^2 \leqslant a) \cap (\varepsilon = 1)) + P((X^2 \geqslant -a) \cap (\varepsilon = -1))$$

Donc

• si $a < 0$, $P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = 2q(1 - F(\sqrt{-a}))$

• si $a > 0$, $P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = p(2F(\sqrt{a}) - 1) + q$

L'espérance de εX^2 est

$$\begin{aligned} E(\varepsilon X^2) &= 2q \int_{-\infty}^{0} \frac{t}{2\sqrt{-t}} f(\sqrt{-t})\, dt + 2p \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{2\sqrt{t}} f(\sqrt{t})\, dt \\ &= -2q \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du + 2p \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du \\ &= 2(p - q) \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du = (p - q) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\, du \\ &= (p - q) E(X^2) \end{aligned}$$

Ainsi, comme f est paire, $E(\varepsilon X) = 0$ et $\sigma(X, Y) = (p - q)E(X^2) = 0$ si et seulement si $p = q = 1/2$.

3. a) Comme $P(X = 0) = 0$, il vient

$$P(Z = 1) = P(X > 0) = P(-X < 0) = P(Z = -1)$$

Donc :

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

b) On a

$$Z|X| = |X|.1_{(X>0)} - |X|.1_{(X<0)} = X.1_{(X>0)} + X.1_{(X<0)} = X$$

Donc

$$E(Z|X|) = E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X, Z|X|) = 0$$

Exercice 3.8.

On cherche à estimer le nombre d'étudiants en France connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on interroge des étudiants. A chacun, on propose trois définitions différentes A, B et C, la réponse correcte étant la réponse A.

Soit θ la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la réponse correcte.

Tout étudiant connaissant la réponse correcte la donne, sinon il choisit au hasard une des trois réponses proposées.

1. a) Calculer les probabilités P_A, P_B et P_C qu'un étudiant interrogé donne respectivement les réponses A, B ou C. Exprimer θ en fonction de P_A.

b) Quelle est la probabilité qu'une personne ayant choisi la réponse A connaisse réellement la signification du sigle URSSAF ?

2. a) On veut faire une estimation du paramètre θ. Pour cela, on constitue dans la population n groupes de 30 personnes qui seront interrogées par un enquêteur.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable égale au nombre de réponses A obtenues dans le groupe i.

On suppose les X_i mutuellement indépendantes et on pose $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{30n}$.

Déterminer la loi de Z_n.

Déterminer, à partir de Z_n un estimateur sans biais T_n de θ. Cet estimateur est-il convergent ?

b) On pose $T_n = \dfrac{3Z_n}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0, P(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{3}{160n\varepsilon^2}$.

On dit que T_n converge en probabilité vers θ.

3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une réalisation de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dans cette question, on cherche à estimer $P_A = p$, puisqu'alors, on pourra en déduire une estimation de θ.

Pour tout p dans $[0,1]$ on définit la vraisemblance au point p par la fonction L telle que : $L(x_1,\dots,x_n,p)=\prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$.
On suppose $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ fixé dans $[\![1,30]\!]^n$.
Etudier les variations de la fonction partielle $f : p \to \ln(L(x_1,\dots,x_n,p))$.
Montrer que cette fonction passe par un maximum pour $p=\dfrac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
On dit alors que l'estimateur $Z_n = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{30n}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p.

Solution :

1. a) Notons E l'événement «l'étudiant connaît la réponse exacte», et R_A, R_B, R_C les événements «l'étudiant répond A» (resp. B, C).
Ainsi
$p_A = P(R_A) = P(R_A/E)P(E) + P(R_A/\overline{E})P(\overline{E}) = \theta + \frac{1}{3}(1-\theta) = \frac{1+2\theta}{3}$
Donc $\theta = \dfrac{3p_A-1}{2}$.
Et :

$$p_B = P(R_B) = P(R_B/E)P(E) + P(R_B/\overline{E})P(\overline{E}) = \frac{1}{3}(1-\theta) = p_C$$

b) On a :

$$P(E/R_A) = \frac{P(R_A/E)P(E)}{P(R_A)} = \frac{3\theta}{1+2\theta}$$

2. a) Les (X_i) forment un échantillon indépendant et identiquement distribué. Ainsi Z_n étant une fonction des (X_i), est un estimateur. On a $E(Z_n) = E(X_i)$. Or X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30,p_A)$. Donc

$$E(Z_n) = p_A = \frac{1+2\theta}{3}$$

Aussi Z_n n'est pas un estimateur sans biais de θ, mais $T_n = \dfrac{3Z_n-1}{2}$, vérifie :

$$E(T_n) = \theta, V(T_n) = \frac{9}{4}V(Z_n) = 30\frac{p_A(1-p_A)}{400n} \leqslant \frac{3}{160n}, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$$

donc t_n est un estimateur sans biais convergent de θ.
(on a utilisé la relation bien connue : $p \in [0,1] \implies p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$)

b) Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Cebicev donne :

$$P(|T_n-\theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{3}{160n\varepsilon^2}$$

3. On a

$$L(x_1,\dots,x_n,p) = \prod_{k=1}^{n} \binom{30}{x_k} p^{x_k}(1-p)^{30-x_k}$$

et

$$f : p \mapsto \ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\binom{30}{x_k}\Big) + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln p + \sum_{k=1}^{n}(30 - x_k)\ln(1-p)$$

Ainsi :

$$f'(p) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(30 - x_k) = \frac{1}{p(1-p)}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k - 30np\Big)$$

Et f passe par un maximum en $p = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{30n}$.

Exercice 3.9.

Une urne contient N jetons numérotés $1, 2, \dots k$ ($3 \leq k \leq N$), pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note n_i le nombre de jetons portant le numéro i et $p_i = \dfrac{n_i}{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on effectue dans cette urne n tirages successifs d'un jeton avec remise.

1. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant le numéro i.
Déterminer la loi de N_i, son espérance et sa variance.

2. a) Pour $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance et sa variance.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(N_i, N_j)$ et vérifier que le coefficient de corrélation de (N_i, N_j) est bien entre -1 et 1. Dans quel cas vaut-il -1 ? Que pensez-vous de ce résultat ?

3. a) On pose Z_n la variable prenant pour valeurs le nombre de numéros qui ne sont pas sortis. Calculer, sans passer par sa loi, l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n)$.

b) Comparer $P(Z_n \geq 1)$ et $E(Z_n)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

Solution :

1. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la variable aléatoire N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$. Ainsi $E(N_i) = np_i$ et $V(N_i) = np_i(1 - p_i)$.

2. a) On a $(N_i + N_j)(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(N_i + N_j = k) &= \sum_{x=0}^{k} P(N_i = x \cap N_j = k - x)\\
&= \sum_{x=0}^{k}\binom{n}{x}p_i^x\binom{n-x}{k-x}p_j^{k-x}(1 - p_i - p_j)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}(1 - p_i - p_j)^{n-k}\sum_{x=0}^{k}\binom{n}{x}p_i^x p_j^{k-x}
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{k}(1-p_i-p_j)^{n-k}(p_i+p_j)^k$$

Aussi N_i+N_j suit–elle la loi $\mathcal{B}(n, p_i+p_j)$. Donc $E(N_i+N_j) = n(p_i+p_j)$ et $V(N_i+N_j) = n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)$.

b) Par la formule de la variance d'une somme, il vient :

$$\mathrm{Cov}(N_i, N_j) = -np_ip_j, \quad \rho(N_i, N_j) = -\frac{p_ip_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}}$$

Demander si $\rho(N_i, N_j) \in [-1, 1]$ est équivalent à demander si $\rho^2(N_i, N_j) \leqslant 1$ ou si $p_i^2p_j^2 \leqslant p_ip_j(1-p_i)(1-p_j)$. En développant, ceci est équivalent à $p_i+p_j \leqslant 1$, ce qui est vrai.

Enfin, $\rho(N_i, N_j) = -1$ si et seulement si $p_ip_j = p_ip_j(1-p_i)(1-p_j)$ si et seulement si $p_i+p_j = 1$.

L'urne n'est donc composée que de deux jetons ($k = 2$), et $N_i+N_j = n$. Dans ce cas, N_i et N_j sont liés par une relation affine.

3. a) Soit X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i n'est pas sorti, et prenant la valeur 0 sinon. Bien évidemment $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ et $E(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{k} E(X_i)$.

La variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $(1-p_i)^n$. Donc

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{k}(1-p_i)^n$$

et, comme $p_i > 0$ pour tout i

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to+\infty}(1-p_i)^n = 0$$

b) On a

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} iP(Z_n = i) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} P(Z_n = i) = P(Z_n \geqslant 1)$$

D'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \geqslant 1) \leqslant \lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1.$$

Exercice 3.10.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Déterminer pour tout u réel, l'espérance de la variable aléatoire e^{uX}.

2. Pour tout ensemble A, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soit u un réel positif et $x \in]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\mathrm{e}^{u(X-(1+x)\lambda)} \geqslant 1_{\{\omega\in\Omega | X(\omega)\geqslant(1+x)\lambda\}}$$

b) En déduire que :

$$P(X \geqslant (1+x)\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-[u(1+x)+1-\mathrm{e}^u]\lambda}$$

3. Étudier sur $\mathbb{R}^+$ la fonction :

$$\varphi_x : u \mapsto u(1+x) + 1 - \mathrm{e}^u$$

Montrer que φ_x est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^+} \varphi_x(u) = (1+x)\ln(1+x) - x = h(x)$$

En déduire que :

$$P(X \geqslant (1+x)\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda h(x)}$$

4. a) Montrer que pour tout $u < 0$:

$$P(X \leqslant (1-x)\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-[u(1-x)+1-\mathrm{e}^u]\lambda}$$

b) Montrer que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^-} u(1-x) + 1 - \mathrm{e}^u = h(-x)$$

puis que :

$$P(X \leqslant (1-x)\lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)}$$

5. En déduire que :

$$P(|X - E(X)| > \lambda x) \leqslant 2\max(\mathrm{e}^{-\lambda h(x)}, \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)})$$

Solution :

1. On peut écrire :

$$E(\mathrm{e}^{uX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{uk}\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{uk}\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^u} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)}$$

2. a) Notons $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant (1+x)\lambda\}$.

- si $\omega \notin A$, on a $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))} \geqslant 0 = 1_A(\omega)$.
- si $\omega \in A$, on a $X(\omega) - \lambda(1+x) \geqslant 0, u \geqslant 0$; donc $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))} \geqslant 1 = 1_A(\omega)$.

b) Par positivité de l'espérance

$$\begin{aligned} E(1_A) = P(A) = P(X \geqslant (1+x)\lambda) &\leqslant E(\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))}) \\ &= E\big(\mathrm{e}^{-u(1+x)\lambda}\mathrm{e}^{uX}\big) = \mathrm{e}^{-u(1+x)\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)} = \mathrm{e}^{(-u(1+x)+1-\mathrm{e}^u)\lambda} \end{aligned}$$

3. La fonction φ_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa dérivée φ_x' est égale à

$$\varphi_x'(u) = (1+x) - \mathrm{e}^u$$

La fonction φ_x est croissante sur $[0, \ln(1+x)]$, puis décroissante sur $[\ln(1+x), +\infty[$. Elle atteint son *maximum*, qui est positif (car $x \in]0,1[$) en $u_0 = \ln(1+x)$, ce *maximum* valant :

$$h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

On a montré que $P(X \geqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\varphi_x(u)}$, pour tout $u > 0$. Donc :

$$P(X \geqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda \max_u(\varphi_x(u))} = \mathrm{e}^{-\lambda h(x)}$$

4. a) Notons $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant (1-x)\lambda\}$.

• Si $\omega \notin B$, on a $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))} \geqslant 0 = 1_B(\omega)$.

• Si $\omega \in B$, on a $X(\omega) - \lambda(1-x) \leqslant 0, u \leqslant 0$; donc $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))} \geqslant 1 = 1_B(\omega)$.

b) Par positivité de l'espérance :

$$E(1_B) = P(B) = P(X \leqslant (1-x)\lambda) \leqslant E(\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))}) = E\big(\mathrm{e}^{-u(1-x)\lambda}\mathrm{e}^{uX}\big)$$
$$\leqslant \mathrm{e}^{-u(1-x)\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)} = \mathrm{e}^{-(u(1-x)+1-\mathrm{e}^u)\lambda}$$

Étudions la fonction $\varphi_x : u(1-x)+1-\mathrm{e}^u$; elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^-$. Sa dérivée φ_x' est égale à $\varphi_x'(u) = (1-x) - \mathrm{e}^u$.

