1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère une fonction continue f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les hypothèses (H) suivantes :

i) $f(1) = 0$,

ii) f dérivable en 1 avec $f'(1) \neq 0$,

iii) $(x-1)f(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$,

iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{f(x)} = 0$.

On pose pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{f(t)}\, dt$.

1. Montrer que G est ainsi bien définie. Quel est le signe de $G(x)$?

2. a) Montrer qu'au voisinage de 1, $f(x)$ est équivalent à $(x-1)f'(1)$.

b) On pose $H(x) = \displaystyle\frac{1}{f'(1)} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 1} H(x)$.

c) Montrer que $H(x) - G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

d) En déduire que G se prolonge par continuité en 1 et donner la valeur λ permettant ce prolongement.

3. Montrer que G se prolonge par continuité en 0^+ par 0. On note $\widetilde{G}$ la fonction ainsi prolongée en 0 et en 1.

4. Soit F une primitive de $\dfrac{1}{f}$ sur $]0, +\infty[\,\setminus\{1\}$. Exprimer G en fonction de F. En déduire que G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\,\setminus\{1\}$ et donner l'expression de G' en fonction de f.

5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ vérifie les hypothèses (H). Étudier les variations de la fonction $\widetilde{G}$ associée, en particulier la limite en $+\infty$ et la dérivabilité en 1.

Solution :

1. $\star$ Pour $x \in]0,1[$, on a : $0 < x^2 < x < 1$. Ainsi $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [x^2, x]$, ce qui montre que $G(x)$ est bien défini. Par ailleurs, G est positive sur cet intervalle, puisque $f(t) < 0$ et que les bornes d'intégration sont dans l'ordre décroissant.

$\star$ Pour $x > 1$, on a : $1 < x < x^2$. Ainsi $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [x, x^2]$, ce qui montre que $G(x)$ est bien défini. Par ailleurs, G est positive sur cet intervalle, puisque $f(t) > 0$ et que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

2. a) Par définition de la dérivée en $x = 1$, on a au voisinage de 1 :

$$f(x) - f(1) \sim (x-1)f'(1)$$

On obtient le résultat demandé puisque $f(1) = 0$,

b) Il suffit d'intégrer pour obtenir :

$$\lim_{x\to 1} H(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{f'(1)}\big(\ln|x^2-1| - \ln|x-1|\big) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln|x+1|}{f'(1)} = \frac{\ln 2}{f'(1)}.$$

c) On sait, par la question 2. a), qu'au voisinage de 1, $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{(x-1)f'(1)}$.

Ce qui s'écrit $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{(x-1)f'(1)} \underset{(1)}{=} o\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big)$, ou encore :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < |t-1| < \delta$, alors :

$$\Big|\frac{1}{(t-1)f'(1)} - \frac{1}{f(t)}\Big| < \varepsilon \frac{1}{|t-1|}$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, en séparant les deux cas $x < 1$ et $x > 1$.

$\rightarrow$ Si $x > 1$, prenons x tel que $x^2 < 1 + \delta$, alors $[x, x^2] \subset]1, 1+\delta]$ et :

$$|H(x) - G(x)| \leqslant \int_x^{x^2} \Big|\frac{1}{(t-1)f'(1)} - \frac{1}{f(t)}\Big| dt \leqslant \varepsilon \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \varepsilon \ln(x+1)$$

$\rightarrow$ Si $x < 1$, prenons x tel que $1 - \delta < x^2$, alors $[x^2, x] \subset [1-\delta, 1[$ et on conclut de même.

En regroupant les deux résultats, on a donc :

$$\text{pour } x \text{ assez proche de } 1,\ |H(x) - G(x)| < \varepsilon \ln(x+1) < \varepsilon \ln 3$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} [H(x) - G(x)] = 0.$$

d) Ainsi G et H admettent la même limite en $x = 1$, soit $\dfrac{\ln 2}{f'(1)}$.

3. Par la propriété iv, on sait qu'au voisinage de 0, $\dfrac{1}{f(x)} = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$, ce qui montre la convergence de l'intégrale de $\dfrac{1}{f}$ en 0.

Lorsque x tend vers 0, il en est de même pour x^2 et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0$.

4. On a $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et, pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$:

$$G'(x) = \frac{2x}{f(x^2)} - \frac{1}{f(x)}$$

5. Les hypothèses i et ii sont trivialement vérifiées. Il est clair que pour $x > 0$, tel que $x \neq 1$, on a $(x-1)\ln x > 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = 0$. Ainsi $f : x \mapsto \ln x$ vérifie les hypothèses de l'exercice.
Or $G'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} > 0$. Ainsi G, (donc aussi $\widetilde{G}$) est croissante.
Par théorème, le fait que G' ait une limite en 1 montre que $\widetilde{G}$, qui est continue en 1, est dérivable en 1, avec : $\widetilde{G}'(1) = \lim\limits_{t \to 1} G'(t) = 1$.
Enfin, pour $x > 1$, on a : $G(x) \geqslant \dfrac{x^2 - x}{\ln x^2} = \dfrac{x^2 - x}{2\ln x}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty.$$

Exercice 1.2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $I = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que f est convexe sur I et que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

1. a) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

b) Soit u un réel de I. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

2. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

On définit la suite $(x_n)_n$ par : $x_0 \in [a, c[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers c.

b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que pour tout x de I :

$$|g(x) - c| \leqslant (x-c)^2 \frac{M}{2m}$$

c) En déduire qu'il existe un réel k strictement positif tel que pour tout naturel n on a l'inégalité :

$$|x_n - c| \leqslant k\Big(\frac{x_0 - c}{k}\Big)^{2^n}.$$

Solution :

1. a) La fonction f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ et vérifie $f(a) \times f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires (version stricte, dite aussi théorème de la bijection) permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u est donnée par $y = f'(u)(x-u) + f(u)$.
Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point d'ordonnée nulle, donc son abscisse x vérifie :

$$x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

2. a) La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout x de cet intervalle

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$\star$ Pour $x \in [a,c]$, on a : $f(x) \geqslant 0$ (puisque f est décroissante et $f(c) = 0$) et comme $f''(x) > 0$, la fonction g est croissante sur $[a,c]$, et $g(c) = c$ entraîne :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [a,b], g(x) \leqslant c.$$

$\star$ Pour $x \in [a,c]$, on a $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) < 0$, donc $g(x) \geqslant x \geqslant a$.

Ainsi, l'intervalle $[a,c]$ est stable par la fonction g. Comme $x_0 \in [a,c]$, on obtient par récurrence immédiate que pour tout $n \geqslant 0, x_n \in [a,c]$.
On a également, pour tout $n \geqslant 0$: $x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n \geqslant 0$.

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est croissante, majorée par c, donc convergente vers une limite ℓ.
Puisque g est continue, ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$, soit $f(\ell) = 0$, et finalement

$$\ell = c.$$

b) La fonction f est de classe C^2 sur $[a,b]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |f(c) - f(x) - (c-x)f'(x)| &\leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \sup_{t\in[c,x]} |f''(t)| \\ &\leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| \end{aligned}$$

Or on sait que $|f'|$ est une fonction continue sur $[a,b]$ qui ne s'annule pas : il existe donc deux constantes m et M vérifiant $0 < m \leqslant M$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$:

$$m \leqslant |f'(x)| \leqslant M$$

Ceci donne :

$$\Big|\frac{f(c) - f(x)}{f'(x)} - (c-x)\Big| \leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

soit :

$$|g(x) - c| \leqslant \frac{(c-x)^2}{2} \times \frac{M}{m}$$

c) Posons $\lambda = \dfrac{M}{2m}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$|x_{n+1} - c| = |g(x_n) - c| \leqslant \lambda |x_n - c|^2.$$

D'où :
$|x_1 - c| \leqslant \lambda |x_0 - c|^2$, puis $|x_2 - c| \leqslant \lambda(x_1 - c)^2 \leqslant \lambda^3 |x_0 - c|^4$,
$|x_3 - c| \leqslant \lambda(x_2 - c)^2 \leqslant \lambda^7 (x_0 - c)^8$ et par une récurrence élémentaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant \lambda^{2^n - 1} |x_0 - c|^{2^n}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant \frac{1}{\lambda} \big(\lambda |x_0 - c|\big)^{2^n}$$

On prend donc $k = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2m}{M}$.

Exercice 1.3.

Pour $x > 0$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Préciser le signe de $f(x)$.

2. Montrer que f est croissante.

3. A l'aide de transformations simples, montrer que pour $a > 0$, on a :
$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt - \int_{xa}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt = \int_a^{xa} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$$

4. a) Montrer que pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t$. En déduire $\lim\limits_{a \to 0^+} \int_a^{xa} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\, dt$.

b) En déduire que $f(x) = \ln x$.

5. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln u}\, du = \ln 2$.

6. Soit $x > 1$ fixé. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t \ln x} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par négligeabilité classique, au voisinage de $+\infty$, $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, ceci pour tout $x > 0$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ converge.

Au voisinage de 0, un développement limité de la fonction exponentielle donne $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = x - 1$. La fonction φ admet donc un prolongement par continuité en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ est « faussement impropre ».

En résumé, pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe bien. De plus, comme $x > 0$, $\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt} > 0$ et $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit $0 \leqslant x < y$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-xt} \geqslant \mathrm{e}^{-yt}$, donc $\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-yt}$, ce qui entraîne que $f(x) \leqslant f(y)$.

3. Soit $a > 0$. Chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt$ est convergente (voir la première question). On peut donc écrire :
$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt - \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt$$
Le changement de variable de classe C^1, bijectif, $u = xt$ dans la seconde intégrale donne :
$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt - \int_{xa}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$$
et la relation de Chasles donne :

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

4. a) L'inégalité des accroissements finis pour $u \mapsto e^{-u}$ sur l'intervalle $[0, t]$ donne $0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t$.

Donc, pour $x \geqslant 1$: $\left|\int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt\right| \leqslant \int_a^{xa} dt = a(x-1)$

ce qui entraîne que :

$$\lim_{a\to 0} \int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt = 0$$

On procède de même pour $x < 1$.

b) Comme $\int_a^{xa} \frac{dt}{t} = \ln x$, on peut écrire

$$\left|\int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \ln x\right| = \left|\int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt\right| \leqslant |a(x-1)|$$

Et donc : $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \ln x$. C'est-à-dire $f(x) = \ln x$.

5. L'application $t \mapsto u = e^{-t}$ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$. Donc :

$$\ln x = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{u^{x-1} - 1}{\ln u}\, du$$

Donc $\ln 2 = f(2) = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln u}\, du$

6. a) La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et positive. De plus $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = 1$. La fonction g est donc une densité de probabilité.

b) On a $E(Y) = \int_0^{+\infty} t g(t)\, dt = \frac{x-1}{\ln x}$

et $E(Y^2) = \int_0^{+\infty} t^2 g(t)\, dt = \frac{x^2-1}{x^2 \ln x}$.

Ce qui donne :

$$V(Y) = \frac{(x-1)[(x+1)\ln x - (x-1)]}{x^2 \ln x}$$

Exercice 1.4.

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Étudier l'existence de l'intégrale $I_{n,p} = \int_0^1 t^n (\ln t)^p\, dt$. La calculer lorsqu'elle existe.

2. Pour quelles valeurs de x réel, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{xt} - 1}{\ln t}\, dt$ est–elle convergente ?

On définit ainsi le domaine de définition D d'une fonction F par, pour tout $x \in D$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{xt} - 1}{\ln t}\, dt$$

3. On rappelle que pour tout réel a, on a : $\mathrm{e}^a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$.

a) Étudier la fonction g définie sur l'intervalle $]0,1]$ par $g(t) = t \ln t$.

b) Soit $x \in D, t \in]0,1]$. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$ converge, où :

$$u_k = \frac{x^k t(t \ln t)^{k-1}}{k!}$$

c) Montrer que pour tout $x \in D$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} I_{k,k-1} = \int_0^1 \Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} t(t \ln t)^{k-1} \Big) dt$$

En déduire une expression de F sous forme d'une somme de série pour des valeurs de x à préciser.

Solution :

1. $\star$ Si $n \geqslant 1$ et $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,p} : t \mapsto t^n (\ln t)^p$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_{n,p}(0) = 0$.

$\star$ Pour tout p de $\mathbb{N}$, $t \mapsto (\ln t)^p$ est continue sur $]0,1]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^p \, dt$ converge car on a $(\ln t)^p = o\big(\frac{1}{\sqrt{t}}\big)$ au voisinage de 0.

L'intégrale définissant $I_{n,p}$ est convergente pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Pour $p \geqslant 1$, préparons une intégration par parties :

$u'(t) = t^n \Longleftarrow u(t) = \dfrac{1}{n+1} t^{n+1}$; $v(t) = (\ln t)^p \implies v'(t) = \dfrac{p}{t} (\ln t)^{p-1}$

Comme $\lim\limits_{0} uv = 0$ et $u(1)v(1) = 0$, l'intégration par parties est légitime sur l'intervalle d'intégration et donne :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$

Et, par récurrence descendante :

$$I_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} I_{n,0} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} \int_0^1 t^n \, dt = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$$

On constate que la formule obtenue est encore valable pour $p = 0$.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{xt \ln t} - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, et comme $\mathrm{e}^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$:

- au voisinage de 0, $\varphi(t) \sim xt$, donc $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$.
- au voisinage de 1, $\varphi(t) \sim xt$, donc $\lim\limits_{t \to 1} \varphi(t) = x$.

Ainsi φ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, et $F(x)$ existe pour tout x réel.

3. a) Une étude rapide montre que g est décroissante sur $[0, 1/\mathrm{e}]$, et croissante sur $[1/\mathrm{e}, 1]$. Elle s'annule en 0 et en 1. Elle reste donc négative sur $[0,1]$ et atteint son *minimum* en $1/\mathrm{e}$, ce *minimum* valant $-1/\mathrm{e}$.

b) Posons $u_k(t) = \dfrac{x^k t(t \ln t)^{k-1}}{k!}$. On a $u_k(0) = u_k(1) = 0$.

Pour $t\in]0,1[$, on a $u_k(t)=\dfrac{1}{\ln t}\times\dfrac{(xt\ln t)^k}{k!}$, qui est le terme général d'une série de référence convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)=\frac{1}{\ln t}\times(\mathrm{e}^{xt\ln t}-1)=\frac{1}{\ln t}\times(t^{xt}-1)$$

c) Ainsi

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(xt\ln t)^k}{k!(\ln t)}\,dt\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^k(\ln t)^{k-1}\,dt+\int_0^1\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t(t\ln t)^{k-1}\,dt\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}I_{k,k-1}+\int_0^1 R_n(t)dt,\text{ avec }R_n(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t(t\ln t)^{k-1}\end{aligned}$$

Or, pour $t\in]0,1]$:

$$\big|R_n(t)\big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}t|g(t)|^{k-1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\big(\frac{1}{\mathrm{e}}\big)^{k-1}\text{ (voir 3.a))}$$

et donc :

$$\Big|\int_0^1 R_n(t)\,dt\Big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\big(\frac{1}{\mathrm{e}}\big)^{k-1}=\mathrm{e}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(x/\mathrm{e})^k}{k!}\underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}0$$

comme reste d'une série convergente.
Ainsi :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}I_{k,k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k(k+1)^k}$$

Exercice 1.5.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{\ln x}{2} & \text{si } x\neq 1\\ \quad 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

2. Construire le tableau des variations de f et montrer que pour $x>1$ on a $f(x)<x$.

Soit a un nombre réel tel que $a>1$.

3. Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de réels vérifiant $x_0=a$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1}=f(x_n)$.

4. Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite ℓ.

5. Ecrire un programme Pascal permettant d'obtenir la première valeur de n pour laquelle $|x_n-\ell|\leqslant 10^{-4}$.

6. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$:

$$|x_{n+1}-\ell|\leqslant\frac{1}{3}|x_n-\ell|$$

7. En déduire que la suite $(x_n-\ell)_n$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_n$.

Solution :

1. La fonction f est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, comme quotient et produit de fonctions continues.
Au voisinage de $x=1$, on écrit $x=1+h$. Alors :

$$f(x)=\frac{2+h}{2}\times\frac{\ln(1+h)}{h}\sim\big(1+\frac{h}{2}\big)\to 1$$

Ainsi f est continue sur $]0,+\infty[$.

Sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, f est dérivable comme quotient et produit de fonctions dérivables. Pour tout $x\neq 1$

$$f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}$$

Cette fonction est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. En posant $x=1+h$, il vient :

$$f'(1+h)=\frac{h-\ln(1+h)}{h^2}-\frac{1}{2(1+h)}=\frac{1}{2}+o(1)-\frac{1}{2(1+h)}\underset{(h\to 0)}{\to}0$$

Par théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(1)=0$.

2. La concavité de la fonction logarithme permet d'écrire, pour $x>0$: $\ln x\leqslant x-1$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)=-2x\ln x+x^2-1$.
Or $g'(x)=-2(\ln x-(x-1))>0$. La fonction g est donc croissante et $g(1)=0$, ce qui prouve que g est positive sur $]1,+\infty[$ et négative sur $]0,1[$.
Ceci permet de conclure que f est décroissante sur $]0,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$. De plus, pour $x>1$:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{\ln x}{2}\leqslant\frac{x+1}{2}<x$$

3. Comme f est croissante sur $]1,+\infty[$ et comme $f(1)=1$, on montre par récurrence immédiate que si $x_0\geqslant 1$, alors, pour tout $n\geqslant 0, x_n\geqslant 1$.

4. On sait que pour tout $n\geqslant 0$, $x_{n+1}=f(x_n)<x_n$. La suite (x_n) est décroissante, minorée par 1 ; elle converge vers $\ell\geqslant 1$ qui vérifie $f(\ell)=\ell$ (puisque f est continue). L'unique point fixe de f étant 1, il vient $\ell=1$.

5. Voici une proposition de programme :

```
PROGRAM Boucle
Var n : integer
    a : real ;
Begin
n := 0 ;
Readln(a) ;
Repeat
  n := n+1 ;
  a :=(a+1)/(a-1)*ln(a)/2
Until abs(a-1)<=0.0001 ;
Writeln(n) ;
Readln
End.
```

6. Par le théorème des accroissements finis, comme f est continue sur $[1,x_n]$, dérivable sur $]1,x_n[$, il existe $c_n\in]1,x_n[$ tel que $x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$. Comme la suite (x_n) tend vers 1, il en est de même de la suite (c_n), et comme f' est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f'(c_n)=f'(1)=0$.

Il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant f'(c_n) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

7. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|x_n - \ell| \leqslant \big(\frac{1}{3}\big)^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$.
Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \ell|}{(1/2)^n} = 0$.

Exercice 1.6.
Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2y' = (2-x)y$.

1. Intégrer (E) sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$.
(On pourra remarquer que $\dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$)

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

2. a) Donner le développement limité de f au voisinage de 0, à l'ordre 2.
b) Étudier les variations de f sur I.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall\, x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{1-x}\big)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$
Préciser la relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

4. a) Déterminer le degré d_n de P_n.
b) On appelle valuation d'un polynôme P, le degré du monôme de plus bas degré de P. Par exemple, si $P(X) = 4X^7 + 3X^4 - 5X^2$, la valuation de P est égale à 2.
Déterminer la valuation v_n du polynôme P_n.

5. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), montrer que pour tout $n \geqslant 0$:
$$P_{n+1}(X) = ((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)$$
Soit Q_n le polynôme défini par $Q_n(X) = \dfrac{P_n(X)}{X^{v_n}}$, et soit $a_n = Q_n(0)$, $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et $c_n = b_n - b_{n-1}$.
En exprimant c_{n+1} en fonction de c_n, exprimer a_n en fonction de n.

Solution :

1. Pour $x \in]-\infty, 1[$, on a $(1-x)^2 \neq 0$. Donc :
$$(1-x)^2y'(x) = (2-x)y(x) \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$
$x \mapsto \ln|y(x)|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ et deux fonctions ayant même dérivée sur un intervalle diffèrent d'une constante, donc $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, x < 1, \ln|y(x)| = C - \ln(1-x) - \frac{1}{1-x},$$
Comme $y(x) \neq 0$, $y(x)$ garde un signe fixe et :

$$y(x) = \frac{K}{1-x} \exp\big(\frac{1}{1-x}\big), \text{ avec } K = \pm e^C$$

2. a) Au voisinage de 0, la fonction f est de classe C^∞. On peut donc écrire :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$$

Or f est une solution de l'équation différentielle précédente. Donc $f'(0) = 2f(0)$, et $(1-x)^2 f''(x) - 2(1-x)f'(x) = (2-x)f'(x) - f(x) \implies f''(0) = 4f'(0) - f(0)$

Finalement $f(0) = e$, $f'(0) = 2e$ et $f''(0) = 7e$, soit :

$$f(x) = e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + o(x^2)$$

b) Comme, pour tout $x \leqslant 1$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2} f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$, on a $f'(x) \geqslant 0$ sur $I =]-\infty, 1[$. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle et induit une bijection de I sur $]0, +\infty[$.

3. Montrons cette relation par récurrence sur n.

⋆ La relation est vraie pour $n = 0$, avec $P_0(X) = X$.

⋆ Supposons que $f^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{1-x}\big) e^{\frac{1}{1-x}}$, on a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \Big[\frac{1}{(1-x)^2} P_n'\big(\frac{1}{1-x}\big) + \frac{1}{(1-x)^2} P_n\big(\frac{1}{1-x}\big)\Big] e^{\frac{1}{1-x}}$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$, avec :

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n'(X) + P_n(X))$$

On conclut par le principe de récurrence.

4. a) On sait que $\deg(P_0) = 1$. Notons $d_n = \deg(P_n)$.
Alors, par la relation précédente, $d_{n+1} = \deg(P_{n+1}) = d_n + 2$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$d_n = 2n + 1.$$

b) On sait que $v_0 = 1$. Si on écrit, dans l'ordre des puissances décroissantes : $P_n(X) = x^{d_n} + \cdots + \alpha_n x^{v_n}$, alors :

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n'(X) + P_n(X)) = X^{d_n+2} + \cdots + \alpha_n v_n X^{v_n+1}$$

Donc $v_{n+1} = v_n + 1$ et $v_n = n + 1$.

5. On a : $\dfrac{d^n}{dx^n}\big((1-x)^2 y'(x)\big) = \dfrac{d^n}{dx^n}\big((2-x)y(x)\big)$.
soit, par la formule de Leibniz :

$$(1-x)^2 y^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = (2-x)y^{(n)}(x) - ny^{(n-1)}(x)$$

ou encore :

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{2n}{1-x} y^{(n)}(x) + \big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\big) y^{(n)}(x) - \frac{n^2}{(1-x)^2} y^{(n-1)}(x)$$

soit en posant $X = \dfrac{1}{1-x}$:

$$P_{n+1}(X) = \big((2n+1)X + X^2\big)P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

Ainsi :

$$Q_{n+1}(X) = \frac{P_{n+1}(X)}{X^{n+1}} = (2n+1+X)Q_n(X) - n^2 Q_{n-1}(X)$$

et $a_{n+1} = (2n+1)a_n - n^2 a_{n-1}$.

En posant $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$, il vient $b_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} b_n - \dfrac{n}{n+1} b_{n-1}$, ou :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n}{n+1}\big(b_n - b_{n-1}\big)$$

En posant $c_n = n(b_n - b_{n-1})$, il vient $c_{n+1} = c_n$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = c_1 = b_1 - b_0 = 0$. Donc, pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_n = b_0 = 1 \text{ et } a_n = n!.$$

Exercice 1.7.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$ par récurrence sur n en posant :

$$u_0 = a \text{ et pour } n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

a) Étudier cette suite.

b) Prouver que pour tout $n \geqslant 0$, on a : $u_{n+1}^2 = a^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$.

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurence sur n en posant :

$$u_0 = a_0 \text{ et pour } n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

a) Donner une condition nécessaire simple, portant sur la suite $\big(a_n\big)_{n\geqslant 0}$, pour que la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n^2 = a_0^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k^2}{u_k^2} + 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$.

c) En déduire une condition, portant sur la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, équivalente à la convergence de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 0}$.

d) On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0,1[$. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vers une limite que l'on notera ℓ. Donner un équivalent de $\ell^2 - u_n^2$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On montre, par une récurrence immédiate, que pour tout $n \geqslant 0, u_n > 0$, donc u_n est bien défini et comme $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Supposons que cette suite soit majorée. Dans ce cas elle convergerait vers une limite ℓ et on aurait : $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{u_n}$. La contradiction est claire.

La suite $(u_n)_n$ positive, n'est pas majorée et est croissante. Elle tend vers $+\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n}\big(u_k^2 + \frac{k^2}{u_k^2} + 2k\big) = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$$

Par soustraction, il vient :

$$(\star) \qquad u_{n+1}^2 = a^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{u_k^2} + n(n+1)$$

c) On remarque que l'égalité précédente montre que pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$u_k \geqslant \sqrt{k(k-1)}\,;\ \text{d'où } \frac{k^2}{u_k^2} \leqslant \frac{k}{k-1} \leqslant 2$$

On reporte cette inégalité dans la relation $(\star)$. Il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &\leqslant a^2 + \frac{1}{a^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} + n(n+1) \\ &\leqslant a^2 + \frac{1}{a^2} + 2(n-1) + n(n+1) \end{aligned}$$

soit : $n(n+1) \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant a^2 + \dfrac{1}{a^2} + 2(n-1) + n(n+1)$. On en déduit que :

$$u_n \sim n.$$

2. a) La suite $(a_n)_n$ étant une suite positive, on en déduit immédiatement que la suite $(u_n)_n$ est bien définie, à termes strictement positifs, et qu'elle est strictement croissante.

Supposons qu'elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell > a_0 > 0$. Il vient :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{u_n} = \frac{1}{\ell} \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_n$ converge, alors la suite $(a_n)_n$ tend vers 0.

b) La relation de récurrence permet d'écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

On en déduit la relation demandée :

$$u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

c) $\star$ Si la suite $(u_n)_n$ converge de limite ℓ, la relation précédente implique que :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} \geqslant 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Il en résulte, puisque la suite $(a_n)_n$ est à termes positifs, que la série $\sum a_n$ converge.

$\star$ Réciproquement, si la série $\sum a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; cela entraîne que $a_n^2 \leqslant a_n$, à partir d'un certain rang et donc que la série $\sum a_n^2$ converge. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leqslant a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &\leqslant a_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_0^2 + \frac{1}{u_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Cela montre que la suite $(u_n)_n$ est majorée, donc qu'elle converge.

d) Dans le cas où $a_n = r^n$, avec $r \in]0,1[$, la question précédente montre que la suite $(u_n)_n$ converge, puisque que la série $\sum r^k$ converge. On a alors :

$$u_n^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + 2 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

puis par passage à la limite :

$$\ell^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + \frac{2}{1-r}$$

D'où :

$$\ell^2 - u_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^{2k}}{u_k^2} + \frac{2r^n}{1-r}$$

Par suite, on a :

$$1 \leqslant \frac{(\ell^2 - u_n^2)(1-r)}{2r^n} \leqslant \frac{1}{(1+r)u_n^2}\, r^n + 1$$

Donc :

$$\ell^2 - u_n^2 \sim \frac{2r^n}{1-r}$$

Exercice 1.8.

Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en posant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{(n+1)^{1-a} - 1}{1-a} \leqslant S_n \leqslant \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} + 1$$

2. Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers l'infini.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{n^{1-a} - 1}{1-a} - S_n$

a) Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $S_n = \dfrac{n^{1-a} - 1}{1-a} + \ell + o(1)$.

4. Dans cette question on s'intéresse à la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

a) Prouver la convergence de la suite $n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^a}$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$. Calculer sa somme en fonction de ℓ et de a.

Solution :

1. On utilise la technique de comparaison «série-intégrale», avec la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$, qui est positive, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^a} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leqslant \frac{1}{k^a}$$

En sommant ces inégalités, il vient, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^a} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^a} = \frac{(n+1)^{1-a} - 1}{1-a} \leqslant S_n$$

Soit :

$$\frac{(n+1)^{1-a} - 1}{1-a} \leqslant S_n \leqslant \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} + 1$$

2. Par la question précédente :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-a}-\frac{1}{n^{1-a}} \leqslant \frac{1-a}{n^{1-a}} S_n \leqslant 1-\frac{a}{n^{1-a}}$$
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-a}{n^{1-a}}\, S_n = 1$, ce qui est se traduit par :
$$S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}.$$

3. a) On voit que $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(n+1)^{1-a}-n^{1-a}}{1-a} - \dfrac{1}{(n+1)^a}$.
Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$ si et seulement si :
$$n+1-n^{1-a}(n+1)^a \geqslant 1-a$$
ou :
$$1+\frac{a}{n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$
Soit $\varphi : x \mapsto 1+ax-(1+x)^a$, on a :
$$\forall\, x \geqslant 0, \varphi'(x) = a - a(1+x)^{a-1} = a - a\frac{1}{(1+x)^{1-a}} \geqslant 0$$
Comme $\varphi(0)=0$, φ est positive sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
D'autre part, par la première question :
$$-1 \leqslant u_n \leqslant \frac{n^{1-a}-(n+1)^{1-a}}{1-a} = \frac{1}{(1-a)n^{1-a}} \times \left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-a}\right)$$
Le suite $(u_n)_n$ est donc une suite majorée par une suite convergente (de limite nulle) : elle est donc bornée. Comme elle est croissante, on en déduit qu'elle converge.

b) Il reste à poser $\ell = -\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. a) On a
$$\begin{aligned}
v_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^a} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^a}\\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^a} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^a} = S_{2n} - \frac{2}{2^a}\, S_n\\
&= \frac{(2n)^{1-a}-1}{1-a} + \ell + \varepsilon_{2n} - 2^{1-a}\left(\frac{n^{1-a}-1}{1-a} + \ell + \varepsilon_n\right)\\
&= \frac{2^{1-a}-1}{1-a} + (1-2^{1-a})\ell + \varepsilon_{2n} - 2^{1-a}\varepsilon_n
\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{2^{1-a}-1}{1-a} + (1-2^{1-a})\ell$$

b) On remarque que $v_{2n+1} = v_{2n} + \dfrac{1}{(2n+1)^a}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}$ et :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a} = (2^{1-a}-1)\left(\frac{1}{1-a}-\ell\right)$$

Exercice 1.9.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On note E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Pour tout $f \in E$, on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\int_0^1 L(f)(t)\,dt = 0$.

1. Vérifier que l'application L est ainsi bien définie et constitue une application linéaire de E vers E.

2. a) Déterminer le noyau de L.

b) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction de L à E_1 réalise-t-elle un automorphisme de E_1 ?

3. Montrer que pour tout t de $[0,1]$, on a : $L(f)(t) = \int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)\,du\Big)dx$.

4. On pose $L^0 = Id$ et, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $L^n = L \circ L^{n-1}$. Pour tout x de $[0,1]$, on pose alors $P_0(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $P_n(x) = L^n(P_0)(x)$.

a) Calculer P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que pour tout x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Solution :

1. La fonction f étant continue, elle admet des primitives et le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que ses primitives sont de la forme :

$$x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt + C = F_1(x) + C,$$

où C est un réel.

La condition $\int_0^1 F(x)dx = 0$ fixe la constante C, avec : $C = -\int_0^1 F_1(x)\,dx$.

Il existe donc une unique primitive de f telle que $\int_0^1 F(x)dx = 0$.

