# 1

# ANALYSE

---

**Exercice 1.1.**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par leurs premiers termes $a_0, b_0$ et $c_0$ réels et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\, dx \\ b_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{med}(a_n, x, c_n)\, dx \\ c_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \max(a_n, b_n, x)\, dx \end{cases}$$

où med désigne le réel médian entre trois réels, par exemple : $\operatorname{med}(\alpha, \beta, \gamma) = \beta$, lorsque $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$.

2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{3}{8} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{5}{8}$. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a $0 \leqslant a_n$ et $c_n \leqslant 1$.

3. Etablir la relation de récurrence suivante, valable pour $n \geqslant 3$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n^2}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n^2 - c_n^2 + 2c_n) \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + b_n^2) \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$b_{n+2} = \frac{1}{8}(-4b_n^3 + 6b_n^2 + 3)$$

5. En étudiant la fonction $\varphi$ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{8}(-4x^3 + 6x^2 + 3)$, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.
En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{3}{8}$ et que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{5}{8}$.

---

**Solution :**

1. On a toujours $\min(x,b_n,c_n)\leqslant \operatorname{med}(a_n,x,c_n)\leqslant \max(x,a_n,b_n)$.
En effet :
c'est clair si $\operatorname{med}(a_n,x,c_n)=x$, sinon :
si $\operatorname{med}(a_n,x,c_n)=a_n$, la deuxième inégalité est immédiate et pour la première on a bien $\min(x,b_n,c_n)\leqslant a_n$, car dans ce cas $\min(x,c_n)\leqslant a_n$.
Le dernier cas se traite de la même façon.
D'où le résultat :

$$\text{pour } n\geqslant 1,\ a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$$

2. On a tout d'abord $a_{n+1}\leqslant \displaystyle\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\leqslant c_{n+1}$ ; puis :

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= \int_0^1 \operatorname{med}(a_{n+1},x,c_{n+1})\,dx\\
&= \int_0^{1/2}\max(a_{n+1},x)\,dx+\int_{1/2}^1 \min(x,c_{n+1})\,dx\\
&\leqslant \int_0^{1/2}\frac{1}{2}\,dx+\int_{1/2}^1 x\,dx=\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

De même on montre que $b_{n+2}\geqslant \frac{3}{8}$.
Il vient alors $a_{n+3}=\displaystyle\int_0^1 \min(x,b_{n+2},c_{n+2})\,dx\geqslant 0$ et $c_{n+3}\leqslant 1$.

3. A partir de $0\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\leqslant 1$, pour $n\geqslant 3$, on déduit par exemple que

$$a_{n+1}=\int_0^1 \min(x,b_n,c_n)\,dx=\int_0^{b_n} x\,dx+\int_{b_n}^1 b_n dx=b_n-\frac{b_n^2}{2}$$

On procède de même pour les autres relations.

4. Par composition, on trouve facilement que :

$$b_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}^2-c_{n+1}^2+2c_{n+1})=\frac{1}{8}(-4b_n^3+6b_n^2+3)$$

5. La fonction $\varphi$ vérifie $\varphi\big(\frac{1}{2}\big)=\frac{1}{2}$ et on a :

$$\forall\, x\in[0,1],|\varphi'(x)|=\frac{3}{2}x(1-x)\leqslant \frac{3}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

Par conséquent, pour $n\geqslant 3$ :

$$|b_{n+2}-\frac{1}{2}|=|\varphi(b_n)-\varphi(\frac{1}{2})|\leqslant \frac{3}{8}|b_n-\frac{1}{2}|$$

Ainsi : $\forall\, n\geqslant 3, |b_{2n}-\frac{1}{2}|\leqslant \frac{3}{8}|b_{2(n-1)}-\frac{1}{2}|$ et donc :

$$|b_{2n}-\frac{1}{2}|\leqslant \big(\frac{3}{8}\big)^{n-2}|b_4-\frac{1}{2}|$$

De même : $|b_{2n-1}-\frac{1}{2}|\leqslant \big(\frac{3}{8}\big)^{n-2}|b_3-\frac{1}{2}|$.

On en déduit que les suites $(b_{2n})$ et $(b_{2n+1})$ sont convergentes de limite $\frac{1}{2}$ et, par exhaustion : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$.

On en déduit alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{8}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\frac{5}{8}$.

**Exercice 1.2.**

1. a) Déterminer l'unique fonction $\varphi$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ et pour tout } x \text{ réel : } \varphi''(x) = -\sin(\pi x).$$

b) Soit $K$ la fonction de $[0,1]^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x < y \\ y(1-x) & \text{si } x \geqslant y \end{cases}.$$

Etudier la continuité de la fonction $K$.