La fonction φ_x est croissante sur $]-\infty, \ln(1-x)]$, puis décroissante sur $[\ln(1-x), 0]$. Elle atteint son *maximum*, qui est positif (car $x \in]0,1[$) en $u_1 = \ln(1-x)$, ce *maximum* valant

$$h(-x) = (1-x)\ln(1-x) + x$$

On a montré que $P(X \geqslant \lambda(1-x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\varphi_x(u)}$, pour tout $u < 0$. Donc :

$$P(X \leqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda \max_u(\varphi_x(u))} = \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)}$$

5. Comme $E(X) = \lambda$, on a

$$|X - E(X)| \geqslant \lambda x \Longleftrightarrow (X \geqslant \lambda(1+x)) \cup (X \leqslant \lambda(1-x))$$

Donc

$$P(|X - E(X)| \geqslant \lambda x) \leqslant 2\max(\mathrm{e}^{-\lambda h(x)}, \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)})$$

Exercice 3.11.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } g_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x \geqslant 0.$$

1. a) Déterminer, pour tout n, la constante k_n de faon que la fonction $f_n = k_n g_n$ soit une densité d'une variable aléatoire X_n.

b) Reconnaître la loi de X_n. En déduire son espérance et sa variance.

Vérifier que le rapport $\dfrac{E(X_n)}{V(X_n)}$ est indépendant de n.

c) Déterminer le mode M_n de X_n, c'est-à-dire la valeur pour laquelle f_n atteint son maximum (si cette valeur existe).

Etudier la limite lorsque n tend vers l'infini du rapport $\dfrac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})}$.

2. a) Un observateur boursier analyse, pendant un laps de temps x fixé, les valeurs qui subissent une baisse importante. L'unité de temps utilisée dans cet exercice est la minute.

Il a remarqué que, dans un marché stabilisé, qui n'est pas soumis à de trop importantes perturbations, le temps d'attente entre deux baisses de plus de 5% sur des valeurs est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/2. Ces différents temps d'attente sont indépendants entre eux.

Soit S_n le temps écoulé entre le début de l'observation et le moment où une $n^{\text{ème}}$ valeur subit une baisse de plus de 5%.

Quelle est la loi de S_n ?

b) Soit T le nombre de valeurs ayant baissé de plus de 5% pendant la durée x.

Comparer les événements $[T \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant x]$.

En déduire la loi de T, son espérance et sa variance.

3. Dans le logiciel utilisé par cet observateur, une baisse de plus de 5% d'au moins 25 valeurs durant le laps de temps x déclenche des ordres de vente immédiats.

Quelle est la probabilité qu'un tel cas se présente durant la période d'observation $x = 120$?

(On donne $\Phi(7) = 0,9999$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.)

Solution :

1. a) La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf lorsque $n = 0$, en $x = 0$). La constante k_n doit être positive et vérifier

$$k_n \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x/2}\, dx = 1$$

Le changement de variable affine $u = x/2$ donne :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x/2}\, dx = 2^{n+1} \int_0^{+\infty} u^n.\mathrm{e}^{-u}\, du = 2^{n+1} n!$$

Donc

$$k_n = \frac{1}{n!2^{n+1}}$$

b) Une densité f_n de la variable aléatoire X_n est donc définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Gamma(n+1)} \big(\frac{x}{2}\big)^n \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi X_n suit la loi $\Gamma\big(n+1, \frac{1}{2}\big)$, et :

$$E(X_n) = 2(n+1), V(X_n) = 4(n+1), \text{ d'où } \frac{E(X_n)}{V(X_n)} = \frac{1}{2}$$

c) Le *maximum* de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est égal au *maximum* de la fonction g_n sur $\mathbb{R}$. La dérivée g_n' s'annule en $M_n = 2n$ et :

$$f_n(M_n) = \frac{1}{2^{n+1}n!}2^n n^n \mathrm{e}^{-n}, f_n(M_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}2^{n+1}(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n-1},$$

d'où :

$$\frac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})} = \mathrm{e}\big(\frac{n}{n+1}\big)^n$$

Or :

$$\big(\frac{n}{n+1}\big)^n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{-1+o(1)}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})} = 1$$

2. a) Soit Y_i le temps d'attente entre la i-ème et la $(i+1)$-ème baisse, Y_0 représentant le temps d'attente de la première baisse. La variable aléatoire Y_i suit une loi $\mathcal{E}(1/2)$. On a alors

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \hookrightarrow \Gamma(n,2)$$

b) L'événement $(T \geqslant n)$ signifie qu'en x minutes, il y a eu au moins n valeurs en baisse.

L'événement $(S_n \leqslant x)$ signifie que la n-ème baisse s'est produite avant que le laps de temps x ne se soit écoulé.

Ainsi $(T \geqslant n) = (S_n \leqslant x)$, avec $S_0 = Y_0$.

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P(T\geqslant n) - P(T \geqslant n+1) = P(S_n \leqslant x) - P(S_{n+1} \leqslant x) \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{2^n(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{2^{n+1}n!}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,dt \\ &= \big(\frac{x}{2}\big)^n \frac{1}{n!}\,\mathrm{e}^{-x/2} \end{aligned}$$

Ainsi T suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(x/2)$ et $E(T) = V(T) = \frac{x}{2}$.

3. La variable aléatoire S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Donc $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}}$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On a $E(S_n) = 50, V(S_n) = 100$ et

$$P(T \geqslant 25) = P(S_{25} \leqslant 120) = P\big(\frac{S_{25}-50}{10} \leqslant 7\big) = \Phi(7) = 0.9999$$

L'ordre de vente se déclenchera quasiment sûrement.

Exercice 3.12.

On observe un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

A. Estimation de λ.

On pose $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de λ.
Calculer sa variance. Cet estimateur est–il convergent ?

B. Estimation de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$.

Soit ℓ un réel.

1. On pose $Y = \mathrm{e}^{-\ell\overline{X}}$.
Y est–il un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$? Est–il asymptotiquement sans biais ?

2. Soit Z un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$, fonction de $n\overline{X}$, c'est–à–dire de la forme

$$Z = g(n\overline{X})$$

a) Calculer l'espérance $E(Z)$.

b) Montrer que $E(Z) = \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ si et seulement si

$$Z = \big(1 - \frac{\ell}{n}\big)^{n\overline{X}}$$

Solution :

A. Immédiatement :

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \lambda, V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\overline{X}$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

B. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable aléatoire S suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

1. On a :

$$E(\mathrm{e}^{-\ell\overline{X}}) = E(\mathrm{e}^{\frac{-\ell S}{n}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ell k}{n}} \mathrm{e}^{-n\lambda} \frac{(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n \mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}})^k}{k!}$$

$$= \mathrm{e}^{n\lambda(\mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}}-1)} \neq \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a : $\mathrm{e}^{n\lambda(\mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}}-1)} = \mathrm{e}^{-\ell\lambda+o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ et Y est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$.

2. Notons $Z = g(n\overline{X}) = g(S)$. On a :

a) $E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \mathrm{e}^{-n\lambda} \frac{(\lambda n)^k}{k!}$.

b) Donc $E(Z) = \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ si et seulement si :

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{(n-\ell)\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!}$$

Cela entraîne que pour tout $k \geqslant 0$:

$$g(k) = \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^k = \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^k$$

La justification de ce dernier résultat est l'unicité du développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$. En effet, pour tout $m \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k)n^k\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} g(k)n^k\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} + o(\lambda^m)$$

et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!} + o(\lambda^m)$$

Donc :

$$Z = \left(1-\frac{\ell}{n}\right)^S$$

Exercice 3.13.

Une urne contient n boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$, avec $n \geqslant 2$. Soit r un entier tel que $1 \leqslant r < n$.
On effectue dans cette urne des tirages répétés d'une boule avec remise.
On note Y_r la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois les boules $B_1, \ldots, B_r$.

1. Déterminer la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

2. Déterminer les valeurs prises par Y_r.
Calculer la probabilité $P(Y_r = r)$, puis la probabilité $P(Y_r = r+1)$.
Mettre en place le raisonnement permettant de déterminer la loi de Y_r.

3. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi $W_r = Y_r$.)
Enfin, on pose $X_1 = W_1$ et pour $i \geqslant 2$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.

a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.

b) En déduire l'espérance $E(Y_r)$ de Y_r. Déterminer un équivalent de $E(Y_r)$.

Solution :

1. Y_1 représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule B_1. Donc $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et Y_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi :

$$E(Y_1) = n, \quad V(Y_1) = n^2 - n$$

2. a) Immédiatement $Y_r(\Omega) = \{r, r+1, \ldots\}$.

b) L'événement $(Y_r = r)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement r tirages. Cela signifie que l'on a tiré chacune de ces boules une seule fois au cours de ces r tirages.

Les tirages s'effectuant avec remise, les résultat successifs sont indépendants. Ainsi :

$$P(Y_r = r) = r!\frac{1}{n^r}$$

(il y a $r!$ ordres possibles et à chaque fois chacune des boules est tirée avec la probabilité $\frac{1}{n}$)

c) L'événement $(Y_r = r+1)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement $(r+1)$ tirages. Cela signifie que le $(r+1)$ ème tirage a donné *pour la première fois* une des boules $B_1, \dots, B_r$, les autres boules ayant été tirées au moins une fois lors des r premiers tirages.

C'est–à–dire que si le tirage $(r+1)$ est occupé par la boule B_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, lors des r premiers tirages, on a obtenu

•(A) : soit une seule fois chaque boule $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_r$ et une boule parmi les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$,

•(B) : soit chaque boule $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_r$, l'une d'entre elles ayant été tirée deux fois et les autres une fois.

On a r choix de la boule B_i. Cette boule étant fixée

$$P(A) = \frac{(r-1)!}{n^r} \times \frac{n-r}{n}$$

$$P(B) = \binom{r}{2}\frac{(r-2)!}{n^r} \times (r-1)$$

(on fixe les places de la boule tirée deux fois et on a $(r-1)$ choix pour cette boule.)

Finalement, A et B étant incompatibles :

$$P(Y_r = r+1) = \frac{r}{n}\big(P(A) + P(B)\big) = \frac{r!}{n^{r+1}} \times \frac{2n-r-1}{2}$$

d) L'événement $(Y_r = r+k)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement $(r+k)$ tirages. Cela signifie que le $(r+k)$ ème tirage a donné *pour la première fois* une des boules $B_1, \dots, B_r$, les autres boules ayant été tirée au moins une fois lors des $r+k-1$ premiers tirages.

C'est–à–dire que si le tirage $(r+k)$ est occupé par la boule B_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, lors des $r+k-1$ premiers tirages, on a obtenu chacune des autres boules m_j fois, avec $m_j \geqslant 1$ et $m = \sum_{j=1}^{r-1} m_j \leqslant r$, et on a tiré parmi les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$, $(r-m)$ fois.

Ainsi : $P(Y_r = r+k)$ vaut :

$$\frac{r}{n}\sum_{\substack{\forall\, j, m_j \geqslant 1\\ \sum m_j \leqslant r}} \binom{m_1}{r+k-1}\frac{1}{n^{m_1}}\binom{m_2}{r+k-1-m_1}\frac{1}{n^{m_2}}\cdots\frac{1}{n^{n-m_{r-1}}}\Big(\frac{n-k}{n}\Big)^{r-m}$$

3. a) On a $X_1 = W_1$ qui représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$.
La variable aléatoire X_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{r}{n}\big)$ et $E(X_1) = \frac{n}{r}$.

La variable aléatoire X_i représente le temps d'attente pour obtenir un i-ème succès (tirage d'une nouvelle boule sachant que $(i-1)$ boules distinctes de $B_1, \ldots, B_r$ on déjà été obtenues.)
X_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\dfrac{r-i+1}{n}\big)$ et $E(X_i) = \dfrac{n}{r-i+1}$.

b) On a $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$ et

$$E(Y_r) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = n\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k} \sim n\ln r$$

Exercice 3.14.

1. a) Compléter les lignes de programme suivantes pour en faire un programme complet :

```
randomize ;
  N :=random(m)+1 ;X :=0 ;
  For i :=1 to N Do X :=X+random(2) ;
  Writeln(N,' ',X) ;
```

(on rappelle que lorsque a est un `integer`, `random(a)` renvoie une valeur `integer` au hasard comprise entre 0 et $a-1$, et que la procédure `randomize` permet d'initialiser la fonction `random`.)

b) On suppose que la première valeur affichée est 4. Quelles sont les valeurs possibles pour la seconde valeur affichée ?

2. On suppose que le programme précédent simule une expérience aléatoire. Quelle est alors la loi suivie par la variable aléatoire simulée par N, son espérance, sa variance ?

3. Préciser $X(\Omega)$ et calculer, pour tout couple (i,k), $P(X = i/N = k)$. En déduire la loi de X.

4. Déterminer l'espérance de X.

Solution :

1. a) Il suffit de compléter les déclarations du programme, soit

```
Program Exo ;
  Var m,i,N,X : integer ;
```

```
Begin
Readln(m) ;
...
End.
```

b) Si $N = 4$, comme `Random(2)=0` ou `1`, X prend ses valeurs dans $[\![0,4]\!]$.