La linéarité de l'application L se vérifie de façon immédiate. De plus F est de classe C^1 donc continue sur $[0,1]$. Ainsi L est un endomorphisme de E.

2. a) On a $f \in \operatorname{Ker} L \iff L(f) = 0$.

Or : $L(f) = 0 \implies \forall\, t \in [0,1],\ [L(f)]'(t) = f(t) = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

b) L'application L n'est pas surjective puisque $L(f) \in C^1([0,1],\mathbb{R})$: il suffit alors de donner un exemple de fonction continue sur $[0,1]$ et qui ne soit pas de classe C^1, la fonction $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ convient.

3. On a vu que $F_1 : t \mapsto \int_0^t f(t)\,dt$ est la primitive de f nulle en 0 et que

$$L(f)(t) = F_1(t) - C = \int_0^t f(u)\,du - \int_0^1 \Big(\int_0^x f(u)\,du\Big)\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^t f(u)\,du - \int_0^x f(u)\,du\Big)dx = \int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)\,du\Big)dx$$

4. a) Un calcul immédiat donne :

$$P_0 = 1, P_1(t) = t - \frac{1}{2}, P_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12}.$$

On remarque que $P_2(0) = P_2(1)$

b) Montrons la relation demandée par récurrence sur n :

• $n = 1$: $P_1(x+1) - P_1(x) = x + \frac{1}{2} - \big(x - \frac{1}{2}\big) = 1$

• Supposons la relation vérifiée pour un certain $n > 1$. On sait que pour tout x, on a : $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$. Donc :

$$\frac{d}{dx}\big(P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) - \frac{x^n}{n!}\big) = P_n(x+1) - P_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 0.$$

Ce qui entraîne qu'il existe une constante C_n telle que :

$$P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!} + C_n$$

Mais, pour $n \geqslant 1$:

$$P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) = \int_0^1 P'_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 P_n(t)\,dt = \int_0^1 L(P_{n-1})(t)\,dt = 0$$

Ainsi $C_n = 0$ et on a le résultat voulu au rang $n+1$.
On conclut par le principe de récurrence :

c) Pour $n = 3$, on sait que $P_3(k+1) - P_3(k) = \frac{k^2}{2}$, pour $k \geqslant 0$. En sommant :

$$P_3(n+1) - P_3(1) = \sum_{k=1}^{n} \big(P_3(k+1) - P_3(k)\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2}$$

Or $P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2[P_3(n+1) - P_3(1)] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 1.10.

1. a) Montrer qu'il existe une constante C, que l'on déterminera, telle que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C.\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres.

2. a) Que vaut, en fonction de n et k de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2k+1)}\,dx$?

b) Déterminer la limite, lorsque N tend vers l'infini de

$$R_{N,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2N+3)}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}dx$$

3. a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \mathrm{e}^{-2kx}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(X^{2n}) = \frac{4(2n)!}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$$

c) Si l'on remplace $E(X^2)$ par $\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$, montrer que l'errreur commise est inférieure à 10^{-3}.

Solution :

1. a) Si $C \geqslant 0$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive. Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = C\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx = C\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}\,dx$$
$$= -C\big[\operatorname{Arc}\tan \mathrm{e}^{-x}\big]_0^{\to+\infty} = C\operatorname{Arc}\tan 1 = C\frac{\pi}{4}$$

Donc f est une densité de probabilité pour $C = \frac{4}{\pi}$.

b) Pour tout $k \geqslant 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^k\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx$ est convergente, car la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et au voisinage de $+\infty$, elle est équivalente à $x \mapsto x^k\mathrm{e}^{-x}$ dont l'intégrale converge (car, par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2{\times}x^k\mathrm{e}^{-x} = 0$.)

2. a) Le changement de variable affine $t = x(2k+1)$ donne :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x(2k+1)}dx = \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{\Gamma(2n+1)}{(2k+1)^{2n+1}}$$
$$= \frac{(2n)!}{(2k+1)^{2n+1}}$$

b) On peut écrire :

$$\Big|\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-(2N+3)x}dx = \frac{(2n)!}{(2N+3)^{2n+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. a) On a $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k\mathrm{e}^{-2kx} = \frac{1-(-\mathrm{e}^{-2x})^{N+1}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

d'où :

$$E(X^{2n}) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\,dx$$
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\mathrm{e}^{-(2k+1)x}x^{2n}\Big)\,dx + R_{N,n}(x)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)x}x^{2n}dx + R_{N,n}(x)$$

En prenant la limite en $+\infty$, il vient :

$$E(X^{2n}) = \frac{4}{\pi}(2n)!\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$$

b) Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et par suite

$$|E(X^2) - S_4| \leqslant |S_5 - S_4| \leqslant \frac{1}{11^3} < 10^{-3}$$

Exercice 1.11.

On pose, pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $G(x,y) = \displaystyle\int_0^y \frac{t-[t]}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$, où $[.]$ désigne la partie entière.

1. Montrer que la fonction G est ainsi bien définie.

2. Montrer que pour tout $x > 0$ fixé, $G(x,y)$ admet une limite positive finie lorsque y tend vers $+\infty$. On notera par la suite $G(x)$ cette limite.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y > 0$; montrer que

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left\{\int_0^n \frac{t-[t]}{t}\,dt - \int_y^{y+n} \frac{t-[t]}{t}\,dt\right\}$$

et, en considérant la suite de terme général $H(n) = nG(n)$, en déduire que :

$$G(n) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{n}(n!)^{1/n}\right).$$

4. Montrer que la série de terme général $H(n) - H(n-1) - \dfrac{1}{2n}$ est convergente. En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

5. Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Si $x > 0$, la fonction rationnelle $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$ ne présente que le pôle 0 sur l'intervalle $[0, y]$. Pour tout $t \in [0, 1[$, $t - \lfloor t \rfloor = t$. Ainsi, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}$ vaut $\dfrac{1}{t+x}$ sur $[0, 1[$ et est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable sur $[0, y]$.

2. Pour tout $x > 0$ et $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant g_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt$ est donc convergente.

3. On a $\dfrac{1}{t(t+n)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+n}\right)$. Soit, en posant $h(t) = \dfrac{t - \lfloor t \rfloor}{t}$

$$\begin{aligned} G(n,y) &= \frac{1}{n}\left(\int_0^y h(t)\,dt - \int_0^y h(t+n)\,dt\right) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y h(t)\,dt - \int_n^{n+y} h(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\int_0^n h(t)\,dt - \int_y^{n+y} h(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

Comme pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$, il vient :

$$\left|\int_y^{n+y} h(t)\,dt\right| \leqslant \ln\left(\frac{y+n}{y}\right) \underset{(y \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$G(n) = \frac{1}{n}\int_0^n h(t)\,dt$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$:

$$H(n) = \int_0^n \Big(1 - \frac{\lfloor t\rfloor}{t}\Big)\,dt$$

ou, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} H(n) &= \int_0^1 dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \big(1 - \frac{k}{t}\big)dt \\ &= 1 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} k \ln\big(1 + \frac{1}{k}\big) \end{aligned}$$

Comme $H(k) = H(k-1) + 1 + (k-1)\ln\big(\dfrac{k}{k-1}\big)$ et

$$H(n) = \sum_{k=2}^{n} [H(k) - H(k-1)] + 1,$$

il vient :

$H(n) = n + \ln(n!) - n\ln n$ et $G(n) = \dfrac{H(n)}{n} = \ln\big(\frac{\mathrm{e}}{n}(n!)^{1/n}\big)$

4. Un développement limité à l'ordre 2 du logarithme donne :

$$\begin{aligned} H(n) - H(n-1) &= 1 - (n-1)\ln\big(1 + \frac{1}{n-1}\big) = \frac{1}{2(n-1)} + O\big(\frac{1}{n^2}\big) \\ &= \frac{1}{2n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big). \end{aligned}$$

Soit, en sommant :

$$H(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_k, \text{ avec } \sum w_k \text{ absolument convergente}$$

Donc :

$$H(n) = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

ce qui donne en particulier :

$$H(n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{2} \quad \text{et} \quad G(n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{2n}$$

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{t - \lfloor t\rfloor}{t(t+x)}$ étant positive, décroissante, la fonction G est décroissante et pour $x > 1$, on écrit :

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 \implies G(\lfloor x\rfloor) \leqslant G(x) \leqslant G(\lfloor x\rfloor + 1)$$

et

$$\frac{2x}{\ln x} G(\lfloor x\rfloor) \leqslant \frac{2xG(x)}{\ln x} \leqslant \frac{2x}{\ln x} G(\lfloor x\rfloor + 1)$$

Or :

$$\lfloor x\rfloor \underset{(\infty)}{\sim} \lfloor x\rfloor + 1 \underset{(\infty)}{\sim} x \text{ et } \ln\lfloor x\rfloor \underset{(\infty)}{\sim} \ln(\lfloor x\rfloor + 1) \underset{(\infty)}{\sim} \ln x$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor = +\infty$, les termes extrêmes de l'encadrement ont pour limite 1 lorsque x tend vers l'infini (résultat de la question 4. aux points $\lfloor x\rfloor$ ou $\lfloor x\rfloor + 1$) et donc, par le théorème d'encadrement :

$$G(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{\ln x}{2x}$$

Exercice 1.12.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles et λ un réel donné. On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) \\ \forall\, n \geqslant 0, u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, u_n est de classe C^n sur $[0,1]$ et donner, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, les différentes dérivées $u_n^{(k)}$ de u_n. En déduire que

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.

b) Soit u réel. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|u|^k}{k!} \leqslant \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ à l'aide d'une intégrale.

d) Soit $t \in [0,x]$.

En écrivant $\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}$ sous forme d'une série, exprimer $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ en fonction de $f(x), \mathrm{e}^{\lambda x}$ et $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\, dt$.

Solution :

1. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.
• Pour $n = 0$, $u_0 = f$ est continue sur $[0,1]$.
• Supposons que u_n soit de classe C^n sur $[0,1]$. Alors, par le théorème fondamental du calcul intégral, u_{n+1} est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $u'_{n+1}(x) = \lambda u_n(x)$ avec $u_{n+1}(0) = 0$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

$$u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$$

et comme $u_n(0) = 0$ dès que $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n(0) = u'_n(0) = \cdots = u_n^{(n-1)}(0) = 0$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, il vient :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} u_{n+1}^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x u_{n+1}^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt \\ &= \int_0^x \lambda^{n+1} f(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

2. a) On a : $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{|\lambda|^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1} |f(t)|\, dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \times \frac{(|\lambda| x)^n}{n!}$.

Comme la série $\sum \dfrac{|\lambda x|^n}{n!}$ converge pour tout réel x, on en déduit que la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente pour tout réel positif ou nul x.

b) Pour tout $u > 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \big(1 + \frac{u}{n+2} + \frac{u^2}{(n+2)^2} + \cdots \big) \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{1 - \frac{u}{n+2}}$$

Donc si $n+2>2u$, il vient :
$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\leqslant 2\times\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) On écrit
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}u_k(x)&=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\lambda^k\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)dt\\&=f(x)+\lambda\int_0^x\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\Big)f(t)dt\end{aligned}$$

d) Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}$, il vient :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}u_k(x)&=f(x)+\lambda\int_0^x\Big(\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}\Big)f(t)\,dt\\&=f(x)+\lambda\int_0^x\mathrm{e}^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt-\lambda\int_0^x\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}f(t)dt\end{aligned}$$

Or, pour n assez grand :
$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{[\lambda(x-t)]^k}{k!}\Big|\leqslant\frac{2(|\lambda(x-t)|^n}{n!},\text{ donc :}$$
$$\Big|\int_0^x\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^k}{k!}f(t)dt\Big|\leqslant 2\sup_{[0,1]}|f(t)|\times\frac{(|\lambda|x)^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi :
$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)=f(x)+\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\int_0^x\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\,dt$$

Exercice 1.13.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel. Soit u et v les suites définies par :
$$u_n=\sqrt{\frac{1}{100}+\sqrt{\frac{1}{101}+\sqrt{\frac{1}{102}+\sqrt{\quad\cdots+\sqrt{\frac{1}{100+n}}}}}}.$$
$$v_n=\sqrt{\frac{1}{100}+\sqrt{\frac{1}{100}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{100}}}}.$$
avec $n+1$ symboles $\sqrt{\cdot}$, dans les deux cas.

On pose pour tout réel strictement positif a, et pour tout réel positif x,
$$f_a(x)=\sqrt{\frac{1}{a}+x}.$$

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.

2. Montrer que f_{100} admet un unique point fixe α que l'on déterminera, puis que la suite v converge vers α.

3. On admet que $u_8>1$. Montrer que u converge vers une limite β telle que : $1<\beta<1{,}01$.

Solution :

1. Pour tout $a > 0$, les fonctions f_a sont strictement croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On a :

$$u_n = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}$$

et

$$v_n = f_{100} \circ f_{100} \circ \cdots \circ f_{100}, \quad (n+1) \text{ fois}$$

Ceci permet d'affirmer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies.

2. L'équation $f_{100}(x) = x$ est équivalente à $x^2 - x - \dfrac{1}{100} = 0$. La seule solution positive de cette équation est

$$\alpha = \frac{100 + \sqrt{10400}}{200} = \frac{1 + \sqrt{1.04}}{2}$$

D'autre part, la fonction f_{100} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $v_{n+1} = f_{100}(v_n)$. La suite $(v_n)_n$ est donc monotone. Or $v_0 = 0.1$ et $v_1 = \sqrt{0.1 + \dfrac{1}{100}} > v_0$. La suite $(v_n)_n$ est donc croissante.
Enfin, $v_0 < \alpha$. Supposons que $v_n \leqslant \alpha$. Alors $v_{n+1} = f(v_n) \leqslant f(\alpha) = \alpha$.
La suite $(v_n)_n$ est ainsi croissante, majorée par α. Elle converge vers le point fixe positif de f_{100} (qui est continue), donc vers α.

3. Montrons que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.
On a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{100+n+1}}\right) \\ u_n = f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}(0) \end{cases}$$

Or la fonction $f_{100} \circ f_{101} \circ \cdots \circ f_{100+n}$ est strictement croissante (composée de $(n+1)$ fonctions strictement croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même) et comme $\sqrt{\dfrac{1}{100+n+1}} > 0$, on a $u_{n+1} > u_n$.
D'autre part $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \alpha$. Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente. Elle converge vers une limite β telle que $\beta \leqslant \alpha$.
Comme on a admis que $u_8 > 1$, on a également $1 < \beta \leqslant \alpha$.
Enfin, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est concave sur $[-1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant -1$, $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $x = 0$.
Ainsi $\sqrt{1.04} < 1 + 0.02$ et $\alpha < 1 + 0.01$. Finalement, on a bien

$$1 < \beta < 1.01$$

Exercice 1.14.

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)\, dt$$

1. a) Montrer que pour tout x et tout n on a : $|I_n(x)| \leqslant 1$.
   b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

2. a) Soit $h \in \mathbb{R}$; montrer que pour tout x et tout n :

$$|I_n(x+h) - I_n(x)| \leqslant |h|.$$

   b) En déduire que la fonction I_n est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, donner pour tous réels x, h et t une majoration de

$$|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)|$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $J_n(x) = -\displaystyle\int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(tx)\,dt.$

Montrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $I_n'(x)$ en fonction de $J_n(x)$.

Solution :

1. a) Pour tout réel x, $t \mapsto (1-t^2)^n\cos(xt)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $|(1-t^2)^n\cos(xt)| \leqslant 1$. Ceci entraîne que $|I_n(x)| \leqslant 1$.

b) Pour $x \neq 0$ $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)dt = \frac{\sin x}{x}$ et $I_0(0) = 1$.

Deux intégrations par parties successives donnent pour $x \neq 0$:

$$I_1(x) = \int_0^1 (1-t^2)\cos(xt)dt = \frac{2\sin x - 2x\cos x}{x^3}$$

et $I_1(0) = \dfrac{2}{3}$.

2. Soit h réel. On peut écrire :

$$\begin{aligned}|I_n(x+h)-I_n(x)| &= \Big|\int_0^1 (1-t^2)^n\big(\cos(xt+th)-\cos(xt)\big)\,dt\Big|\\ &\leqslant \int_0^1 \big|\big(\cos(xt+th)-\cos(xt)\big)\big|\,dt\end{aligned}$$

Or

$$\big|\cos(xt+th)-\cos(xt)\big| \leqslant |th| \sup_{[xt,xt+th]} |\cos'| \leqslant |th|$$

On en déduit que :

$$|I_n(x+h)-I_n(x)| \leqslant \int_0^1 |th|\,dt = \frac{|h|}{2}$$

b) Ainsi, pour tout x, $\lim\limits_{h\to 0} I_n(x+h) = I_n(x)$, ce qui montre la continuité de I_n sur $\mathbb{R}$.

3. a) Appliquons l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction cosinus sur l'intervalle $[tx, tx+th]$. Il vient :

$$|\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\sup_{[tx,tx+th]}|\cos''| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}$$

b) En utilisant le résultat précédent, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= |I_n(x+h)-I_n(x)-hJ_n(x)|\\ &= \Big|\int_0^1 (1-t^2)^n\big(\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)\big)dt\Big|\\ &\leqslant \int_0^1 |\cos(tx+th)-\cos(tx)+th\sin(tx)|dt\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{t^2h^2}{2}dt = \frac{h^2}{6} = o(h)$$

Par conséquent :

$$\frac{I_n(x+h) - I_n(x)}{h} - J_n(x) = o(1)$$

Ceci montre que I_n est dérivable en x réel et que $I_n'(x) = J_n(x)$.

Exercice 1.15.

Soit $t \in [0,1]$. On définit la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ par récurence en posant

$$u_0(t) = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\left[t - u_n(t)^2\right]$$

1. a) Montrer que $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ pour tout entier n.

b) Prouver que la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n(t))_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. On va maintenant s'intéresser aux fonctions $t \mapsto u_n(t)$.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est une fonction polynomiale pour tout entier n. Déterminer son degré.

b) Au moyen d'une récurrence sur l'entier n, déterminer le signe de u_n'' sur l'intervalle $[0,1]$. Quel est le sens de variation de la fonction u_n' sur $[0,1]$? Que peut-on en déduire pour la fonction u_n sur l'intervalle $[0,1]$?

c) Que peut-on dire de la suite $(u_n'(0))_{n\geqslant 0}$?

d) Soit n un entier strictement positif et $t \in [0,1]$. Prouver que l'on a :

$$0 \leqslant u_{n+1}'(t) \leqslant \left(1 - \frac{t}{2}\right)u_n'(t) + \frac{1}{2}$$

En déduire que la suite $(u_n'(t))_{n\geqslant 0}$ est bornée pour $t \in]0,1]$.

Solution :

1. a) Montrons cette assertion par récurrence sur n. Elle est évidente pour $n = 0$. Supposons que pour un certain rang n, $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\left(t - u_n(t)^2\right)\\ &= \left(\sqrt{t} - u_n(t)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{t} + u_n(t)}{2}\right)\end{aligned}$$

Le premier facteur est positif, ainsi que le second, car l'hypothèse de récurrence donne : $\dfrac{\sqrt{t} + u_n(t)}{2} \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1$, donc $u_{n+1}(t) \leqslant \sqrt{t}$.

D'autre part, $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t} \implies t - u_n(t)^2 \geqslant 0$ et $u_{n+1}(t) \geqslant 0$.

On conclut par le principe de récurrence.

b) On a vu en fait à la fin de la question précédente que $u_{n+1}(t) \geqslant u_n(t)$ et la suite $\left(u_n(t)\right)_n$ est croissante.

c) La suite $\left(u_n(t)\right)_n$ est croissante et majorée. Elle converge vers une limite $\ell(t)$ positive qui vérifie $\ell(t) + \frac{1}{2}\left(t - \ell(t)^2\right) = \ell(t)$, soit $\ell(t) = \sqrt{t}$.

2. a) La fonction u_0 est polynomiale de degré 0, $u_1 : t \mapsto \dfrac{1}{2}t$ est polynomiale de degré $1 = 2^0$, $u_2 : t \mapsto t - \dfrac{1}{8}t^2$ est polynomiale de degré $2 = 2^1$ ... et si on suppose que pour un rang $n \geqslant 1$, u_n est polynomiale de degré 2^{n-1}, alors la relation de récurrence montre que u_{n+1} est polynomiale de degré 2^n.

b) Comme u_n est polynomiale, elle est de classe C^∞. En dérivant la relation de récurrence, il vient :

$$u'_{n+1}(t) = u'_n(t) + \frac{1}{2}\big(1 - 2u'_n(t)u_n(t)\big) = u'_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) + \frac{1}{2}$$

En dérivant une seconde fois, il vient :

$$u''_{n+1}(t) = u''_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) - \big(u'_n(t)\big)^2$$

On a $u''_2(t) = -\dfrac{1}{4}$.

Comme $u_n(t) \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1$, pour $t \in [0,1]$, on voit que si on suppose $u''_n(t) \leqslant 0$ pour $t \in [0,1]$ et pour un certain $n \geqslant 2$, alors $u''_{n+1}(t) \leqslant 0$ pour $t \in [0,1]$. On conclut par le principe de récurrence.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction u'_n est décroissante sur $[0,1]$.

c) Une récurrence élémentaire montre que $u_n(0) = 0$, donc :

$$u'_{n+1}(0) = u'_n(0)\big(1 - u_n(0)\big) + \frac{1}{2} = u'_n(0) + \frac{1}{2}$$

La suite $\big(u'_n(0)\big)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et puisque $u'_0(0) = 0$:

$$u'_n(0) = \frac{n}{2}.$$

La suite $\big(u'_n(0)\big)_n$ n'est donc pas bornée.

d) On a vu que $u'_{n+1}(t) = u'_n(t)\big(1 - u_n(t)\big) + \dfrac{1}{2}$

Comme $u_n(t) \in [0, \sqrt{t}] \subseteq [0,1]$, une récurrence immédiate montre que $u'_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, pour $n \geqslant 1, u_n(t) \geqslant u_1(t) = \dfrac{t}{2}$, donc pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u'_{n+1}(t) \leqslant \big(1 - u_1(t)\big)u'_n(t) + \frac{1}{2} = \big(1 - \frac{t}{2}\big)u'_n(t) + \frac{1}{2}$$

Le point fixe de la récurrence arithmético-géométrique $w_{n+1} = \big(1 - \frac{t}{2}\big)w_n + \dfrac{1}{2}$ vaut $\dfrac{1}{t}$, donc on écrit la relation précédente sous la forme :

$$\big(u'_{n+1}(t) - \frac{1}{t}\big) \leqslant \big(1 - \frac{t}{2}\big)\big(u'_n(t) - \frac{1}{t}\big)$$

D'où l'on déduit, puisque $1 - \dfrac{t}{2}$ est positif :

$$0 \leqslant u'_{n+1}(t) \leqslant \big(1 - \frac{t}{2}\big)^n\big(u'_1(t) - \frac{1}{t}\big) + \frac{1}{t} = \big(1 - \frac{t}{2}\big)^n\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\big) + \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{t}$$

La suite $\big(u'_n(t)\big)_n$ est donc bornée pour $t \in]0,1]$.

Exercice 1.16.

Pour tout n entier naturel tel que $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n : z \mapsto nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \cdots - z - 1$$

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C} : P_n(z) = 0 \implies P_n(|z|) \leqslant 0$.

2. Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto (x-1)P_n(x)$ (on commencera par simplifier l'expression de $f(x)$).

En déduire que si $P_n(z) = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

3. Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leqslant 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que $|(z-1)P_n(z) - 1| \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1)$.

b) Montrer que pour $x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$; en déduire que pour $n \geqslant 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

c) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(2x^2 - x + 1), x \geqslant \sqrt{2}$.

En déduire que pour $n \geqslant 2$, $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$.

4. En déduire que si z est une solution complexe de l'équation $P_n(z) = 0$, alors :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < |z| \leqslant 1.$$

Solution :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\implies nz^n = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 \\ &\implies n|z|^n \leqslant |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1 \\ &\implies n|z|^n - |z|^{n-1} - |z|^{n-2} - \cdots - |z| - 1 \leqslant 0 \\ &\implies P_n(|z|) \leqslant 0 \end{aligned}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-1)P_n(z) = nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1$$

On a donc, pour tout x réel, $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Alors :

$$f'(x) = n(n+1)(x-1)x^{n-1}$$

La fonction f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ en $x = 1$, minimum qui vaut $f(1) = 0$. Ainsi, en particulier $x > 1 \implies f(x) > 0$.

Soi $z \in \mathbb{C}$, le résultat précédent et la contraposée du résultat de la question 1. donnent :

$$|z| > 1 \implies (|z| - 1)P_n(|z|) > 0 \implies P_n(|z|) > 0 \implies P_n(z) \neq 0$$

Donc, encore par contraposée, si $P_n(z) = 0$ alors $|z| \leqslant 1$.

3. a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a : $(z-1)P_n(z) - 1 = nz^{n+1} - (n+1)z^n = z^n(nz - n - 1)$, donc :

$$|(z-1)P_n(z) - 1| \leqslant |z|^n(n|z| + n + 1)$$

et

$$|z| \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \begin{cases} |z|^n \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \\ n|z| + n + 1 \leqslant n - \sqrt{n} + n + 1 \end{cases}$$

donc :

$$|(z-1)P_n(z) - 1| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1)$$

b) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$, donc pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ (on peut auusi étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ ...). Aussi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$n \ln\bigl(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\bigr) \leqslant n \times \frac{-1}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}$$

et, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\bigl(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\bigr)^n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

c) La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(2x^2 - x + 1)$ est de classe C^∞. On a :

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)(-2x+1)$$

Ceci donne les variations de h sur $[\sqrt{2},+\infty[$. La fonction h atteint son maximum en $x = 2$ et $h(2) < 1$. Ainsi, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a $h(x) < 1$. Donc, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\bigl(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\bigr)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P_n(z) = 0$. Supposons que $|z| \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $P_n(z) = 0$, on a $|(z-1)P_n(z) - 1| = 1$. Or, par les questions précédentes :

$$|(z-1)P_n(z) - 1| \leqslant \bigl(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\bigr)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$$

C'est une contradiction. Donc, pour tout $n \geqslant 2$, $|z| > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la conclusion.

Exercice 1.17.

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et de dérivée bornée sur $]0,1[$.

1. Étudier la convergence de la *suite* de terme général $\varphi_n = f\bigl(\frac{1}{n}\bigr)\cdot$

On commencera par montrer que la série de terme général $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ ($n \geqslant 3$) *converge absolument.*

2. a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ décroissante et convergeant vers 0.

Montrer (de la même manière que dans le cas particulier précédent) que la suite $\bigl(f(t_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0 (on ne la suppose pas décroissante).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$.

Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0.

En déduire que la suite $\bigl(f(u_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

On considèrera la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = u_n$ *et* $w_{2n+1} = v_n$.

On note λ la limite commune des suites $\bigl(f(u_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0,1[$ convergeant vers 0.

3. a) On suppose que, quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(t)$ ne tend pas vers λ.

Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $u \in]0, 1/n[$ tel que $|f(u) - \lambda| \geqslant \varepsilon$?

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un tel réel u que l'on note u_n.

Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Déduire de ce résultat que f est prolongeable par continuité à droite en 0, puis à gauche en 1.

Solution :

1. Les hypothèses de l'exercice et le théorème des accroissements finis permettent d'affirmer qu'il existe une constante $C = \sup\limits_{t\in\,]0,1]} |f'(t)|$ telle que :

$$\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant C\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{C}{n(n+1)}$$

Ceci montre que la série $\sum \varphi_{n+1} - \varphi_n$ est convergente.

Ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N-1} \varphi_{n+1} - \varphi_n$ existe, c'est-à-dire que $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi_N$ existe.

2. a) On reprend la démonstration précédente :

$$\big|f(t_{n+1}) - f(t_n)\big| \leqslant C|t_{n+1} - t_n| = C(t_n - t_{n+1})$$

Or la série $\sum(t_n - t_{n+1})$ converge puisque $\sum\limits_{n=0}^{N-1} (t_n - t_{n+1}) = t_0 - t_N \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} t_0$.

Donc la série $\sum \big|f(t_{n+1}) - f(t_n)\big|$ converge également, ce qui montre que la série $\sum \big(f(t_{n+1}) - f(t_n)\big)$ converge et que la suite $(f(t_n))_n$ est elle même convergente.

b) La suite $(t_n)_n$ est décroissante, puisque $t_{n+1} = \min(t_n, u_{n+1}) \leqslant t_n$. Elle tend vers 0 puisque $0 \leqslant t_n \leqslant u_n \longrightarrow 0$.

On en conclut que la suite $\big(f(t_n)\big)_n$ converge ; soit ℓ sa limite. Alors :

$$\begin{aligned} |f(u_n) - \ell| &\leqslant |f(u_n) - f(t_n)| + |f(t_n) - \ell| \leqslant C|u_n - t_n| + |f(t_n) - \ell| \\ &\leqslant Cu_n + |f(t_n) - \ell| \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

c) Soit $(w_n)_n$ la suite définie par $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. Comme les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers 0, la suite $(w_n)_n$ tend également vers 0. La question précédente montre que la suite $(f(w_n))_n$ tend vers une limite λ et donc que les deux suites extraites $\big(f(w_{2n})\big)_n$ et $\big(f(w_{2n+1})\big)_n$ tendent également vers λ.

3. a) On traduit l'hypothèse de la question : $f(t)$ ne tend pas vers λ lorsque t tend vers 0^+ :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, \delta > 0, \exists\, u \in]0, \delta] \text{ tel que } |f(u) - \lambda| \geqslant \varepsilon$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{n}$, et en considérant un tel u que l'on note u_n, on obtient le résultat demandé.

Comme $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $|f(u_n) - \lambda| \geqslant \varepsilon$ montre que la suite $\big(f(u_n)\big)_n$ ne converge pas vers λ.

b) La question précédente conduit à une contradiction. Donc $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lambda$: la fonction f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = \lambda$.

En appliquant ce résultat à la fonction $g(t) = f(1-t)$ qui est dérivable et de dérivée bornée sur $]0,1[$, on montre que g est prolongeable par continuité en 0 et donc que f est prolongeable par continuité à gauche en 1.

Exercice 1.18.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$\text{il existe un réel } p > 0, \text{ tel que } \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = p$$

On cherche à déterminer un équivalent de la suite de terme général :

$$U_n = f(1) + \cdots + f(n).$$

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \geqslant x_0, f'(x) > 0$. En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$$

2. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [n, n+1], p - \varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant p + \varepsilon_n$$

3. En intégrant la relation précédente, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [n, n+1], f(n)\mathrm{e}^{(p-\varepsilon_n)(x-n)} \leqslant f(x) \leqslant f(n)\mathrm{e}^{(p+\varepsilon_n)(x-n)}$$

puis que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = f(n) \text{ et } v_n = \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

sont équivalentes.

En utilisant le résultat de la première question, en déduire un équivalent de la suite de terme général U_n.

Solution :

1. Comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = p > 0$ et comme $f(x) > 0$, il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0, f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$ et $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ sur cet intervalle. Donc :

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt \geqslant \int_1^{x_0} f(t)\,dt + f(x_0)(x - x_0)$$

et, par minoration : $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$.