2. a) Justifier que pour tout $y$ de $[0,1]$ et toute fonction $f$ continue sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(x)\,dx$ existe.

Soit $E$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.
Dans la suite, à toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $g$ définie sur $[0,1]$, par : $g(y) = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)f(x)\,dx$.

b) Montrer que la fonction $g$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et calculer $g''(y)$. Que valent $g(0)$ et $g(1)$ ?

Pour deux fonctions $h$ et $k$ de $E$ on pose : $\langle h|k\rangle = \displaystyle\int_0^1 h(x)k(x)\,dx$.

3. Soit $A$ l'application de $E$ vers $E$ définie par $A(f) = g$.

a) L'application (évidemment linéaire) $A$ est-elle surjective ? Injective ?

b) Montrer que pour tout $f$ de $E$ on a $\langle A(f)|f\rangle \geqslant 0$.

c) Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, le réel $\dfrac{1}{k^2\,\pi^2}$ est valeur propre de $A$.

---

**Solution :**

1. a) Il existe $a$ et $b$ tels que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + ax + b$ et les conditions $\varphi(0) = 0$ puis $\varphi(1) = 0$ donnent successivement $b = 0$ puis $a = 0$.

b) On peut considérer la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = x(1-y)$ et la fonction $k$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $k(x,y) = y(1-x)$.

Les fonctions $h$ et $k$ sont clairement continues sur $\mathbb{R}^2$ et $h$ concide avec $K$ sur le domaine $\{(x,y) \in [0,1]^2, x \leqslant y\}$ tandis que $k$ concide avec $K$ sur le domaine $\{(x,y) \in [0,1]^2, x \geqslant y\}$.

La continuité de $K$ sur $[0,1]^2$ en résulte.

2. a) Pour $y$ fixé, $x \mapsto K(x,y)f(x)$ est continue, l'existence de l'intégrale en résulte.

b) Pour pouvoir dériver, il convient d'expliciter un peu $g(y)$ en écrivant :

$$g(y) = \int_0^y x(1-y)f(x)\,dx + \int_y^1 y(1-x)f(x)\,dx$$

$$= (1-y)\int_0^y xf(x)\,dx + y\int_y^1 (1-x)f(x)\,dx \qquad (*)$$

Sous cette forme, la dérivabilité est acquise (intégrales fonctions de ses bornes ...), avec :

$$g'(y) = -\int_0^y xf(x)\,dx + (1-y)\times yf(y) + \int_y^1 (1-x)f(x)\,dx - y\times(1-y)f(y)$$

$$= -\int_0^y xf(x)\,dx + \int_y^1 (1-x)f(x)\,dx$$

et en redérivant : $g''(y) = -yf(y) - (1-y)f(y)$, soit :

$$g'' = -f$$

Notons que la forme $(*)$ donne également $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

3. a) $E$ est formé des fonctions continues sur $[0,1]$ et pour tout élément $f$ de $E$, $g = A(f)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Il n'existe donc pas de fonction $f$ dans $E$ telle que la fonction $A(f)$ soit la fonction $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ et $A$ n'est pas surjective.

En revanche, soit $f$ telle que $g = A(f) = 0$, alors $g'' = -f = 0$ et $f$ est la fonction nulle sur $[0,1]$, donc $A$ est injective.

b) Soit $g = A(f)$, on peut écrire :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt$$

Comme $g'' = -f$, la fonction $-g'$ est une primitive de $f$ et une intégration par parties donne alors :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = \big[-g(t)g'(t)\big]_0^1 + \int_0^1 g'(t)g'(t)\,dt$$

et comme $g(0) = g(1) = 0$, il reste :

$$\langle A(f), f\rangle = \int_0^1 g'(t)g'(t)\,dt \geqslant 0$$

c) Le calcul fait en 1. a) montre que :

$$\text{si } f : x \mapsto \sin(k\pi x), \text{ alors } g = A(f) : x \mapsto \frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)$$

Donc $f$ est propre pour $A$, associée à la valeur propre $\dfrac{1}{k^2\pi^2}$.

---

**Exercice 1.3.**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

1. Étude de la suite $(u_n)$.

a) Justifier l'existence de cette suite.

b) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

c) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$.

2. Recherche de modèles.

a) Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $g_{n+1} - g_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$ ?

b) Existe-t-il des réels $A$ et $\alpha$ tels que la suite définie par : $v_n = An^\alpha$, vérifie $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$ ?