2. Par la définition de la fonction `Random`, N suit la loi uniforme sur $[\![1,m]\!]$. Donc

$$E(N) = \frac{m+1}{2}, V(N) = \frac{m^2-1}{12}.$$

3. On sait que $X(\Omega) = [\![0,m]\!]$, et que pour tout $k \in [\![1,m]\!]$

$$X_{|N=k} \hookrightarrow \mathcal{B}\big(k, \frac{1}{2}\big)$$

soit :

$$P(X = i/N = k) = \begin{cases} \binom{k}{i}\frac{1}{2^k} & \text{si } i \in [\![0,k]\!] \\ 0 & \text{si } i \in [\![k+1,m]\!] \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(N = k)_{1\leqslant k\leqslant m}$, il vient, pour tout $i \in [\![0,m]\!]$:

$$P(X = i) = \sum_{k=1}^{m} P(X = i/N = k)P(N = k) = \frac{1}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}$$

4. On a :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{m}\frac{i}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} i\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} k\times\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} k\times\frac{1}{2^k}\times 2^{k-1} = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m} k$$

Soit :

$$E(X) = \frac{m+1}{4}$$

Exercice 3.15.

On considère une variable aléatoire X telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p.q^k$$

où p est un réel fixé de $]0,1[$ et $q = 1 - p$.

1. Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que pour $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$.

c) En déduire que pour $t \in [0,1[$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k} = -\ln(1-t)$.

d) Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.

3. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z conditionnée par la réalisation de l'événement $(X = k)$ est uniforme sur $[\![0;k]\!]$.

a) Déterminer la loi de Z (on laissera les résultats sous forme de sommes).

b) Montrer que Z admet une espérance.

Solution :

1. Au vu de la définition de la loi de X, il est évident que $X + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Donc :

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2. a) Comme $Y = \dfrac{1}{X+1}$, il vient $Y(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{k+1}/k \in \mathbb{N}\right\}$ et :

$$P\big(Y = \frac{1}{k+1}\big) = pq^k$$

b) On sait que pour tout $x \in [0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

En intégrant cette égalité sur l'intervalle $[0,t]$, $(t < 1)$, on obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

c) Or

$$\Big|\int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx\Big| \leqslant \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-t}\,dx = \frac{t^{n+2}}{(n+2)(1-t)}$$

Il reste à faire tendre n vers l'infini : la dernière expression tend vers 0 car $0 \leqslant t < 1$.

d) Par la question précédente :

$$-\frac{p}{q} \times \ln(1-q) = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{pq^k}{k+1} = E(Y)$$

3. On sait que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- pour tout $z \in [\![0,k]\!]$, $P(Z = z/X = k) = \dfrac{1}{k+1}$,
- pour tout $z \notin [\![0,k]\!]$, $P(Z = z/X = k) = 0$.

b) Par la formule des probabilités totales, pour tout $z \in \mathbb{N}$:

$$P(Z=z)=\sum_{k=z}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}$$

b) Montrons que $E(Z)$ existe. Pour cela, il faut montrer la convergence de la série

$\sum_n n(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1})=\sum_n u_n$. Or, pour tout $N>n$:

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{pq^k}{k+1}\leqslant\sum_{k=z}^{N}pq^k=pq^n\frac{1-q^{N-n+1}}{1-q}$$

Donc :

$$0\leqslant u_n=n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}\leqslant n\,\frac{pq^n}{1-q}=nq^n$$

ce dernier majorant étant le terme général d'une série convergente, la conclusion en résulte.

Exercice 3.16.

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.

La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1,0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X=\cos U$, $Y=\sin U$.

1. Soient $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-au}\cos u\,du$, $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-au}\sin u\,du$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.

b) A l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.

c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y\geqslant\dfrac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.

b) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0}p(a)$.

Solution :

1. a) Montrons que les intégrales I et J sont absolument convergentes. On effet, on peut écrire :

$$|\cos u.\mathrm{e}^{-au}|\leqslant\mathrm{e}^{-au},\quad |\sin u.\mathrm{e}^{-au}|\leqslant\mathrm{e}^{-au}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-au}\,du$ existe.

b) En utilisant $A > 0$ et des intégrations par parties sur $[0, A]$, intervalle où les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe C^∞, il vient :

$$I(A) = \int_0^A \cos u.e^{-au}\,du = \sin A.e^{-aA} + a(1 - \cos A.e^{-aA}) - a^2 I(A)$$

$$J(A) = \int_0^A \sin u.e^{-au}\,du = -a\sin A.e^{-aA} + 1 - \cos A.e^{-aA} - a^2 J(A)$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, les fonctions sin et cos étant bornées sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$I = a - a^2 I, \qquad J = 1 - a^2 J$$

Donc

$$I = \frac{a}{1+a^2}, \qquad J = \frac{1}{1+a^2}$$

c) Par le théorème du transfert :

$$E(X) = E(\cos U) = \int_a^{+\infty} \cos u.ae^{-au}\,du = aI = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$E(Y) = E(\sin U) = \int_a^{+\infty} \sin u.ae^{-au}\,du = aJ = \frac{a}{1+a^2}$$

2. a) Le joueur gagne si et seulement si $\sin U \geqslant 1/2$ soit si et seulement si $U \in [\pi/6, 5\pi/6] \pmod{2\pi}$. Donc :

$$\begin{aligned} p(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant U \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} a.e^{-at}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \big(e^{(-\pi/6-2k\pi)a} - e^{(-5\pi/6-2k\pi)a}\big) = \frac{e^{-a\pi/6} - e^{-a5\pi/6}}{1 - e^{-2\pi a}} \\ &= e^{-a\pi/6}\,\frac{1 - e^{-2a\pi/3}}{1 - e^{-2\pi a}} \end{aligned}$$

b) Lorsque $a \to 0$, comme $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$\lim_{a\to 0} p(a) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.17.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y qui suivent toutes deux la loi uniforme sur l'intervalle $]0, a]$.

On s'intéresse à la variable aléatoire Z définie par :

$$Z = \frac{A}{B} \quad \text{où } A = \inf(X, Y) \text{ et } B = \sup(X, Y).$$

1. Montrer que $\ln Z = -|\ln X - \ln Y|$.

2. Déterminer les fonctions de répartition et une densité des variables aléatoires $U = \ln X$ et $V = -\ln Y$.

3. Déterminer une densité de la variable aléatoire $W = U + V$.

4. Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire $T = \ln Z$.

5. En déduire la loi de Z.

Solution :

1. Comme $X > 0, Y > 0$, on peut écrire :
$$\ln Z = \ln\min(X,Y) - \ln\max(X,Y) = \min(\ln X, \ln Y) - \max(\ln X, \ln Y)$$
$$= -|\ln X - \ln Y|$$

2. On a $U(\Omega) =]-\infty, \ln a]$ et :
$$P(U < u) = P(X < \mathrm{e}^u) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^u}{a} & \text{si } u \in]-\infty, \ln a] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
et
$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^u}{a} & \text{si } u \in]-\infty, \ln a] \\ 0 & \text{si } u > \ln a \end{cases}$$
De même, $V(\Omega) = [-\ln a, +\infty[$ et
$$P(V < v) = 1 - F_Y(\mathrm{e}^{-v})) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{a} & \text{si } v \in [-\ln a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
et
$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{a} & \text{si } v \in [-\ln a, +\infty[\\ 0 & \text{si } v < -\ln a \end{cases}$$

3. Les variables aléatoires U et V étant indépendantes, par convolution :
$$f_W(w) = \int_{\mathbb{R}} f_U(w-t) f_V(t)\, dt$$
Or, au vu des définitions des densités, on doit demander, pour calculer cette intégrale : $w - t \leqslant \ln a$ et $t \geqslant -\ln a$.
Donc :
- si $w \geqslant 0$
$$f_W(w) = \int_{w-\ln a}^{+\infty} \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{w-t} \times \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-t}\, dt = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{w} \int_{w-\ln a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-w}$$
- si $w \leqslant 0$
$$f_W(w) = \int_{-\ln a}^{+\infty} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{w-2t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{w}$$

Finalement, pour tout $w \in \mathbb{R}$, $f_W(w) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|w|}$.

4. On a $T(\Omega) = \mathbb{R}^-$ et pour tout $t < 0$,
$P(T < t) = P(-|W| < t) = 1 - P(|W| < -t)$. Donc :

$$P(T < t) = 1 - \int_t^{-t} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|w|}\,dw = \mathrm{e}^t$$

et

$$F_T(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donc, on peut prendre :

$$f_T(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

5. Comme $Z = \mathrm{e}^T$, on a $Z(\Omega) = [0, 1]$ et

$$P(Z < z) = P(T < \ln z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } z < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Z suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$.

Exercice 3.18.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi uniforme sur $]0, 1[$ et la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $X_1 = 1-X$, $Y_1 = -\ln X$, $Y_2 = -\ln(1-X)$, $Z = X+Y$, $Z_1 = X_1+Y_1$, $Z_2 = X + Y_2$, $Z_3 = X + Y_1$ et $Z_4 = X_1 + Y_2$.

1. a) Déterminer les lois des variables X_1, Y_1 et Y_2.

b) Déterminer une densité f_Z de Z.

c) Expliquer pourquoi les variables Z_1 et Z_2 suivent la même loi. Que peut-on dire de Z_3 et Z_4 ?

2. On définit les fonctions φ_1 et φ_3 sur $]0, 1[$ par : $\varphi_1(x) = 1 - x - \ln x$ et $\varphi_3(x) = x - \ln x$.

a) Montrer que φ_1 réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$ et que φ_3 réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.

b) Déterminer les fonctions de répartition F_{Z_1} et F_{Z_3} de Z_1 et Z_3 et donner leur expression en utilisant φ_1 et φ_3. Les variables Z_1 et Z_3 suivent-elles la même loi ?

c) Calculer et comparer $F_{Z_1}\big(\frac{1}{2} + \ln 2\big)$ et $F_{Z_3}\big(\frac{1}{2} + \ln 2\big)$.

3. On considère une variable aléatoire T de densité f_T et de fonction de répartition F_T, indépendante de X telle que $X + T$ suive la même loi que Z.

a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}\ \ F_T(t) - F_T(t-1) = f_Z(t)$.

b) Déterminer F_T, puis une densité f_T.

c) Comparer les lois de T et Y.

Solution :

1. a) Il est immédiat que la variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $]0,1[$. Pour tout $y > 0$:

$$P(Y_1 \leqslant y) = P(X \geqslant \mathrm{e}^{-y}) = 1 - \mathrm{e}^{-y}$$

Donc Y_1 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Comme $Y_2 = -\ln X_1$, Y_2 suit aussi la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

b) On sait que $Z(\Omega) =]0,+\infty[$ et pour $t > 0$:

$$f_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx = \int_0^1 f_Y(t-x)\,dx$$

• Pour $0 < t \leqslant 1$, $f_Z(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{x-t}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-t}$,

• pour $t > 1$, $f_Z(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x-t}\,dx = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t}$.

c) On sait que X suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et $Z_1 = 1 - X - \ln X$. De même $U = 1 - X$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et $Z_2 = 1 - U - \ln U$. Donc Z_1 et Z_2 suivent la même loi.

Comme $Z_3 = X - \ln X$, $Z_4 = U - \ln U$, les variables Z_3 et Z_4 suivent la même loi.

2. a) Une étude rapide des variations des fonctions φ_1 et φ_3 montre qu'elles sont décroissantes sur $]0,1[$, la première de $+\infty$ vers 0 et la seconde de $+\infty$ vers 1.

b) On a $Z_1(\Omega) = \varphi_1(]0,1[) =]0,+\infty[$. Pour tout $z > 0$:

$$F_{Z_1}(z) = P(\varphi_1(X) \leqslant z) = P(X \geqslant \varphi_1^{-1}(z)) = 1 - \varphi_1^{-1}(z)$$

Donc

$$F_{Z_1}(z) = \begin{cases} 1 - \varphi_1^{-1}(z) & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leqslant 0 \end{cases}$$

De même, $Z_3(\Omega) = \varphi_3(]0,1[) =]1,+\infty[$. Pour tout $z > 1$:

$$F_{Z_3}(z) = P(\varphi_3(X) \leqslant z) = P(X \geqslant \varphi_3^{-1}(z)) = 1 - \varphi_3^{-1}(z)$$

Donc

$$F_{Z_3}(z) = \begin{cases} 1 - \varphi_3^{-1}(z) & \text{si } z > 1 \\ 0 & \text{si } z \leqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi Z_1 et Z_3 ne suivent pas la même loi.

c) Il vient :

$$\varphi_1\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2} + \ln 2 = \varphi_3\big(\tfrac{1}{2}\big) \implies F_{Z_1}\big(\tfrac{1}{2} + \ln 2\big) = \tfrac{1}{2} = F_{Z_3}\big(\tfrac{1}{2} + \ln 2\big)$$

3. a) On a :

$$f_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t-x)f_T(x)\,dx = \int_{t-1}^{t} f_T(x)\,dx = F_T(t) - F_T(t-1)$$

b) Pour tout t réel, $F_T(t) = F_T(t-1) + f_Z(t)$. Donc :

• pour $t \leqslant 0$, $F_T(t) = F_T(t-1)$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_T(t) = F_T(t-n)$, et $F_T(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_T(t-n) = 0$.