2. Soit $\varepsilon_n = \max\limits_{t\in[n,n+1]} \left|\dfrac{f'(t)}{f(t)} - p\right|$, on a :

$$\forall\, x \in [n, n+1], -\varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} - p \leqslant \varepsilon_n,\ i.e.\ p - \varepsilon_n \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant p + \varepsilon_n$$

et, par définition de la limite de $\dfrac{f'}{f}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

3. En intégrant la relation précédente entre n et x, pour $x \in [n, n+1]$, il vient :

$$(p - \varepsilon_n)(x - n) \leqslant \ln\big(f(x)\big) - \ln\big(f(n)\big) \leqslant (p + \varepsilon_n)(x - n)$$

En prenant l'exponentielle (qui est une fonction croissante), on obtient la première inégalité :

$$\forall\, x \in [n, n+1], f(n)\,\mathrm{e}^{(p-\varepsilon_n)(x-n)} \leqslant f(x) \leqslant f(n)\,\mathrm{e}^{(p+\varepsilon_n)(x-n)}$$

et, en intégrant ces inégalités entre n et $n+1$:

$$f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)\,\frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

4. On peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1}\times\frac{\mathrm{e}^{p-\varepsilon_n} - 1}{p - \varepsilon_n} \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1}\times\frac{\mathrm{e}^{p+\varepsilon_n} - 1}{p + \varepsilon_n}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$.

On sait que la série $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$(résultat de la première question et relation de Chasles). Il en est donc de même pour la série $\sum u_n$.
Montrons que les sommes partielles

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1}\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

sont équivalentes, ce qui terminera l'exercice.

Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on peut écrire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \geqslant n_0, v_k(1 - \varepsilon) \leqslant u_k \leqslant v_k(1 + \varepsilon)$$

et en sommant depuis le rang $n_0 + 1$ jusqu'au rang $n > n_0$:

$$(V_n - V_{n_0})(1 - \varepsilon) \leqslant U_n - U_{n_0} \leqslant (V_n - V_{n_0})(1 + \varepsilon)$$

Soit :

$$\frac{(V_n - V_{n_0})(1 - \varepsilon) + U_{n_0}}{V_n} \leqslant \frac{U_n}{V_n} \leqslant \frac{(V_n - V_{n_0})(1 + \varepsilon) + U_{n_0}}{V_n}$$

Le majorant a pour limite $1 + \varepsilon$ et le minorant a pour limite $1 - \varepsilon$ lorsque n tend vers l'infini (puisque V_n tend vers $+\infty$).

Donc pour n assez grand, on a $1 - 2\varepsilon \leqslant \dfrac{U_n}{V_n} \leqslant 1 + 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$ et donne :

$$U_n \sim \frac{p}{\mathrm{e}^p - 1}\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

Exercice 1.19.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Dans tout l'exercice on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note ${}^t x$ le transposé de x, élément de $\mathbb{R}^n$. Ainsi si x et y sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, ${}^t xy$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ donné, et S une matrice symétrique réelle d'ordre n. On définit la fonction m sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m(x) = {}^t ax + \frac{1}{2}\,{}^t xSx$$

1. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^t xSx \geqslant 0$. On suppose également que a appartient à l'image de S.

Montrer que la fonction m admet sur $\mathbb{R}^n$ un minimum global (on pourra calculer pour $y \in \mathbb{R}^n$, $m(y + x_0) - m(x_0)$ pour x_0 tel que $S(x_0) = -a$).

2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le gradient $\nabla m(x)$ de m en x.

3. En déduire que si m possède un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, alors a appartient à $\operatorname{Im} S$ et S vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t xSx \geqslant 0$.

4. On suppose dans cette question que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $x \neq 0$, on a ${}^t xSx > 0$. Montrer qu'il existe un unique vecteur x^* en lequel m admet un minimum global strict.

5. Dans cette question $n = 2$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

À quelle condition sur α cette matrice vérifie-t-elle pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t xSx \geqslant 0$?

On suppose cette condition vérifiée. Déterminer un vecteur a de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} m(x) = -\infty$.

Solution :

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $S(x_0) = -a$. On a, pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} m(x_0 + y) - m(x_0) &= a^T(x_0 + y) + \frac{1}{2}(x_0 + y)^T S(x_0 + y) - a^T x - \frac{1}{2}x_0^T S x_0 \\ &= a^T y + \frac{1}{2}x_0^T S y + \frac{1}{2}y^T S x_0 + \frac{1}{2}y^T S y \end{aligned}$$

Comme $S(x_0) = -a$ et $x_0^T S y = (Sx_0)^T y$, il vient :

$$m(x_0 + y) - m(x_0) = a^T y - \frac{1}{2}a^T y - \frac{1}{2}a^T y + \frac{1}{2}y^T S y = \frac{1}{2}y^T S y \geqslant 0$$

Or tout vecteur x de E est de la forme $x = x_0 + y$; donc, pour tout x de E, $m(x) - m(x_0) \geqslant 0$.

2. On a pour tout $h \in E$:

$$m(x + h) - m(x) = a^T h + h^T S x + \frac{1}{2}h^T S h$$

L'application $h \longmapsto a^T h + h^T S x$ est linéaire et

$$||\frac{1}{2}h^T S h|| \leqslant \frac{1}{2}||S||.||h||^2 = o(||h||)$$

Donc, par définition :

$$\nabla m(x) = a^T h + h^T S x = h^T\big(a + S(x)\big)$$

3. Les points critiques sont les points x de E tels que pour tout $h \in E$, on ait : $h^T\big(a + S(x)\big) = 0$, donc tels que $S(x) = -a$.

Si m possède un minimum global sur E, alors $S(x) = -a$ et $a \in \mathrm{Im}(S)$. On reprend la première question pour montrer qu'alors, pour tout $y \in E$, $\frac{1}{2}y^T Sy \geqslant 0$.

4. Si pour tout x de E non nul, $\frac{1}{2}x^T Sx > 0$, alors la matrice S est inversible et il existe un unique vecteur x_0 tel que $S(x_0) = -a$. En ce point, m admet un minimum global.

5. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres λ, μ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda\mu = 1 - \alpha^2 \end{cases}$$

On a, pour tout x de E, $x^T Sx \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$. Comme $\lambda\mu = 1 - \alpha^2$, cela entraîne que $|\alpha| \leqslant 1$

• Si $|\alpha| \neq 1$, on a pour tout x de E, $x^T Sx > 0$ et on conclut par la question 4.

• Si $\alpha = 1$, alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Choisissons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(S)$. Si $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $m(x) = u + \frac{1}{2}(u+v)^2$.

Il suffit de prendre $x = \begin{pmatrix} -w \\ w \end{pmatrix}$ et $m(x) = -w \underset{w\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

• Si $\alpha = -1$, alors $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Choisissons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(S)$. Si $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $m(x) = u + \frac{1}{2}(u-v)^2$.

Il suffit de prendre $x = \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix}$ et $m(x) = w \underset{w\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 1.20.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction convexe. On rappelle que f est une fonction convexe si :

$$\forall(\lambda, x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Soit f une fonction convexe.

On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(y) \geqslant f(x) + \langle h, y - x\rangle \qquad (1)$$

puis en déduire des propriétés sur les extremums de f.

1. Soient x et y fixés dans $\mathbb{R}^n$ et soit ψ l'application définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles par :

$$\psi : t \longmapsto f(ty + (1-t)x)$$

a) Montrer que ψ est convexe sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\psi(1) - \psi(0) \geqslant \psi'(0)$ puis que $h = \nabla f(x)$ vérifie la propriété (1).

2. Réciproquement, on suppose que $h \in \mathbb{R}^n$ vérifie la propriété (1) pour un certain x de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la dérivée de f en x dans la direction $u \in \mathbb{R}^n$, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x), u \rangle \geqslant \langle h, u \rangle$$

En déduire que $h = \nabla f(x)$.

3. Montrer que $\nabla f(x) = 0$ si et seulement si f présente un minimum global en x.

4. On suppose que f possède un maximum global en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1. a) On a, pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f\big((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y + (1 - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)x)\big) \\
&= f((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y + (\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2)x) \\
&= f(\lambda(t_1 y + (1-t_1)x) + (1-\lambda)(t_2 y + (1-t_2)x)) \\
&\leqslant \lambda f(t_1 y + (1-t_1)x) + (1-\lambda) f(t_2 y + (1-t_2)x) \\
&\leqslant \lambda \psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2)
\end{aligned}$$

Donc ψ est une fonction convexe sur $[0,1]$.

b) Le graphe d'une fonction convexe étant au-dessus de ses tangentes, on a bien $\psi(1) - \psi(0) \geqslant \psi'(0)$, ce qui donne, par la règle de dérivation d'une composée :

$$f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

2. Soit $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. La relation précédente appliquée à $y = x + tu$ s'écrit :

$$f(x+tu) - f(x) \geqslant t\langle h, u \rangle$$

ou

$$\frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \geqslant \langle h, u \rangle$$

Il reste à faire tendre t vers 0, pour obtenir

$$\langle \nabla f(x), u \rangle \geqslant \langle h, u \rangle$$

ou

$$\langle \nabla f(x) - h, u \rangle \geqslant 0$$

En appliquant cette relation avec $-u$, il vient $\langle \nabla f(x) - h, u \rangle = 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, donc $\nabla f(x) = h$.

3. Si $\nabla f(x) = 0$, la relation démontrée dans la première question montre que f présente en x un minimum global. La réciproque est vérifiée dès que f est de classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

4. Si f admet un maximum global en x_0, alors $\nabla f(x_0) = 0$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0) \geqslant f(y) \geqslant f(x_0)$$

Donc f est une fonction constante.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel non nul.

Pour λ réel non nul, on définit l'application u_λ qui au polynôme P de E associe le polynôme :

$$u_\lambda(P)(X) = \frac{1}{2}P(X) + \Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$$

1. Montrer que u_λ est un endomorphisme de E.

2. Pour quelles valeurs de λ, u_λ est-il un automorphisme de E ? Déterminer alors l'automorphisme u_λ^{-1}.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propres de u_λ. L'endomorphisme u_λ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application u_λ est linéaire, par linéarité de l'intégration. Comme $\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, il vient :

$$\deg\big(u_\lambda(P)\big) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant n,$$

ce qui montre que u_λ est un endomorphisme de E.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u_\lambda)$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ ou si $\lambda = 0$, alors $u_\lambda(P) = \frac{1}{2}P = 0$ donne $P = 0$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors $u_\lambda(P) = 0$ donne $P = -2\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$, donc $P(X)$ est de la forme αX, avec $\alpha = -2\lambda\frac{\alpha}{2}$, et :

- Si $\lambda \neq -1$, $\alpha = 0$ et $P = 0$.
- Si $\lambda = -1$, α est quelconque et $\mathrm{Ker}(u_{-1}) = \mathrm{Vect}(X)$.

Ainsi E étant de dimension finie :

$$u_\lambda \in GL(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u_\lambda) = \{0\} \Longleftrightarrow \lambda \neq -1$$

Pour déterminer l'inverse de u_λ, utilisons la linéarité de u_λ^{-1}. Ainsi :

$$P(X) = \frac{1}{2}u_\lambda^{-1}(P) + \Big(\lambda \int_0^1 P(t)\,dt\Big)u_\lambda^{-1}(X)$$

Par ailleurs :

$$u_\lambda(X) = \frac{1}{2}X + X.\lambda \int_0^1 t\,dt = \frac{\lambda+1}{2}X$$

et donc, puisque $\lambda \neq -1$: $u_\lambda^{-1}(X) = \dfrac{2}{\lambda+1}X$.

Finalement :

$$u_\lambda^{-1}(P) = 2P + \frac{2\lambda}{\lambda+1}X\int_0^1 P(t)\,dt$$

3. L'équation $u_\lambda(P) = \alpha P$ s'écrit

$$\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)P(X) = \lambda X \int_0^1 P(t)\,dt$$

• Pour $\lambda = 0$, on a simplement $u_0(P) = \dfrac{1}{2}P$, et u_0 est l'homothétie de E de rapport $\dfrac{1}{2}$. Tout polynôme est polynôme propre associé à l'unique valeur propre $\dfrac{1}{2}$.

• Supposons donc maintenant $\lambda \neq 0$.

• Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation se réduit à $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$, donc $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de u_λ et le sous-espace propre associé est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

Ce noyau est un hyperplan de E, donc est de dimension n.

• Si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$. Le polynôme P est donc de la forme $P(X) = aX$ et l'équation s'écrit :

$\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)aX = \lambda X\,\dfrac{a}{2}$, soit : $a = 0$ sauf si $\alpha - \dfrac{1}{2} = \lambda$.

Ainsi, $\alpha = \dfrac{\lambda+1}{2}$ (et comme $\lambda \neq 0$ on a bien $\alpha \neq \frac{1}{2}$) est valeur propre associée au vecteur propre X. Le sous-espace propre associé est donc de dimension 1.

L'homothétie u_0 est diagonalisable. Dans le cas général, u_λ l'est également puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n+1$, qui est la dimension de E.

Exercice 2.2.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note u l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall\, x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$$

1. Donner la forme de la matrice de u dans une base de E obtenue en mettant «bout à bout» une base de E_1 et une base de E_2.

2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$. Montrer que :

$$u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) En déduire que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de u_1 ou de u_2.

c) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_1 mais pas de u_2. Comparer les sous-espaces propres de u et de u_1 associés à λ.

d) Soit λ un réel qui est valeur propre de u_2 mais pas de u_1. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de u et de u_2 associés à λ.

3. On suppose dans cette question que u_1 et u_2 n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 le sont.

4. Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c) \in \mathbb{R}^7$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & a_1 & b_1 \\ 2 & -1 & 2 & a_2 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Montrer que si $c^2 \neq 9$, A est diagonalisable.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2$ une base de E_2. Notons A_1 (resp. A_2) la matrice associée à u_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ (resp. la matrice associée à u_2 dans la base $\mathcal{B}_2$). Enfin, soit A_3 la matrice associée à u_3 par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.
La matrice associée à u par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

2. a) On a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = [u_1(x_1) + u_3(x_2)] + u_2(x_2) \in E_1 \times E_2$. De même $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in E_1 \times E_2$.
Comme $E = E_1 \oplus E_2$, l'unicité de la décomposition donne :

$$u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) Soit λ une valeur propre de u.
Par la question précédente, il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ avec $(x_1, x_2) \neq (0_E, 0_E)$, tel que :

$$\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

• Si $x_2 \neq 0$, alors λ est valeur propre de u_2.

• Si $x_2 = 0$, alors $x_1 \neq 0$ et λ est valeur propre de u_1.
Ainsi :

$$\mathrm{Spec}(u) \subseteq \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1)$, alors tout vecteur propre x_1 de u_1 associé à λ est vecteur propre de u (avec $x_2 = 0$).

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$, alors $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est inversible. Soit $x_2 \in E_2$ un vecteur propre de u_2 associé à λ. Dans ces conditions, le vecteur x défini par :

$$x = x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$$

est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$. Donc λ est valeur propre de u.

En conclusion :

$$\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

c) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \setminus \mathrm{Spec}(u_2)$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \times E_2$. On sait que :

$$u(x) = \lambda x \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci est équivalent à $x \in \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})$. Finalement :

$$E_{(\lambda)}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) = E_{1(\lambda)}(u_1)$$

d) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$. L'endomorphisme $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est bijectif et

$$\begin{cases} (u_1 - \lambda I_{E_1})(x_1) = -u_3(x_2) \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -(u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2)) + x_2 \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

Soit $\theta : x_2 \mapsto x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$. L'application θ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$ sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$.
En effet, l'application réciproque est l'application qui, à un vecteur x du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$, associe sa projection sur E_2 parallèlement à E_1 qui est effectivement un élément de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$. Ainsi :

$$\dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

3. Les spectres de u_1 et u_2 étant disjoints, on peut écrire, par la question précédente :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

Or u est diagonalisable si et seulement si :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I) = \dim E = \dim E_1 + \dim E_2,$$

ce qui est équivalent à :

$$\Big(\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})\Big) + \Big(\dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})\Big) = 0$$

Or ces deux entiers étant positifs, ceci est encore équivalent à :

$$\begin{aligned}0 &= \dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) \\ &= \dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})\end{aligned}$$

Donc u est diagonalisable si et seulement si u_1 et u_2 sont diagonalisables.

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ ayant A comme matrice associée dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_5)$. Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$. Alors u est du type étudié dans les questions précédentes, avec u_1 endomorphisme de E_1 de matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3)$$

et u_2 endomorphisme de E_2 de matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_4, e_5)$$

L'application $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ a pour matrice $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ dans les bases (e_4, e_5) et (e_1, e_2, e_3).

On remarque que les matrices A_1 et A_2 sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

a) On a $A_1 + 3I_3 = J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est de rang 1. Ses valeurs propres sont 0 (le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(J)$ qui est de dimension 2) et 6 (le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par le vecteur $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

$\star$ Ainsi le spectre de A_1 est $\{-3, 3\}$ de sous-espaces propres $E_{-3} = \mathrm{Ker}\, J$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(x_0)$.

$\star$ Un calcul immédiat donne : $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après la question 2. b) : $\mathrm{Spec}(A) = \{3, -3, c, -c\}$.

b) Si $|c| \neq 3$, les matrices A_1 et A_2 sont diagonalisables et sans valeur propre commune. Ainsi A est diagonalisable.

Exercice 2.3.

A. Soient deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$. On définit une application F sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{x^2 + y^2}$$

1. Justifier les inégalités : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \alpha \leqslant F(x,y) \leqslant \beta$.

2. En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et déterminer les points où elle atteint ses bornes.

3. Peut-on prolonger F par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

B. Le but de cette question est d'effectuer un travail analogue sur :

$$F(x,y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

1. Démontrer que φ définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + xy' + x'y + 2yy'.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Notations : les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{u}' = (x',y')$ étant donnés, on écrira : $\varphi((x,y),(x',y')) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle$.

2. Construire une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, orthonormée pour le produit scalaire φ, contenant le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$.
On demande, de plus, de choisir $e_2 = (\gamma, \delta)$, avec $\delta > 0$.

Écrire les formules de changement de bases liant les coordonnées (x,y) et (X,Y) de $\overrightarrow{u} = (x,y) = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$.

3. Rechercher les valeurs propres de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer en fonction des coordonnées (X,Y) et (x,y) de $\overrightarrow{u}$ le nombre réel $q(\overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{u}, s(\overrightarrow{u}) \rangle$.

4. Soit $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Utiliser une base de vecteurs propres de s pour évaluer $F(\overrightarrow{u}) = \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$.

En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et atteint ses bornes.

Solution :

A. 1. Comme $\alpha < \beta$, il vient

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 \leqslant \alpha x^2 + \beta y^2 \leqslant \beta x^2 + \beta y^2$$

Il reste à diviser par $x^2 + y^2 > 0$ pour obtenir le résultat demandé.

2. La question précédente montre que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ et on remarque que $F(x,0) = \alpha, F(0,y) = \beta$.
De manière générale, si $F(x,y) = \alpha$, alors $\beta y^2 = \alpha y^2$, ce qui entraîne que $y = 0$. Raisonnement identique pour β.

3. Supposons que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \ell$. Alors :

$$\lim_{x\to 0} F(x,0) = \alpha = \ell = \lim_{y\to 0} F(0,y) = \beta$$

Ce qui est absurde, puisque $\alpha < \beta$.
Ainsi, on ne peut prolonger F par continuité en $(0,0)$.

B. 1. On vérifie que φ est une forme bilinéaire, symétrique. La forme quadratique associée est :

$$d(u) = \varphi(x,x) = x^2 + 2y^2 + 2xy = (x+y)^2 + y^2 \geqslant 0$$

De plus, $d(u) = 0 \Longleftrightarrow x = y, y = 0$, soit $u = 0$.

Ainsi, φ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Comme $||e_1|| = 1$, il suffit de trouver e_2 unitaire et orthogonal à e_1. Le vecteur $e_2 = (-1, 1)$ convient.
Les formules de changement de base sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} x = X - Y \\ y = Y \end{cases}$$

En particulier si $u = (x, y)$, alors $||u||^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy = X^2 + Y^2$.

3. La matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Ses valeurs propres sont les racines de l'équation $(1 - \lambda)(-\lambda) - 4 = 0$, soit $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$, et $\lambda_1 = \alpha = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{17}\big)$, $\lambda_2 = \beta = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{17}\big)$.
Enfin

$$\begin{aligned} q(u) &= \langle u, s(u) \rangle = \langle Xe_1 + Ye_2, (X - 2Y)e_1 - 2Xe_2 \rangle = X^2 - 4XY \\ &= x^2 - 2xy - 3y^2 \end{aligned}$$

4. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée de vecteurs propres de s associés aux deux valeurs propres α et β. Dans cette base :

$$q(u) = \alpha x'^2 + \beta y'^2, \quad \text{ et } ||u||^2 = x'^2 + y'^2$$

Ainsi

$$F(x, y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{\alpha x'^2 + \beta y'^2}{x'^2 + y'^2}$$

D'après la partie A, la fonction F est bornée par $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$, ces bornes étant atteintes en ε_1 et ε_2.

Exercice 2.4.

Pour $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta_f(x) = x^2 f''(x) - 6xf'(x) + 12f(x)$ et on note θ l'application définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\theta : f \longmapsto \theta_f$$

1. a) Montrer que θ est une application linéaire.

b) En déduire que $E = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \theta_f = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et on pose $F = E \cap \mathcal{P}$.

Soit $f \in F$ avec $f \neq 0$. Montrer que son degré est 3 ou 4. En déduire que l'ensemble F est un espace vectoriel réel de dimension 2 et en donner une base.

3. Trouver toutes les fonctions ϕ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe C^2 telles que $\phi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'elles forment un espace vectoriel réel de dimension 4 et en donner une base.

4. Soit $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire qu'il existe φ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe $\mathbb{C}^2$ telle que $f(x) = x^3\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'alors $\varphi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Etudier la réciproque.

5. Montrer que E est de dimension 4 et en donner une base.

Solution :

1. a) La linéarité de l'application θ provient de la linéarité de la dérivation.

b) Il est évident que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puisque $E = \operatorname{Ker}\theta$.

2. Soit $f \in F$. Supposons que f soit de degré n, de coefficient dominant a_n. Le coefficient dominant de θ_f est alors $[n(n-1) - 6n + 12]a_n = (n-3)(n-4)a_n$. Comme $a_n \neq 0$, cela entraîne que $n = 3$ ou $n = 4$.
On vérifie que X^3 et X^4 sont des éléments de F.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k X^k \in \mathbb{R}_4[X]$ un élément de F. Soit $Q = P - a_4X^4 - a_3X^3$. Le polynôme Q est un élément de F de degré inférieur ou égal à 2. Donc $Q = 0$ et $P = a_4X^4 + a_3X^3$.
On en déduit que F est un espace vectoriel de dimension 2 puisqu'il est engendré par X^3 et X^4.

3. Si $\varphi''(x) = 0$ sur un intervalle I, alors $\varphi(x) = ax + b$ sur I. Ici il est nécessaire de séparer $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et :

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ cx + d & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On obtient donc un espace vectoriel de dimension 4 avec pour base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ définie par :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. $\star$ Par continuité : $\lim\limits_{x \to 0} \theta_f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 12f(x) = 12f(0) = 0$.

$\star$ Soit $f \in E$. Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$. Ainsi $f(x) = x^3 g(x)$ et $\theta_f = 0$ est équivalent à $g''(x) = 0$, ce qui entraîne que g est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
Réciproquement, toute combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ est élément de E.

5. Comme les fonctions $x \mapsto x^3 g(x)$ se prolongent en fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que E est un espace vectoriel de dimension 4 engendré par $(x \mapsto x^3\varphi_1(x), x \mapsto x^3\varphi_2(x), x \mapsto x^3\varphi_3(x), x \mapsto x^3\varphi_4(x))$.

Exercice 2.5.

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \qquad (1)$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose également que $A \notin \{I_3, -I_3\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que $\mathrm{Im}(A - I_3) \subset \mathrm{Ker}(A + I_3)$. En déduire que l'une des matrices $A - I_3$ ou $A + I_3$ est de rang inférieur ou égal à 1.

2. Soit B une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ tels que le terme général de B s'écrive $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$. En déduire que $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$, où tr représente la trace de la matrice B, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

3. On suppose que la matrice $B = A - I_3$ de la première question est de rang 1. Montrer que $\mathrm{tr}(B) = -2$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).

Solution :

1. La matrice A vérifie $A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I) = 0$.
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $(A + I)(A - I)(x) = 0$, ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(A - I) \subset \mathrm{Ker}(A + I).$$

On remarquera qu'on a de même $\mathrm{Im}(A + I) \subset \mathrm{Ker}(A - I)$.

On a donc $\mathrm{rg}(A-I) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(A+I)$. Comme $\mathrm{rg}(A-I)+\dim \mathrm{Ker}(A+I) = 3$ et $A \neq I$, cela entraîne que $\mathrm{rg}(A - I) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A + I) = 2$.
L'inclusion $\mathrm{Im}(A + I) \subset \mathrm{Ker}(A - I)$, avec $A \neq -I$, donne de la même façon $\mathrm{rg}(A + I) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 2$.
On remarquera que si $\mathrm{rg}(A - I) = 0$, alors $A = I$ et si $\mathrm{rg}(A + I) = 0$, alors $A = -I$.

2. $\star$ Si $\mathrm{rg}(B) = 0$, alors $B = 0$ et on choisit les λ_i ou les μ_j tous nuls.
$\star$ Supposons que $\mathrm{rg}(B) = 1$. Cela signifie que les vecteurs colonnes (C_1, C_2, C_3) de B sont engendrés par un vecteur non nul $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire :

$$C_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$.
Notons $L = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$B = \Lambda L, \text{ d'où } B^2 = \Lambda(L\Lambda)L = (L\Lambda)B$$

(car $L\Lambda$ est une matrice carrée d'ordre 1 que l'on identifie à son unique terme. On vérifie d'ailleurs immédiatement que $L\Lambda = \mathrm{tr}(B)$).

3. On a $B^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = -2(A - I) = -2B$.
La question précédente montre que $\mathrm{tr}(B) = -2$.

4. Si $B = A + I$ est de rang 1, alors

$$B^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2A + I = 2(A + I) = 2B$$

Ainsi :
• Si $\mathrm{rg}(A - I) = 1$, alors $A = I + B$ avec $\mathrm{rg}(B) = 1$, soit $A = I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = -2$.

• Si $\mathrm{rg}(A + I) = 1$, alors $A = -I + B$ avec $\mathrm{rg}(B) = 1$, soit $A = -I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = 2$.
Réciproquement, on vérifie que ces matrices conviennent.

Exercice 2.6.

On désigne par E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = f \circ f = g$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(g - \lambda Id_E)$ et $F_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

1. Montrer que si f est diagonalisable, g l'est aussi.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une valeur propre de g et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \lambda$.
On pose pour $x \in E_\lambda$, $y = x - f\big(\frac{x}{\delta}\big)$ et $z = x + f\big(\frac{x}{\delta}\big)$.
Calculer $f(y)$ et $f(z)$. En déduire que $E_\lambda = F_\delta \bigoplus F_{-\delta}$.

3. En déduire que si g est injective diagonalisable, alors f l'est aussi.

4. On suppose g est diagonalisable et n'est pas injective.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
   b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

5. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
Montrer que f n'est pas diagonalisable mais que $g = f^2$ est diagonalisable.

Solution :

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Pour tout i il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Donc $g(e_i) = \lambda_i^2 e_i$.
Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de g et g est diagonalisable.

2. On a :
$$f(y) = f(x) - f^2\big(\frac{x}{\delta}\big) = f(x) - \lambda\frac{x}{\delta} = f(x) - \delta x = -\delta(x - f(\frac{x}{\delta})) = -\delta y$$
De même $f(z) = f(x) + \delta x = \delta z$.

⋆ Soit $u \in \mathrm{Ker}(f - \delta I) \cap \mathrm{Ker}(f + \delta I)$. Alors $f(u) = \delta u = -\delta u$, donc $u = 0$. Ceci montre que $F_{-\delta}$ et F_δ sont en somme directe.

⋆ On a montré que $y \in F_{-\delta}$ et $z \in F_\delta$.
Comme $x = \dfrac{y+z}{2}$, ceci montre que $E_\lambda \subset F_{-\delta} \oplus F_\delta$

⋆ Réciproquement, si $x \in F_{-\delta}$, on a $f(x) = -\delta x$, donc
$g(x) = f\big(f(x)\big) = f(-\delta x) = -\delta f(x) = \delta^2 x = \lambda x$ et $x \in E_\lambda$, soit $F_{-\delta} \subset E_\lambda$.
On montre de même que $F_\delta \subset E_\lambda$ et donc $F_{-\delta} \oplus F_\delta \subset E_\lambda$.

Finalement :

$$F_{-\delta} \oplus F_\delta = E_\lambda$$

3. Supposons g injective et diagonalisable. L'espace E est la somme directe des sous-espaces propres de g, et comme 0 n'est pas valeur propre de g, chaque sous-espace propre de g est lui-même somme directe de sous-espaces propres de f (au moins un). Donc E est somme directe des sous-espaces propres de f, ce qui prouve que f est diagonalisable.

4. a) Soit x tel que $f(x) = 0$; alors $g(x) = f^2(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

b) Supposons g diagonalisable. L'espace E est la somme directe des sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres non nulles et de $\operatorname{Ker} g$. Les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres non nulles se décomposent en somme directe de sous-espaces propres de f (question 3). Donc f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

5. On voit que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M^2 est diagonalisable car de rang 1 (son noyau est donc de dimension 2) et 1 est valeur propre de M^2.

Par contre M est de rang 2 (son noyau est donc de dimension 1). Par la question précédente, M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.7.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres des matrices A et B.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -b & a \\ -b & b & -a \\ a & -a & 2b-a \end{pmatrix}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; on définit l'application θ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\theta(P) = \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big)$$

a) Montrer que si θ est bijective, alors les nombres $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.

b) Réciproquement, montrer que si les a_k sont deux à deux distincts, alors θ est bijective.

3. a) Existe-t-il un polynôme P à coefficients réels tel que $P(A) = B$? Si oui, déterminer un tel polynôme.

b) Répondre à la même question en échangeant les rôles de A et B.

Solution :

1. a) La matrice A possède trois valeurs propres distinctes : $-2, 1, 0$. Les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{-2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ E_0(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable.

La matrice B possède deux valeurs propres : $2, 0$. On a :

$$E_0(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

On constate que la matrice B est diagonalisable dans la même base que la matrice A.

b) On s'aperçoit que $M(a,b) = aA + bB$. Les deux matrices A et B sont simultanément diagonalisables avec la même matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$Q^{-1}AQ = D_A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ Q^{-1}BQ = D_B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1}M(a,b)Q = \begin{pmatrix}-2a+2b & 0 & 0\\0 & a+2b & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M(a,b)$ sont donc $-2a+2b, a+2b, 0$ (ces nombres n'étant pas nécessairement deux à deux distincts...)

2. On remarque que l'application θ est manifestement linéaire.

a) Supposons les nombres $a_0, \ldots, a_n$ non deux à deux distincts et soit alors i, j tels que $a_i = a_j$ et $i \neq j$. Soit P le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - a_k)$$

Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à n, n'est pas le polynôme nul et $\theta(P) = (0, 0, \ldots, 0)$; ceci montre que θ n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

b) Si les réels (a_k) sont deux à deux distincts, et si $P \in \operatorname{Ker}\theta$, alors $P = 0$, puisque ce polynôme admet $n+1$ racines distinctes, alors qu'il est de degré inférieur ou égal à n.