3. Étude d'une variable aléatoire discrète $X$ qui prend pour valeurs les termes de la suite $(u_n)$.

a) Soit $\beta$ un réel positif. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \frac{1}{(u_n)^\beta} - \frac{1}{(u_{n+1})^\beta}$$

définit une loi de probabilité.

b) Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$$X(\Omega) = u(\mathbb{N}) \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(X = u_n) = p_n.$$

Donner des valeurs de $\beta$ pour lesquelles on peut assurer que $X$ admet une espérance et d'autres pour lesquelles on peut assurer que $X$ n'en a pas.

Faire le même travail pour la variance.

---

**Solution :**

1. a) Il est clair que les calculs se font dans $\mathbb{R}_+^*$ et l'existence de $u_n$ entraîne alors que $u_n > 0$ et $u_{n+1}$ existe. On conclut par le principe de récurrence.

b) Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} > 0$ et la suite est croissante.

Si elle convergeait, sa limite $\ell$ serait dans $\mathbb{R}_+^*$ et vérifierait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ , ce qui est absurde, donc $(u_n)$ est croissante, non convergente et :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

c) On a $\sqrt{1} \leqslant u_1 \leqslant 2$, donc la propriété demandée est vraie au rang 1. Supposons que pour un certain $n$, on ait $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$, alors :

$\star$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n + \dfrac{1}{n^{1/4}} \leqslant 2n + 1 \leqslant 2(n+1)$

$\star$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \geqslant \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

Il reste alors à vérifier que $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \sqrt{n+1}$, soit $n + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} \geqslant n+1$, ce qui est clair. Ainsi $u_{n+1} \geqslant \sqrt{n+1}$.

On conclut par le principe de récurrence :

$$\forall\, n \geqslant 1, \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$$

2. a) Pour définir $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$, il est nécessaire que la suite soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, d'où :

$\star$ Si $g_n = aq^n$ et si $0 < q < 1$, on a $g_{n+1} - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il est donc exclu que ces termes soient équivalents.

$\star$ Si $g_n = a$ on a $g_{n+1} - g_n = 0$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, ces termes ne sont pas équivalents.

$\star$ Si $g_n = aq^n$ et si $q > 1$, on a $g_{n+1} - g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il est donc toujours exclu que ces termes soient équivalents.

Il n'existe pas de suite géométrique qui convient.

b) Si $v_n = An^\alpha$, on a :

$\star$ $v_{n+1} - v_n = An^\alpha\big((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1\big) \sim An^\alpha \times \dfrac{\alpha}{n} = A\alpha n^{\alpha-1}$

$\star$ $\dfrac{1}{\sqrt{v_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}\, n^{-\alpha/2}$

Pour obtenir l'équivalence souhaitée, il faut donc prendre $\alpha$ tel que $\dfrac{\alpha}{2} = 1-\alpha$, soit $\alpha = \dfrac{2}{3}$, puis $A\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, d'où $A = (\frac{3}{2})^{2/3}$.

3. a) Clairement $p_n > 0$ et par télescopage $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1}{u_n}\big)^\beta = 1$ : on a bien défini une loi de probabilité.

b) Ecrivons $p_n = \dfrac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (\dfrac{u_n}{u_{n+1}})^\beta\big) = \dfrac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (\dfrac{u_{n+1}}{u_n})^{-\beta}\big)$

Ainsi :

$$p_n = \frac{1}{u_n^\beta}\big(1 - (1 + \frac{1}{u_n^{3/2}})^{-\beta}\big) \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta+\frac{3}{2}}}$$

et :

$$np_n \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}\ ;\ n^2 p_n \sim \beta \times \frac{1}{u_n^{\beta-\frac{1}{2}}}$$

$\star$ Si $\beta > \dfrac{3}{2}$, comme $u_n \geqslant \sqrt{n}$, on a $u_n^{\beta+\frac{1}{2}} \geqslant n^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}$ et $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{1}{4} > 1$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}$ converge et la série de terme général $np_n$ est (absolument) convergente. Ainsi $X$ admet une espérance.

$\star$ Si $\beta < \dfrac{1}{2}$, comme $u_n \leqslant 2n$, on a $u_n^{\beta+\frac{1}{2}} \leqslant (2n)^{\beta+\frac{1}{2}}$ et $\beta + \dfrac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^{\beta+\frac{1}{2}}}$ diverge et la série de terme général $np_n$ est divergente. Ainsi $X$ n'admet pas d'espérance.

On raisonne de même pour l'existence de $\sum n^2 u_n$ en décalant simplement d'un cran, c'est-à-dire en distinguant les deux cas $\beta > \dfrac{5}{2}$ et $\beta < \dfrac{3}{2}$.