• pour $t \in]0,1]$, $F_T(t) = F_T(t-1) + f_Z(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Supposons que pour $t \in]n-1, n], F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Alors, pour $t \in]n, n+1]$:

$$F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t-1)} + \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

c) Ainsi T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et suit la même loi que Y.

Exercice 3.19.

1. Soient X une variable aléatoire finie ou discrète qui possède une espérance et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,\ldots,p\}$. On suppose que $P\,(Y=i) > 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$.

a) Soit $i \in \{1,\ldots,p\}$. Montrer que la loi conditionnelle de X, conditionnée par l'événement $(Y=i)$ admet une espérance qu'on notera $E(X/Y=i)$.

b) Prouver la formule suivante : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} E(X/Y=i)P\,(Y=i)$

2. Soit n un entier non nul. Montrer que l'on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

3. Un technicien assure la maintenance de n machines-outils de même type qui sont alignées. Deux machines consécutives sont distantes d'une longueur ℓ. De temps en temps les machines outils s'arrêtent avec la même probabilité et indépendamment les unes des autres et nécessitent un réglage. Après le réglage d'une machine-outil le technicien reste devant celle-ci, jusqu'à ce qu'une autre machine-outil s'arrête (si c'est la même machine qui retombe en panne, il reste à sa place). La variable aléatoire X est la distance que parcourt le technicien entre deux réglages. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la machine devant laquelle se trouve le technicien.

a) Calculer l'espérance de X.

b) Déterminer la variance de X.

Solution :

1. a) Notons $\{x_k, k \in K\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. On a :

$$\sum_{k\in K} x_k P(X = x_k/Y = i) = \sum_{k\in K} x_k \frac{P(X = x_k \cap Y = i)}{P(Y = i)}$$

$$\leqslant \frac{1}{P(Y=i)} \sum_{k\in K} x_k P(X=x_k) = \frac{E(X)}{P(Y=i)}$$

Ainsi $E(X/Y=i)$ existe.

b) La famille $(Y=i)$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k\in K} x_k P(X=x_k) = \sum_{k\in K} x_k \sum_{i=1}^{p} P(X=x_k/Y=i)P(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{k\in K} x_k P(X=x_k/Y=i)\big)P(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} E(X \mid Y=i)P(Y=i)
\end{aligned}$$

2. Cette formule (très classique) se montre par récurrence.

3. a) Calculons $E(X \mid Y=i)$

$$\begin{aligned}
E(X/Y=i) &= \sum_{k=1}^{n} \ell|k-i|P(X=\ell|k-i|/Y=i) = \frac{\ell}{n}\big(\sum_{k=1}^{i-1}(i-k)+\sum_{k=i}^{n}(k-i)\big)\\
&= \frac{\ell}{n}\big(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=0}^{n-i} j\big) = \frac{\ell}{n}\big(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\big)
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats des questions 1.b et 2, il vient :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\times\frac{\ell}{n}\big(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\big) = \frac{\ell(n^2-1)}{3n}$$

b) Calculons $E(X^2)$ par la même méthode :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X^2 \mid Y=i)P(Y=i)$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{k=1}^{n}(k-i)^2\ell^2 P(X=l|k-i|/Y=i)\big)\\
&= \frac{\ell^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(k-i)^2 = \frac{\ell^2(n^2-1)}{6}
\end{aligned}$$

et

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\ell^2(n^4+n^2-2)}{18n^2}$$

Exercice 3.20.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et toutes de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$Z_k = \Big(\bigcap_{n\geqslant k}[X_n=0]\Big) \cup \Big(\bigcap_{n\geqslant k}[X_n=1]\Big)$$

est un événement.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement Z_k est négligeable et interpréter ce résultat.

2. On considère la fonction $L : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à toute éventualité appartenant à Z_1 la valeur 0 et à tout autre élément ω de Ω l'unique entier $n \geqslant 1$ tel que ω appartienne à $[X_n = X_{n-1} = \cdots = X_1] \cap [X_{n+1} \neq X_1]$.

Montrer que L est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Quelle est la loi de L ? Montrer que L admet un moment d'ordre 2. En déduire que L admet une espérance et une variance (*que l'on ne calculera pas*).

3. On définit de même la fonction $M : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à $\omega \in \Omega$ l'unique entier $m \geqslant 1$ (s'il existe) tel que, si L a pris la valeur n, ω appartienne à $[X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{n+m}] \cap [X_{n+m+1} \neq X_{n+m}]$, et prenant la valeur 0 si cet entier m n'existe pas.
On admet que M est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et que $P\big([M = 0]\big) = 0$.

Quelle est la loi de M ? Montrer que M admet un moment d'ordre 2 et trouver son espérance et sa variance.

4. Montrer que les lois de L et de M coïncident si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

5. Déterminer l'espérance de L et montrer que $E(L) \geqslant E(M) = 2$.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 0] \in \mathcal{T}$ et $[X_n = 0] \in \mathcal{T}$ parce que X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
$\mathcal{T}$ étant stable par union et intersection dénombrable, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k appartient à $\mathcal{T}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in [\![k, +\infty[\![$,
$$Z_k \subset \Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 0]\Big) \cup \Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 1]\Big)$$
et donc, par incompatibilité puis indépendance :
$$\begin{aligned} P(Z_k) &\leqslant P\Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 0]\Big) + P\Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 1]\Big) \\ &\leqslant \prod_{n=k}^{m} P([X_n = 0]) + \prod_{n=k}^{m} P([X_n = 1]), \text{ c'est-à-dire :} \end{aligned}$$
$$P(Z_k) \leqslant (1-p)^{m-k+1} + p^{m-k+1}.$$
En passant cette inégalité à la limite quand m tend vers $+\infty$, ce qui se peut puisque $|p| < 1$ et $|1-p| < 1$, on obtient que $P(Z_k) \leqslant 0$ et donc que $P(Z_k) = 0$.

Interprétation : quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe presque sûrement $n_0 \in [\![k, +\infty[\![$ tel que l'événement $[X_{n_0} = 0]$ soit réalisé et il existe presque sûrement $n_1 \in [\![k, +\infty[\![$ tel que l'événement $[X_{n_1} = 1]$ soit réalisé.

2. Comme la fonction L est à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[L = n] \in \mathcal{T}$.

• $[L = 0] = Z_1$ et donc $[L = 0] \in \mathcal{T}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[L = n] = \Big([X_{n+1} = 1] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 0]\Big) \cup \Big([X_{n+1} = 0] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1]\Big)$$

donc $[L = n] \in \mathcal{T}$.

La fonction L est donc une variable aléatoire (discrète) sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

D'après ce qui précède, $P([L = 0]) = P(Z_1) = 0$ et, par incompatibilité puis indépendance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P([L = n]) &= P([X_{n+1} = 1] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 0]) + P([X_{n+1} = 0] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1]) \\ &= p(1-p)^n + (1-p)p^n. \end{aligned}$$

D'après le cours, comme $p \in]0, 1[$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 p^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (1-p)^n$ convergent et donc la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 P([L = n])$ converge (absolument).

En conséquence, L admet un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre 1 — c'est-à-dire une espérance — ainsi qu'une variance.

3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$\begin{aligned} [L = n] \cap [M = m] = \Big(& \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0] \cap \bigcap_{k=1}^{m} [X_{n+k} = 1] \cap [X_{n+m+1} = 0]\Big) \\ & \cup \Big(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 1] \cap \bigcap_{k=1}^{m} [X_{n+k} = 0] \cap [X_{n+m+1} = 1]\Big) \end{aligned}$$

et donc, par incompatibilité puis indépendance,

$$P([L = n] \cap [M = m]) = (1-p)^{n+1} p^m + p^{n+1} (1-p)^m.$$

Il s'ensuit que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P([M = m]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L = n] \cap [M = m]) \\ &= p^m \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n+1} + (1-p)^m \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} \\ &= (1-p)^2 p^{m-1} + p^2 (1-p)^{m-1}. \end{aligned}$$

Exactement comme pour L, M admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance, et $E(M) = 2$, $E(M^2) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{1-p} - 2$ et $V(M) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{1-p} - 6$.

4. Les lois de L et de M coïncident si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p(1-p)^n + (1-p)p^n = (1-p)^2 p^{n-1} + p^2 (1-p)^{n-1}$$

relation qui équivaut à $p(2p-1)(1-p)^{n-1} = (1-p)(2p-1)p^{n-1}$ et donc à $(1-p)^{n-2} = p^{n-2}$.
En particularisant pour $n = 3$, on obtient que $p = \dfrac{1}{2}$. Réciproque immédiate.

5. $$E(L) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(p(1-p)^n + (1-p)p^n) = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} np^n$$
$$= \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 2.$$

La fonction dérivable sur $]0,1[$ $\varphi : p \mapsto \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{1-p}$ vérifie, pour tout $p \in]0,1[$, $\varphi(1-p) = \varphi(p)$ et $\varphi'(p) = \dfrac{1}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{p^2} < 0$, si et seulement si $p \in]0,1/2[$.
Elle admet donc sur $]0,1[$ un minimum global (strict) au point $1/2$, ce qui implique que
$$E(L) = \varphi(p) - 2 \geqslant \varphi(1/2) - 2 = 2 = E(M).$$

Exercice 3.21.

Une personne possède a jetons numérotés de 1 à a et joue à les lancer *ensemble* indéfiniment. On se propose de calculer le nombre *moyen* de jetons ayant amené au moins une fois « pile » au cours des k premiers lancers, k étant un entier naturel non nul.
Pour $i \in [\![1,a]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_i^k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i amène un « pile » au $k^{\text{ème}}$ lancer et la valeur 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires $(U_i^k)_{1\leqslant i\leqslant a, 1\leqslant k}$ sont indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le nombre de jetons ayant amené « pile » pour la première fois lors du $k^{\text{ème}}$ lancer et X_k le nombre de jetons ayant amené au moins une fois « pile » au cours des k premiers lancers ; on note également A_k l'ensemble des éléments i de $[\![1,a]\!]$ tels que les variables aléatoires $U_i^1, U_i^2, \ldots, U_i^{k-1}$ ont toutes pris la valeur 0, avec la convention $A_1 = [\![1,a]\!]$.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$ et $Y_k = \sum_{i\in A_k} U_i^k$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{card} A_k = a - X_{k-1}$, en notant X_0 la variable aléatoire nulle.
Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$:
$$E(Y_k) = \sum_{j=0}^{a}\Big(P\big([\operatorname{card} A_k = j]\big)\sum_{i=0}^{a} i\,P\big([Y_k = i]/[\operatorname{card} A_k = j]\big)\Big).$$
En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = \dfrac{1}{2}\big(a + E(X_{k-1})\big)$.
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k)$ en fonction de k et de a.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,a]\!]$, on note Z_i^k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i a amené au moins une fois pile au cours des k premiers lancers, la valeur 0 sinon.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = \sum\limits_{i=1}^{a} Z_i^k$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $Z_1^k, Z_2^k, \dots, Z_a^k$ sont indépendantes.

Trouver, pour tout $i \in [\![1, a]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_i^k.

4. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_k. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi binomiale de paramètre $(a, 1 - 2^{-k})$. Retrouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de X_k et calculer sa variance.

Solution :

1. Il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = X_k + Y_{k+1}$ (en notant X_0 la variable aléatoire nulle).

Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{k} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{k} (X_j - X_{j-1}) = X_k - X_0 = X_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La valeur prise par Y_k est le nombre de pièces ayant amené un 'pile' au k^{e} lancer *parmi celles qui n'en n'avaient encore jamais amené*, c'est-à-dire parmi celles dont le numéro appartient à A_k.

En conséquence, $Y_k = \sum\limits_{i \in A_k} U_i^k$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $\operatorname{Card} A_k$ est le nombre de pièces n'ayant jamais amené un 'pile' au cours des $k-1$ premiers lancers et X_{k-1} est le nombre de pièces ayant amené au moins un 'pile' au cours des $k-1$ premiers lancers. Le nombre des pièces étant a, $\operatorname{Card} A_k + X_{k-1} = a$.