3. a) Soit P un polynôme tel que $B = P(A)$. Alors $D_B = P(D_A)$. Ceci équivaut à :

$$\begin{cases}P(-2) = 2\\P(1) = 2\\P(0) = 0\end{cases}$$

D'après la question précédente, un tel polynôme existe. Par exemple le polynôme $P(X) = X + X^2$ convient.

b) Par contre $A = P(B)$ équivaut à : $\begin{cases} P(2) = -2 \\ P(2) = 1 \\ P(0) = 0 \end{cases}$

Les deux premières équations sont incompatibles : il n'existe pas de polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 2.8.

On appelle trace d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A.

1. Démontrer que l'application trace est linéaire .

2. Écrire les matrices de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle les coordonnées de la matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ sont (a_1, a_2, a_3, a_4). $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question on suppose que $n = 2$. Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer le réel $\operatorname{tr}({}^tBA)$.

(N.B. ${}^tBA$ est le produit de la matrice transposée de B par la matrice A).

a) Vérifier que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi : (A, B) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tBA)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) La base $\mathcal{B}$ est-elle base orthonormée pour ce produit scalaire ?

c) Quel est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices diagonales ?

d) Calculer les réels a et b qui rendent minimale la norme euclidienne associée au produit scalaire φ de $\begin{bmatrix} a & b-1 \\ b & a-1 \end{bmatrix}$. Que pouvez-vous dire des matrices $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi)$?

4. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$ et on admet que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :$\varphi : (A, B) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tBA)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

Soit $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

a) Calculer les puissances successives de U, c'est-à-dire les matrices U^k pour k variant de 1 à 5.

b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ engendré par les puissances successives de U. Déterminer la projection orthogonale de A sur F.

Solution :

1. Si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ réel :
$$\mathrm{tr}(\lambda A+B)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{k,k}+b_{k,k})=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{k,k}+\sum_{k=1}^{n}b_{k,k}=\lambda\,\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$$

2. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$:
la base demandée est bien évidemment la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. a) On vérifie que $\mathrm{tr}(A^TB)=\sum_{k=1}^{4}a_kb_k$.

L'application φ est bilinéaire, par linéarité de la transposition et de la trace. Elle est symétrique (voir ci-dessus). De plus :
$$\mathrm{tr}(A^TA)=\sum_{k=1}^{4}a_k^2\geqslant 0,\ \text{et}\ \mathrm{tr}(A^TA)=0\implies A=0$$

b) La base $(E_{i,j})$ est orthonormée car :
$$\mathrm{tr}(E_{i,j}^TE_{i,j})=1 \text{ et } \mathrm{tr}(E_{i,j}^TE_{k,\ell})=\delta_{i,k}\,\mathrm{tr}(E_{j,\ell})=0 \text{ si } (i,j)\neq(k,\ell).$$

c) L'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Par la question précédente, l'orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

d) On cherche le *minimum* de la fonction f définie par :
$$\begin{aligned}f(a,b)&=a^2+(b-1)^2+b^2+(a-1)^2=2a^2-2a+2b^2-2b+2\\&=2\big(a-\tfrac{1}{2}\big)^2+2\big(b-\tfrac{1}{2}\big)^2+1\end{aligned}$$
Le *minimum* vaut 1 et est atteint pour $a=b=\dfrac{1}{2}$.

La matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est la projection orthogonale de $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ sur le sous-espace F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix},(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

4. a) La matrice U est la matrice associée dans la base canonique $(e_1,\dots,e_5)$ à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^5$ défini par :
$$u(e_i)=e_{i+1},(1\leqslant i\leqslant 4),\ u(e_5)=e_1$$
L'endomorphisme u transforme donc (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_2,e_3,e_4,e_5,e_1).
Par conséquent u^2 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_3,e_4,e_5,e_1,e_2),
u^3 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_4,e_5,e_1,e_2,e_3),
u^4 transforme (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) en (e_5,e_1,e_2,e_3,e_4) et u^5 est l'application identité.

b) On remarque que si $h\neq k$, $\langle U^h,U^k\rangle=0$ et que $\langle U^k,U^k\rangle=5$.
La famille $(U^k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ est donc une famille orthogonale. Elle est libre et c'est une base de F.

La projection orthogonale de A sur F est la matrice $A' = \sum_{k=1}^{5} \lambda_k U^k$ de F telle que pour tout h, $\langle A - A', U^h \rangle = 0$.
Or, pour tout h, $\langle A, U^h \rangle = 1$ et $\langle A', U^h \rangle = \langle \sum_{k=1}^{5} \lambda_k U^k, U^h \rangle = 5\lambda_h$

Donc : $A' = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.9.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, a et b deux réels distincts et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - aId) \circ (f - bId) = 0 \quad \text{ et } f \text{ n'est pas une homothétie.}$$

(Id représente l'endomorphisme identité de E)

1. Montrer qu'il existe deux réels non nuls λ et μ tels que $\lambda(f - aId)$ et $\mu(f - bId)$ soient des projecteurs, qu'on notera g et h respectivement.

2. Que vaut $g + h$? En déduire que $\mathrm{Im}(f - bId) = \mathrm{Ker}(f - aId)$.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer f^n en fonction de g et h.

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que f soit inversible.

Calculer alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f^p en fonction de g et h.

Solution :

1. Posons $g = \lambda(f - aI)$. Alors :

$$\begin{aligned} g^2 &= \lambda^2(f^2 - 2af + a^2 I) = \lambda^2\big((a+b)f - abI - 2af + a^2 I\big) \\ &= \lambda^2(b-a)(f - aI) \end{aligned}$$

Ainsi $g^2 = g$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$.

De même $h^2 = h$ si et seulement si $\mu = \dfrac{1}{a-b}$.

2. On vérifie immédiatement que $g + h = I$.

• Comme $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$, on a $\mathrm{Im}(f - bI) \subset \mathrm{Ker}(f - aI)$.

• Comme $\lambda(f - aI) + \mu(f - bI) = I$, pour tout x de E :

$$\lambda(f - aI)(x) + \mu(f - bI)(x) = x,$$

c'est-à-dire : $E = \mathrm{Im}(f - aI) + \mathrm{Im}(f - bI)$.

Donc
$n = \dim E = \dim \mathrm{Im}(f - aI) + \dim \mathrm{Im}(f - bI) - \dim[\mathrm{Im}(f - aI) \cap (\mathrm{Im}(f - bI)$
D'où :
$\dim \mathrm{Im}(f - bI) \geqslant n - \dim \mathrm{Im}(f - aI) = \dim \mathrm{Ker}(f - aI)$.

Ce résultat, joint à l'inclusion précédente donne :

$$\mathrm{Im}(f - bI) = \mathrm{Ker}(f - aI)$$

3. Comme h est un projecteur, on sait que $E = \mathrm{Im}\, h \oplus \mathrm{Ker}\, h$. Donc, par la question précédente :

$$E = \mathrm{Ker}(f - bI) \oplus \mathrm{Ker}(f - aI)$$

ce qui signifie que f est diagonalisable.

4. On sait que $f^0 = I = g + h$ et que $f = bg + ah$.
Comme $h \circ g = g \circ h = 0$, il vient : $f^2 = b^2 g + a^2 h$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = b^n g + a^n h$$

5. Par la question 3, on sait que les valeurs propres de f sont éléments de $\{a, b\}$ et que f est diagonalisable. Comme f n'est pas une homothétie, on en déduit que a et b sont effectivement les valeurs propres de f et f est inversible si et seulement $ab \neq 0$.

Comme $h \circ g = g \circ h = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, $f^n = b^n g + a^n h$, alors :

$$(b^{-n} g + a^{-n} h) \circ (b^n g + a^n h) = I$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f^n = b^n g + a^n h$$

Exercice 2.10.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \geqslant 2$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

1. Soit f un élément non nul de E^*. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$?

2. Soit H un sous-espace de E de dimension $n - 1$ (on dit que H est un hyperplan de E). Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\, f$.

3. Soient f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$. Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que $f = ag$.

4. Soit H un hyperplan de E. Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de E^* dont le noyau contient H est un sous-espace vectoriel de E^* dont on précisera la dimension.

On appelle *transvection* de E tout endomorphisme de E possédant les deux propriétés suivantes :

i) $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de E (appelé « base » de f) ;

ii) $\mathrm{Im}(f - Id) \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$.

5. Soit f une transvection de E, montrer que $\mathrm{Im}(f - Id)$ est une droite (appelée « direction » de f).

6. Soit f un élément non nul de E^* et u un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, f$.

Pour tout vecteur x de E, on pose $G_{f,u}(x) = x + f(x)u$.

Montrer que $G_{f,u}$ est une transvection dont on précisera la «base» et la «direction».

Solution :

1. Si f n'est pas identiquement nulle, le théorème du rang implique :

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg}(f) = n - 1.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. On complète cette base en une base de E avec un vecteur e_n. Définissons $f \in E^*$ par :

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

On a immédiatement le résultat demandé.

3. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Complétons cette base avec un vecteur e_n. On sait alors que $f(e_n) \neq 0$ et $g(e_n) \neq 0$.
Soit $h \in E^*$ défini par :

$$h = f - \frac{f(e_n)}{g(e_n)}\, g$$

On a immédiatement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = 0$. Donc h est identiquement nul et il existe $a = \dfrac{f(e_n)}{g(e_n)}$ tel que $f = ag$.

4. Par définition $D(H) = \{f \in E^* / H \subset \operatorname{Ker} f\}$.
$\star$ Soit $(f, g) \in D(H)^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in H$:

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0$$

donc $H \subset \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$ et $\lambda f + \mu g \in D(H)$.

$\star$ Comme $0 \in D(H)$, H est un sous-espace vcetoriel de E^*.

$\star$ Par la question 3, pour tout $(f, g) \in D(H)^2$ non nuls, on a $\operatorname{Ker} f = H = \operatorname{Ker} g$ et cela entraîne que f et g sont liés. Donc $D(H)$ est de dimension 1.

5. Par le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im}(f - Id) = 1$, puisque son noyau est de dimension $n - 1$.

6. On vérifie d'abord (immédiatement) que $G_{f,u}$ est un endomorphisme de E.
Or :

- $\star$ $(G_{f,u} - Id)x = f(x).u = 0 \iff f(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Ker} f$.
- $\star$ $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Vect}(u)$.

Enfin, puisque $u \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) \subset \operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id)$. Tout ceci implique que $G_{f,u}$ est une transvection de base $\operatorname{Ker} f$ et de direction $\operatorname{Vect}(u)$.

Exercice 2.11.

Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle . \mid . \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p. On dit qu'une matrice A est positive si elle est symétrique et si $\langle A(x) \mid x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. On l'écrit sous la forme $A \succeq 0$.

1. a) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices $({}^tT)T$ et $T({}^tT)$ sont positives.

2. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée. On rappelle qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = ({}^tP)AP$.

a) Montrer que si X est une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors la matrice $Y = ({}^tP)XP$ est positive.

b) Prouver qu'une matrice positive X de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X^2 = A$ si et seulement si la matrice positive $Y = ({}^tP)XP$ est solution de l'équation $Y^2 = D$.

c) Soient α un réel strictement positif et Y une matrice positive ; montrer que la matrice $Y+\alpha I_p$ est inversible (I_p est la matrice de l'identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$). Résoudre l'équation $Y^2 = D$ avec $Y \succeq 0$.

d) En déduire qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice A est positive.

b) Déterminer sa racine carrée.

Solution :

1. a) Soit A une matrice symétrique réelle positive. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. On a alors :

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \lambda ||x||^2$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes).

Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ réels tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors :

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

b) On peut écrire matriciellement :

$$\langle ({}^tT)Tx, x\rangle = {}^tX({}^tT)TX = ||TX||^2 \geqslant 0$$

et

$$\langle T({}^tT)x, x\rangle = {}^tXT{}^tTX = ||{}^tTX||^2 \geqslant 0$$

2. a) On peut écrire, pour tout vecteur colonne U :

$${}^tUYU = {}^tU({}^tP)XPU = {}^t(PU)X(PU) = {}^tVXV \geqslant 0$$

b) Soit X une matrice positive telle que $X^2 = A = PD({}^tP)$.
Alors
$$({}^tP)X^2P = [({}^tP)XP]^2 = D \Longleftrightarrow Y^2 = D$$
La réciproque est identique.

c) $\star$ La matrice $Y + \alpha I_p$ est symétrique réelle. Comme pour tout vecteur U, $(Y + \alpha I_p)(U) = YU + \alpha U$, λ est une valeur propre de $Y + \alpha I_p$ si et seulement si $\lambda - \alpha$ est une valeur propre de Y. Comme $\alpha > 0$, les valeurs propres de $Y + \alpha I_p$ sont strictement positives et cette matrice est inversible.

$\star$ On a : $D(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \geqslant 0$.

• Si $\lambda_i = 0$, alors $||Ye_i||^2 = \langle Y^2 e_i, e_i\rangle = \langle De_i, e_i\rangle = 0$, et $Ye_i = 0$.

• Si $\lambda_i > 0$, on a :
$$0 = (Y^2 - \lambda_i I_p)e_i = (Y + \sqrt{\lambda_i} I_p)(Y - \sqrt{\lambda_i} I_p)e_i$$
Or la matrice $(Y + \sqrt{\lambda_i} I_p)$ est inversible (première partie de la question). On a donc $(Y - \sqrt{\lambda_i} I_p)e_i = 0$, soit $Ye_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. On en conclut qu'il existe une unique solution positive qui est :
$$Y = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

d) Cette question est la conséquence des deux questions précédentes.

3. La matrice A est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont 5 et 45. Elle est donc positive. Une matrice de passage diagonalisante orthogonale est :
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
et
$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.12.

1. À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ on associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$.

a) Vérifier que φ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Démontrer que -5 est valeur propre de φ.

2. Soit λ un nombre réel.

a) Résoudre l'équation différentielle :
$$(E) \qquad f'(x) = \Big[\frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)}\Big] f(x)$$
d'inconnue f.

b) Pour quelles valeurs de λ cette équation admet-elle des solutions qui sont des fonctions polynômes ?

c) En déduire des valeurs propres et des sous-espaces propres de φ.

3. Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_4[X]$ il existe un unique quintuplet $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que :
$$P(X) = \sum_{i=0}^{4} a_i (X - 1)^i (X + 1)^{4-i}.$$

Solution :

1. a) $\star$ L'application φ est linéaire par linéarité de l'application dérivation.
Si $P = a_4X^4 + \cdots$, alors :

$$(X^2-1)P' = 4a_4X^5 + \cdots \text{ et } (4X+1)P = 4a_4X^5 + \cdots$$

Donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant 4$, ce qui montre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait la résoudre sur tout intervalle où $x \mapsto \dfrac{5+\lambda}{2(x-1)} + \dfrac{3-\lambda}{2(x+1)}$ est continue soit sur $I_1 =]-\infty, -1[$, ou $I_2 =]-1, 1[$, ou $I_3 =]1, +\infty[$.
Sur chacun de ces intervalles I_i, la solution générale est de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= K_i \exp\big(\frac{5+\lambda}{2}\ln|x-1| + \frac{3-\lambda}{2}\ln|x+1|\big) \\ &= K_i|x-1|^{\frac{5+\lambda}{2}}|x+1|^{\frac{3-\lambda}{2}}, \text{ avec } K_i \text{ réel } (1 \leqslant i \leqslant 3). \end{aligned}$$

b) Une solution (autre que la fonction nulle) est polynomiale si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{5+\lambda}{2} = n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{3-\lambda}{2} = m \in \mathbb{N} \\ n+m \leqslant 4 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda = 2n-5 \\ \lambda = 3-2m \\ n+m \leqslant 4 \end{cases}$$

On trouve ainsi 5 solutions, pour n variant de 0 à 4 :
$\to \lambda = -5$ et $f_0(x) = (x+1)^4$
$\to \lambda = -3$ et $f_1(x) = (x+1)^3(x-1)$
$\to \lambda = -1$ et $f_2(x) = (x+1)^2(x-1)^2$
$\to \lambda = 1$ et $f_3(x) = (x+1)(x-1)^3$
$\to \lambda = 3$ et $f_4(x) = (x-1)^4$

c) On a trouvé 5 valeurs propres distinctes ; comme $\dim(R_4[X] = 5$, on sait que ce sont les valeurs propres de φ et que φ est diagonalisable.

3. La famille $(f_0, \dots, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ de vecteurs propres de φ. Tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ se décompose dans cette base. C'est la réponse à la question posée.

Exercice 2.13.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Donner un exemple d'un élément de $\mathcal{T}$.

2. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U.^tU$ est élément de $\mathcal{T}$.

3. a) Réciproquement, soit M une matrice réelle d'ordre 2 de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls U, V de $\mathbb{R}^2$ tels que $M = U.^tV$.

b) On suppose de plus que M est symétrique. Montrer que la famille (U, V) est liée.

c) En déduire que si M est un élément non nul de $\mathcal{T}$, alors il existe un vecteur X de $\mathbb{R}^2$ tel que $M = X.^tX$.

On définit l'application ψ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit p un réel de $]0, 1/2[$ et $q = 1 - p$. Soit $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer $\inf\limits_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$.

4. a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimer $F(x, y) = \psi(A - U.^tU)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer les points critiques de F.

c) En déduire les extremums de F.

d) En déduire le minimum de $\psi(A - U.^tU)$, lorsque U décrit $\mathbb{R}^2$.

Solution :

1. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. On a : $U^tU = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice symétrique de rang inférieur ou égal à 1 car si l'on note C_1, C_2 les deux colonnes de U^tU, on a $C_1 = xU$ et $C_2 = yU$.

3. a) Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Si la matrice M est de rang 1, on sait que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 1, donc de la forme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((a, b)\big)$, où (a, b) est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Les colonnes de M sont alors proportionnelles à la colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (\,\lambda \quad \mu\,) = U \cdot {}^tV$$

et comme $M \neq 0$, la colonne V n'est pas non plus la colonne nulle.

b) Si la matrice M est en plus symétrique, on a $\lambda b = \mu a$ et :

$\star$ Si $\mu \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b}{\mu} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$\star$ Si $\lambda \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{\lambda} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Donc il existe α réel tel que $V = \alpha U$.

c) Il existe donc α non nul et une colonne U non nulle tels que : $M = \alpha U {}^t U$. Montrons que $\alpha > 0$.
La matrice M est diagonalisable et à valeurs propres positives ou nulles. Si M n'admettait que 0 pour valeur propre, on aurait $M = 0$, ce qui est exclu. On peut donc considérer une valeur propre λ de M, avec $\lambda > 0$.
Il existe un vecteur colonne X non nul tel que $MX = \lambda X$, soit $\alpha U {}^t U X = \lambda X$. On a donc :

$${}^t X \alpha U {}^t U X = \lambda {}^t X X, \text{ soit } \alpha ||{}^t U X||^2 = \lambda ||X||^2$$

Donc $\alpha > 0$. On pose alors $X = \sqrt{\alpha} U$ et on a $M = X {}^t X$.

4. a) Après un calcul élémentaire :

$$F(x,y) = (p - x^2)^2 + 2(xy - q)^2 + (p - y^2)^2$$

b) On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = xy^2 - xp - yq + x^3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 y - xp - yq + y^3 \end{cases}$$

Or :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$(S) \iff \begin{cases} (x+y)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x-y)(x^2 + y^2 + q - p) = 0 \end{cases}$$

Comme $0 < p < \dfrac{1}{2}$, on a $q > \dfrac{1}{2}$ et $q - p > 0$. Donc le système ci-dessus est équivalent à :

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ x = y \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Les solutions sont $(0,0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

c) Le troisième point critique donnant la même matrice $U {}^t U$ que la solution $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il ne reste que deux cas à étudier.

• pour $(0,0)$, en utilisant les notations de Monge, il vient :

$$H = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

On a donc un point col.

• pour $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il vient :

$$H = \begin{pmatrix} 2 - p & p \\ p & 2 - p \end{pmatrix}$$

En ce point F admet un minimum local.

d) Ainsi $F(x,y) = F\big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big)$ est un minimum local atteint pour la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Il reste à montrer que ce minimum est global. Or :
$F(x,y) - F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2px^2 - 2py^2 - 4qxy + 1$

$= (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x-y)^2 \geqslant 0$. D'où le résultat.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère un endomorphisme u de E et on note φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de φ, alors λ est une valeur propre de u.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre λ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que φ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Solution :

1. Il suffit de dire que $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$, la linéarité résultant banalement des propriétés des opérations.

2. a) Soit λ valeur propre de φ : il existe un endomorphisme non nul v de E tel que $u \circ v = \lambda v$. Il existe un vecteur x de E non nul tel que $v(x) \neq 0$ et :

$$u\big(v(x)\big) = \lambda v(x)$$

Ce qui signifie que λ est valeur propre de u.

b) Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit F un supplémentaire de $E_\lambda(u)$ dans E ($E = E_\lambda(u) \oplus F$). Soit v le projecteur sur $E_\lambda(u)$ de noyau F. On a :

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in E_\lambda(u) \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases}$$

Soit $x \in E$; il existe un unique couple $(y, z) \in E_\lambda(u) \times F$ tel que $x = y + z$ et :

$$\begin{aligned} u\big(v(x)\big) &= u\big(v(y) + v(z)\big) = u\big(v(y)\big) = u(y) = \lambda y = \lambda\big(v(y) + v(z)\big) \\ &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de φ.

3. a) On a :

$$v \in E_\lambda(\varphi) \iff \forall\, x \in E, u\big(v(x)\big) = \lambda v(x) \iff \forall\, x \in E, v(x) \in E_\lambda(u)$$

Donc $E_\lambda(\varphi) = \mathcal{L}(E, E_\lambda(u))$.

b) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de φ. On a

$$\varphi \text{ diagonalisable } \iff \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(\varphi) = n^2 \iff \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{L}(E, E_{\lambda_i}(u)) = n^2$$

$$\iff n\sum_{i=1}^{k}\dim E_{\lambda_i}(u)=n^2 \iff \sum_{i=1}^{k}\dim E_{\lambda_i}(u)=n$$
$$\iff u \text{ diagonalisable}$$

Exercice 2.15.

Dans l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n qu'on munit du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour tout polynôme P de E, on note $s(P)$ le polynôme tel que, pour tout réel x, $s(P)(x)=P(1-x)$.

a) Montrer que s définit un endomorphisme de E.

b) Expliciter, pour P appartenant à E, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de P.

c) Qu'en déduit-on pour la matrice de s dans la base canonique de E ?

d) Montrer que s est diagonalisable.

2. Soit d l'endomorphisme de E tel que pour tout polynôme P de E,

$$d(P)=X(1-X)P''-(2X-1)P'.$$

a) Montrer que pour tout couple (P,Q) d'éléments de E,

$$\langle d(P),Q\rangle=-\int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)\,dx.$$

b) L'endomorphisme d admet-il pour valeur propre 0 ? Si oui, préciser l'espace propre associé.

c) Montrer que les valeurs propres non nulles de d sont strictement négatives.

d) Montrer que d est diagonalisable.

3. a) Montrer que les sous-espaces propres de s sont stables par d.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres communs à s et à d.

Solution :

1. a) On vérifie immédiatement que s est linéaire.

b) Si le polynôme P est de degré k, alors $s(P)$ également. Ceci montre que s est un endomorphisme de E ...

c) ... et que la matrice associée à s dans la base canonique est triangulaire supérieure.

d) On a $s^2=I$, donc s est une symétrie et est diagonalisable.

2. a) On remarque que $d(P)=\dfrac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)$. Une intégration par parties donne alors :

$$\langle d(P),Q\rangle=\int_0^1\frac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)Q(x)\,dx$$

$$= \big[x(1-x)P'(x).Q(x)\big]_0^1 - \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$

La symétrie de cette dernière expression montre que d est un endomorphisme symétrique de E.

b) Pour tout λ, $d(\lambda) = 0$, donc 0 est bien valeur propre de d.
Soit P tel que $d(P) = 0$. Alors :

$$0 = \langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx$$

Comme $x \mapsto x(1-x)\big(P'(x)\big)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, il vient $P'(x) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, puis $P' = 0$, puisque P' a une infinité de racines, ce qui entraîne que P est constant.

Ainsi 0 est valeur propre de d et $E_{(0)}(d) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et P de E tels que $d(P) = \lambda P$. Alors :

$$\lambda||P||^2.\langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx \leqslant 0$$

Donc si λ est une valeur propre non nulle de d, on a $\lambda < 0$.

d) On sait que d est un endomorphisme symétrique de E, donc est diagonalisable.

3. a) Comme $s^2 = I$, on sait que les sous-espaces propres possibles de s sont :

$E_1 = \operatorname{Ker}(s - I) = \{P \in E / s(P) = P\}$ et

$E_{-1} = \operatorname{Ker}(s + I) = \{P \in E / s(P) = -P\}$.

• Soit $P \in E_1$, donc tel que $P(1-x) = P(x)$. Alors :

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = d(P)(x)$$

• Soit $P \in E_{-1}$ donc tel que $P(1-x) = -P(x)$. Alors

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = -d(P)(x)$$

b) $d_{|E_1}$ est un endomorphisme symétrique de E_1 : il existe une base orthonormale de E_1 formée de vecteurs propres de d.
De même, il existe une base orthonormale de E_{-1} formée de vecteurs propres de d.

Comme $E = E_1 \oplus^{\perp} E_{-1}$, il existe une base de vecteurs propres communs à d et s.

Exercice 2.16.

Dans cet exercice, p est un entier naturel non nul fixé. On note I_p la matrice unité d'ordre p et O_p la matrice carrée d'ordre p nulle.
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe deux complexes distincts et non nuls λ et μ et deux matrices non nulles $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que

$$\begin{cases} I_p = A + B, \\ M = \lambda A + \mu B, \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B. \end{cases}$$

a) Vérifier que $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) = O_p$. Montrer que M est inversible.

b) Exprimer A et B en fonction de I_p et M.

c) En déduire que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = O_p$. Que peut-on dire de A et de B ?

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$.

e) Montrer que M est diagonalisable et que l'ensemble de ses valeurs propres est $\{\lambda, \mu\}$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, un r-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ de complexes non nuls, deux à deux distincts, et un r-uplet $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $M^k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j$.

a) Montrer que le polynôme $P = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)$ annule M. Montrer que M est inversible.

b) Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs propres de M ?

c) Soit un entier $n > r$. On note R le reste de la division euclidienne de X^n par P. Montrer que $M^n = R(M)$ et en déduire que $M^n = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$.

Solution :

1. a) On a :

$$\begin{aligned}(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) &= M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p \\ &= \lambda^2 A + \mu^2 B - (\lambda + \mu)(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu(A + B) = 0\end{aligned}$$

La matrice M est inversible, d'inverse $M' = \dfrac{1}{\lambda\mu}\big((\lambda + \mu)I_p - M\big)$, puisque l'on vérifie aisément que $MM' = I_p$.

b) On a $M - \mu I_p = (\lambda - \mu)A$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a : $A = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(M - \mu I_p)$

De même : $B = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(M - \lambda I_p)$

c) Comme M et I_p commutent, on peut écrire :

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(M - \mu I_p)^2 = A$$

et de même $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$.
Les matrices de A et B sont donc celles de projecteurs supplémentaires.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme A et B commutent :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} A^k B^{n-k} = \lambda^n A + \mu^n B$$

car $AB = 0$ et $A^k = A, B^k = B$, pour $k \geqslant 1$.
D'autre part $\left(\frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B\right)(\lambda A + \mu B) = A + B$. Donc

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B$$

On déduit comme ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$M^n = \lambda^n A + \mu^n B$$

e) La matrice A est celle d'un projecteur. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont contenues dans l'ensemble $\{0, 1\}$.
Mais, comme $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a $A \neq 0$ et $A \neq I$, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 1\}$.
Comme $M = (\lambda - \mu)A + \mu I_p$, la matrice M est diagonalisable et

$$\mathrm{Spec}(M) = \{(\lambda - \mu)\times 1 + \mu, (\lambda - \mu)\times 0 + \mu\} = \{\lambda, \mu\}.$$

2. a) Notons $P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.
Alors :

$$\begin{aligned} P(M) &= \sum_{k=0}^{r} a_k M^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \Big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j \Big) = \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda_j^k \Big) A_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} P(\lambda_j) A_j = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme P est ainsi annulateur de M.
Le monôme de degré 0 de P est $a_0 = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \lambda_j$. Il est non nul. En conséquence, en notant Q le quotient de la division euclidienne de P par X, on a $P = XQ + a_0$, donc $0 = P(M) = MQ(M) + a_0 I_p = Q(M)M + a_0 I_p$.
En posant $M' = -\frac{1}{a_0} Q(M)$, on a $MM' = M'M = I_p$. La matrice M est donc inversible.

b) Comme le polynôme P annule M, les valeurs propres de M sont incluses dans l'ensemble des racines de P soit $\mathrm{Spec}(M) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

c) On sait que R est de degré strictement inférieur à r. Soit Q le quotient de la division euclidienne de P par X^n, soit $X^n = PQ + R$. Il s'ensuit que

$$M^n = Q(M)P(M) + R(M) = R(M)$$

Comme dans la question 2. a, on montre que $R(M) = \sum_{j=1}^{r} R(\lambda_j) A_j$.
Or pour tout $j \in [\![1, r]\!]$:

$$\lambda_j^n = Q(\lambda_j)P(\lambda_j) + R(\lambda_j) = R(\lambda_j)$$

On conclut que

$$M^n = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$$

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

Soit n un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(\frac{2k+1}{2n}) - f(\frac{k}{n})\big)$$

et

$$\Pi_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\cdots(4n-2)}$$

1. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$. (On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.)

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\Pi_n\big) = \ln(\sqrt{2})$. En déduire la limite de Π_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère une urne contenant initialement $2n+1$ boules identiques au toucher, dont une seule est rouge, et les autres noires.
On effectue une suite de tirages selon le processus suivant :
à chaque tirage, si l'on a tiré une boule noire, on la remet dans l'urne et on ajoute deux autres boules noires prises dans un stock annexe, avant de procéder au tirage suivant. La suite de tirages s'arrête lorsque l'on a obtenu la boule rouge.
A désigne l'événement :« le $n^{\text{ème}}$ tirage est effectué ».
Calculer la probabilité p_n de l'événement A, puis la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f étant de classe C^2, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, soit :

$$\left|f\big(\frac{2k+1}{2n}\big)-f\big(\frac{2k}{2n}\big)-\frac{1}{2n}f'\big(\frac{2k}{2n}\big)\right|\leqslant\frac{1}{8n^2}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$$

En sommant, il vient :

$$\Big|S_n-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\big(\frac{k}{n}\big)\Big|\leqslant\frac{1}{8n}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$$

Ainsi la suite $(2S_n)_n$ a même limite que la suite $\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f'\big(\frac{k}{n}\big)\Big)_n$, qui est une somme de Riemann associée à la fonction f' continue sur $[0,1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\,dt=\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)$$

2. Les éléments composant Π_n étant tous positifs, il vient, en introduisant haut et bas des facteurs $2n$:

$$\begin{aligned}\ln\Pi_n&=\ln\Big(\big(\frac{2n+1}{2n}\big)\big(\frac{2n+3}{2n}\big)\cdots\big(\frac{4n-1}{2n}\big)\times\big(\frac{2n}{2n}\big)\big(\frac{2n}{2n+2}\big)\cdots\big(\frac{2n}{4n-2}\big)\Big)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ln\big(1+\frac{2k+1}{2n}\big)-\ln\big(1+\frac{2k}{2n}\big)\Big)\end{aligned}$$

Il suffit de poser $f(x)=\ln(1+x)$ pour reconnaître le résultat de la question précédente. Cette fonction est bien de classe C^2 sur $[0,1]$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\Pi_n=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\ln\sqrt{2}$$

Par composition par la fonction exponentielle (qui est continue), il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_n=\sqrt{2}$$

3. Notons N_i l'événement « on obtient une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Réaliser le $n^{\text{ème}}$ tirage, c'est obtenir une boule noire au cours des $(n-1)$ premiers tirages, donc par la formule des probabilités composées, il vient :

$$\begin{aligned}p(A)=p_n&=P(N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{n-1})\\&=P(N_1)P(N_2/N_1)P(N_3/N_1\cap N_2)\cdots P(N_{n-1}/(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n-2})\end{aligned}$$

et :

$$p_n=\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n+2}{2n+3}\times\cdots\times\frac{2n+2(n-2)}{2n+2(n-2)+1}\times\frac{2n+2(n-1)}{4n-1}=\frac{1}{\Pi_n}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3.2.