Soit un entier $k \geqslant 2$. Il est clair que $P([Y_k \in [\![0, a]\!]) = 1$ et donc que Y_k admet une espérance et que :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{a} i\Big(\sum_{j=0}^{a} P([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j]) P([\operatorname{Card} A_k = j])\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{a} \Big(P([\operatorname{Card} A_k = j]) \sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j])\Big) \end{aligned}$$

Note : si $k = 1$, les événements $[\operatorname{Card} A_k = j]$ sont négligeables sauf si $j = a$. Mais comme Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $(a, 1/2)$, $E(Y_1) = \dfrac{a}{2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k = 1$, comme $X_1 = Y_1$, $E(X_1) = E(Y_1) = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}\big(a + E(X_0)\big)$.

Si $k \geqslant 2$, alors, pour tout $j \in [\![0, a]\!]$, la loi de Y_k conditionnée par l'événement $[\operatorname{Card} A_k = j]$ est binomiale de paramètres $(j, 1/2)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j]) = \frac{j}{2}$$

et donc que :

$$E(Y_k) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{a} j(P([\text{Card}\, A_k = j]) = \frac{1}{2}E(\text{Card}\, A_k) = \frac{1}{2}E(a - X_{k-1})$$
$$= \frac{1}{2}(a - E(X_{k-1})).$$

En conséquence, $E(X_k) = E(Y_k) + E(X_{k-1}) = \dfrac{1}{2}(a + E(X_{k-1}))$.

La suite de terme général $E(X_k)$ étant arithmético-géométrique de point fixe a et de raison $1/2$, il vient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k) = \big(1 - \dfrac{1}{2^k}\big)a$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la valeur prise par X_k est en fait le nombre des variables Z_i^k prenant la valeur 1 (les autres s'annulant), $X_k = \sum\limits_{i=1}^{a} Z_i^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, a]\!]$, $Z_i^k = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} U_i^j$.

Les variables aléatoires $(U_i^k)_{1 \leqslant i \leqslant a, k \geqslant 1}$ étant indépendantes, les variables aléatoires $Z_1^k, Z_2^k, \ldots, Z_a^k$ sont donc indépendantes.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, a]\!]$.

$[Z_i^k = 0] = \bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} [U_i^j = 0]$ et donc, les variables $(U_i^j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ étant indépendantes, $P([Z_i^k = 0]) = \prod\limits_{j=1}^{k} P([U_i^j = 0]) = \dfrac{1}{2^k}\cdot$

La variable Z_i^k suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \dfrac{1}{2^k}\cdot$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_k, somme de a variables de Bernoulli indépendantes et de même loi, suit la loi binomiale de paramètres $(a, 1 - 2^{-k})$.

D'après le cours, $E(X_k) = \big(1 - \dfrac{1}{2^k}\big)a$ et $V(X_k) = \dfrac{1}{2^k}\big(1 - \dfrac{1}{2^k}\big)a$

Exercice 3.22.

Une urne A contient des boules numérotées de 1 à m et une urne B contient des boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne. On désigne par X (resp. Y) la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule tirée dans l'urne A (resp. B). On pose

$$Z = \frac{X}{Y}.$$

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?

2. Exprimer, à l'aide d'une somme, l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

3. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Si p est un nombre réel, on note $\lfloor p \rfloor$ la partie entière de p.

Soit $l \in \{1, ..., n\}$, montrer que

$$P(Z \in \mathbb{N} / Y = l) = \frac{1}{m}\left\lfloor \frac{m}{l} \right\rfloor$$

Déterminer, à l'aide d'une somme, $P(Z \in \mathbb{N})$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\ln(N+1) < \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} < 1 + \ln(N).$$

En déduire un encadrement de $P(Z \in \mathbb{N})$.

5. a) L'entier m étant fixé, trouver un équivalent de $E(Z)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On suppose dans cette question que $n = pm$; donner un équivalent de $P(Z \in \mathbb{N})$ lorsque m tend vers l'infini.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On suppose dans cette question que $m = qn$; donner un équivalent de $P(Z \in \mathbb{N})$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Il est clair que X (resp. Y) suit la loi uniforme sur $[\![1, m]\!]$ (resp. $[\![1, n]\!]$).

2. On a : $E(Z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{k}{\ell} P(X = k \cap Y = \ell)$.

Comme les variables X et Y sont indépendantes, il vient :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{k}{\ell} \frac{1}{m} \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{m} k \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} = \frac{m+1}{2n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$$

3. La partie entière de $\frac{m}{\ell}$ est exactement le nombre de multiples de ℓ qui sont inférieurs ou égaux à m, on a donc bien :

$$P(Z \in \mathbb{N} / Y = \ell) = \frac{1}{m} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor$$

Avec la formule des probabilités totales, on obtient donc :

$$P(Z \in \mathbb{N}) = \sum_{\ell=1}^{n} P(Z \in \mathbb{N} / Y = \ell) = \frac{1}{mn} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor$$

où $m \wedge n$ désigne le plus petit des deux entiers m et n.

4. Par comparaison série–intégrale :

$$\frac{1}{p+1} < \int_{p}^{p+1} \frac{dx}{x} = \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p+1} < \ln(N+1) < \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

et l'encadrement demandé en découle.

Il vient alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \frac{1}{\ell} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) = \frac{1}{mn} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \frac{1}{\ell} + \frac{m \wedge n}{mn}$$

D'où :

$$\frac{\ln(m \wedge n)}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{\ln(m \wedge n) + 1}{n} + \frac{m \wedge n}{mn}$$

5. a) Avec l'inégalité de la question 4. on a $\ln n \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leqslant 1+\ln n$ d'où :

$$\frac{(m+1)\ln n}{2n} \leqslant E(Z) = \frac{m+1}{2n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{(m+1)\ln n}{2n} + \frac{m+1}{2n}$$

On en déduit donc que

$$E(Z) \sim \frac{(m+1)\ln n}{2n}$$

b) On a : $\dfrac{\ln(m \wedge n)}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \dfrac{\ln(m \wedge n) + 1}{n} + \dfrac{m \wedge n}{mn}$ et comme $n = pm$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\frac{\ln m}{pm} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{1 + \ln m}{pm} + \frac{1}{pm}$$

Il en résulte que :

$$P(Z \in \mathbb{N}) \underset{(m \to \infty)}{\sim} \frac{\ln m}{pm}$$

c) Si $m = qn$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{1 + \ln n}{n} + \frac{1}{qn}$$

on voit donc que :

$$P(Z \in \mathbb{N}) \underset{(n \to \infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 3.23.

Un immeuble équipé d'un ascenseur comporte m étages, n personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée et descendent aléatoirement à l'un des m étages.

On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1. Calculer $E(X)$ sans passer par la loi de X. On pourra utiliser les variables aléatoires de Bernoulli, $X_{i,j}$ valant 1 si le $j^{\text{ème}}$ passager descend au $i^{\text{ème}}$ étage et X_i valant 1 si l'ascenseur s'arrête au $i^{\text{ème}}$ étage.

2. On note $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans une ensemble à k éléments.
Montrer que pour $n \geqslant k \geqslant 2, S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$.
En déduire que $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$.

3. Déterminer la loi de X.

4. On suppose que $n = m + 1$, calculer $P(X = m)$.

Solution :

1. Les descentes se faisant au hasard, $X_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{m})$

On a $P(X_i = 0) = P\big(\bigcap_{j=1}^{n}(X_{i,j} = 0)\big) = \big(1 - \frac{1}{m}\big)^n$.

Donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\big(1 - 1(1 - \frac{1}{m})^n\big)$.

Par suite $E(X_i) = 1 - (1 - \frac{1}{m})^n$. Et comme $X = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i$:

$$E(X) = m\big(1 - (1 - \frac{1}{m})^n\big)$$

2. Une surjection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments peut être obtenue de deux faons :

⋆ Le $n^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble de départ a une image déjà atteinte : il y a k choix possibles, donc on obtient $kS_{n-1,k}$ surjections de ce type.

⋆ Le $n^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble de départ a une image non atteinte : il y a k choix possibles pour cette image et en prenant pour ensemble d'arrivée les $(k-1)$ éléments restants, la restriction au départ aux $(n-1)$ premiers éléments est une surjection d'un ensemble de $(n-1)$ éléments dans un ensemble à $(k-1)$ éléments.

Le processus donnant une surjection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments, on en déduit qu'il y a $kS_{n-1,k-1}$ possibilités de ce type.

D'où la formule :

$$n \geqslant k \geqslant 2 \implies S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}).$$

On a $S_{n,n} = n!$, $S_{2,1} = 1$ et la formule de récurrence $S_{n+1,n} = n(S_{n,n} + S_{n,\ n-1})$. D'où :

$$S_{n+1,n} = \sum_{k=1}^{n} kn! = \frac{n}{2}(n+1)!$$

3. Un parcours de l'ascenseur est une application d'un ensemble à n éléments (les n passagers) vers un ensemble à m éléments (les m étages). Il y en a donc m^n distinctes qui sont équiprobables. S'il y a k arrêts à des étages prédéterminés, c'est qu'on a une surjection (en supposant que les passagers descendent tous) sur ces étages, donc $S_{n,k}$ situations possibles, comme il y a $\binom{m}{k}$ choix de k étages parmi m, il y a $\binom{m}{k}S_{n,k}$ possibités en tout, donc :

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}S_{n,k}}{m^n},\ 1 \leqslant k \leqslant \min(n, m).$$

$$P(X = m) = \frac{m(m+1)!}{2m^{m+1}}.$$

Exercice 3.24.

On considère :

$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ et $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathcal{C} \ / \ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

1. Pour tout point $M = (x, y) \in \mathcal{T}$, déterminer les coordonnées du point situé sur les côtés du carré $\mathcal{C}$ dont la distance à M est minimum.

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de $\mathcal{T}$ dont la distance à l'origine est inférieure à la distance à la frontière de $\mathcal{C}$. Tracer l'ensemble de ces points.

3. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

4. On lance une flèche sur une cible carrée représentée par $\mathcal{C}$. On suppose que la probabilité d'atteindre une région donnée de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. Déterminer la probabilité que le point d'impact de la flèche soit plus proche du centre que du bord de la cible.

Solution :

1. Le point le plus proche de M sur le côté est du carré est le point de coordonnées $(1, y)$. Il se trouve à une distance de $(1 - x)$ de M.
De même le point le plus proche de M sur le côté ouest du carré est le point de coordonnées $(-1, y)$. Il se trouve à une distance de $(1 + x)$ de M (avec $x > 0$.
Le point le plus proche de M sur le côté nord du carré est le point de coordonnées $(x, 1)$ qui se trouve à une distance de $(1 - y)$ de M (avec $y \leqslant x$).
Le point le plus proche de M sur le côté sud du carré est le point de coordonnées $(x, -1)$ qui se trouve à une distance de $(1 + y)$ de M.
La distance la plus courte est $(1 - x)$, c'est donc le point de coordonnées $(1, y)$ qui est le plus proche de M.

2. Soit $M(x, y) \in \mathcal{T}$, sa distance au contour de $\mathcal{C}$ vaut $(1 - x)$ et sa distance à l'origine $\sqrt{x^2 + y^2}$.
Ainsi, $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $x^2 + y^2 \leqslant (1 - x)^2$, c'est-à dire, suivant les hypothèses, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - 2x}$. l'ensemble $\mathcal{C}$ est délimité par une portion de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - 2x}$, un segment de la première bissectrice et le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de l'axe des abscisses. La courbe C_f et la première bissectrice se rencontrent au point de coordonnées (x_0, x_0) où $x_0^2 = 1 - 2x_0$.
On trouve $x_0 = \sqrt{2} - 1$.

3. La région $\mathcal{P}$ est la réunion du triangle plein de sommets, l'origine, le point de coordonnées (x_0, x_0) et le point de coordonnées $(x_0, 0)$, et de la région $\mathcal{R}$ située au dessous de C_f entre les abscisses x_0 et $\frac{1}{2}$.

Le triangle a pour aire : $\dfrac{x_0^2}{2} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$.
La région $\mathcal{R}$ a une aire égale à :

$$\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}dx = \Big[-\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}\Big]_{x_0}^{\frac{1}{2}} = \frac{x_0^3}{3} = \frac{5\sqrt{2}-7}{3}.$$

Au total, l'aire de $\mathcal{P}$ vaut $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}-7}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{6}$.

4. Avec les symétries que présente le problème, l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ les plus proches du centre de la cible que de son contour a une aire égale à 8 fois celle de $\mathcal{P}$. L'aire de $\mathcal{C}$ valant 4, la probabilité que le point d'impact soit plus proche du centre que du contour de $\mathcal{C}$ vaut deux fois l'aire de $\mathcal{P}$ c'est à dire : $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3} \simeq 0.219$.