On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{si } x>\theta\end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $M_n=\sup(X_1,\ldots,X_n)$ est une variable aléatoire réelle dont on déterminera une densité.

2. Calculer les deux premiers moments de M_n.

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(|M_n - \theta| > \varepsilon) \subset \big(|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}| > \frac{\varepsilon}{2}\big)$$

4. En déduire que la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité vers θ.

5. Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

6. Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers $\frac{2\theta}{3}$.

7. Comparer les variances de M_n et de $Z_n = \frac{3Y_n}{2}$.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

Solution :

1. On sait que pour tout réel x :

$$P(M_n \leqslant x) = P\big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x)\big) = \big(F_\theta(x)\big)^n$$

Une densité de M_n est donc :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Des calculs immédiats donnent :

$$E(M_n) = \frac{2n\theta}{2n+1}, E(M_n^2) = \frac{2n\theta^2}{2n+2}, V(M_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

3. Par l'inégalité du triangle :

$$|M_n - \theta| \leqslant \big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| + \big|\frac{2n\theta}{2n+1} - \theta\big|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\big|\frac{2n\theta}{2n+1} - \theta\big| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour $n > N$:

$$(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \subseteq \big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big)$$

4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Cebishev :

$$P\big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big) \leqslant \frac{4V(M_n)}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et comme $P(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big)$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$$

5. Un calcul immédiat donne :

$$E(Y_n) = E(X_1) = \frac{2\theta}{3}, V(Y_n) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{\theta^2}{18n}$$

6. D'après l'inégalité de Bienaymé-Cebishev :

$$P\big(\big|Y_n - \frac{2\theta}{3}\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\theta^2}{18n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à $\frac{2\theta}{3}$.

7. On sait que $V(M_n) \sim \dfrac{\theta^2}{4n^2}$, et $V(Z_n) = \dfrac{\theta^2}{8n}$.

Ainsi Z_n est un estimateur sans biais et convergent de θ, alors que M_n est un estimateur biaisé (asymptotiquement sans biais) et convergent de θ.
Mais $V(M_n) < V(Z_n)$ pour n assez grand.
On peut parfois accepter un léger biais pour une variance plus petite et préférer l'estimateur M_n pour estimer θ.

Exercice 3.3.

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $]0, r[$, r étant un nombre réel strictement positif donné.
On note ln le logarithme népérien.

On définit les variables aléatoires suivantes :
- $T = \min(X, Y)$
- $U = \max(X, Y)$
- $Z = \dfrac{T}{U}$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\ln X$, puis de la variable aléatoire $\ln X - \ln Y$.

2. Exprimer $\ln Z$ en fonction de $\ln X$ et $\ln Y$.

3. Déterminer successivement :
   a) une densité de la variable aléatoire $Z' = -\ln Z$,
   b) une densité de la variable aléatoire Z,
   c) une densité de la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{Z}$.

Reconnaître la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires Z' et Z et préciser pour chacune des trois variables aléatoires Z', Z et V son espérance et sa variance.

Solution :

1. $\star$ Posons $A = \ln X$. Alors $A(\Omega) =]-\infty, \ln r]$, et pour tout $a \in A(\Omega)$:

$$F_A(a) = P(X \leqslant e^a) = \begin{cases} \dfrac{e^a}{r} & \text{si } a \leqslant \ln r \\ 1 & \text{si } a \geqslant \ln r \end{cases}$$

Donc, on peut prendre pour densité de A la fonction :

$$f_A(a) = \begin{cases} \dfrac{e^a}{r} & \text{si } a \leqslant \ln r \\ 0 & \text{si } a \geqslant \ln r \end{cases}$$

$\star$ La loi de $B = \ln Y$ est identique à celle de A.
Comme $P(-B \leqslant b) = P(B \geqslant -b) = 1 - P(B \leqslant -b)$, une densité de $-B$ est donnée par :

$$f_{-B}(b) = \begin{cases} \dfrac{e^{-b}}{r} & \text{si } b \geqslant -\ln r \\ 0 & \text{si } b \leqslant -\ln r \end{cases}$$

$\star$ Enfin, une densité de $W = A - B$ est donnée par convolution : pour tout $w \in \mathbb{R}$, on prend :

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(t) f_{-B}(w-t)\ dt = \int_{-\infty}^{\min(\ln r, w+\ln r)} f_A(t) f_{-B}(w-t)\, dt$$

Ainsi :

• si $w \leqslant 0$:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{w+\ln r} \frac{1}{r^2}\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{e}^{-w+t}\, dt = \frac{\mathrm{e}^w}{2}$$

• si $w \geqslant 0$:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\ln r} \frac{1}{r^2}\, \mathrm{e}^{-w} \mathrm{e}^{2t}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-w}}{2}$$

2. Comme $Z = \dfrac{T}{U}$, on a $\ln Z = \ln\big(\min(X,Y)\big) - \ln\big(\max(X,Y)\big)$.
Par croissante du logarithme :

$$\ln Z = \min(\ln X, \ln Y) - \max(\ln X, \ln Y) = -|\ln X - \ln Y|$$

3. a) On a $Z'(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et pour tout $u \geqslant 0$

$$F_{Z'}(u) = P(|A-B| < u) = F_W(u) - F_W(-u)$$

Une densité de Z' est donc donnée par

$$f_{Z'}(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-u} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc Z' suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, d'espérance et de variance égales à 1.

b) La variable aléatoire Z vérifie $Z = \mathrm{e}^{-Z'}$. Donc $Z(\Omega) = [0,1]$ et pour tout $z \in [0,1]$,

$$F_Z(z) = P(Z' > -\ln z) = 1 - F_{Z'}(-\ln z)$$

Une densité sur $[0,1]$ de Z est donnée par :

$$f_Z(z) = f_{Z'}(-\ln z) \times \frac{1}{z} = 1$$

Ainsi Z suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ d'espérance $\dfrac{1}{2}$ et de variance $\dfrac{1}{12}$.

c) Comme $V = \dfrac{1}{Z}$, on a $V(\Omega) = [1, +\infty[$ et pour tout $v \geqslant 1$:

$$F_V(v) = 1 - P\big(Z < \tfrac{1}{v}\big) = 1 - \frac{1}{v}$$

Une densité de V est donnée par :

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{v^2} & \text{si } v \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La règle de Riemann montre que la variable aléatoire V n'admet ni espérance, ni variance (elle suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(1,1,0)$).

Exercice 3.4.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de cette loi, appelée « loi logistique ».

2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi logistique et on pose $Y = \sup(X_1, \ldots, X_n)$, $Z = Y - \ln n$.

Déterminer les fonctions de répartition F_Y et F_Z de Y et Z.

3. a) Montrer qu'il existe une fonction Φ que l'on déterminera telle que
$$\forall\, z \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} F_Z(z) = \Phi(z).$$

b) Vérifier que Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité φ de cette loi.

4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de densité φ.

a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-V$.

b) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $U - V$?

Solution :

1. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Ainsi F a les propriétés requises pour être une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Si X suit cette loi, une densité de X est :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

2. On a, pour tout réel y :
$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant y)\big) = [F(y)]^n = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-y})^n}$$
Puis, pour tout réel z :
$$F_Z(z) = F_Y(z + \ln n) = \big(1 + \frac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big)^{-n}$$

3. a) On a : $-n\ln\big(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -n\times\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{n} = \mathrm{e}^{-z}$, d'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \big(1+\frac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big)^{-n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-z}} = \Phi(z)$$

b) La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\Phi'(x) = \mathrm{e}^{-x}\times\exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$. Ainsi Φ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité associée est donnée par :
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\times\exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

4. a) On a : $F_{-V}(x) = P(-V \leqslant x) = 1 - \Phi(-x)$, et :
$$f_{-V}(x) = \mathrm{e}^{-x}\times\exp(-\mathrm{e}^{x})$$

b) Une densité g de $U - V$ est donnée par le produit de convolution :
$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t-x) f_{-V}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2x-t}\exp(-\mathrm{e}^{-t+x} - \mathrm{e}^{x})\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2x-t}\exp(-\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-t}))\,dx$$
Effectuons le changement de variable bijectif de classe C^1 : $y = \mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-t})$.
Il vient :

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\int_0^{+\infty} y.\mathrm{e}^{-y}\,dy = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$$

Ainsi $U - V$ suit une loi logistique.

Exercice 3.5.

On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ que l'on identifiera au cercle trigonométrique. On pose $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
Un point de D sera représenté soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y), soit par ses coordonnées trigonométriques (r, θ) avec $r \in [0, 1]$, $\theta \in]-\pi, \pi]$, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

On lance au hasard une fléchette qui se fiche en un point (x, y) de D (on suppose qu'elle atteint toujours la cible). On suppose que la probabilité de lancer la fléchette en un point donné ne dépend que de la distance de ce point à l'origine. Soit X la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact (x, y) à l'origine. On suppose que sa fonction de répartition F est de classe C^1 sauf peut-être en 0 et en 1. On note f sa dérivée.

1. Montrer que F est croissante et que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

2. On suppose que la probabilité d'atteindre la cible sur un domaine $A \subset D$ est proportionnelle à la surface de A.

Calculer alors la fonction de répartition de X et calculer son espérance et sa variance.

3. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Deux joueurs Alain et Bernard visent la cible. Soient X_A et X_B les variables aléatoires associées à leurs lancers. On suppose que les fonctions de répartition de leurs lancers respectifs sont $F_A(r) = r^\alpha$ et $F_B(r) = r^\beta$.
Calculer la probabilité que Bernard atteigne la cible en un point plus proche que celui atteint par Alain.
(On admettra que si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes, alors $P(X < Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$.)

4. On partage la cible en n cercles concentriques, centrés en O de rayons respectifs k/n.

On note Y la variable aléatoire donnant la valeur n si la cible est atteinte dans le cercle de rayon $1/n$, la valeur $n-1$ si elle est atteinte dans le cercle de rayon $2/n$ mais en dehors du cercle de rayon $1/n$. Et ainsi de suite jusqu'à la valeur 1 si elle est atteinte en dehors du cercle de rayon $(n-1)/n$.

a) Donner la loi de Y en fonction de la fonction de répartition de X.

b) Trouver $\alpha > 0$ tel que la loi de X de fonction de répartition $F(r) = r^\alpha$ pour $r \in [0, 1]$, $F(r) = 0$ si $r < 0$ et $F(r) = 1$ si $r > 1$ corresponde à la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ pour Y.

Solution :

1. Puisque la fléchette atteint toujours la cible, on a : $X(\Omega) = [0, 1]$.

La fonction F est croissante puisque c'est une fonction de répartition. Enfin, $F(0) = P(X \leqslant 0) = 0$, et $F(1) = P(X \leqslant 1) = 1$.

2. L'aire $A(r)$ du disque centré en l'origine et de rayon r est égale à πr^2. Donc, pour tout $r \in [0,1]$:

$$F(r) = \frac{A(r)}{A(1)} = r^2$$

Soit :

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leqslant 0 \\ r^2 & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases} \text{ et } f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin [0,1] \\ 2r & \text{si } r \in [0,1] \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(X) = \int_0^1 2r^2\,dr = \frac{2}{3}, E(X^2) = \int_0^1 2r^3\,dr = \frac{1}{2},\ V(X) = \frac{1}{18}$$

3. On a donc :

$$P(X_\alpha < X_\beta) = \int_0^1 F_\alpha(t) f_\beta(t)\,dt = \int_0^1 r^\alpha \beta r^{\beta-1}\,dt = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

4. a) L'événement $(Y = k)$ signifie que la cible est atteinte à une distance comprise entre $\dfrac{n-k+1}{n}$ et $\dfrac{n-k}{n}$ du centre de la cible. Donc

$$P(Y = k) = F\big(\frac{n-k+1}{n}\big) - F\big(\frac{n-k}{n}\big)$$

b) Pour obtenir une loi uniforme, il faut que $\big(\frac{k+1}{n}\big)^\alpha - \big(\frac{k}{n}\big)^\alpha = \frac{1}{n}$, ce qui est réalisé pour $\alpha = 1$.

Exercice 3.6.

Soit b un nombre entier naturel tel que $b \geqslant 2$.

I. Comparer les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$x \mapsto 1 + x,\ x \mapsto 1 + 2x \text{ et } x \mapsto \mathrm{e}^x.$$

II. On effectue, dans une urne contenant initialement 1 jeton rouge et 1 jeton vert, une succession de tirages de la faon suivante :

⋆ Tant que l'on obtient des jetons verts, on replace le jeton obtenu dans l'urne, on multiplie par b entier le nombre de jetons verts alors contenus dans l'urne (à l'aide d'un stock annexe de jetons verts) puis on procède au tirage suivant.

⋆ Dès que l'on obtient le jeton rouge, on arrête l'expérience.

On note X_b la variable aléatoire définie par :

⋆ $(X_b = 0)$ est l'événement « l'expérience ne s'arrête pas » ;

⋆ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_b = n)$ est l'événement « l'expérience s'arrête à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage ».

1. Déterminer $P(X_b = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité de l'événement « au bout de n tirages, l'expérience n'est pas achevée ».
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et que sa limite $V(b)$ est comprise entre 0 et 1/2.

3. a) Montrer que $u_n - V(b) \leqslant \dfrac{1}{b^{n-1}(b-1)}$.

b) Montrer que la suite $\big(V(b)\big)_{b\geqslant 2}$ admet une limite lorsque b tend vers l'infini.

c) Que peut-on dire de la probabilité de ne jamais tirer le jeton rouge ?

Solution :

I. Une étude rapide de fonctions permet d'obtenir pour tout x de $[0,1]$:

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + 2x$$

On peut également procéder de la façon suivante :

$\star$ on sait que pour tout x réel $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; donc, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

$\star$ Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 1$, on a $x^n \leqslant x$. Donc :

$$\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + x(\mathrm{e}-1) \leqslant 1 + 2x$$

II. 1. Notons R_i l'événement « on tire un jeton rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage » et V_i l'événement « on tire un jeton vert au $i^{\text{ème}}$ tirage ». On a :

$$(X_b = n) = V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1} \cap R_n$$

Donc, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X_b = n) &= P(V_1)P_{V_1}(V_2)\cdots P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{b}{1+b}\times\cdots\times\frac{b^{n-2}}{1+b^{n-2}}\times\frac{1}{1+b^{n-1}} \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités composées :

$$u_n = P(V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1} \cap V_n) = P(V_1)P_{V_1}(V_2)\cdots P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(V_n)$$

et :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{b^k}{1+b^k}$$

La suite $(u_n)_n$ est positive et décroissante. Elle converge vers une limite $V(b)$ qui vérifie $0 \leqslant V(b) \leqslant u_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Soit $p > 0$. Alors, par la question I :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+p}} &= \prod_{k=n}^{n+p-1}\Big(\frac{1+b^k}{b^k}\Big) \leqslant \prod_{k=n}^{n+p-1} \mathrm{e}^{b^{-k}} \leqslant \exp\Big(\sum_{k=n}^{n+p} b^{-k}\Big) \\ &\leqslant \exp\Big(\sum_{k=n}^{\infty} b^{-k}\Big) = \exp\Big(\frac{1}{(b-1)b^{n-1}}\Big) \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{u_{n+p}} \leqslant \exp\Big(\frac{1}{(b-1)b^{n-1}}\Big) \leqslant 1 + \frac{2}{(b-1)b^{n-1}}$$

En faisant tendre p vers l'infini, il vient :

$$0 \leqslant u_n - V(b) \leqslant \frac{2V(b)}{(b-1)b^{n-1}} \leqslant \frac{1}{(b-1)b^{n-1}}$$

b) Ce dernier résultat est valable pour tout n. En particulier pour $n = 1$, il vient :

$$0 \leqslant \frac{b}{2(1+b)} - V(b) \leqslant \frac{1}{b-1}$$

D'où :

$$\lim_{b\to+\infty} V(b) = \frac{1}{2}$$

c) Ne jamais tirer le jeton rouge correspond à $(X_b = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty}(V_1 \cap \ldots \cap V_n)$.

Donc :

$$P(X_b = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = V(b)$$

Exercice 3.7.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[\theta, \theta+1]$, θ étant un réel inconnu.

Pour estimer θ, on considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$, n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant toutes la loi de X et on pose $S_n = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$, $I_n = \inf\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. a) Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

b) Montrer que $S_n - 1$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ.

c) Déterminer le risque quadratique de cet estimateur.

2. a) Quelle est la loi de $-X$?

b) En déduire l'espérance et la variance de I_n.

c) Montrer que I_n est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ. Quel est son risque quadratique ?

On admet dans la suite que $\mathrm{Cov}(I_n, S_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

3. On pose $\widehat{\theta_n} = \frac{1}{2}(S_n - 1 + I_n)$.

a) Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\theta_n}$.

b) Montrer que $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4. On pose $\theta_n^* = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que θ_n^* est un estimateur sans biais et convergent de θ.

b) Entre θ_n^* et $\widehat{\theta_n}$, quel estimateur choisissez-vous et pourquoi ?

Solution :

1. a) Pour x appartenant à $[\theta, \theta+1]$:

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leqslant x) = (x-\theta)^n$$

Donc S_n est une variable aléatoire à densité, et par dérivation légitime :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1} & \text{si } \theta \leqslant x \leqslant \theta+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors, en effectuant le changement de variable $x - \theta = y$:

$$E(S_n) = \int_\theta^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}\,dx = \int_0^1 (y+\theta)ny^{n-1}\,dy$$
$$= \theta\int_0^1 ny^{n-1}\,dy + n\int_0^1 y^n\,dy = \theta + \frac{n}{n+1}$$

et en procédant de même :

$$E(S_n^2) = \int_\theta^{\theta+1} nx^2(x-\theta)^{n-1}\,dx = \theta^2 + \frac{2n\theta}{n+1} + \frac{n}{n+2}$$

D'où :

$$V(S_n) = E(S_n^2) - [E(S_n)]^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

b) On a

$$E(S_n - 1) = \theta - \frac{1}{n+1},\ V(S_n-1) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

Donc, $S_n - 1$ est un estimateur asymptotiquement sans bais et convergent de θ.

c) On a :

$$r_{S_n-1} = [E(S_n-1)-\theta]^2 + V(S_n-1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

2. a) La variable aléatoire $-X$ suit la loi uniforme sur $[-\theta-1, -\theta] = [\theta_1, \theta_1+1]$, avec $\theta_1 = -\theta - 1$.

b) Comme $\sup_i(-X_i) = -\inf_i X_i$, la loi de $-I_n$ a été obtenue dans la première question : il suffit de remplacer θ par θ_1, d'où :

$$E(-I_n) = \theta_1 + \frac{n}{n+1},\ \text{donc } E(I_n) = \theta + \frac{1}{n+1},$$
$$V(-I_n) = V(I_n) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

c) I_n est donc un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ. Son risque quadratique est égal à $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

3. a) On a : $E(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{2}[E(S_n-1)+E(I_n)] = \theta$ et

$$V(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{4}[V(S_n-1)+V(I_n)+2\operatorname{Cov}(S_n-1, I_n)]$$
$$= \frac{1}{4}[V(S_n-1)+V(I_n)+2\operatorname{Cov}(S_n, I_n)]$$

Donc :

$$V(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{4}\left[\frac{2n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2(n+2)(n+1)}$$

b) On a $E(\widehat{\theta_n}) = \theta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\widehat{\theta_n}) = 0$. Ainsi $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4. a) On a $E(\theta_n^*) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k) - \frac{1}{2} = \theta$ et $V(\theta_n^*) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{12n}$

Donc θ_n^* est un estimateur sans biais et convergent de θ.

On a

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{12n} \Longleftrightarrow n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \geqslant 0$$

Donc, dès que $n \geqslant 2$ on a $V(\widehat{\theta_n}) \leqslant V(\theta_n^*)$.

Ainsi $\widehat{\theta_n}$ est meilleur que θ_n^* pour estimer θ.

Exercice 3.8.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Dans un hypermarché, entre 10 heures et 11 heures, un animateur fait N offres promotionnelles sur certains produits précis que l'on note $1, 2, \dots, N$.
On suppose que les offres promotionnelles des produits $1, 2, \dots, N$ ont lieu aux instants $10 + X_1, 10 + X_2, \dots, 10 + X_N$ (exprimés en heures), où $X_1, \dots, X_N$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $10 + Y_1$ la variable aléatoire désignant l'instant où la première offre promotionnelle est faite par l'animateur, et plus généralement, pour $r \in [\![1, N]\!]$, $10 + Y_r$ désigne l'instant de la $r^{\text{ème}}$ offre promotionnelle.

1. Soit $t \in [0, 1]$.

a) Calculer la probabilité que le produit noté k soit offert en promotion avant l'instant $10 + t$.

b) Soit Z_t la variable aléatoire égale au nombre d'offres promotionnelles faites avant l'instant t. Déterminer la loi de Z_t.

c) Calculer l'espérance E_t et la variance V_t de la variable Z_t.

2. Soit $r \in [\![1, N]\!]$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y_r.

b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_r.

Solution :

1. a) Le produit numéro k est offert en promotion à l'instant $10 + X_k$, où X_k suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Ainsi, la probabilité que ce produit soit en promotion avant l'instant $10 + t$ est égale à t.

b) Soit t fixé. La variable aléatoire Z_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, t)$. En effet l'événement $(Z_t = k)$ signifie que k produits (parmi N) sont offerts en promotion avant l'instant t. Par la question précédente, ceci est possible pour chaque produit avec la probabilité t.

c) Bien évidemment $E(Z_t) = Nt, V(Z_t) = Nt(1 - t)$.

2. a) On a l'égalité $(Y_r \leqslant t) = (Z_t \geqslant r)$. Donc, pour $t \in [0, 1]$

$$P(Y_r \leqslant t) = \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} t^k (1 - t)^{N-k}$$

Donc

$$F_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} t^k (1 - t)^{N-k} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Or : $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$ et $(N - k)\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k}$, donc pour t appartenant à $[0, 1]$, il vient par dérivation :

$$f_r(t) = \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} k t^{k-1} (1 - t)^{N-k} - \sum_{k=r}^{N-1} \binom{N}{k} (N - k) t^k (1 - t)^{N-k-1}$$

$$= N\Big[\sum_{k=r}^{N}\binom{N-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{N-k} - \sum_{k=r}^{N-1}\binom{N-1}{k}t^{k}(1-t)^{N-k-1}\Big]$$

Les dominos sont alors en place et il reste :

$$\forall\, t \in [0,1], f_r(t) = N\binom{N-1}{r-1}t^{r-1}(1-t)^{N-r}$$

et bien entendu $f_r(t) = 0$ sinon.

b) On a : $E(Y_r) = N\displaystyle\binom{N-1}{r-1}\int_0^1 t^r(1-t)^{N-r}\,dt$

Des intégrations par parties successives montrent que pour a et b dans $\mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^a(1-t)^b\,dt = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

D'où :

$$E(Y_r) = N\binom{N-1}{r-1}\frac{r!(N-r)!}{(N+1)!} = N\frac{(N-1)!}{(N-r)!(r-1)!}\frac{r!(N-r)!}{(N+1)!} = \frac{r}{N+1}$$

De la même faon :

$$E(Y_r^2) = N\binom{N-1}{r-1}\int_0^1 t^{r+1}(1-t)^{N-r}dt = \frac{r(r+1)}{(N+1)(N+2)}$$

et enfin :

$$V(Y_r) = \frac{r}{N+1}\times\frac{N-r+1}{(N+1)(N+2)}$$

Exercice 3.9.

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type `tab`) sont des permutations de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ d'entiers.

On considère la fonction `T` définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a :tab) :integer ;
var i,k :integer ;
begin
  k :=0 ;
  for i :=1 to n do
    if a[i]=i then k :=k+1 ;
  T :=k ;
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire T_n sur l'univers S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $(a[i] = i)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

a) Quelle est la loi de X_i ? Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

b) Exprimer T_n à l'aide des variables X_i et en déduire l'espérance et la variance de T_n.

3. a) Calculer $P(T_n = n)$, $P(T_n = n-1)$ et $P(T_n = n-2)$.

b) Exprimer $(T_n \neq 0)$ à l'aide des événements $(X_i = 1)$ et en déduire une expression de $P(T_n = 0)$ sous forme d'une somme. Donner un équivalent de $P(T_n = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, $P(T_n = k) = \dfrac{1}{k!}P(T_{n-k} = 0)$, et en déduire la loi de T_n.

d) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^j}{(k-1)!j!}$.

Solution :

1. La fonction T associe à une permutation de $\{1,\dots,n\}$ le nombre de ses points fixes.

2. a) La variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = P(a[i] = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Les variables aléatoires X_i et X_j, pour $i \neq j$ ne sont pas indépendantes. En effet :

$$\begin{aligned} P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) &= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \\ &\neq P(X_i = 1)P(X_j = 1) = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi la variable aléatoire X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$, et

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

b) On a immédiatement :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E(T_n) = 1$$

et :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n \times \frac{n-1}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1 \end{aligned}$$

3. a) L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si la permutation a est l'identité. Donc $P(T_n = n) = \dfrac{1}{n!}$.

L'événement $(T_n = n-1)$ est impossible car si l'on a $(n-1)$ points fixes, alors le point restant est aussi fixe ! Sa probabilité est donc nulle.

L'événement $(T_n = n-2)$ est réalisé si et seulement on a $(n-2)$ points fixes, ce qui signifie que les deux autres éléments sont échangés. Donc il existe $\binom{n}{2}$ permutations de ce type (on dit que ce sont des transpositions)

$$P(T_n = n-2) = \frac{\binom{n}{2}}{n!}$$

b) On a $(T_n \neq 0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X_i = 1)$.

Soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $i_1, \dots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$. Alors :

$$P\big(\bigcap_{j=1}^{k} (X_{i_j} = 1)\big) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Par la formule du crible :

$$P(T_n \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Donc :

$$P(T_n = 0) = 1 - P(T_n \neq 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

c) Soit $1 \leqslant k \leqslant n-2$. L'événement $(T_n = k)$ est réalisé si et seulement si k éléments de $[\![1, n]\!]$ sont fixes, et la restriction de la permutation aux $(n-k)$ éléments restant est une permutation sans point fixe.

Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k éléments. Il y a $(n-k)!P(T_{n-k} = 0)$ permutations possibles des $(n-k)$ éléments restants. Donc :

$$P(T_n = k) = \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!P(T_{n-k} = 0)}{n!} = \frac{1}{k!} P(T_{n-k} = 0)$$

Donc la loi de T_n est définie par : pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], P(T_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(on vérifie que cette relation est également valable pour $k = 0, n-1, n$).

d) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{(k-1)!j!} = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = E(T_n) = 1$$

Exercice 3.10.

La détection d'une maladie repose sur une expérience consistant à examiner la durée de vie de cellules placées dans un milieu selectif. Le début de l'expérience étant pris comme origine, la « durée de vie expérimentale d'une cellule » est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 pour une cellule saine et de paramètre 2 pour une cellule malade. On note p la probabilité qu'une cellule soit malade : p est le taux de contamination.

Un prélèvement sur un patient permet d'étudier n cellules dont les durées de vie expérimentales $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi et sont indépendantes.

1. Soit A l'événement « la première cellule considérée est saine ». A l'aide du système complet $\{A, \overline{A}\}$, déterminer la fonction de répartition, une densité, l'espérance et la variance de X_1.

2. On se propose d'estimer p à l'aide de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

a) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) Montrer que $\widehat{p_n} = 2(1 - Y_n)$ est un estimateur sans biais de p. Est-il convergent ?

3. Il est naturel d'imposer à un estimateur de p de prendre ses valeurs dans $[0, 1]$, on va donc affiner la démarche précédente ...

a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par $\widehat{p_n}$.

b) On définit un nouvel estimateur p_n^* de p par :

$$p_n^* = \begin{cases} \widehat{p_n} & \text{si } 0 < \widehat{p_n} < 1 \\ 0 & \text{si } \widehat{p_n} \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } \widehat{p_n} \geqslant 1 \end{cases}$$

p_n^* est-elle une variable à densité ?

4. Trois individus subissent un prélèvement ; pour chacun d'eux 100 cellules sont étudiées et on obtient pour le premier $Y_{100} = 0{,}87$, pour le second $Y_{100} = 0{,}46$ et pour le troisième $Y_{100} = 1{,}23$. Quel est votre diagnostic pour chacun d'eux ?

Solution :

1. On a $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leqslant x) = P(X \leqslant x/A)P(A) + P(X \leqslant x/\overline{A})P(\overline{A}) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-x})(1-p) + (1 - \mathrm{e}^{-2x})p \\ F_X(x) &= 1 - (1-p)\mathrm{e}^{-x} - p.\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

et, par dérivation :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-p)\mathrm{e}^{-x} + 2p.\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, après calculs simples :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\,dx = 1 - \frac{p}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}$$

2. a) On a :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\times n.E(X) = 1 - \frac{p}{2}$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\times n.V(X) = \frac{1}{n}\big(1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}\big)$$

b) Ainsi :

$$E(\widehat{p_n}) = 2\big(1 - E(Y_n)\big) = p, V(\widehat{p_n}) = 4V(Y_n) = \frac{4}{n}\big(1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}\big)$$

Ainsi $\widehat{p_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de p.

3. a) Comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$, on a $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$, et $\widehat{p_n}(\Omega) =]-\infty, 2]$

b) La variable aléatoire p_n^* n'est pas une variable à densité, puisque :

$$P(p_n^* = 0) = P(\widehat{p_n} \leqslant 0) \neq 0, P(p_n^* = 1) = P(\widehat{p_n} \geqslant 1) \neq 0$$

4. On a :

- premier individu : $\widehat{p_{100}} = 0.26 = p_{100}^*$,
- second individu : $\widehat{p_{100}} = 1.06, p_{100}^* = 1$,
- troisième individu : $\widehat{p_{100}} = -0.46, p_{100}^* = 0$.

Ainsi, le deuxième individu est sain, le troisième est contaminé, et le premier est en cours de contamination.

Exercice 3.11.

On considère dans cet exercice un réel $\alpha > 0$.

1. Soient X et Y des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre α.

Montrer que la variable aléatoire $\inf(X, Y)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2α.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

En déduire que $|X - Y|$ suit la loi exponentielle de paramètre α.

Trois personnes, A, B et C, arrivent en même temps à une borne téléphonique qui comporte deux cabines qu'occupent immédiatement A et B ; C remplace le premier sorti (qui quitte tout de suite les lieux). On note U, V et W les temps aléatoires respectifs d'occupation de leur cabine par A, B et C.
On suppose que U, V et W sont des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre α.

2. Calculer la probabilité que C soit le dernier des trois à sortir de sa cabine.

3. Expliciter la fonction de répartition et, s'il y a lieu, une densité, de la variable aléatoire $\sup(U, V)$.
Préciser la loi de la variable aléatoire T égale au temps total passé par C à cette borne.
La variable aléatoire T admet-elle une espérance ? Dans l'affirmative, préciser $E(T)$.

4. On note Z la variable aléatoire égale à l'instant où la dernière des trois personnes A, B et C quitte la borne, l'instant 0 étant celui de leur arrivée simultanée.
Montrer que $Z = \inf(U, V) + \sup\big(|U - V|, W\big)$.
On admet que les variables aléatoires $\inf(U, V)$, $|U-V|$ *et* W *sont indépendantes.*
Préciser la loi de Z.
Montrer que $Z - T = \sup\big(|U - V| - W, 0\big)$. La variable aléatoire $Z - T$ est-elle à densité ?

Solution :

1. Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, pour tout réel t :

$$P\big(\inf(X, Y) \geqslant t\big) = P\big((X \geqslant t) \cap (Y \geqslant t)\big) = P(X \geqslant t)P(Y \geqslant t)$$

Donc :

$$P\big(\inf(X, Y) \geqslant t\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-2\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} ;$$

$$P\big(\inf(X, Y) \leqslant t\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $\inf(X, Y)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(2\alpha)$.

Notons f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha.\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$, f est la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre α.

On sait que $-Y$ admet pour densité $g : t \longmapsto f(-t)$. On sait également, par indépendance de X et $-Y$ qu'une densité h de $X - Y$ est donnée par, pour tout réel x :

$$h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt = \int_{\max(0,x)}^{+\infty} \alpha^2.\mathrm{e}^{-\alpha t}.\mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,dt$$

Donc

$$h(x) = \alpha^2.\mathrm{e}^{\alpha x}\int_{\max(0,x)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,dt = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\alpha(x-2\max(0,x))} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

(la loi de $X - Y$ s'appelle loi de Laplace de paramètre α.)

Enfin, pour tout x réel :

$$P(|X-Y| \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\alpha|t|}\,dt = \int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $|X - Y|$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

2. L'individu C sort le dernier de sa cabine si, et seulement si, l'événement $(W + \inf(U,V) \geqslant \sup(U,V))$ est réalisé. Or :

$$\begin{aligned}(W + \inf(U,V) \geqslant \sup(U,V)) &= [W \geqslant \sup(U,V) - \inf(U,V)] \\ &= [W \geqslant |U-V|] = [|U-V| - W \leqslant 0]\end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires $|U - V|$ et W sont indépendantes et suivent toutes deux la loi $\mathcal{E}(\alpha)$, la variable aléatoire $|U-V|-W$ suit la loi de Laplace de paramètre α, loi qui est symétrique par rapport à 0 : la probabilité que C soit le dernier à sortir de sa cabine est donc égale à $\frac{1}{2}$.

3. Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, pour tout réel t :

$$P(\sup(X,Y) \leqslant t) = P(X \leqslant t) \cap (Y \leqslant t)) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t)$$

Donc :

$$P(\sup(X,Y) \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est continue sauf peut-être en un nombre fini de points ; ainsi $\sup(U,V)$ est une variable aléatoire à densité, de densité :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\alpha(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-2\alpha t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables aléatoires $\inf(U,V)$ et W sont indépendantes ; la variable aléatoire $T = \inf(U,V) + W$ est à densité, de densité donnée, pour tout réel x par :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_W(t) f_{\min(U,V)}(x-t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\alpha^2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-2\alpha(x-t)}\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc une densité de T est :

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\alpha(e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre que T admet une espérance et que $E(T) = \dfrac{3}{2\alpha}$.

4. Il est clair que :

$$Z = \sup(\sup(U,V),T) = \sup(\sup(U,V), \inf(U,V) + W)$$

$$= \inf(U,V) + \sup(\sup(U,V),W) - \inf((U,V),W)$$
$$= \inf(U,V) + \sup(|U-V|,W)$$

Les variables aléatoires $\inf(U,V), |U-V|$ et W étant indépendantes, les variables $\inf(U,V)$ et $\sup(|U-V|,W)$ sont indépendantes. Comme elles sont à densité, la variable Z l'est également. Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4\alpha^2 \displaystyle\int_0^x (\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-2\alpha t})\mathrm{e}^{-2\alpha(x-t)}dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1 - \alpha x)\mathrm{e}^{-2\alpha x}}{\alpha} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Enfin la variable $Z-T$ n'est pas à densité puisque $P(Z-T=0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.12.

1. Soit c un nombre réel. On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx.\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Indiquer pour quelle valeur du réel c, f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, f désignera la fonction précédente pour la valeur de c qu'on vient de déterminer.

2. Un appareil fonctionne à l'aide d'une pile. Le type de piles utilisé pour cet appareil a une durée de vie exprimée en mois (lorsque l'appareil fonctionne en continu) qui est une variable aléatoire de densité f.

On procède de la manière suivante : à l'instant 0 une pile neuve est placée dans l'appareil, ensuite celui-ci reste branché en permanence et chaque fois qu'il cesse de fonctionner on remplace la pile usagée par une pile neuve, le temps mis pour effectuer le remplacement étant négligé.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire donnant la date mensuelle où on procède au $i^{\text{ème}}$ remplacement de pile.

a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, donner une densité de la variable X_i, ainsi que la valeur de son espérance $E(X_i)$.

b) Pour m réel, calculer $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m)$ en fonction de m.

c) Si $m > 0$, déterminer le signe de $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m)$ dans les cas suivants :

(i) $m = \dfrac{E(X_1)}{2}$;

(ii) m proche de 0 ;

(iii) m suffisamment grand.

Solution :

1. La connaissance de la loi $\Gamma(b,\tau)$ qui a pour densité

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)b^\tau}, \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

permet de conclure (cas où $b = 1/2$ et $\tau = 2$) que la fonction f est une densité si et seulement si :

$$c = \frac{1}{\Gamma(2)(1/2)^2} = 4$$

2. a) Notons Y_i la durée de fonctionnement de la $i^{\text{ème}}$ pile. On a $Y_i \hookrightarrow \Gamma\big(\frac{1}{2}, 2\big)$.

Les variables aléatoires, $Y_1, \ldots, Y_i$ sont indépendantes, et $X_i = \sum\limits_{k=1}^{i} Y_k$. Ainsi :

$$X_i \hookrightarrow \Gamma\big(\frac{1}{2}, 2i\big).$$

Une densité de X_i est donnée par :

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 4^i \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} x^{2i-1}}{(2i-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On sait alors que $E(X_i) = \frac{1}{2} \times (2i) = i$.

b) A l'aide d'intégrations par parties :

$$P(X_1 > m) = \int_m^{+\infty} 4x.\mathrm{e}^{-2x}\, dx = (2m+1)\mathrm{e}^{-2m}$$

$$P(X_2 > 2m) = \int_{2m}^{+\infty} \frac{16}{6} x^3.\mathrm{e}^{-2x}\, dx = \big(\frac{32}{3}\, m^3 + 8m^2 + 4m + 1\big)\mathrm{e}^{-4m}$$

i) Pour $m = \dfrac{E(X_1)}{2} = \dfrac{1}{2}$, il vient :

$$P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}(6\mathrm{e} - 19) < 0$$

ii) Pour m voisin de 0 :

$$\begin{aligned} P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) &= \mathrm{e}^{-4m}\big(\mathrm{e}^{2m}(2m+1) - (\frac{32}{3} m^3 + 8m^2 + 4m + 1)\big) \\ &= \mathrm{e}^{-4m}(-2m^2 + o(m^2)) \end{aligned}$$

donc $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) < 0$ lorsque m est au voisinage de 0.

iii) Lorsque m est au voisinage de $+\infty$:

$$P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) \sim (2m+1)\mathrm{e}^{-2m} > 0$$

Exercice 3.13.

Une expérience aléatoire est simulée par la fonction Pascal suivante :

```
Const n = ... ;
var u :array[1..n] of integer ;
function escp2005(m :integer) :integer ;
var  i,j,s :integer ;
begin
randomize ;
u[1] :=random(m)+1 ;
i :=1 ;
s :=0 ;
repeat i :=i+1 ;
       u[i] :=random(m)+1 ;
       for j :=1 to i-1 do  if u[i]=u[j] then s :=s+1
until s=1 ;
escp2005 :=i
end ;
```

On rappelle que l'instruction `x :=random(m)` place dans `x` et au hasard une valeur entière comprise entre 0 et $m-1$, la procédure `randomize` permettant d'initialiser la fonction `random`.

1. On souhaite appeler `escp2005` avec $m = 6$. Quelle valeur minimale de `n` doit-on donner pour que la fonction rende un résultat ? Décrire alors l'expérience ainsi simulée.

2. On note X_m la variable aléatoire correspondant à la valeur rendue par la fonction `escp2005` (n ayant une valeur telle que le programme fonctionne).

a) Donner la loi de X_6.

b) On se place dans le cas où m est quelconque. Exprimer la probabilité de l'événement $\{X_m = k+1\}$ en fonction de celle de l'événement $\{X_m = k\}$.

c) En déduire un programme en Pascal demandant deux entiers m et k compris entre 2 et 100 et permettant de calculer la probabilité de l'événement $\{X_m = k\}$ et l'espérance de X_m.

Solution :

1. Pour $m = 6$, l'expérience simulée est la suivante : on effectue des lancers successifs d'un dé équilibré (l'instruction `random(m)+1` donne un nombre aléatoire entre 1 et 6 suivant la loi uniforme $\mathcal{U}[\![1, 6]\!]$) et on arrête les lancers dès que l'on a obtenu pour la seconde fois un numéro obtenu lors d'un des lancers précédents (la variable `s` sert de « drapeau », condition d'arrêt lorsque $s = 1$).

Comme il y a 6 numéros distincts, le nombre maximal de lancers sera 7.

Il faut donc choisir $n = 7$.

2. a) On a $X_6(\Omega) = [\![2, 7]\!]$, et pour tout $i \in X_6(\Omega)$

$$P(X_6 = i) = \mathrm{A}_6^{i-1}\,\frac{i-1}{6^i} = \frac{6!}{(7-i)!}\times\frac{(i-1)}{6^i}$$

b) Dans le cas général, $X_m(\Omega) = [\![2, m+1]\!]$, et pour tout $k \in X_m(\Omega)$:

$$P(X_m = k) = \frac{\mathrm{A}_m^{k-1}(k-1)}{m^k} = \frac{m!}{m^k}\times\frac{k-1}{(m-k+1)!}$$

Alors, pour $k \in [\![2, m]\!]$:

$$\frac{P(X_m = k+1)}{P(X_m = k)} = \frac{k(m-k+1)}{m(k-1)}$$

et :

$$P(X_m = k+1) = \frac{k(m-k+1)}{m(k-1)}\,P(X_m = k)$$

avec $P(X_m = 2) = \dfrac{1}{m}$.

c) Voici une proposition de programme :

```
Programm ESCP05b
Var P :array[1..101] of real ; e :real ;
    i,m,k : integer ;
Begin
Readln(m,i) ;
```

```
For k :=1 to 101 do P[k] :=0 ;
P[2] := 1/m ;
e :=0 ;
For k :=2 to m do
   Begin
   P[k+1] := k*(m-k+1)/(m*(k-1))*P[k] ;
   e := a+k*P[k]
   End ;
Writeln(P[i], e+(m+1)*P[m+1]) ;
Readln
End.
```

Exercice 3.14.

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $[0,+\infty[$. On note f une densité de X.

1. a) Montrer que pour $x \in]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt$ converge et que sa valeur est comprise entre 0 et 1.

On définit la fonction H sur $\mathbb{R}$, par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Montrer que H est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Expliciter $H(x)$, selon les valeurs de x et montrer que H est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire ayant H pour fonction de répartition.

b) Déterminer une densité h de $\widetilde{X}$.

c) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et une variance (on ne cherchera pas à les calculer).

3. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter $H(x)$ selon les valeurs de x et montrer que H est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire ayant H pour fonction de répartition.

b) Déterminer une densité h de $\widetilde{X}$.

c) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et une variance (on ne cherchera pas à les calculer).

Solution :

1. a) Comme $x \in]0,1]$, $x^t = \mathrm{e}^{t\ln x}$ vérifie, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x^t \leqslant 1$. Comme $f(t) \geqslant 0$, il vient

$$0 \leqslant x^t f(t) \leqslant f(t)$$

et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, on en déduit que pour tout $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt$ existe et reste compris entre 0 et 1.

b) Soit x et y réels tels que $x < y$. Au vu de la question précédente, le seul cas à traiter est $0 \leqslant x < y \leqslant 1$.
Dans ce cas, par croissance de la fonction logarithme : $\mathrm{e}^{t\ln x} \leqslant \mathrm{e}^{t\ln y}$ et par intégration : $H(x) \leqslant H(y)$.

2. a) Lorsque X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, il vient, pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln x}\,dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{t\ln x}}{\ln x}\right]_0^1 = \frac{x-1}{\ln x}$$

Soit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie que H est une fonction de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, que l'on a $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et qu'elle est croissante. C'est donc une fonction de répartition.

b) Pour tout $x \in]0,1[$:

$$H'(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$

Donc :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Soit $g(x) = xh(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{(\ln x)^2}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$
- au voisinage de 1, en posant $x = 1 - h$: $g(x) = \dfrac{h^2/2 + o(h^2)}{h^2 + o(h^2)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

Ainsi g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, ce qui entraîne que $E(\widetilde{X})$ existe et plus généralement que $\widetilde{X}$ admet des moments de tous ordres.

3. a) Lorsque X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, il vient, pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) = \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{t(\ln x - \lambda)}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda - \ln x}$$

Soit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - \ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie que H est une fonction de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, que $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et qu'elle est croissante. C'est donc une fonction de répartition.

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $H'(x) = \dfrac{\lambda}{x(\lambda - \ln x)^2}$.

Donc :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x(\lambda - \ln x)^2} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Soit $g(x) = xh(x) = \dfrac{\lambda}{(\lambda - \ln x)^2}$.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$ et comme $\lambda > 0$ et $\ln x \leqslant 0$, la fonction g est continue sur $]0,1]$. Donc g est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto x^2 h(x)$. Ainsi $E(\widetilde{X})$ et $V(\widetilde{X})$ existent.

Exercice 3.15.

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$V(\omega) = \int_{-1}^{1} \min(x, U(\omega))\, dx$$

$$W(\omega) = \int_{-1}^{1} \max(x, U(\omega))\, dx$$

et on admet par la suite que V et W sont des variables aléatoires.

1. Montrer que $P(V \leqslant 0) = P(W \geqslant 0) = 1$.

2. Établir la relation $V = -\dfrac{(U-1)^2}{2}$ et en déduire la loi de V. Calculer l'espérance de $\min(x, U)$ pour tout $x \in [-1,1]$, puis l'espérance de V. Conclusion ?

3. Déduire la loi de W de celle de V.

4. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geqslant 1}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où U_n suit la loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{n}$ et on pose :

$$\forall\, \omega \in \Omega, V_n(\omega) = \int_{-1}^{1} \min(x, U_n(\omega))\, dx.$$

Étudier la convergence en loi de la suite V_n.
On pourra calculer la fonction de répartition de V_n.

Solution :

1. Pour tout $x \in [-1,1]$ et tout ω de Ω, on a :

$$\min(x, U(\omega)) \leqslant x \text{ et } \max(x, U(\omega)) \geqslant x.$$

La fonction $x \mapsto x$ est d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, d'où le résultat.

2. On peut écrire :

$$V(\omega) = \int_{-1}^{U(\omega)} x\, dx + \int_{U(\omega)}^{1} U(\omega)\, dx = \frac{1}{2}(U(\omega)^2 - 1) + U(\omega)(1 - U(\omega))$$

$$V(\omega) = -\frac{(U(\omega) - 1)^2}{2}$$

Ainsi, pour tout $v \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant -v) = P((1-U)^2 \geqslant 2v) = P(U \leqslant 1 - \sqrt{2v})$$

et :

$$P(V \leqslant -v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \geqslant 2 \\ 1 - \sqrt{\dfrac{v}{2}} & \text{si } 0 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases}$$

Par conséquent, une densité de V est :

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \notin]-2, 0[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-v}} & \text{si } v \in]-2, 0[\end{cases}$$

Et :

$$E(V) = -\frac{1}{2} \int_{-2}^{0} \sqrt{\frac{-v}{2}}\, dv = -\frac{2}{3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E(\inf(x, U)) &= E(x.1_{(U \geqslant x)} + U.1_{(U \leqslant x)}) = xP(U \geqslant x) + \int_{-1}^{x} \frac{u}{2}\, du \\ &= \frac{x(1-x)}{2} + \frac{1}{4}(x^2 - 1) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} E(\inf(x, U))\, dx = -\frac{2}{3}$: l'intégrale de l'espérance est donc l'espérance de l'intégrale.

3. La loi de $-U$ est celle de U. En effectuant le changement de variable $y = -x$ dans l'expression de W, et après avoir remarqué que $\sup(-x, -U) = -\inf(x, U)$, on obtient que la loi de W est celle de $-V$ ou encore celle de $\dfrac{(U+1)^2}{2}$.

4. Pour tout a réel, $P(V_n \geqslant a) = P\big(-\dfrac{(U-1)^2}{2} \geqslant a\big) = P\big((U-1)^2 \leqslant -2a\big)$.

⋆ Si $a \geqslant 0$, on a $P(V_n \geqslant a) = 0$.

⋆ Si $a < 0$, $P(V_n \geqslant a) = P\big((U_n - 1)^2 \leqslant -2a\big)$, soit puisque $\sqrt{n}U_n$ suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ :

$$\begin{aligned} P(V_n \geqslant a) &= P(1 - \sqrt{-2a} \leqslant U_n \leqslant 1 + \sqrt{-2a}) \\ &= \Phi(\sqrt{n}(1 + \sqrt{-2a}\,) - \Phi(\sqrt{n}(1 - \sqrt{-2a}\,) \end{aligned}$$

- Si $a < -\dfrac{1}{2}$, on a $-2a > 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P(V_n \geqslant a) = \lim_{+\infty} \Phi - \lim_{-\infty} \Phi = 1$
- Si $a > -\dfrac{1}{2}$, on a $-2a < 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P(V_n \geqslant a) = \lim_{+\infty} \Phi - \lim_{+\infty} \Phi = 0$

Donc la suite (V_n) converge en loi vers une variable certaine égale à $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.16.

Au milieu de leurs révisions, Evariste et Raymond décident, chacun de leur côté, d'aller se changer les idées à la cafétéria, mais comme ils ont beaucoup de travail, ils n'y restent que 10 minutes.

On note X et Y les heures d'arrivée respectives d'Evariste et de Raymond à la cafétéria, et on suppose que X et Y sont indépendantes et uniformément distribuées entre 10 h et 11 h.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X - Y$.

2. Déterminer la probabilité qu'Evariste et Raymond se retrouvent ensemble à la cafétéria.

3. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h. Déterminer, en fonction de h, la probabilité qu'il retrouve Raymond.

4. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h et que Raymond ne se trouvait pas à la cafétéria à cette heure là. Calculer la probabilité qu'Evariste rencontre Raymond.

Solution :

1. On sait que X suit la loi $\mathcal{U}\big([10,11]\big)$ et que $-Y$ suit la loi $\mathcal{U}\big([-11,-10]\big)$. Comme ces deux variables aléatoires sont indépendantes, une densité de $X-Y$ est donnée par convolution, soit pour tout réel x :

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,dt$$

Or $f_X(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0$ (donc égal à 1) si et seulement si $\begin{cases} 10 \leqslant t \leqslant 11 \\ -11 \leqslant x-t \leqslant -10 \end{cases}$, c'est-à-dire $\max(10, x+10) \leqslant t \leqslant \min(11, 11+x)$

Donc :

$$f_{X-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \displaystyle\int_{10}^{x+11} dt = x+1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_{x+10}^{11} dt = 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

soit, en regroupant :

$$f_{X-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1,1] \\ 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \end{cases}$$

2. La probabilité cherchée est :

$$p_1 = P\big(|X-Y| \leqslant \tfrac{1}{6}\big) = P\big(-\tfrac{1}{6} \leqslant X-Y \leqslant \tfrac{1}{6}\big) = \int_{-1/6}^{1/6} (1-|t|)\,dt$$
$$= 2\int_0^{1/6} (1-t)\,dt = \frac{11}{36}$$

3. Comme h est fixé, la probabilité demandée est $p_2 = P\big(h - \frac{1}{6} \leqslant Y \leqslant h + \frac{1}{6}\big)$.

Aussi :

$$p_2 = \begin{cases} \displaystyle\int_{10}^{h+\frac{1}{6}} dt = h - 10 + \frac{1}{6} & \text{si } 10 \leqslant h \leqslant 10 + \dfrac{1}{6} \\ \displaystyle\int_{h-\frac{1}{6}}^{h+\frac{1}{6}} dt = \frac{1}{3} & \text{si } 10 + \dfrac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 - \dfrac{1}{6} \\ \displaystyle\int_{h-\frac{1}{6}}^{11} dt = 11 - h + \frac{1}{6} & \text{si } 11 - \dfrac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 \end{cases}$$

4. On cherche, dans cette question la probabilité :

$$p_3 = P\big((h \leqslant Y \leqslant h + \tfrac{1}{6})/(Y > h) \cup (Y < h - \tfrac{1}{6})\big)$$

(car dire que Raymond n'était pas là, c'est dire qu'il n'était pas encore arrivé ou était déjà reparti !)

• Si $h \leqslant 10 + \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(h \leqslant Y \leqslant h + 1/6)}{P(Y > h)} = \frac{1/6}{11 - h}$$

• Si $10 + \dfrac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 - \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(h \leqslant Y \leqslant h + 1/6)}{P(Y > h) + P(Y < h - 1/6)} = \frac{1/6}{(11 - h) + (h - 1/6 - 10)} = \frac{1}{5}$$

• Si $h \geqslant 11 - \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(Y \geqslant h)}{P(Y \geqslant h) + P(Y < h - 1/6)} = \frac{11 - h}{5/6} = \frac{6(11 - h)}{5}$$

Exercice 3.17.

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3.

On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$ et c_n la probabilité de l'événement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.

   b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.

2. a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $p_{n+3} = 2\times\big(\frac{1}{3}\big)^3(1 - c_n)$.

   b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \dfrac{2}{27}\, p_n = 0$.

3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \dfrac{2}{3}\, p_{n+1} - \dfrac{2}{9}\, p_n$. Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite nulle.

   b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\Big(\big(\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\big)^{n-2} - \big(\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\big)^{n-2}\Big)$.

   c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=2}^{\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

Solution :

1. a) $\star$ Au vu de l'expérience réalisée, il est évident que $p_1 = p_2 = c_1 = c_2 = 0$.

$\star$ L'événement $(X = 3)$ est réalisé si les trois premiers tirages amènent le même résultat, donc si les tirages de rang 2 et 3 amènent le même résultat que le premier tirage (et le résultat du premier tirage est indifférent).

Donc $p_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{3}{27}$ et $c_3 = p_3$.

$\star$ L'événement $(X = 4)$ consiste à tirer une boule au premier coup (indifférente), puis une boule portant un autre numéro (avec la probabilité $\frac{2}{3}$), puis deux fois encore cette même boule (avec la probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$). Ainsi :

$$p_4 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{2}{27} \text{ et } c_4 = \frac{5}{27}$$

b) Comme, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, il vient, pour $n \geqslant 2$:

$$p_n = c_n - c_{n-1}$$

2. a) L'événement $(X = n+3)$ est réalisé si et seulement si jusqu'au tirage de rang n, on n'a jamais tiré trois fois consécutivement le même numéro (on réalise ainsi $(X > n)$) et si on a obtenu aux tirages de rangs $n+1, n+2$ et $n+3$ le même numéro distinct de celui obtenu au tirage de rang n.

Comme les résultats des tirages effectués sont indépendants, il vient :

$$p_{n+3} = P(X > n)\times\frac{2}{3}\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{2}{27}(1 - c_n)$$

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_{n+3} - p_{n+2} = \frac{2}{27}(1 - c_n) - \frac{2}{27}(1 - c_{n-1}) = \frac{2}{27}(c_{n-1} - c_n) = -\frac{2}{27}p_n$$

3. a) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} = p_{n+3} - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} = \frac{1}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} - \frac{2}{27}p_n = \frac{1}{3}u_n$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et comme $u_2 = 0$, on a $u_n = 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

b) Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

Le polynôme $X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{9}$ admet deux racines $a = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ et $b = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$.

On sait donc qu'il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \lambda a^n + \mu b^n$$

ces deux réels étant fixés par les valeurs de p_2 et p_3. Finalement, après calculs, pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Big)^{n-2} - \Big(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\Big)^{n-2}\Big)$$

c) On remarque que $\big|\frac{1+\sqrt{3}}{3}\big| < 1$ et $\big|\frac{1-\sqrt{3}}{3}\big| < 1$.

Donc la série $\sum p_n$ est convergente ; en particulier, la suite $(p_n)_n$ tend vers 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.
Comme la suite $(X \leqslant n)$ est croissante pour l'inclusion, on en déduit que $P\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(X \leqslant n)\big) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.
Ce qui signifie que l'on obtiendra presque sûrement trois fois consécutivement le même numéro.

d) Pour tout $k \geqslant 1$, les séries $\sum n^k a^n$ et $\sum n^k b^n$ convergent. Aussi X admet des moments de tous ordres.
Enfin :

$$E(X) = \frac{1}{6a\sqrt{3}} \sum_{n=2}^{\infty} na^{n-1} - \frac{1}{6b\sqrt{3}} \sum_{n=2}^{\infty} nb^{n-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{6a\sqrt{3}}\big(\frac{1}{(1-a)^2} - 1\big) - \frac{1}{6b\sqrt{3}}\big(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\big)$$

et, en remplaant a et b par leurs valeurs :

$$E(X) = 13$$

Exercice 3.18.

Dans tout cet exercice, α est un réel tel que $\alpha > 2$.

1. Soit b un réel tel que $b \geqslant 1$. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = (1 - x)^b + x^b - 1$$

En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.

2. Soit f_α la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$f_\alpha : t \mapsto 2^{\alpha-1}(1 + |t|^\alpha) - (1 + t)^\alpha - (1 - t)^\alpha$$

En utilisant la question précédente (ou de toute autre manière) montrer que pour tout t de $[-1, 1]$, on a $f_\alpha(t) \geqslant 0$.

3. Soit h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_\alpha : t \longmapsto \begin{cases} k_\alpha f_\alpha(t) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k_α est une constante réelle.

a) Déterminer k_α pour que h_α soit une densité de variable aléatoire réelle.
On note dans la suite X_α une variable aléatoire admettant alors cette densité

b) Déterminer la fonction de répartition F_α de X_α.

4. Déterminer la limite de k_α, lorsque α tend vers l'infini. En déduire que pour tout réel t, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} F_\alpha(t)$ existe. Que représente cette limite en termes de probabilités ?

5. a) Calculer l'espérance $E(X_\alpha)$ et la variance $V(X_\alpha)$ de X_α.

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} V(X_\alpha)$.

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout x de cet intervalle :

$$g'(x) = b(x^{b-1} - (1-x)^{b-1})$$

$g'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^{b-1} \geqslant (1-x)^{b-1} \Longleftrightarrow x \geqslant 1-x \Longleftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$.
L'équation $g'(x) = 0$ est équivalente à $x = 1/2$.
Donc g est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et comme $g(0) = g(1) = 0$, il vient $g(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in [0,1]$.

2. La fonction $f_\alpha : t \mapsto f_\alpha(t)$ est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,1]$ et sur cet intervalle :

$$f_\alpha(t) = 2^{\alpha-1}(1+t^\alpha) - (1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha$$

Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$f'_\alpha(t) = \alpha\left((2t)^{\alpha-1} - (1+t)^{\alpha-1} + (1-t)^{\alpha-1}\right)$$

Si l'on pose $u = 1+t, v = 1-t$, alors :
$f'_\alpha(t) = \alpha\big((u-v)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1} + v^{\alpha-1}\big) = \alpha u^{\alpha-1}\big((1-\frac{v}{u})^{\alpha-1} + (\frac{v}{u})^{\alpha-1} - 1\big)$
avec $0 \leqslant \dfrac{v}{u} \leqslant 1$.

Par la question précédente, il vient $f'_\alpha(t) \leqslant 0$. La fonction f_α est donc décroissante sur $[0,1]$ et comme $f_\alpha(1) = 0$, elle reste positive sur cet intervalle, et par parité, sur $[-1,1]$.

3. a) La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt &= 2\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt \\ &= 2\Big[2^{\alpha-1}\big(t + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big) - \frac{(1+t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big]_0^1 \\ &= 2\big(2^{\alpha-1}\big(1 + \frac{1}{\alpha+1}\big) - \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big) = \frac{2^\alpha}{\alpha+1}(\alpha-2)\end{aligned}$$

Donc :

$$k_\alpha = \frac{\alpha+1}{2^\alpha(\alpha-2)}$$

b) On vient en fait de déterminer une primitive de f_α et donc :

- Si $x \leqslant -1$, $F_\alpha(x) = 0$ et si $x \geqslant 1$, $F_\alpha(x) = 1$.
- Si $-1 < x \leqslant 0$:

$$F_\alpha(x) = \frac{-2^{\alpha+1} + \alpha 2^\alpha(x+1) - 2^\alpha(-x)^{\alpha+1} + 2(1-x)^{\alpha+1} - 2(1+x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha-2)}$$

- Si $0 \leqslant x < 1$:

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{2} + \frac{x2^{\alpha-1}(\alpha+1) + 2^{\alpha-1}x^{\alpha+1} + (1-x)^{\alpha+1} - (1+x)^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha-2)}$$

4. On a $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha+1}{2^\alpha(\alpha-2)} = 0$, et on obtient :

$$\forall\, x \in \,]-1,1[,\ \lim_{\alpha\to+\infty} F_\alpha(x) = \frac{1+x}{2}$$

Ainsi (X_α) tend en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([-1,1])$.

5. a) La fonction $x \mapsto xf_\alpha(x)$ étant impaire, on a $E(X_\alpha) = 0$.

b) On trouve :

$$V(X_\alpha) = 2\int_0^1 k_\alpha t^2 f_\alpha(t)\, dt = \frac{\alpha^2 - \alpha + 6}{3(\alpha^2 + 5\alpha + 6)}$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} V(X_\alpha) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.19.

Un gendarme va constater une suite illimitée d'infractions sur l'autoroute. Chaque infraction peut être sanctionnée par une verbalisation ou un avertissement (sans frais).

Il décide qu'il tirera au sort (avec une pièce de monnaie non truquée) la sanction pour la première infraction constatée. Puis pour tout p de $\mathbb{N}^*$, si pour la $p^{\text{ème}}$ infraction il verbalise, alors la $(p+1)^{\text{ème}}$ fera l'objet d'un avertissement, tandis que si la $p^{\text{ème}}$ infraction fait l'objet d'un avertissement, alors la $(p+1)^{\text{ème}}$ fera l'objet d'une verbalisation ou d'un avertissement par tirage au sort.