Exercice 3.25.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $(r+1)$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_r$, contenant chacune r boules. Pour tout $j, j \in \{0, \dots, r\}$, l'urne U_j contient j boules rouges, les autres étant bleues.
Un joueur, les yeux bandés, choisit une urne au hasard et effectue dans cette urne n tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée à la fin de chaque tirage (les boules sont supposées être indiscernables au toucher, les tirages sont donc mutuellement indépendants). Il gagne 1 euro par boule rouge obtenue.
On note G_r le gain total obtenu à l'issue des n tirages.

1. Déterminer, sous forme de somme, la loi de probabilité de la variable aléatoire G_r et sa fonction de répartition F_r.

2. Calculer l'espérance de G_r.

3. Soit $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$, pour $k \in \{0, \dots,\ n\}$. Calculer I_0 et en utilisant une relation entre I_k et I_{k+1}, calculer les autres intégrales.

4. En déduire $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} P(G_r = k)$.

5. La suite $(G_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

Solution :

1. $G_r(\Omega) = \{0, \dots,\ n\}$. Soit $j \in \{0, \dots,\ n\}$, les événements, notés aussi U_j, « le tirage se fait dans l'urne U_j » forment un système complet d'événements, d'où :

$$P(G_r = k) = \sum_{j=0}^{r} P(G_r = k/U_j)P(U_j).$$

Or $P(U_r) = \dfrac{1}{r+1}$ et $P(G_r = k|U_j) = \dbinom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

D'où : $P(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum\limits_{j=0}^{r}\dbinom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_r(x) = \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{[x]}\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}.$$

2. $E(G_r) = \sum\limits_{k=0}^{n} kP(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum\limits_{j=0}^{r}\sum\limits_{k=0}^{n} k\dbinom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

D'où :

$$E(G_r) = \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} n\frac{j}{r} = \frac{n}{2}.$$

3. $I_0 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\forall\, k \in \{0,\ldots,\ n-1\}, I_{k+1} = \dfrac{k+1}{n-k}I_k$. D'où

$$I_k = \frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)}.$$

4. $P(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum\limits_{j=0}^{r} f_k\big(\frac{j}{r}\big)$ où $f_k(x) = \dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

On écrit $P(G_r = k) = \dfrac{r}{r+1}\times\dfrac{1}{r}\sum\limits_{j=0}^{r-1} f_k\big(\frac{j}{r}\big)$ (car $f_k(1) = 0$).

On reconnaît une somme de Riemann. D'où $\lim\limits_{r\to+\infty} P(G_r = k) = \dbinom{n}{k}I_k$.

Par suite, $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\}$ $\lim\limits_{r\to+\infty} P(G_r = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

D'où $\lim\limits_{r\to+\infty} F_r(x) = \begin{cases} \dfrac{[x]}{n+1} & \forall\, x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La suite G_r converge en loi vers la loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$.

Exercice 3.26.

Dans cet exercice, f désigne une densité de probabilité. On suppose que f est nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $[0,+\infty[$ et que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente.

1. Un client se présente à un automate pour y effectuer un retrait d'argent. On suppose que l'instant d'arrivée X de ce client à partir d'un instant initial 0 est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0,t]$, (où t est un réel strictement positif fixé), que ce client peut utiliser le distributeur immédiatement, et qu'il se sert de cet automate pendant une durée aléatoire Y, indépendante de X et qui admet pour densité f.

On note p_t la probabilité que ce client soit encore en train d'utiliser l'appareil à l'instant t.

a) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et g une densité de la variable aléatoire $X+Y$. Donner une expression de $g(z)$ pour z compris entre 0 et t en fonction de $F(z)$ et de t.

b) En déduire que $P(X+Y \leq t) = F(t) - \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t zf(z)\,dz$.

c) Montrer que $tP(Y > t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

d) En déduire que $t{\times}p_t$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$ (limite que l'on interprétera à l'aide de la variable aléatoire Y).

2. Un hall contient un grand nombre d'automates. On se fixe un instant initial 0 et pour tout réel $t > 0$, on note :
$\star$ C_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes se présentant à l'un des automates entre les instants 0 et t ;
$\star$ D_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes encore en train d'utiliser un automate à l'instant t.
On suppose que pour tout réel $t > 0$,
$\star$ C_t suit une loi de Poisson de paramètre λt (avec $\lambda > 0$ réel fixé) ;
$\star$ conditionnellement à $(C_t = n)$ la loi de D_t est binomiale de paramètres n et p_t, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_t ayant la même valeur que dans la question précédente.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_t.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ et préciser la loi limite ainsi que son espérance.

Solution :

1. a) $g(z) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{t} f(z-u)\,du = 1_{z\geqslant 0}\int_0^{\min(t,z)} \frac{1}{t} f(z-u)\,du$ donc si $0 \leqslant z \leqslant t$,

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{t} f(z-u)\,du \underset{v=z-u}{=} \int_0^z \frac{1}{t} f(v)\,dv = \frac{F(z)}{t}$$

b) $P(X+Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t g(z)\,dz = \frac{1}{t}\int_0^t F(z)\,dz.$

donc en intégrant par parties, ce qui est licite car f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$P(X+Y \leqslant t) = \frac{1}{t}\Big\{\big[zF(z)\big]_0^t - \int_0^t zf(z)\,dz\Big\} = F(t) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)\,dz$$

c) $0 \leqslant tP(Y > t) = t\displaystyle\int_t^{+\infty} f(z)\,dz \leqslant \int_t^{+\infty} zf(z)\,dz$ et ce majorant est fini et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} zf(z)\,dz$.

d) $tp_t = tP(X+Y>t)$ donc d'après b), $tp_t = tP(Y>t) + \displaystyle\int_0^t zf(z)\,dz$ donc tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} zf(z)\,dz = E[Y]$ quand t tend vers $+\infty$.

2. a) D_t suit la loi de Poisson de paramètre λtp_t car, pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned}
P(D_t = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(D_t = k | C_t = n) P(C_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p_t^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p_t)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda t)^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p_t^k}{k!} (\lambda t)^k \mathrm{e}^{\lambda t(1-p_t)} = \mathrm{e}^{-\lambda tp_t} \frac{(\lambda tp_t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(D_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda np_n} \dfrac{(\lambda np_n)^k}{k!}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda E[Y]} \dfrac{(\lambda E[Y])^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ d'après 1. d).

Donc (D_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda E[Y]$ qui a pour espérance $\lambda E[Y]$.

Exercice 3.27.

Dans cet exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes à valeurs dans $[0,1]$ et de même loi uniforme sur cet intervalle.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

1. Montrer que Y_n est une variable aléatoire, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

2. a) Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon)$.

3. a) Montrer que pour tout ω de Ω, la suite $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $Y(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_{n,\varepsilon} = \big(|Y_n - 1| \leqslant \varepsilon\big) = \{\omega \in \Omega \,/\, |Y_n(\omega) - 1| \leqslant \varepsilon\}$$

et

$$B_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_{n,\varepsilon}$$

Calculer $P(B_\varepsilon)$ puis $P\big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{\frac{1}{k}}\big)$.

c) En déduire qu'il existe $\Omega' \in \mathcal{B}$ de probabilité égale à 1 tel que :

$$\forall \omega \in \Omega', Y(\omega) = 1.$$

Solution :

1. Pour tout réel t, $(Y_n \leqslant t) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant t) \in \mathcal{B}$, puisque pour chaque k, $(X_k \leqslant t)$ appartient à $\mathcal{B}$. Donc Y_n est une variable aléatoire réelle.
De plus :

$$P(Y_n \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Donc Y_n admet une densité f_n définie par : $f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\star$ $E(Y_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt = \int_0^1 nt^n\,dt = \frac{n}{n+1}$,

$\star$ De même $E(Y_n^2) = \dfrac{n}{n+2}$ d'où $V(Y_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

2. Pour tout t réel, $P(Y_n \leqslant t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit que (Y_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 1.

D'autre part, $\forall \varepsilon > 0, P(|Y_n - 1| > \varepsilon) = P(Y_n < 1 - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (Y_n) converge également en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

3. a) Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(Y_n(\omega))$ est croissante, majorée par 1, donc convergente.

b) La suite $(B_{n,\varepsilon})$ est croissante et $P(B_{n,\varepsilon}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après la question précédente, donc $P(B_\varepsilon) = 1$.

De même $P(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{1/k}) = \lim_{p\to\infty} P(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant p} B_{1/k}) = 1$.

c) Posons $\Omega' = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{1/k}$, alors d'après b) , on a $P(\Omega') = 1$.

De plus si $\omega \in \Omega'$ et $\varepsilon > 0$, considérons un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$.

On a $\omega \in B_{1/k}$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in B_{n_0,1/k}$. On a alors $|Y_{n_0}(\omega) - 1| \leqslant \dfrac{1}{k} < \varepsilon$, donc $\forall n \geqslant n_0, |Y_n(\omega) - 1| < \varepsilon$, ce qui prouve que $Y_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, *i.e.* $Y(\omega) = 1$.

Exercice 3.28.

1. Tracer le graphe de la fonction définie pour $x > 0$ par $h(x) = x\ln(x)$ et montrer qu'elle peut se prolonger par continuité en $x = 0$.

2. Démontrer la relation

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad h(x) \geqslant h(y) + (1+\ln(y))(x-y)$$

et en donner une interprétation géométrique.

3. Une variable aléatoire X admettant une densité continue f satisfait la condition $(*)$ si f vérifie les deux propriétés :

$$E(X^2) = 1,$$
$$H(f_X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (h \circ f)(t)\, dt \text{ existe.}$$

Montrer que si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, Z satisfait la condition $(*)$ et calculer $H(f_Z)$ que l'on notera H_0.

4. Montrer que si X satisfait la condition $(*)$, $H(f_X) \leqslant H_0$.

5. Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$ et Y_0 suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. Trouver une variable Y de la forme $Y = \lambda Y_0$ (avec $\lambda > 0$) vérifiant la condition $(*)$ et calculer $H(f_Y)$. Peut-on trouver a et b tel que $H(f_Y) > H_0$?

Solution :

1. La fonction h est bien connue ; son graphe admet une tangente verticale en 0^+, un *minimum* global en $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et est convexe. On a $h'(x) = 1 + \ln x$.

2. C'est une manière d'écrire la convexité de h.

3. Soit f_0 la densité (continue) d'une variable suivant une loi normale centrée réduite. On a :

$$-h \circ f_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\big(\ln(2\pi) + t^2\big)$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$H_0 = \frac{1}{2}(\ln(2\pi)E(1) + E(X^2)) = \frac{1}{2}(\ln(2\pi) + 1).$$

4. La fonction $g = -h$ vérifie $g(x) \leqslant g(y) + g'(y)(x-y)$ pour tous $x, y > 0$; en posant $x = f(t)$, $y = f_0(t)$, il vient :

$$g(f(t)) \leqslant g(f_0(t)) + (1 - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi))(f(t) - f_0(t))$$

Cette relation intégrée devient :

$$H(f) \leqslant H_0 + (1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi))(E(1) - E(1)) - \frac{1}{2}(E(X^2) - E(Z^2)) = H_0$$

donc l'entropie est maximale pour la loi normale centrée réduite parmi les variables ayant un moment d'ordre 2 vérifiant $E(X^2) = 1$ et telles que $f_X \ln f_X$ est intégrable.

5. $E(Y_0^2) = \dfrac{b^2 + ab + a^2}{3}$ donc $Y = \dfrac{\sqrt{3}Y_0}{\sqrt{b^2 + ab + a^2}}$ est la variable cherchée.

Une densité de λY_0 est $\dfrac{1}{\lambda(b-a)}$ sur $]a,b[$, donc $H(f_Y) = \dfrac{\ln(\lambda(b-a))}{\lambda} = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}\ln 3$ si l'on suppose $a = 0$ (ce qui n'est pas restrictif) et cette quantité peut excéder H_0.

Exercice 3.29.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X = n)$.

On appelle *fonction génératrice* de X la fonction de la variable réelle t définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. a) Montrer que $G_X(t)$ est défini pour tout $t \in [0,1]$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On admet que si la série dérivée terme à terme r fois (c'est–à–dire la série $\sum n(n-1)\cdots(n-r+1)p_n t^{n-r}$) converge en un point $t \in [0,1]$, alors on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)p_n t^{n-r} = (G_X)^{(r)}(t)$$

où $G_X^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de G_X.

Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série dérivée terme à terme une fois converge en $t = 1$.

2. a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Retrouver son espérance à l'aide de la question précédente.

b) En déduire pour $r \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$.

3. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

4. On considère une succession de lancers indépendants d'une pièce pouvant amener Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

On pose $T_0 = 0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on appelle T_r la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour amener r fois Pile. On pose enfin $Z_r = T_r - T_{r-1}$.

a) Déterminer la loi de Z_r.

b) En déduire la fonction génératrice de T_r.

c) On admet que : $\displaystyle\left[(\forall t \in [0,1])\ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = 0\right] \Longrightarrow [(\forall k \in \mathbb{N})\ a_k = 0]$

Déterminer la loi de T_r. Calculer son espérance de deux façons différentes.

Solution :

1. a) Pour $t \in [0,1], 0 \leqslant p_n t^n \leqslant p_n$, et p_n est le terme général d'une série convergente (de somme 1). Par comparaison, la série de terme général $p_n t^n$ converge pour tout t de $[0,1]$.

b) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général np_n converge, soit si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum np_n t^{n-1}$ converge pour $t=1$ et on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = G'_X(1)$$

2. a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a, pour $0 \leqslant t < \dfrac{1}{q}$:

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=1}^{\infty}(qt)^{k-1} = \frac{pt}{1-qt}$$

Alors : $G'_X(t) = \dfrac{p}{(1-qt)^2}$ et $E(X) = G'_X(1) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}$.

b) En dérivant terme à terme r fois la série de somme $G_X(t)$, on trouve :

$$\sum_{k\geqslant r} \frac{d^r}{dt^r}[pq^{k-1}t^k] = pq^{r-1}\sum_{k\geqslant r} k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r}$$

cette série étant convergente pour $t \in [0,1]$, car $q \in]0,1[$ et

$$0 \leqslant k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r} \sim k^r(qt)^{k-r} = o\big(\frac{1}{k^2}\big)$$

par croissances comparées.
Alors, par récurrence :
$G_X^{(r)}(t) = \dfrac{r!pq^{r-1}}{(1-qt)^{r+1}} = pq^{r-1}\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r}$, soit :

$$\frac{r!pq^{r-1}}{(1-qt)^{r+1}} = r!pq^{r-1}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}(qt)^{k-r}$$

Soit, en posant $x = qt \in [0,1]$:

$$\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

3. Pour $t \in [0,1]$, on a par indépendance de t^X et t^Y :

$$G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$$

Soit

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

4. a) La variable aléatoire T_r représente le temps d'attente du $r^{\text{ème}}$ pile, tandis que la différence $Z_r = T_r - T_{r-1}$ représente le nombre de lancers effectués entre le $(r-1)^{\text{ème}}$ pile (exclu) et le $r^{\text{ème}}$ (inclus). Z_r suit donc la même loi que le temps d'attente du premier pile, soit :

$$Z_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

b) Comme $T_r = \sum\limits_{k=1}^{r} Z_k$, somme de variables indépendantes, on a par récurrence à partir de la question 3, pour tout $t \in [0,1]$:

$$G_{T_r}(t) = \prod_{k=1}^{r} G_{Z_k}(t) = \prod_{k=1}^{r} G_Z(t) = [G_Z(t)]^r = \big(\frac{pt}{1-qt}\big)^r$$
$$= (pt)^r \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} (qt)^{k-r+1} = \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} p^r q^{k-r+1} t^{k+1}.$$

Soit, en changeant d'indice :

$$G_{T_r}(t) = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} t^n$$

c) Comme $G_{T_r}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(T_r = n) t^n$, par l'unicité admise :

$$P(T_r = n) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} & \text{pour } n \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\star$ Comme $Z_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $E(Z_r) = \dfrac{1}{p}$ et $E(T_r) = \sum\limits_{k=1}^{r} E(Z_k) = \dfrac{r}{p}$.

$\star$ D'autre part :

$$E(T_r) = G'_{T_r}(1) = \Big[\big(\frac{pt}{1-qt}\big)^r\Big]'_{t=1} = \Big[\big(r\frac{pt}{1-qt}\big)^{r-1} \frac{p}{(1-qt)^2}\Big]_{t=1}$$
$$= r\big(\frac{p}{1-q}\big)^{r-1} \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{r}{p}.$$

Exercice 3.30.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$q_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k) = (1-u_0)(1-u_1)\cdots(1-u_n)$$

On dira que le produit $\prod(1-u_k)$ est convergent si la suite (q_n) admet une limite $\ell > 0$. On notera alors $\ell = \prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$.

a) Étudier la convergence et calculer éventuellement la limite des produits suivants :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{k+2}\big), q_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\big)$$

b) On revient maintenant au cas général. Montrer que si le produit $q_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k)$ converge, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

c) En déduire que le produit (q_n) converge si et seulement si la série $\sum u_k$ converge.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(X \geqslant n) > 0$.
On appelle *taux de panne* associé, la suite réelle (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$x_n = P(X = n \mid X \geqslant n)$$

a) Exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction des x_k et en déduire $p_n = P(X = n)$.

b) Déterminer les lois des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant sur $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ est un taux de panne si et seulement si $0 \leqslant x_k < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum x_k$ diverge.

Solution :

1. a) $\star$ $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \big(1 - \dfrac{1}{k+2}\big) = \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (le produit est donc divergent).

$\star$ $q_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \big(1 - \dfrac{1}{(k+2)^2}\big) = \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ (le produit est donc convergent).

b) On peut écrire ici : $1 - u_n = \dfrac{q_n}{q_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

c) On a $\ln q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1 - u_k)$.

$\star$ Si $q_n \longrightarrow L > 0$, alors la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge vers $\ln L$, comme u_n tend vers 0, on a $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$ et par la règle d'équivalence (u_n est de signe fixe), la série de terme général u_n est convergente.

$\star$ Réciproquement, si la série de terme général u_n est convergente ; alors u_n tend vers 0, et par l'équivalent précédent, la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, puis (q_n) converge vers $L = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - u_k) \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge}$$

2. a) Comme :

$$1 = P(X \geqslant n / X \geqslant n) = P(X \geqslant n+1 / X \geqslant n) + P(X = n / X \geqslant n)$$

il vient :

$$1 - x_n = \frac{P[(X \geqslant n+1) \cap (X \geqslant n)]}{P(X \geqslant n)} = \frac{P(X \geqslant n+1)}{P(X \geqslant n)}$$

d'où :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = \frac{P(X \geqslant n)}{P(X \geqslant 0)} = P(X \geqslant n)$$

puis :

$$p_n = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) = x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k)$$

b) $\star$ Si $x_n = x$, alors $p_0 = x_0 = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = P(X = n) = x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = x(1-x)^{n-1} \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$$

$\star$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$, on a $P(X = 0) = 0$, d'où $x_0 = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = pq^{n-1},\ P(X \geqslant n) = q^{n-1},\ x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geqslant n)} = p$$

Ainsi le taux de panne est constant si et seulement si X suit une loi géométrique.

c) $\star$ Un taux de panne vérifie :

$x_n = P(X = n / X \geqslant n) \geqslant 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = P(X \geqslant n) > 0$ impose $x_k \neq 1$, donc $0 \leqslant x_k < 1$.

D'autre part, comme les événements $(X \geqslant n)$ forment une suite décroissante pour l'inclusion d'intersection vide, on a : $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = P(X \geqslant n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et le produit infini diverge, d'où $\sum x_k$ aussi.

$\star$ Réciproquement, étant donnée une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on montre que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = x_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = x_n q_{n-1} = q_{n-1} - q_n$$

(en posant $q_{-1} = 1$) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

En effet, on a bien $0 \leqslant p_n < 1$ pour tout n. De plus la divergence de $\sum x_k$ entraîne que le produit (q_n) n'est pas convergent, or la suite (q_n) est positive décroissante, donc (q_n) est de limite nulle et $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - q_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, avec $0 < p < 1$.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise.

1. On note NV (respectivement NB) la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).

Déterminer les lois de NV et NB. Les variables NV et NB sont–elles indépendantes ?

Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini par :

Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement : [« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ème}}$ est blanche » ou « les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ème}}$ est verte »].

2. a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que X admet une espérance. Pour quelle valeur de p cette espérance est–elle minimale ?

3. a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) En déduire la loi de Y et montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.

c) Les variables X et Y sont–elles indépendantes ?

Solution :

1. $NV \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $NB \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$.

2. a) On a $X(\omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = i)$ est réalisé si les i premières boules obtenues sont blanches et la suivante verte ou si les i premières boules obtenues sont vertes et la suivante blanche. Les tirages ayant lieu avec remise, il vient alors par disjonction et indépendance :

$$P(X = i) = p^i(1-p) + (1-p)^i p$$

b) les séries de termes généraux respectifs ip^i et $i(1-p)^i$ sont convergentes (séries de référence du cours), donc X admet une espérance et :

$$E(X) = (1-p)\sum_{i=1}^{\infty} ip^i + p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^i = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2} + p\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}$$

Soit :

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$

Posons $f(p) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$, avec :

$$f'(p) = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}$$

On en déduit que f est minimale pour $p = \dfrac{1}{2}$ le *minimum* valant 2.

3. a) $(X = i) \cap (Y = j)$ est réalisé si les i premières boules obtenues sont blanches les j suivantes vertes et la suivante blanche ou si les i premières boules obtenues sont vertes les j suivantes blanches et la suivante verte. Toujours par disjonction et indépendance, il vient donc :

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} P[(X = i) \cap (Y = j)] = (1-p)^j \sum_{i=1}^{\infty} p^{i+1} + p^j \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i+1} \\ &= (1-p)^j \frac{p^2}{1-p} + p^j \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} \\ &= p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 p^{j-1} \end{aligned}$$

La convergence des séries rencontrées étant évidente, Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{\infty} jP(Y = j) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + (1-p)^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de Y ne dépend pas de p, et : $E(Y) = 2$.

c) On a, après factorisation :

$$P(X=1)P(Y=1) - P[(X=1)\cap(Y=1)] = p(1-p)(1-2p)^2$$

et comme $p \in]0,1[$, cette quantité n'est nulle que pour $p = \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que :

$$p \neq \frac{1}{2} \implies X \text{ et } Y \text{ non indépendantes}$$

Enfin, on vérifie aidément que pour $p = \dfrac{1}{2}$, alors, quels que soient i et j :

$$P(X=i)P(Y=j) - P[(X=i)\cap(Y=j)] = \frac{1}{2^i}\times\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{i+j}} = 0$$

et donc, dans ce cas, X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.2.

Soit n un entier naturel non nul. Un joueur effectue une succession de n parties indépendantes de Pile ou Face. On suppose que la probabilité de gagner chaque partie (obtenir Pile) est de p (et donc de perdre est $q = 1-p$).

1. On suppose dans cette question $p = \dfrac{1}{2}$. Soit X_n le nombre de parties gagnées.

a) Déterminer la loi de X_n, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Déterminer la probabilité qu'à l'issue de ces n parties, le joueur totalise un nombre de victoires strictement supérieur au nombre de défaites.

2. On suppose maintenant que $0 < p < 1$.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale à 1 si la $(i-1)^{\text{ème}}$ partie se solde par un succès et la $i^{\text{ème}}$ par un échec et qui vaut 0 sinon.

a) Déterminer la loi de Y_i, ainsi que son espérance et sa variance.

b) Soient i et j entiers naturels tels que $2 \leqslant i < j \leqslant n$.
Les variables Y_i et Y_j sont–elles indépendantes ? Calculer la covariance de (Y_i, Y_j).

c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$S_n = Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n.$$

3. Déterminer la probabilité qu'au cours de ces n parties, un succès ne soit jamais suivi d'un échec.

Solution :

1. a) $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$, donc $E(X_n) = \frac{n}{2}$ et $V(X_n) = \frac{n}{4}$.

b) On a ici $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\big(\frac{1}{2}\big)^n$.

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a $P(X_n = k) = P(X_n = n-k)$.

$\star$ Si n est impair, comme on ne peut avoir autant de victoires que de défaites, la probabilité d'obtenir plus de victoires que de défaites vaut $\frac{1}{2}$.

$\star$ Si n est pair $P(X_n < \frac{n}{2}) + P(X_n = \frac{n}{2}) + P(X_n > \frac{n}{2}) = 1$, donc :

$$P(X_n > \frac{n}{2}) = \frac{1}{2}\big(1 - P(X_n = \frac{n}{2})\big) = \frac{1}{2}\big(1 - \binom{n}{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}\big)$$

2. a) On a $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$ et $E(Y_i) = pq$, $V(Y_i) = pq(1-pq)$.

b) Y_iY_{i+1} est la variable certaine égale à 0, car si Y_{i+1} prend la valeur 1, alors on a un succès à la $i^{\text{ème}}$ épreuve et Y_i prend la valeur 0. Ainsi :

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) = -(pq)^2 \neq 0$$

On en déduit que Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

En revanche, si $j \geqslant i+2$, les variables Y_i et Y_j sont fonctions de tirages qui ne se recouvrent pas et donc sont indépendantes.

c) $\star$ $E(S) = \sum_{i=2}^{n} E(Y_i) = (n-1)E(Y_2) = (n-1)pq$.