1. Ecrire un programme qui simule les sanctions successives pour les n premières infractions constatées.

2. On note a_p (respectivement b_p) la probabilité pour que la $p^{\text{ème}}$ infraction fasse l'objet d'une verbalisation (respectivement d'un avertissement).

a) Exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p.

b) En déduire a_p et b_p en fonction de p.

c) Que vaut la probabilité que ce gendarme ne fasse jamais aucune verbalisation ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première verbalisation effectuée. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n (resp. Z_n) le nombre de verbalisations (resp. d'avertissements) effectuées au cours des n premières infractions.

a) Déterminer une relation entre les espérances de Y_n et de Z_n, puis entre les variances de ces variables aléatoires. Que vaut le coefficient de corrélation de Y_n et de Z_n ?

b) Déterminer les valeurs prises par Y_n.

c) Calculer la probabilité de l'événement $[Y_n = 0]$.

Solution :

1. Voici une proposition de programme :

```
Var n,k : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ;
k :=1 ;
While k<n do
      If random(2)=0 then begin
            writeln('verbalisation') ;
            k :=k+2
            end
```

```
      else begin
            writeln('avertissement') ;
            k :=k+1
            end
end ;
If k=n then if random(2)=0 then writeln('verbalisation')
      else writeln('avertissement')
End.
```

2. a) Avec des notations évidentes (sic !) :

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= P(V_{p+1}) = P(A_p)P(V_{p+1}/A_p) + P(V_p)P(V_{p+1}/V_p) \\ &= P(A_p)\times\frac{1}{2} + P(V_p)\times 0 = \frac{1}{2}\,b_p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{p+1} &= P(A_{p+1}) = P(A_p)P(A_{p+1}/A_p) + P(V_p)P(A_{p+1}/V_p) \\ &= P(A_p)\times\frac{1}{2} + P(V_p)\times 1 = \frac{1}{2}\,b_p + a_p \end{aligned}$$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. On a alors $\begin{pmatrix} a_{p+1} \\ b_{p+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}$.

Un calcul élémentaire montre que la matrice A est diagonalisable et que l'on peut écrire : $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $p \geqslant 0$:

$$a_p = -\frac{1}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^p + \frac{1}{3}, \quad b_p = \frac{1}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^p + \frac{2}{3}$$

c) L'événement considéré est $A = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} B_p$. La suite $\big(\bigcap\limits_{p=1}^{n} B_p\big)_n$ est une suite décroissante pour l'inclusion. Aussi

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P\big(\bigcap_{p=1}^{n} B_p\big)$$

Par la formule des probabilités composées :

$$P\big(\bigcap_{p=1}^{n} B_p\big) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \big(\frac{1}{2}\big)^n$$

et $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^n = 0$.

3. On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \geqslant 1$, l'événement $(X = p)$ est égal à $B_1 \cap \cdots \cap B_{p-1} \cap \overline{B_p}$. Par la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(X = p) = \big(\frac{1}{2}\big)^p$$

Ainsi X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{1}{2}\big)$; et $E(X) = 2, V(X) = 2$.

4. a) On a $Y_n + Z_n = n$. D'où $E(Y_n) + E(Z_n) = n$ et $V(Y_n) = V(Z_n)$.

Comme $Y_n = n - Z_n$, on a $\rho_{Y_n,Z_n} = -1$.

b) Il n'y a pas deux verbalisations consécutives, donc on a $Y_n(\Omega) = [\![0, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$

c) Et $P(Y_n = 0) = \big(\frac{1}{2}\big)^n$.

Exercice 3.20.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne *avec* remise.

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, au cours des k premiers tirages mais pas des $k-1$ premiers, chaque numéro a été sorti au moins une fois, et prenant la valeur 0 si un tel rang ne se présente pas.

1. Quelles sont la loi et l'espérance de X lorsque $N = 1$?

On suppose dans toute la suite que $N \geqslant 2$.

2. Déterminer $P\big([X=1]\big), P\big([X=2]\big), \dots, P\big([X=N]\big)$.

Établir à l'aide de la formule du crible que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\big([X>k]\big) = \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{j-1}(N-j)^k$$

Vérifier que cette formule est également valide pour $k = 0$.

De quelle façon obtient-on la loi de X ? (Ne pas effectuer le calcul.)

3. *On admet qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P\big([T>k]\big)$ converge et qu'en ce cas* $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([T>k]\big)$.

Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = N\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\binom{N}{j}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^N-1}{x}\,dx$. En déduire que $E(X) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

5. Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant N variables aléatoires de lois géométriques.

Solution :

1. Lorsque $N = 1$, X est égale à la constante 1 et $E(X) = 1$.

2. On a immédiatement, pour $k \in [\![1, N]\!]$, $P(X = k) = 0$.

Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, N]\!]$, $Z_{k,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si le numéro i est sorti au cours des k premiers tirages, et à 0 sinon.

Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(X > k) = \bigcup_{i=1}^{N}(Z_{k,i} = 0)$. Donc, par la formule de Poincaré :

$$P(X>k) = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant N} P\big((Z_{k,i_1}=0)\cap\cdots\cap(Z_{k,i_j}=0)\big)$$

Or l'événement $\bigcap_{a\in A}(Z_{k,a}=0)$ est réalisé si, au cours des k premiers tirages ne sortent que des numéros de $\overline{A}$. Ainsi pour toute partie A de $[\![1, N]\!]$, on a

$$P\Big(\bigcap_{a\in A}(Z_{k,a}=0)\Big) = \Big(\frac{N-\operatorname{card}(A)}{N}\Big)^k$$

Donc en remarquant que $\binom{N}{j} = \binom{N}{N-j}$, et à l'aide du changement d'indice $j \to N-j$:

$$P(X > k) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \big(\frac{N-j}{N}\big)^k = \frac{(-1)^{N-1}}{N^k} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N}{j} (-1)^j j^k$$

L'événement $(X = 0)$ étant l'intersection de la famille décroissante d'événements $(X > k)_{k \geqslant 1}$, on a :

$$P(X = 0) = \lim_{k \to +\infty} P(X > k) = 0$$

Donc :

$\star$ $P(X > 0) = 1$ et d'autre part :

$\star$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \big(\frac{N-j}{N}\big)^0 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N}{j} (-1)^{j-1} - (-1)^{-1}$

$$= -(1-1)^N + 1 = 1$$

Ce qui prouve que la formule précédente est valable pour $k = 0$.

Pour déterminer la loi de X, il suffirait d'utiliser la relation :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

3. Comme pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on a $0 \leqslant 1 - \frac{j}{N} < 1$, la série $\sum \big(1 - \frac{j}{N}\big)^k$ converge et la série $\sum P(X > k)$ converge ; aussi X admet-elle une espérance et :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \big(1 - \frac{j}{N}\big)^k = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \frac{1}{1 - (1 - \frac{j}{N})}$$

Soit :

$$E(X) = N \sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

4. L'intégrale proposée est convergente, puisque la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 par N. Or :

$$\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^N - 1}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} \big(\sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} x^{j-1} \big)\, dx = -\sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} \frac{(-1)^j}{j}$$

et le changement de variable affine $x = t - 1$ donne :

$$\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^N - 1}{x}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{t^N - 1}{t-1}\, dt = \int_{0}^{1} \big(\sum_{j=1}^{N} t^{j-1} \big) dt = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$$

Donc :

$$E(X) = N \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$$

5. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, soit T_k le nombre aléatoire de tirages à effectuer pour obtenir un $k^{\text{ème}}$ numéro distinct des $(k-1)$ numéros distincts déjà tirés. Alors T_k suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{N-k+1}{N}\big)$.

Comme $X = \sum_{k=1}^{N} T_k$, il (re)vient :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} E(T_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1} = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Exercice 3.21.

I. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P'^2$.

1. L'application φ est-elle injective ? Surjective ?

2. Déterminer les polynômes P pour lesquels il existe un réel λ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

II. On considère $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, a, b, c trois variables aléatoires indépendantes telles que :

⋆ a et b suivent la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

⋆ c suit la loi uniforme sur $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n}{n}\right\}$

et un polynôme aléatoire défini par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Q_\omega(X) = a(\omega) + b(\omega)X + c(\omega)X^2$$

1. Déterminer la probabilité de l'événement : $\big(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega\big)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, la probabilité de l'événement : «la série de terme général $Q_\omega\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$, $i \geqslant 1$, est convergente».

Solution :

I. 1. ⋆ L'application φ n'est pas injective : par exemple, $\varphi(X) = 1 = \varphi(-X)$.
⋆ Elle n'est pas surjective : il suffit de considérer un polynôme Q prenant des valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}$ (par exemple $Q = -1$) et il n'existe alors pas de polynôme P tel que $Q = P'^2$.

2. Soit P tel que $P'^2 = \lambda P$ et supposons $P \neq 0$.

⋆ Si P est constant, alors $P' = 0$ et la relation précédente est valide, avec $\lambda = 0$.

⋆ Si P n'est pas constant, soit n le degré de P, on sait que $\deg(P'^2) = 2(n-1)$ et $\deg(\lambda P) = n$. Donc $n = 2$.
Ainsi $P(X) = aX^2 + bX + c$, $P'^2(X) = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$ et $P'^2 = \lambda P$ est alors équivalent à :

$$\begin{cases} 4a^2 = \lambda a \\ 4ab = \lambda b \\ b^2 = \lambda c \end{cases}, \text{ avec } a \neq 0$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} a = \lambda/4 \\ b = b \\ c = b^2/\lambda \end{cases}, \text{ avec } \lambda \neq 0$$

Soit, pour tout $\lambda \neq 0$, $P(X) = \dfrac{\lambda}{4}X^2 + bX + \dfrac{b^2}{\lambda}$.

II. 1. Par la partie précédente, pour $Q_\omega = a(\omega) + b(\omega)X + c(\omega)X^2$:

$$P(\varphi(Q) = Q) = P((Q_\omega = 0) \cup (Q_\omega = b^2 + bX + \tfrac{1}{4}X^2))$$

Par incompatibilité :

$$P(\varphi(Q) = Q) = P(Q_\omega = 0) + P(Q_\omega = b^2 + bX + \tfrac{1}{4}X^2)$$

Or :

$$P(Q_\omega = 0) = P(a = b = c = 0) = P(a = 0)P(b = 0)P(c = 0) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

et :

$$P(Q_\omega = b^2 + bX + \frac{1}{4}X^2) = P\big((a = b^2) \cap (c = \frac{1}{4})\big) = P(a = b^2)P(c = \frac{1}{4})$$

Enfin :

$\star$ Si n n'est pas un multiple de 4, $P(c = \frac{1}{4}) = 0$ et si n est un multiple de 4, $P(c = \frac{1}{4}) = \frac{1}{n+1}$.

$\star$ $P(a = b^2) = \sum\limits_{k=0}^{n} P\big((a = k^2) \cap (b = k)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a = k^2)P(b = k)$

$$P(a = b^2) = \frac{1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{(n+1)^2}$$

Finalement :

$$P(\varphi(Q) = Q) = \begin{cases} \dfrac{2 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{(n+1)^3} & \text{si } n \text{ est un multiple de 4} \\ \dfrac{1}{(n+1)^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On a $Q\big(\frac{1}{i^\alpha}\big) = a + \frac{b}{i^\alpha} + \frac{c}{i^{2\alpha}}$.

Comme $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0$, la série $\sum Q\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge si $a \neq 0$.

• Si $a = 0$ et $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la série $\sum Q\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge comme somme de deux séries positives divergentes, sauf si $b = c = 0$.

• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série $\sum Q\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge sauf si $b = 0$, auquel cas elle converge pour tout c.

• Si $a = 0$ et $\alpha \geqslant 1$, la série $\sum Q\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$ converge quels que soient b et c.

En résumé :

• Si $\alpha \leqslant 1/2$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = b = c = 0) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

• Si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = b = 0) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

• Si $\alpha \geqslant 1$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = 0) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3.22.

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante. On dispose d'une roulette comportant n cases numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul, multiple de 8. On demande au candidat de donner deux entiers α, β tels que : $1 \leqslant \alpha < \beta < n$. Puis on actionne trois fois de suite la roulette, et on note X_1, X_2, X_3 les résultats successifs obtenus.

Le gain $Z_{\alpha,\beta}$ du candidat est alors donné par :

$$Z_{\alpha,\beta} = \begin{cases} X_3 & \text{si } X_3 > \beta \\ X_2 & \text{si } X_3 \leqslant \beta \text{ et } X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si } X_3 \leqslant \beta \text{ et } X_2 \leqslant \alpha \end{cases}$$

1. On introduit la variable aléatoire Y_α définie par :

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_2 & \text{si } X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si } X_2 \leqslant \alpha \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y_α et calculer son espérance.

b) Pour quelle valeur de $\alpha \in [\![1, n-2]\!]$, l'espérance de Y_α est-elle maximale ? Préciser la valeur de ce maximum.

2. a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(Z_{\alpha,\beta} = k | X_3 \leqslant \beta) = P_{X_3 \leqslant \beta}(Z_{\alpha,\beta} = k) = P(Y_\alpha = k)$$

b) En déduire l'expression de l'espérance de $Z_{\alpha,\beta}$ en fonction de β, n et de l'espérance de Y_α.

c) Quelles valeurs de α, β doit choisir le candidat pour maximiser son gain en moyenne ?

Solution :

1. a) On remarque que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$P(Y_\alpha = k) = P(Y_\alpha = k / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P(Y_\alpha = k / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha)$

Soit :

$P(Y_\alpha = k) = P(X_2 = k / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P(X_1 = k / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha)$

Donc :

$$P(Y_\alpha = k) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n^2} & \text{si } k \leqslant \alpha \\ \dfrac{\alpha}{n^2} + \dfrac{1}{n} & \text{si } k > \alpha \end{cases}$$

Et

$$E(Y_\alpha) = \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \sum_{k=\alpha+1}^{n} k = \frac{\alpha(n+1)}{2n} + \frac{1}{n}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\Big)$$

b) Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x(n+1)}{2n} + \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{x(x+1)}{2}\Big)$.

La fonction φ est dérivable, avec $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{n}$.
La fonction φ est donc maximale pour $x = \dfrac{n}{2}$, et comme n est un entier pair, $E(Y_\alpha)$ est maximale pour $\alpha = \dfrac{n}{2}$ et vaut alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5n}{8}$.

2. a) L'application $A \mapsto P(A/X_3 \leqslant \beta)$ est une probabilité et $((X_2 > \alpha), (X_2 \leqslant \alpha))$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{aligned} p &= P(Z_{\alpha,\beta} = k / X_3 \leqslant \beta) \\ &= P((Z_{\alpha,\beta} = k) \cap (X_2 > \alpha) / X_3 \leqslant \beta) + P((Z_{\alpha,\beta} = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha) / X_3 \leqslant \beta) \\ &= P((X_2 = k) \cap (X_2 > \alpha) / X_3 \leqslant \beta) + P((X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha) / X_3 \leqslant \beta) \\ &= P((X_2 = k) \cap (X_2 > \alpha)) + P((X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha)) \\ p &= P((X_2 = k) / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P((X_1 = k) / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha) \end{aligned}$$

Donc, par le résultat 1. a) :

$$p = P(Z_{\alpha,\beta} = k / X_3 \leqslant \beta) = P(Y_\alpha)$$

b) Par ailleurs :

$$P(Z_{\alpha,\beta} = k/X_3 > \beta) = P(X_3 = k/X_3 > \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant \beta \\ \dfrac{1}{n-1} & \text{si } k > \beta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(Z_{\alpha,\beta}) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(Y_\alpha)P(X_3 \leqslant \beta) + P(X_3 = k/X_3 > \beta)P(X_3 > \beta)\big) \\ &= \frac{\beta}{n}E(Y_\alpha) + \sum_{k=\beta+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{\beta}{n}E(Y_\alpha) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\big) = g(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

c) D'après la première question, pour tout α, β, on a :

$$g(\alpha,\beta) \leqslant g(\tfrac{n}{2},\beta) = \frac{\beta}{n}\big(\frac{5n}{8} + \frac{1}{2}\big) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\big)$$

Comme en 1. b) posons $h(x) = \frac{x}{n}\big(\frac{5n}{8} + \frac{1}{2}\big) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{x(x+1)}{2}\big)$

On a $h'(x) = \frac{5}{8} - \frac{x}{n}$; ainsi h est maximale au point $\frac{5n}{8}$ qui est entier et :

$$\text{pour tout } \alpha, \beta,\ g(\alpha,\beta) \leqslant h\big(\frac{5n}{8}\big) = g\big(\frac{n}{2}, \frac{5n}{8}\big).$$

En conclusion $E(Z_{\alpha,\beta})$ est maximale pour $(\alpha,\beta) = \big(\frac{n}{2}, \frac{5n}{8}\big)$.

On remarque que $1 \leqslant \frac{n}{2} < \frac{5n}{8} < n$.

Exercice 3.23.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, telle que :

$$\forall\, x \geqslant 0, f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$$

1. Montrer que f est ainsi bien définie et calculer $f(0)$.

2. Trouver la plus petite valeur de λ telle que pour tout $x \geqslant 0$:

$$g_\lambda(x) = f(x) - \lambda.\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant 0.$$

3. Montrer que f est une densité de probabilité et déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. On suppose que Z représente la longueur d'une barre d'acier fabriquée. On souhaite que les barres d'acier soient de longueur donnée ℓ_0.
Si la longueur Z est supérieure à ℓ_0, on l'ajuste perdant par conséquent une longueur de barre $Z - \ell_0$.
Si la longueur est strictement inférieure à ℓ_0, on est tenu de mettre la barre au rebut.

On note Y la variable aléatoire donnant la longueur perdue à l'issue de la fabrication d'une barre.

4. Donner l'espérance $E(Y)$ en fonction de ℓ_0, m et f.

5. Justifier que $P(Z < 0)$ est négligeable lorsque $\ell_0 = 2$ mètres et $\sigma = 2$ centimètres.

Solution :

1. On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Ceci prouve que $f(x)$ est bien défini pour $x \geqslant 0$, avec $f(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (« reste » d'une intégrale convergente).

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$, donc g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$$g'_\lambda(x) = (\lambda x - 1)\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

D'où le tableau de variations :

x	0		$1/\lambda$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
g_λ	$\sqrt{\pi/2}-\lambda$	$\searrow$		$\nearrow$	0

La plus petite valeur de λ pour laquelle g_λ est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^+$ est donc $f(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, positive et, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f(x)\,dx = \big[xf(x)\big]_0^A + \int_0^A x.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \big[xf(x) - \mathrm{e}^{-x^2/2}\big]_0^A$$

Or la question précédente montre que : $\forall\, x \geqslant 0, 0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, ce qui donne :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,dx = \mathrm{e}^0 = 1$$

Ce qui montre que f est bien une densité de probabilité.

Toujours par négligeabilité classique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = 0$, ce qui montre que X admet des moments de tous ordres. Enfin, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x.x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \end{aligned}$$

4. On a : $Y = \begin{cases} X & \text{si } X < \ell_0 \\ X - \ell_0 & \text{si } X \geqslant \ell_0 \end{cases}$.

Y est donc une fonction de X. En appliquant le théorème du transfert, il vient :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\ell_0} xf(x)\,dx + \int_{\ell_0}^{+\infty} (x-\ell_0)f(x)\,dx$$

Soit :

$$E(Y) = E(Z) - \ell_0.P(Z > \ell_0) = m - \frac{\ell_0}{\sqrt{2\pi}} f\Big(\frac{\ell_0 - m}{\sigma}\Big)$$

5. On a :

$$P(Z < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\Big(\frac{m}{\sigma}\Big) < \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\Big)$$

Comme $\dfrac{m}{\sigma} = 100$, $P(Z < 0) < 10^{-2172}$!

Exercice 3.24.

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type `tab`) sont des permutations de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ d'entiers.
On considère la fonction `T` définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a :tab) :integer ;
var i :integer ;
begin
  i :=1 ;
  while(a[i]<>i)and(i<n+1)do
    i :=i+1 ;
  T :=i ;
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire sur l'univers S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note E_i l'événement $(a[i] = i)$. Calculer la probabilité $P(E_i)$ de l'événement E_i, puis calculer la probabilité de l'événement $E_i \cap E_j$, avec $i \neq j$.
Plus généralement, pour $i_1, i_2, \dots, i_k$ compris entre 1 et n et deux à deux distincts, calculer la probabilité de l'événement $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}$.

3. a) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :
$$P(T \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}.$$

b) En déduire la valeur de $P(T = n+1)$ sous forme d'une somme et donner un équivalent de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

4. a) Exprimer $E(T)$ en fonction des $P(T \leqslant r)$, $2 \leqslant r \leqslant n$ et de n.

b) Etablir, pour $k \leqslant n$, la relation $\displaystyle\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

c) En déduire : $E(T) = (n+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$.

d) Donner un équivalent simple de $E(T)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction `T` associe à toute permutation son plus petit point fixe s'il en existe un et $n+1$ si elle n'a pas de point fixe.

2. $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}$ est formé des permutations qui fixent au moins les éléments $i_1, \dots, i_k$. Elles sont au nombre de $(n-k)!$, puisqu'elles sont en fait les permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, prolongées par l'identité sur $\{i_1, \dots, i_k\}$.
Ainsi :
$$P(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

et plus généralement :

$$P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

3. a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a par la formule du crible :

$$P(T \leqslant k) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant k} (-1)^{j-1} P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_j})$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$

b) Ainsi :

$$P(T = n+1) = 1 - P(T \leqslant n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$$

Donc : $P(T = n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!}$ et $\lim_{n \to +\infty} P(T = n+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

4. a) On a $P(T = 1) = P(T \leqslant 1) = \frac{1}{n}$. Pour $k \geqslant 2$, on peut écrire :

$$P(T = k) = P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1)$$

et :

$$E(T) = \sum_{k=1}^{n+1} k P(T = k)$$
$$= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} k(P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1)) + n + 1 - (n+1)P(T \leqslant n)$$
$$= n + 1 + \frac{1}{n} - \sum_{j=2}^{n-1} P(T \leqslant j) - \frac{2}{n} - P(T \leqslant n)$$
$$= n + 1 - \frac{1}{n} - \sum_{j=2}^{n} P(T \leqslant j)$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} P(T \leqslant j)$$

b) Cette relation est très classique et se démontre par récurrence sur n.

c) On a :

$$E(T) = n + 1 - \sum_{k=1}^{n} P(T \leqslant k) = n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(n-j)!}{n!} \Big(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \Big)$$
$$= n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j (n-j)!}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!}$$
$$= (n+1)\Big(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\Big) = (n+1) \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!}$$

d) On a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc :

$$E(T) \underset{(n \to +\infty)}{\sim} n\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\Big)$$

Exercice 3.25.

Soit a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^2 de $]0, a[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

iii) $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]0, a[$.

1. Montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $]0, a[$.

2. Montrer que f admet un maximum absolu strict en un point $c \in]0, a[$ (c'est-à-dire tel que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \in]0, a[$, avec $x \neq c$).

3. On suppose dans la suite que f vérifie en outre

iv) $f(a - x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, a[$. Montrer alors que $c = \frac{a}{2}$.

4. Soit $\alpha < a$. Trouver le maximum de la fonction $g : x \to f(x) + f(x + \alpha)$ pour $x \in]0, a - \alpha[$.

5. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sin x)$ pour $x \in]0, \pi[$ vérifie les conditions i, ii, iii, iv avec $a = \pi$ et donner le maximum de f.

6. Un tireur vise une cible en deux instants successifs t_0 et $t_0 + 1$. Il a une probabilité $p(t) = |\sin t|$ d'atteindre la cible s'il tire à l'instant t. La partie est gagnée s'il atteint la cible à chacun des deux coups. À quel instant t_0 doit-il choisir de tirer (le deuxième coup part alors à l'instant $t_0 + 1$) pour maximiser ses chances de succès ?

Solution :

1. $\star$ La fonction f' est continue sur $]0, a[$; si elle ne s'annulait pas elle garderait un signe fixe et f serait strictement monotone. Ceci est incompatible avec la conjonction des hypothèses i) et ii). Donc f' s'annule au moins une fois.

$\star$ Comme f' est strictement décroissante, la fonction f' ne peut pas s'annuler plus d'une fois, d'où la conclusion.

2. La fonction f est strictement croissante sur $]0, c[$ et strictement décroissante sur $]c, a[$: elle admet un maximum strict en c.

3. On a $f'(a - x) = -f'(x)$. Donc $f'\big(a - \frac{a}{2}\big) = -f'\big(\frac{a}{2}\big)$, soit $f'\big(\frac{a}{2}\big) = 0$.

4. On pose

$$h(x) = g\big(x - \frac{\alpha}{2}\big) = f\big(x + \frac{\alpha}{2}\big) + f\big(x - \frac{\alpha}{2}\big)$$

La fonction h est définie sur $\big]\frac{\alpha}{2}, a - \frac{\alpha}{2}\big[$ et :

$$h''(x) = f''\big(x + \frac{\alpha}{2}\big) + f''\big(x - \frac{\alpha}{2}\big) < 0$$

Par ailleurs $h(a - y) = h(y)$ et $\lim_{x \to \alpha/2} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to a - \alpha/2} h(x) = -\infty$; donc h passe par un maximum en un unique point c.

La fonction g est donc maximale en $c - \frac{\alpha}{2}$.

5. On a : $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}, f''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} < 0$.
Et on a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Par ailleurs $\sin(\pi - x) = \sin x$. On a ainsi les quatre relations demandées.

6. Par périodicité, on peut se restreindre à $[0, \pi]$. La probabilité d'atteindre la cible les deux fois en tirant à l'instant t est $p(t) = \sin t \times \sin(t+1)$. Par croissance de la fonction logarithme, il suffit d'étudier $g(t) = \ln p(t)$.

Par ce qui précède, le maximum est atteint en $\dfrac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 3.26.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance $E(X)$. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $p_n = P(X = n)$.

1. a) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, la série de terme général $p_n x^n$ converge.

On pose alors, pour $x \in [0,1], G(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n x^n$.

b) Déterminer $G(0), G(1)$ et montrer que G est croissante sur $[0,1]$.

c) Soient x et y tels que $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant y^n - x^n \leqslant n(y - x)$.
En déduire que $0 \leqslant G(y) - G(x) \leqslant E(X)(y - x)$.

d) Montrer que G est continue sur $[0,1]$.

2. On suppose que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on définit la fonction F par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On note alors $\widetilde{X}$ une variable admettant F pour fonction de répartition.

b) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et que $E(\widetilde{X}) = 1 - \displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx$.

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer G, F et $E(\widetilde{X})$:

a) X suit la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

b) X est telle que la variable $X - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution :

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant p_n x^n \leqslant p_n$. Comme la série $\sum p_n$ converge, on en déduit que la série $\sum p_n x^n$ converge pour tout $x \in [0,1]$.

b) Bien évidemment $G(0) = 0, G(1) = 1$.

Soit x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x^n < y^n \leqslant 1$. Comme $p_n \geqslant 0$, on a $p_n x^n \leqslant p_n y^n$ et par conservation des inégalités par sommation, ceci montre que la fonction G est croissante sur $[0,1]$.

c) L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant y^n - x^n \leqslant (y-x) \sup_{t\in[x,y]} (nt^{n-1}) \leqslant (y-x) \sup_{t\in[01]} (nt^{n-1}) = n(y-x)$$

D'où $0 \leqslant p_n y^n - p_n x^n \leqslant np_n(y-x)$ et par sommation (par hypothèse la série converge) :

$$0 \leqslant G(y) - G(x) \leqslant (y-x) \sum_{n=1}^{\infty} np_n = E(X)(y-x)$$

ce qui montre que G est lipchitzienne et donc continue sur $[0,1]$.

2. a) La fonction F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ceci montre que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont une densité f est définie, par dérivation, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ G'(x) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

b) La fonction f est continue sur $[0,1]$ et nulle autrement. Donc $E(\widetilde{X})$ existe et :

$$E(\widetilde{X}) = \int_0^1 xG'(x)\,dx = \big[xG(x)\big]_0^1 - \int_0^1 G(x)\,dx = 1 - \int_0^1 F(x)\,dx$$

3. a) Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}x^n = \frac{px}{1-qx}$$

La fonction G est de classe C^1 sur $[0,1]$ car $0 \leqslant qx \leqslant q < 1$. Par la question précédente :

$$E(\widetilde{X}) = 1 - \int_0^1 \frac{px}{1-qx}\,dx = 1 - \int_0^1 \Big(-\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \times \frac{1}{1-qx} \Big)\,dx$$

Soit : $E(\widetilde{X}) = \dfrac{1}{q} + \dfrac{p \ln p}{q^2}$.

b) Si $X-1$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = P(X-1=n-1) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

et :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^n = x.\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$$

La fonction G est de classe C^1 sur $[0,1]$ et par la question précédente :

$$E(\widetilde{X}) = 1 - \int_0^1 x.\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\,dx = 1 - \Big[\frac{x}{\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\Big]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda^2}.$$

Exercice 3.27.

Un employé d'une société utilise en partie son téléphone personnel pour passer des communications professionnelles.

Plus précisément, on sait que :

(i) parmi les appels effectués depuis ce téléphone, la proportion d'appels professionnels est égale à p avec $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$;

(ii) la durée des appels professionnels (respectivement personnels) passés depuis ce poste suit une loi exponentielle de paramètre α (resp. β) avec $\alpha > \beta$.

Pour dédommager son employé, la société décide de lui rembourser tous les appels de durée inférieure ou égale à T, T étant un certain réel strictement positif.

1. Exprimer, en fonction de α, β, T et p, la probabilité pour qu'un appel de durée supérieure à T soit professionnel.

2. Exprimer de même $P_1(T)$ et $P_2(T)$, où

• $P_1(T)$ est la probabilité pour qu'un appel soit professionnel et non remboursé par la société.
• $P_2(T)$ est la probabilité pour qu'un appel soit personnel et remboursé par la société.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur de T pour laquelle la quantité

$$P_1(T) + P_2(T)$$

est minimale, et que, dans le cas particulier où $p = \frac{1}{2}$, cette valeur de T est comprise entre $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$.

Solution :

1. Notons D la variable aléatoire représentant la durée des appels professionnels, et AP l'événement « l'appel est un appel professionnel ». On demande de calculer dans cette question $p_0 = P(AP/D > T)$. Par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{P(D > T/AP)P(AP)}{P(D > T/AP)P(AP) + P(D > T/\overline{AP})P(\overline{AP})} \\ &= \frac{p.\mathrm{e}^{-\alpha T}}{p.\mathrm{e}^{-\alpha T} + (1-p).\mathrm{e}^{-\beta T}} \end{aligned}$$

2. On a immédiatement :

$$P_1(T) = P\big((D > T) \cap AP\big) = P\big((D > T)/AP\big)P(AP) = p.\mathrm{e}^{-\alpha T}$$

et :

$$P_2(T) = P\big((D \leqslant T) \cap AP\big) = (1-p)(1 - \mathrm{e}^{-\beta T})$$

3. On cherche le minimum de l'application f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f : T \longmapsto p.\mathrm{e}^{-\alpha T} + (1-p)(1 - \mathrm{e}^{-\beta T})$$

Pour tout $T > 0$:

$$f'(T) = \mathrm{e}^{-\alpha T}\big(\beta(1-p)\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T} - \alpha p\big)$$

Soit alors $g : T \longmapsto \beta(1-p)\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T} - \alpha p$. La fonction g est évidemment croissante et s'annule en

$$T_0 = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln\Big(\frac{\alpha p}{\beta(1-p)}\Big)$$

Comme $p \geqslant \frac{1}{2}$, on a $\frac{p}{1-p} \geqslant 1$ et on a $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. Donc $T_0 > 0$. On a déterminé ainsi le signe de g, donc aussi celui de f'.