$\star$ $V(S) = \sum_{i=2}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$, et ne survivent que les covariances $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3)$, $\mathrm{Cov}(Y_3, Y_4), \ldots, \mathrm{Cov}(Y_{n-1}, Y_n)$, d'où :

$$\begin{aligned} V(S) &= (n-1)V(Y_2) + 2(n-2)\,\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) \\ &= (n-1)pq(1-pq) - 2(n-2)p^2q^2 \text{ ?} \end{aligned}$$

3. On doit donc obtenir la succession de lancers $S_1S_2\ldots S_n$, ou $E_1S_2\ldots S_n$, ou $E_1E_2S_3\ldots S_n$, ou $\ldots E_1E_2\ldots E_kS_{k+1}\ldots S_n$ ou $\ldots$ ou $E_1E_2\ldots E_n$.

Ainsi la probabilité p_n cherchée vaut : $p_n = \sum_{k=0}^{n} p^kq^{n-k}$.

d'où :

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 4.3.

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de A ? Montrer que A est diagonalisable.

b) Montrer que B est diagonalisable et qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

2. On se propose de démontrer que si f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables, alors f et g commutent si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.

a) Montrer que si f et g admettent une base commune de vecteurs propres, alors $f \circ g = g \circ f$.

On admet que si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable et si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

b) Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

i) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

ii) En déduire que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

Solution :

1. a) Notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on a $C_2 = C_1$ et $C_3 = -C_1$, donc :

$$\mathrm{rg}\, A = 1.$$

$\star$ Le rang de A valant 1, 0 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est le plan d'équation $x + y - z = 0$.

$\star$ 3 est valeur propre de A, avec $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc A est diagonalisable.

b) De même, on montre que :

$\star$ 2 est valeur propre de B et $E_2(B)$ est le plan d'équation $2x - y + z = 0$.

$\star$ -1 est valeur propre de B et $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a la chance que chaque droite propre de l'une est contenue dans le plan propre de l'autre et on voit donc que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres pour A et pour B.

On peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Deuxmatrices diagonales commutent, donc on conclut en se plaant dans une base commune de vecteurs propres.

b) i) Soit λ une valeur propre de f et $x \in E_\lambda(f)$. On a donc :

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

Donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(f)$ est stable par g.

ii) Soit g_λ l'endomorphisme induit par g dans $E_\lambda(f)$. D'après le résultat admis g_λ est diagonalisable.
On peut donc trouver une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(f)$ formée de vecteurs propres pour g_λ, *i.e.* de vecteurs propres pour g et ces vecteurs sont évidemment propres pour f. Comme f est diagonalisable, en concaténant les familles $\mathcal{B}_\lambda$, pour λ décrivant Spec(f), on obtient ainsi une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour f et g.

Exercice 4.4.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

a) Étudier les variations de la fonction f.
b) Préciser le domaine de convexité de f.

2. On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{1-x}$.

a) Donner le domaine de définition de g et déterminer les limites au bord de ce domaine de définition.
b) Montrer que g' s'annule en 0 et en deux autres points α et β tels que $\alpha < -1$ et $\beta > 1$ (on ne cherchera pas à calculer α et β). Étudier le signe de la fonction g'.
c) En déduire les variations de g.
d) Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, on a :

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

e) Soit $y > 1$. En déduire que l'on a :

$$\ln\big(\frac{y+1}{y}\big) \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \ln\big(\frac{y}{y-1}\big)$$

f) Soit p un entier strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en posant :

$$u_n = \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}$$

Étudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.

Solution :

1. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. D'où, l'étude des limites étant banale :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Comme $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, avec :

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2\mathrm{e}^x - 1}{(1-x)^2}$$

Posons $h : x \mapsto (1-x)^2\mathrm{e}^x - 1$, il vient $h'(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^x$, d'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	-1	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}} - 1 > 0$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On voit donc que h, c'est-à-dire g', s'annule en $\alpha \in]-\infty, -1[$, en 0 (qui est solution évidente) et en $\beta \in]1, +\infty[$, et :

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

c) Ainsi les variations de g sont :

x	$-\infty$		α		0		1		β		$+\infty$
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

d) $\star$ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $f(0) = 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}^+$, soit : $\forall\, x \in]0,1[, 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

$\star$ La fonction g est décroissante ur $[0,1[$, avec $g(0) = 0$, donc g est négative sur $[0,1[$, soit : $\forall\, x \in]0,1[, \mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

e) Si $y > 1$, alors $\dfrac{1}{y} \in]0,1[$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{y+1}{y} = 1 + \frac{1}{y} \leqslant \mathrm{e}^{1/y} \leqslant \frac{1}{1-1/y} = \frac{y}{y-1}$$

Comme la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient bien :

$$\ln\Big(\frac{y+1}{y}\Big) \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \ln\Big(\frac{y}{y-1}\Big)$$

f) Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![n, pn]\!]$, on a $k > 1$, donc :

$$\ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln\Big(\frac{k}{k-1}\Big)$$

et, par sommation et télescopage :

$$\ln\Big(\frac{np+1}{n}\Big) \leqslant u_n \leqslant \ln\Big(\frac{np}{n-1}\Big)$$

et, par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln p$.

Exercice 4.5.

On lance une pièce $2n$ fois de suite ($n > 1$). A chaque lancer on obtient Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$ et les résultats des différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Soit X la variable aléatoire qui vaut i si le premier Pile est obtenu au $i^{\text{ème}}$ lancer ($i \in [\![1,2n]\!]$) et 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Calculer la loi et l'espérance de X.

2. Soit Y la variable aléatoire qui vaut j si l'on a obtenu pour la première fois deux résultats identiques aux lancers numéros $j-1$ et j ($j \in [\![2,2n]\!]$) et 0 si l'on n'a jamais obtenu 2 résultats consécutifs identiques. Déterminer la loi de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. $X(\Omega) = [\![0,2n]\!]$ et :

$\star$ $(X=0)$ est réalisé si on a $2n$ échecs consécutifs : $P(X=0) = q^{2n}$.
$\star$ Pour $k \in [\![1,2n]\!]$, $(X=k)$ est réalisé si on obtient $(k-1)$ échecs consécutifs, suivis enfin d'un succès : $P(X=k) = q^{k-1}p$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{2n} kq^{k-1}p.$$

Or, $\forall\, q \in [0,1[,\ \sum\limits_{k=0}^{2n} q^k = \dfrac{1-q^{2n+1}}{1-q}$ donne, par dérivation légitime :

$$\forall\, q \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{2n} kq^{k-1} = \frac{1-(2n+1)q^{2n}+2nq^{2n+1}}{(1-q)^2}$$

et

$$E(X) = \frac{1-(2n+1)q^{2n}+2nq^{2n+1}}{p}$$

2. $Y(\Omega) = [\![0,2n]\!] \setminus \{1\}$, et :

$\star$ Pour $j \in [\![2,2n]\!]$, $(Y=j)$ est réalisé si on obtient le même résultat aux rangs j et $j-1$ (mais il peut s'agir de deux «Pile» ou de deux «Face») et si les résultats aux rangs $j-2, j-3, \dots, 1$ réalisent alors une alternance régulière, il convient donc de distinguer selon la parité de j :

• Si j est impair : $j = 2k+1, k \geqslant 1$, on a donc obtenu, avec des notations évidentes : $F_1P_2F_3 \dots P_{2k}P_{2k+1}$ ou $P_1F_2P_3 \dots F_{2k}F_{2k+1}$ et donc, par disjonction et indépendance :

$$P(Y=j) = P(Y=2k+1) = q^kp^{k+1} + p^kq^{k+1} = p^kq^k = (pq)^{\frac{j-1}{2}}$$

• Si j est pair non nul, $j = 2k, k \geqslant 1$, par le même raisonnement, on a obtenu $F_1P_2F_3 \dots F_{2k-1}F_{2k}$ ou $P_1F_2P_3 \dots P_{2k-1}P_{2k}$ et

$$P(Y=j)=P(Y=2k)=q^{k+1}p^{k-1}+p^{k+1}q^{k-1}=(pq)^{\frac{j}{2}-1}(p^2+q^2)$$

$\star$ Enfin, on réalise $(Y=0)$ en réalisant une alternance régulière depuis le premier jusqu'au $(2n)^{\text{ème}}$ lancer, soit :

$$P(Y=0)=q^np^n+p^nq^n=2(pq)^n$$

$P(X=3)=q^2p\neq 0$, $P(Y=3)=pq\neq 0$, mais si $(X=3)$ est réalisé alors les deux premiers lancers amènent le même résultat !
Donc $P[(X=3)\cap(Y=3)]=0$ et les événements $(X=3)$ et $(Y=3)$ ne sont pas indépendants, *a fortiori* :

$$X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

Exercice 4.6.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Etudier f et dessiner sa courbe représentative C_f.

2. On pose $G(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

   a) Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} G(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{G(x)}{x}$.

   c) Etudier les variations de G.

Solution :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\star$ Comme $\mathrm{e}^x=1+x+o(x)$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x\neq 0, f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1-x.\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$

$\star$ On a $g'(x)=-x\mathrm{e}^x$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $g(0)=0$, on en déduit que g est négative sur $\mathbb{R}$ et donc f' est négative sur $\mathbb{R}^*$.

$\star$ La poursuite du développement limité donne $g(x)=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, d'où l'on déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{1}{2}$ et par théorème f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Bref f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante, avec $\displaystyle\lim_{-\infty} f=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f=0$.

Enfin, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)+x=0$ et la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à la courbe représentative de f, au voisinage de $-\infty$. Le dessin s'en déduit.

2. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ et est même de classe $\mathcal{C}^1$.

b) $\star$ Pour $x>0$, par décroissance de f sur $[x,2x]$, il vient :

$$\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x}-1}=xf(2x)\leqslant G(x)\leqslant xf(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}-1}$$

D'où :

$$\lim_{+\infty}G=0$$

$\star$ Pour $x<0$, on a de même $xf(2x)\leqslant G(x)\leqslant xf(x)$ (ne pas oublier que dans ce cas, on a $2x<x$! !) et donc $f(x)\leqslant\dfrac{G(x)}{x}\leqslant f(2x)$

D'où :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{G(x)}{x}=+\infty \text{ et donc } \lim_{x\to-\infty}G(x)=-\infty$$

c) On a $G'(x)=2f(2x)-f(x)=f(x)\,\dfrac{3-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Le signe de $G'(x)$ est donc clair et les variations de G s'en déduisent.

Exercice 4.7.

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux ; f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q=f(P)$ défini par :

$$Q=(X+1)P(X+1)-(X-1)P(X-1)\ .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0\in\mathbb{R},\ u_1=2\,;\ \forall\,n\geqslant 1, u_n=\frac{1}{6}\big((n+1)u_{n+1}-(n-1)u_{n-1}\big)$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P\in E$ vérifiant : $\forall\,n\geqslant 1, u_n=P(n)$.
En déduire, pour $n\geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de n.

Solution :

1. La linéarité de f résulte des propriétés des opérations sur les polynômes et il suffit de vérifier que les images par f des polynômes de la base canonique de E sont encore des éléments de E :

$f(1)=(X+1)-(X-1)=2$;
$f(X)=(X+1)(X+1)-(X-1)(X-1)=4X$;

$$f(X^2) = (X+1)(X+1)^2 - (X-1)(X-1)^2 = 6X^2 + 2.$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

2. La matrice de f relativement à la base canonique de E est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Cette matrice est trigonale supérieure, donc les valeurs de A (ou de f) se lisent sur sa diagonale :

$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} f = \{2, 4, 6\}$$

f a donc 3 valeurs propres et comme $\dim E = 3$, on en déduit que f est diagonalisable et en résolvant les systèmes correspondants, on trouve :

$$E_{(2)}(f) = \operatorname{Vect}(2)\,;\ E_{(4)}(f) = \operatorname{Vect}(X)\,;\ E_{(6)}(f) = \operatorname{Vect}(2X^2+1)$$

3. $P \in E$ convient si et seulement si $P(1) = 2$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (n+1)P(n+1) - (n-1)P(n-1) - 6P(n) = 0$$

Or le seul polynôme qui s'annule en tout point de l'ensemble infini $\mathbb{N}^*$ est le polynôme nul.

On doit donc chercher un polynôme $P \in E$ tel que $P(1) = 2$ et $f(P) = 6P$.

La question précédente montre que la solution est le polynôme $\dfrac{2}{3}(2X^2+1)$.

On a donc : $\forall\, n \geqslant 1, u_n = \dfrac{4}{3}n^2 + \dfrac{2}{3}$.