Ceci montre que f est décroissante sur $]0, T_0]$, puis croissante sur $[T_0, +\infty[$.
Ainsi f atteint son minimum en T_0.
Lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, on a $T_0 = \dfrac{\ln\alpha - \ln\beta}{\alpha - \beta}$.
Par la formule des accroissements finis, il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que :

$$T_0 = (\ln)'(\gamma) = \frac{1}{\gamma}$$

Cette valeur est bien comprise entre $\dfrac{1}{\alpha}$ et $\dfrac{1}{\beta}$.

Exercice 3.28.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$.

a) Vérifier que l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Calculer son espérance et sa variance si elles existent.

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé Ω que X par

$$Y : \omega \mapsto Y(\omega) = \arctan\big(X(\omega)\big)$$

Déterminer $Y(\Omega)$. Quelle est la loi suivie par Y ? Quelles sont son espérance et sa variance ?

3. Soit Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé Ω que X par : pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega)$ est le réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos(Z(\omega)) = X(\omega)$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

b) Calculer une densité de Z.

4. Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

a) Démontrer la formule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

b) Utiliser la formule précédente pour calculer $E(Z)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t^2 \sin t\,dt$; en déduire un majorant et un minorant de la variance $V(Z)$.

Solution :

1. On sait que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \big[\arctan x\big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$.

a) La fonction f est continue sur $[-1, 1]$, nulle hors de cet intervalle, positive et par la question précédente $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 1$. C'est donc une densité de probabilité.

b) On a :

$$E(X) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$V(X) = E(X^2) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = \frac{4}{\pi} - 1$$

2. Comme $X(\Omega) = [-1,1]$, on a $Y(\Omega) = \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$.
La fonction tangente étant croissante sur $\big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$, il vient pour tout $y \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$:
$\Phi(y) = P(Y \leqslant y) = P\big(-\frac{\pi}{4} \leqslant Y \leqslant y\big) = P(-1 \leqslant \tan Y \leqslant \tan y) = H(\tan y)$
où H désigne la fonction de répartition de X.
Ainsi :

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in\,]-\infty, -\pi/4[\\ H(\tan y) & \text{si } y \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 1 & \text{si } y \in\,]\pi/4, +\infty[\end{cases}$$

Une densité ϕ de Y est donnée alors, par dérivation, par :

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin [-\pi/4, \pi/4] \\ \big(1 + \tan^2 y\big)h(\tan y) = \dfrac{2}{\pi} & \text{si } y \in [-\pi/4, \pi/4] \end{cases}$$

Ainsi Y suit la loi uniforme sur $\big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$ et $E(Y) = 0$, $V(Y) = \dfrac{\pi^2}{192}$.

3. On a $Z(\Omega) = [0, \pi]$. Pour tout $z \in [0, \pi]$, la fonction cosinus étant décroissante sur cet intervalle :

$$P(Z \leqslant z) = P(\cos Z \geqslant \cos z) = 1 - H(\cos z)$$

Aussi, si F désigne la fonction de répartition de Z :

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0[\\ 1 - H(\cos z) & \text{si } z \in [0, \pi] \\ 1 & \text{si } z > \pi \end{cases}$$

et, par dérivation, une densité d de Z est :

$$d(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [0, \pi] \\ \sin z \times h(\cos z) = \dfrac{2 \sin z}{\pi(1 + \cos^2 z)} & \text{si } z \in [0, \pi] \end{cases}$$

4. a) Il suffit d'utiliser le changement de variable affine $x = a + b - t$.

b) On a :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{z \sin z}{1 + \cos^2 z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - z)\sin z}{1 + \cos^2 z}\,dz = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{1 + \cos^2 z}dz - I$$

Ainsi :

$$E(Z) = \frac{2}{\pi}\, I = \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{1 + \cos^2 z}\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}$$

c) Une double intégration par parties donne :

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt = \pi^2 - 4$$

On remarque que $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1 + \cos^2 z} \leqslant 1$; d'où :

$$\frac{1}{2}(\pi^2 - 4) \leqslant E(Z^2) \leqslant \pi^2 - 4$$

et

$$\frac{\pi^2}{4} - 2 \leqslant V(Z) \leqslant \frac{3\pi^2}{4} - 4$$

Exercice 3.29.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, sur $[0, +\infty[$, une solution unique, que l'on note u_n.

2. a) Montrer qu'il existe des réels k et q tels qu'il existe des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P(X = n) = qu_n^n \text{ et } P(Y = n) = k\big(\frac{1}{2} - u_n\big)$$

b) X et Y étant de telles variables, montrer que X et Y admettent une espérance et que l'on a :

$$E(X) \leqslant 2q \text{ et } E(Y) \leqslant \frac{k}{4}$$

X et Y admettent-elles une variance ?

Solution :

1. La fonction f_n est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a $f_n(0) = -4$ et $f_n\big(\frac{1}{2}\big) = \big(\frac{1}{2}\big)^n > 0$. Il existe donc un unique $u_n \in]0, 1/2[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
On en déduit que $0 < u_n^n \leqslant \big(\dfrac{1}{2}\big)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.
D'autre part, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. Donc $f_n(u_{n+1}) > 0$ ce qui entraîne que $u_n < u_{n+1}$.
La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée : elle converge vers une limite $\ell \in]0, 1[$.
Comme $u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, il vient $16\ell^2 = 4$ et comme $\ell > 0$, $\ell = \dfrac{1}{2}$.

2. a) et b)
⋆ Comme $0 < u_n^n \leqslant \big(\frac{1}{2}\big)^n$, la série $\sum u_n^n$ est convergente : il existe donc $q > 0$ tel que $q \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^n = 1$.

De même comme $0 < nu_n^n \leqslant n\big(\frac{1}{2}\big)^n$, l'espérance $E(X)$ existe et :

$$E(X) \leqslant q \sum_{n=0}^{\infty} n\big(\frac{1}{2}\big)^n \leqslant 2q$$

⋆ On a $u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0$; donc

$$\frac{u_n^n}{16} = \frac{1}{4} - u_n^2 = \big(\frac{1}{2} - u_n\big)\big(\frac{1}{2} + u_n\big)$$

et

$$\frac{1}{2} - u_n = \frac{u_n^n}{16(\frac{1}{2} + u_n)}$$

Comme $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$, il vient :

$$0 < \frac{1}{2} - u_n < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Il existe donc $k > 0$ tel que $k \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - u_n\right) = 1$.

Comme précédemment $E(Y)$ existe et :

$$E(Y) \leqslant k \sum_{n=0}^{\infty} n \, \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{k}{4}$$

Exercice 3.30.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n cartons numérotés de 1 à n. On extrait les n cartons un à un et sans remise et on note T_k le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage. Soit Z_n la variable égale au plus petit indice j tel que $T_j > T_{j+1}$ si cet indice existe, sinon on pose $Z_n = n$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z_n > k)$ et en déduire la loi de probabilité de Z_n.

2. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable notée Z.

3. Exprimer $E(Z_n)$ sous la forme d'une somme et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini. Calculer $E(Z)$.

Solution :

1. On a $\Omega = \{\text{permutations de } [\![1, n]\!]\}$, et $Z_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a $(Z_n > k) = (X_1 < X_2 < \ldots < X_k < X_{k+1})$, donc :

$$P(Z_n > k) = \frac{\binom{n}{k+1}(n-k+1)!}{n!} = \frac{1}{(k+1)!}$$

et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$P(Z_n = k) = P(Z_n > k-1) - P(Z_n > k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

tandis que :

$$P(Z_n = n) = \frac{1}{n!}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $n-1 \geqslant k$. alors :

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On vérifie que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1$. Donc la suite $(Z_n)_n$ tend en loi vers une variable Z de loi définie par, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) + n \times \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}\right) + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \mathrm{e} - 1$$

Enfin :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
$$= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + (\mathrm{e} - 2) = \mathrm{e} - 1.$$

Exercice 3.31.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On définit deux suites de variables (Y_n) et (Z_n) par $Y_1 = Z_1 = X_1$ et :

$$\forall n \geqslant 1, Y_{n+1} = \sup(X_{n+1}, Z_n), Z_{n+1} = \inf(X_{n+1}, Y_n)$$

Enfin on note G_n (resp H_n) la fonction de répartition de Y_n (resp. Z_n).

1. Exprimer G_{n+1} et H_{n+1} en fonction de G_n et H_n. Calculer $G_n(x)$ et $H_n(x)$ quand $x \notin [0,1]$.

2. Soit $x \in [0,1]$. On pose $V_n(x) = \begin{pmatrix} G_n(x) \\ H_n(x) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U(x) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$V_{n+1}(x) = A(x)V_n(x) + U(x)$$

et en déduire que :

$$V_n(x) = A^{n-1}(x)V_1(x) + \Big(\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\Big)U(x) \text{ pour } n \geqslant 2$$

3. a) Soit $x \in [0,1]$. Calculer $A^k(x)$ et montrer que pour tout $p \geqslant 1$:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} A^k(x) = \frac{1 - x^p(1-x)^p}{1 - x + x^2}\big(I + A(x)\big)$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$G_{2p+1}(x) = \frac{x^2}{1 - x(1-x)} + (x(1-x))^{p+1}\frac{1-x}{1-x(1-x)};$$
$$H_{2p+1}(x) = \frac{x}{1 - x(1-x)} - (x(1-x))^{p+1}\frac{x}{1-x(1-x)}.$$

On montre de même, et on admettra que :

$$G_{2p}(x) = \frac{x^2}{1 - x(1-x)} - (x(1-x))^{p}\frac{x^2}{1-x(1-x)};$$
$$H_{2p}(x) = \frac{x}{1 - x(1-x)}(x(1-x))^{p}\frac{(1-x)^2}{1-x(1-x)}$$

4. En déduire que (Y_n) et (Z_n) convergent en loi.

Solution :

1. a) On vérifie par récurrence que, pour tout k, Y_k et Z_k s'expriment en fonction de $(X_1, \ldots, X_k)$. Donc Z_n et X_{n+1} sont indépendantes ainsi que Y_n et X_{n+1}.

Soit x réel :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= P(Y_{n+1} \leqslant x) = P((X_{n+1} \leqslant x) \cap (Z_n \leqslant x)) \\ &= P(X_{n+1} \leqslant x)P(Z_n \leqslant x) \end{aligned}$$

Si l'on note F la fonction de répartition de Y_k, alors $G_{n+1}(x) = F(x)H_n(x)$, puis :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= P(Z_{n+1} \leqslant x) \\ &= 1 - P(Z_{n+1} > x) = 1 - P((X_{n+1} > x) \cap (Y_n > x)) \\ &= 1 - P(X_{n+1} > x)P(Z_n > x) \end{aligned}$$

donc :

$$H_{n+1}(x) = F(x) + (1 - F(x))G_n(x)$$

b) Bien évidemment :
pour $x \leqslant 0, G_n(x) = H_n(x) = 0$ et pour $x > 1, G_n(x) = H_n(x) = 1$, puisque $Z_n(\Omega) = Y_n(\Omega) = [0, 1]$.

2. On peut écrire :

$$V_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1-x & 0 \end{pmatrix} V_n(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = A(x)V_n(x) + U(x)$$

Une récurrence immédiate donne, pour tout $n \geqslant 2$:

$$V_n(x) = A^{n-1}(x)V_1(x) + \big(\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\big)U(x)$$

avec :

$$V_1(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ H_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

3. a) On a $A^2(x) = x(1-x)I$. Donc, pour tout $k \geqslant 0$:

$$A^{2k}(x) = (x(1-x))^k I, A^{2k+1}(x) = (x(1-x))^k A(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2p-1} A^k(x) &= \sum_{j=0}^{p-1} A^{2j}(x) + \sum_{j=0}^{p-1} A^{2j+1}(x) \\ &= \big(\sum_{j=0}^{p-1} (x(1-x))^j\big)I + A(x)\big(\sum_{j=0}^{p-1} (x(1-x))^j\big)A(x) \\ &= \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]}\big(I + A(x)\big) \end{aligned}$$

b) Aussi

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(x) &= [x(1-x)]^p V_1(x) + \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]}\big(I + A(x)\big)U(x) \\ &= [x(1-x)]^p \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1-x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^{p+1}(1-x)^p + \dfrac{x^2(1 - [x(1-x)]^p}{1 - x + x^2} \\ x^{p+1}(1-x)^p + \dfrac{x(1 - [x(1-x)]^p}{1 - x + x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$G_{2p+1}(x) = \frac{x^2}{1 - x + x^2} + [x(1-x)]^{p+1} \frac{1-x}{1 - x + x^2}$$

$$H_{2p+1}(x) = \frac{x}{1-x+x^2} + [x(1-x)]^{p+1}\frac{x}{1-x+x^2}$$

4. Pour tout $x \in [0,1], |x(1-x)| \leqslant \frac{1}{4}$; donc $\lim\limits_{p\to+\infty}[x(1-x)]^p = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{x^2}{1-x+x^2}, \lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \frac{x}{1-x+x^2}$$

Notons :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x+x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}, \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-x+x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie enfin que ces deux fonctions vérifient les propriétés des fonctions de répartition de variables aléatoires à densité (continuité, de classe C^1 presque partout, croissance et limite en $\pm\infty$).

Exercice 3.32.

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit une nouvelle suite de variables aléatoires en posant $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_t \circ X_k$, où $f_t(x) = 0$ si $x > t$ et 1 dans le cas contraire.

Ainsi, pour chaque valeur de t, $F_n(t)$ est la fréquence des variables inférieures ou égales à t parmi $X_1, \ldots, X_n$.

1. Reconnaître la loi de la variable $nF_n(t)$. En déduire l'espérance $E\big(F_n(t)\big)$ et la variance $V\big(F_n(t)\big)$ de la variable $F_n(t)$, puis vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\big(F_n(t) - F(t)\big)^2\big] = 0$$

2. Soient t et t' deux réels distincts. Calculer $V\big(F_n(t) - F_n(t')\big)$.

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} E\big[\big((F_n(t) - F_n(t')) - (F(t) - F(t'))\big)^2\big] = 0$.

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big)$.

5. On pose $V_n(0) = 0$ et pour $x \in \,]0,1]$, on pose :

$$V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nF(t)(1-F(t))}}\sum_{i=1}^{\lfloor nx\rfloor}(f_t \circ X_i - F(t)).$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Calculer $\mathrm{Cov}\big(V_n(x_1), V_n(x_2)\big)$ pour $x_1, x_2 \in [0,1]$ ainsi que la limite de cette quantité lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Posons $Y_k = f_t \circ X_k$. La variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $F(t)$ et les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes ; par conséquent $nF_n(t)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(n, F(t)\big)$. Aussi :

$$E\big(F_n(t)\big) = F(t) \text{ et } V\big(F_n(t)\big) = \frac{F(t)\big(1-F(t)\big)}{n}.$$

On a également :

$$E\Big[\big(F_n(t)-F(t)\big)^2\Big] = V\big(F_n(t)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Posons $Z_k = f_{t'} \circ X_k$. D'après la question précédente

$$E\big(F_n(t)-F_n(t')\big) = F(t)-F(t').$$

Soit $i \neq j$. Par indépendance de X_i et X_j :

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Z_j) = P(X_i \leqslant t)P(X_j \leqslant t') - F(t)F(t') = 0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\big(F_n(t), F_n(t')\big) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Cov}(Y_i, Z_j)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Cov}(Y_i, Z_i) = \frac{1}{n}\big(F(\min(t,t')) - F(t)F(t')\big)\end{aligned}$$

et $V(F_n(t)-F_n(t')) = V(F_n(t)) + V(F_n(t')) - 2\operatorname{Cov}(F_n(t), F_n(t'))$

Il suffit alors de remplacer.

3. On a aisément : $\lim\limits_{n\to+\infty} V(F_n(t)-F_n(t')) = 0$.

4. Posons $S_n(t) = nF_n(t)$. Comme

$$U_n(t) = \frac{S_n(t)-E(S_n(t))}{\sqrt{V(S_n(t))}} = \sqrt{n}\,\frac{F_n(t)-F(t)}{\sqrt{F(t)(1-F(t))}}$$

converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite, la variable aléatoire proposée converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance $F(t)(1-F(t))$.

5. On calcule : $\operatorname{Cov}(V_n(x_1), V_n(x_2)) = \dfrac{1}{nF(t)(1-F(t))}\displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Par indépendance des (Y_i), seuls les termes pour $i=j$ ne sont pas nuls.

Par symétrie, on peut supposer $x_1 \leqslant x_2$ et alors :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) + \sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=\lfloor nx_1\rfloor+1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$$

et

$$\operatorname{Cov}(V_n(x_1), V_n(x_2)) = \frac{\lfloor nx_1\rfloor}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_1.$$

4

OPTION B/L

Exercice 4.1.

Une urne contient n boules ($n \geqslant 2$). Notons E l'ensemble de ces boules. On suppose $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E, muni de l'équiprobabilité. On effectue un tirage aléatoire d'une partie de ces boules, c'est-à-dire d'un élément de $\mathcal{P}(E)$. S'il reste des boules, on effectue un deuxième tirage (sans remettre dans l'urne les boules éventuellement obtenues au premier tirage) et on continue jusqu'à ce que l'urne soit vidée. À chaque tirage, l'ensemble des parties restantes est muni de l'équiprobabilité.

1. Quelle est la probabilité que l'urne soit vidée au premier tirage ?

2. Quelle est la probabilité que l'urne soit vidée en au plus 2 tirages ?

3. Montrer que la probabilité que l'urne soit vidée en au plus k tirages ($1 \leqslant k$) vaut $\big(1 - \frac{1}{2^k}\big)^n$.

4. On note X le nombre aléatoire de tirages effectués pour vider l'urne. Vérifier que X est bien une variable aléatoire et déterminer la loi de X.

Solution :

1. L'urne est vidée dès le premier tirage si la poignée obtenue contient toutes les boules. Il y a un seul cas favorable (l'ensemble E) et 2^n cas possibles (le cardinal de$\mathcal{P}(E)$). Donc, par hypothèse d'équiprobabilité :

$$p_1 = \frac{1}{2^n} = \big(1 - \frac{1}{2}\big)^n$$

2. L'urne est vidée en au plus deux tirages si on tire j boules lors du premier tirage ($0 \leqslant j \leqslant n$), puis (s'il reste des boules) les $n - j$ boules restantes lors du deuxième tirage. En remarquant que le cas $j = n$ peut rester dans la sommation, il vient :

$$p_2 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^{n-j}} = \frac{1}{4^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j = \frac{1}{4^n}(2+1)^n = \big(\frac{3}{4}\big)^n = \big(1 - \frac{1}{2^2}\big)^n$$

3. Soit A_k l'événement «l'urne est vidée en au plus k tirages».

A chaque rang du tirage, la probabilité d'obtenir une boule donnée parmi celles encore présentes dans l'urne vaut $\frac{1}{2}$. En effet, si l'urne contient à cet instant m boules, alors il y a exactement 2^{m-1} parties de cet ensemble qui contiennent une boule précisée, parmi les 2^m parties de l'ensemble.

Dire que l'on réalise $(X \leqslant k)$, c'est dire que chacune des n boules a été obtenue en au maximum k essais.
La probabilité que la boule portant le numéro 1 ne soit pas obtenue en k essais vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, donc la probabilité de l'obtenir en au maximum k essais vaut $1 - \frac{1}{2^k}$.

En faisant ce raisonnement pour chacune des n boules, on obtient :

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$$

4. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geqslant 2$:

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$$

On constate que la formule reste valable pour $k = 1$, et pour tout $N \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^n \underset{N\to+\infty)}{\longrightarrow} 1$$

Donc X est bien une variable aléatoire.

Exercice 4.2.

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on dit qu'une matrice X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $X^m = 0$. De même, on dira que X est unipotente si $I_3 - X$ est nilpotente, où I_3 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

De même si N est unipotente, on pose :

$$\ln(N) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(I_3 - N)^n}{n}$$

1. Montrer que les formules précédentes ont bien un sens.

2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

3. Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que N est nilpotente et que U est unipotente. Montrer que $\exp\big(\ln(U)\big) = U$ et $\ln\big(\exp(N)\big) = N$.

4. Pour t réel, on pose $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $U(s)U(t) = U(s+t)$.

Montrer que $U(t) = \exp(tN)$, où N est une matrice nilpotente que l'on déterminera.

Solution :

1. Comme A est une matrice nilpotente, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ (on peut montrer que $m \leqslant 3$) tel que $A^m = 0$ et : $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{A^n}{n!}$.

Le raisonnement est identique pour $\ln(N)$

2. Si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $A+B$ est nilpotente. En effet, quitte à choisir l'exposant maximal, on peut supposer que $A^m = B^m = 0$. En utilisant la formule de Newton :

$$(A+B)^{2m-1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} A^k B^{2m-1-k} = 0$$

car $A^k = 0$ pour $m \leqslant k \leqslant 2m$ et $B^{2m-1-k} = 0$ pour $0 \leqslant k < m$.

On a alors, en supposant $A^m = B^m = 0$:

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{2m-1} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{2m-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \times \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!}\Big)\end{aligned}$$

(car les termes supplémentaires sont tous nuls !)

Soit :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(A)$$

3. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = 0, (I-U)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (I-U)^3 = 0.$$

On a :

$$\ln(U) = -(I-U) - \frac{(I-U)^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c - ab/2 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(\ln U) = I + \ln(U) + \frac{\ln^2(U)}{2} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

La démonstration de $\ln(\exp(N)) = N$ est identique.

4. Il suffit d'effectuer le calcul pour trouver $U(s)U(t) = U(s+t)$.

On a enfin $U(t) = \exp(tN)$, avec : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve ainsi, en utilisant la question 2 :

$$U(s)U(t) = \exp(tN) \times \exp(sN) = \exp((t+s)N) = U(s+t)$$

Exercice 4.3.

Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$. Étudier le sens de variation de f_n.

b) Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
Donner la valeur de c_0.

2. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question précédente.
Montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0,1]$.

3. a) Déterminer, pour tout réel $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^r e^{nt^2}\,dt$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \leqslant 1$.

c) En déduire la valeur de ℓ.

Solution :

1. a) La fonction f_n est dérivable (intégrale fonction de ses bornes ...) et, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 0$:

$$f_n'(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0$$

b) La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,1]$ et

$$f_n(0) = -\int_0^1 e^{nt^2}\,dt < 0, f_n(1) = \int_0^1 e^{nt^2} dt > 0$$

Il existe donc, pour tout $n \geqslant 0$, un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$. Enfin, $f_0(x) = 2x - 1$ entraîne que $c_0 = \dfrac{1}{2}$.

2. On a :

$$f_{n+1}(c_n) = \int_0^{c_n} e^{nt^2+t^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2-t^2} dt \geqslant \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt = 0.$$

ce qui montre que la suite $(c_n)_n$ est décroissante. Elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

3. a) On a pour tout x, $e^x > 1 + x$. Donc :

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geqslant \int_0^r (1 + nt^2) dt = r + \frac{nr^3}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

b) Comme $c_n \in [0,1]$ et $e^{-nt^2} \leqslant 1$, il vient $\displaystyle\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leqslant 1$.

c) Supposons que $\ell > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell$ en décroissant, on a $c_n \geqslant \ell$ pour tout n et alors :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \geqslant \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt$$

Soit :

$$1 \geqslant \int_{c_n}^{1} e^{-nt^2} dt = \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \geqslant \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La contradiction est claire, donc $\ell = 0$.

Exercice 4.4.

On pose pour tout x réel, $\varphi(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x)$$

2. Montrer que φ admet un développement limité en 0 à tout ordre N. Déterminer ce développement limité.

3. a) Montrer que $\forall\, x \geqslant 1, \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$.

b) Exprimer de même $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt$

c) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer alors que $\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Solution :

1. La fonction φ est de classe C^∞, car $t \mapsto e^{t^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont de classe C^∞ ce qui implique que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\varphi'(x) = -2x\int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2x.\varphi(x) + 1$$

et

$$\varphi''(x) = -2\varphi(x) - 2x\varphi'(x)$$

Supposons la relation proposée vérifiée pour un certain rang $n+1$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+2)}(x) &= -2x\varphi^{(n+1)}(x) - 2\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n)}(x)\\ &= -2x\varphi^{(n+1)}(x) - 2(n+1)\varphi^{(n)}(x)\end{aligned}$$

et la relation est vraie au rang $n+2$. On conclut par le principe de récurrence.

2. On a $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1, \varphi''(0) = 0$ et par la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi^{(n+1)}(0) = -2n\varphi^{(n-1)}(0)$$

Ainsi, par récurrence :

$$\varphi^{(2p)}(0) = 0, \quad \varphi^{(2p+1)}(0) = (-1)^p 4^p p!$$

Comme φ est C^∞, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut écrire, pour x au voisinage de 0 :

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (-1)^p 4^p \frac{p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^N)$$

3. a) Intégrons par parties en écrivant $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t}(2t.e^{t^2})\, dt$. On obtient :

$$\int_1^x e^{t^2}\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$$

b) De même :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{2t^3}(2t.e^{t^2})\, dt = \frac{e^{x^2}}{2x^3} - \frac{e}{2} + \frac{3}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

Donc :

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{3e}{4} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt$$

c) On a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt \leqslant e^{x^2}\int_1^x \frac{dt}{t^4} = o\Big(\frac{e^{x^2}}{2x}\Big)$ et comme on a clairement : $\displaystyle\frac{3e}{4} = o\Big(\frac{e^{x^2}}{2x}\Big), \frac{e^{x^2}}{4x^3} = o\Big(\frac{e^{x^2}}{2x}\Big)$, il vient :

$$\int_1^x e^{t^2} dt \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x} \text{ et } \varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Exercice 4.5.

Une pièce amène « Pile » avec la probabilité p et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$.

On effectue une suite de lancers indépendants. On dit que le $k^{\text{ème}}$ lancer est un « changement » ($k \geqslant 2$) s'il donne un résultat différent du $(k-1)^{\text{ème}}$ lancer.

X_n est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de changements obtenus au cours des n premiers lancers.

1. Donner la loi et l'espérance de X_2 et X_3.

2. Si $p \neq q$, calculer $P(X_n = 0), P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n - 1)$.

3. Si $p = q$, déterminer la loi de X_n (on pourra procéder par récurrence sur n).

Solution :

1. $\star$ On a $X_2(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et :

$$(X_2 = 0) = (PP) \cup (FF) \implies P(X_2 = 0) = p^2 + q^2$$
$$(X_2 = 1) = (PF) \cup (FP) \implies P(X_2 = 1) = 2(pq)$$

$\star$ De même, $X_3(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et :

$$(X_3 = 0) = (PPP) \cup (FFF) \implies P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$$
$$(X_3 = 1) = (PFF) \cup (PPF) \cup (FPP) \cup (FFP) \implies P(X_3 = 1) = 2(pq^2 + qp^2)$$
$$(X_3 = 2) = (PFP) \cup (FPF) \implies P(X_3 = 2) = p^2q + qp^2$$

2. $\star$ L'événement $(X_n = 0)$ correspond aux tirages $(PP \cdots P)$ ou $(FF \cdots F)$. Donc $P(X_n = 0) = p^n + q^n$

$\star$ L'événement $(X_n = 1)$ correspond aux tirages du type $(PP \cdots PF \cdots F)$ ou $(FF \cdots FP \cdots P)$, le changement intervenant après le premier tirage et avant le dernier. Donc :

$$\begin{aligned}P(X_n=1)&=\sum_{k=1}^{n-1}(p^kq^{n-k}+q^kp^{n-k})\\&=pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}+qp^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\\&=pq^{n-1}\frac{1-(\frac{p}{q})^{n-1}}{1-\frac{p}{q}}+qp^{n-1}\frac{1-(\frac{q}{p})^{n-1}}{1-\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

⋆ L'événement $(X_n=n-1)$ correspond aux tirages $(PFP\cdots)$ ou $(FPF\cdots)$ (avec changement à chaque fois). Donc :

$$P(X_n=n-1)=\begin{cases}p^{n/2}+q^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair}\\ p^{(n-1)/2}q^{(n+1)/2}+q^{(n-1)/2}p^{(n+1)/2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

3. On a, bien entendu, $X_n(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$.

A chaque lancer, à partir du deuxième, on a une chance sur deux d'obtenir un changement et les résultats des différents lancers sont indépendants. On a donc :

$$P(X_n=k)=\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 4.6.

1. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$. et $v_n=\dfrac{n^2\pi^2}{2}u_n$.

   a) À l'aide d'un encadrement simple, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

   b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ est convergente.

   b) Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ est-elle convergente ?

Solution :

1. On effectue le changement de variable affine $u=t-n\pi$. On a alors :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=\int_0^{\pi}\sin t dt=2$$

2. a) Lorsque $t\in[n\pi,(n+1)\pi]$, on a $\dfrac{1}{(n+1)^2\pi^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2\pi^2}$.

et

$$\frac{2}{(n+1)^2\pi^2}\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt\leqslant\frac{2}{n^2\pi^2}$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant v_n \leqslant 1$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

b) On en déduit que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{2}{n^2\pi^2}$, ce qui est le terme général d'une série convergente (Riemann).

3. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t^2}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$. De plus, pour tout $t \geqslant \pi$

$$0 \leqslant \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et on sait que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

b) Soit $X > \pi$, et soit N tel que $N\pi \leqslant X < (N+1)\pi$ (on a $N = \lfloor \frac{X}{\pi} \rfloor$). On a alors :

$$\begin{aligned}\int_\pi^X \frac{|\sin t|}{t^2} dt - \sum_{n=1}^{N+1} u_n &= \int_\pi^X \frac{|\sin t|}{t^2} dt - \int_\pi^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt \\ &= \int_X^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt \\ &\leqslant \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^2} dt = u_N \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, puisque chaque objet de cette égalité converge.

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive.

Au voisinage de 0, $\dfrac{|\sin t|}{t^2} \sim \dfrac{1}{t}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 4.7.

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est une fonction de répartition.

Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour fonction de répartition F.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$. Calculer $P\big(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\big)$.

3. Soit $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Montrer que Y est une variable aléatoire de même loi que X.

Solution :

1. La fonction F vérifie les conditions d'une fonction de répartition :
- pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- la fonction F est continue, croissante sur $\mathbb{R}$.

Par dérivation, une densité de X est donnée par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{(x+1)\ln 2} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

2. Comme la variable aléatoire X est positive :
$$P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = P\big(\frac{1}{k+t} \leqslant X \leqslant \frac{1}{k}\big) = F\big(\frac{1}{k}\big) - F\big(\frac{1}{k+t}\big)$$
et comme $0 \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{k+t} \leqslant 1$:
$$P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = \frac{1}{\ln 2}\big(\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big)\big)$$

3. On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Soit alors $t \in]0,1]$:
$$(Y \leqslant t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\big)$$
Donc :
$$P(Y \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2}\big(\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big)\big)$$
Or, pour $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \ln\big(1+\frac{1}{k+t}\big) &= \sum_{k=1}^{N} \ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+1+t) + \ln(k+t) \\ &= \ln(N+1) - \ln(N+1+t) + \ln(1+t) \\ &= \ln\big(\frac{N+1}{N+1+t}\big) + \ln(1+t) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+t).\end{aligned}$$
Ainsi, pour $t \in [0,1]$, $P(Y \leqslant t) = \dfrac{1}{\ln 2}\ln(1+t)$ et Y a même loi que X.