---

**Exercice 1.4.**

1. On considère une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $x$ réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt$$

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*, \forall\,(x,t) \in [x_0-1, x_0+1] \times [0,1], \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\Big| \leqslant M$$

b) Établir que :

$$\forall\, h \in [-1,1], \Big|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\Big| \leqslant h^2 \frac{M}{2}$$

c) En déduire que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\,dt$$

a) Montrer que $I_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $I'_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

b) Établir une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I'_n(x)$.

c) Démontrer que $I_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(0)$ et $I_n(0)$. En déduire $I_n(0)$.

e) En utilisant la notation factorielle, exprimer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k\,!(n-k)\,!}$$

---

**Solution :**

1. a) Le réel $x_0$ étant fixé, l'application $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $[x_0-1, x_0+1] \times [0,1]$ qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Cette application est donc bornée sur cet ensemble. Cela prouve l'existence d'un réel $M$ strictement positif tel que :

$$\forall (x,t) \in [x_0-1, x_0+1] \times [0,1], \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant M$$

b) Fixons un réel $x_0$ dans $\mathbb{R}$ et un réel $t$ dans $[0,1]$. Considérons la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x,t)$.
La fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \varphi''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

Appliquons-lui l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[x_0, x_0+h]$ :

$$|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - h\varphi'(x_0)| \leqslant h^2 \frac{M}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left|f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant h^2 \frac{M}{2} \qquad (1)$$

D'autre part :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 \Big(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Big)dt\right|$$

d'où :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)|dt$$

Comme la majoration (1) est valable pour $t$ quelconque dans $[0,1]$, on obtient :

$$\left|F(x_0+h) - F(x_0) - h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant (1-0)h^2 \frac{M}{2}$$

d'où le résultat demandé.

c) En divisant les deux membres par $|h|$ pour $h$ non nul, il vient :

$$0 \leqslant \Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\Big| \leqslant |h|\frac{M}{2}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

ce qui prouve que $F$ est dérivable en $x_0$. Ce résultat étant valable pour $x_0$ quelconque dans $\mathbb{R}$, on conclut que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

2. a) L'entier naturel $n$ étant fixé, posons : $f : (x,t) \mapsto (1-t^2)^n \cos(tx)$.
Cette fonction, en tant que composée et produit, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^2$. D'autre part : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^n \sin(tx)$, donc la fonction $I_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, I_n'(x) = \int_0^1 -\, t(1-t^2)^n \sin(tx)\,dt$$

b) Intégrons $I_n'(x)$ par parties :

$$\begin{cases} u(t) = \sin(tx) \implies u'(t) = x\cos(tx) \\ v'(t) = -t(1-t^2)^n \impliedby v(t) = \dfrac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il vient :

$$I_n'(x) = \Big[\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\sin(tx)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1} x\cos(tx)\,dt$$

et, finalement :

$$I_n'(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$$

c) On vient de montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la fonction $I_n$ est dérivable, sa dérivée s'exprimant avec $I_{n+1}$, donc la dérivabilité de $I_{n+1}$ montre que $I_n$ est en fait de classe $\mathcal{C}^2$, puis le fait que $I_{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ montre que $I_n$ est de classe $\mathcal{C}^3$. On conclut en mettant en place un raisonnement par récurrence simple.

d) Intégrons $I_{n+1}(0)$ par parties :

$$I_{n+1}(0) = \int_0^1 1\times(1-t^2)^{n+1}dt = \big[t(1-t^2)^{n+1}\big]_0^1 - \int_0^1 t(n+1)(-2t)(1-t^2)^n dt$$

donc :

$$I_{n+1}(0) = 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = 2(n+1)\int_0^1 (1-(1-t^2))(1-t^2)^n dt$$

ce qui donne :

$$I_{n+1}(0) = 2(n+1)I_n(0) - 2(n+1)I_{n+1}(0), \text{ d'où } I_{n+1}(0) = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n(0)$$

Comme $I_0(0) = 1$, on obtient :

$$I_n(0) = \frac{2(n)\times 2(n-1)\times \ldots \times 2(1)}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times(3)} = \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}$$

e) Comme, d'autre part :

$$I_n(0) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\Big[\frac{1}{2k+1}t^{2k+1}\Big]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}.$$

En rapprochant les deux résultats obtenus pour $I_n(0)$ et en remplaçant les combinaisons par leur version factorielle, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} = \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$$

---

**Exercice 1.5.**

Soit $I = [0,1]$, on note pour $p \geqslant 0$, $\mathcal{C}^p(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur $I$ et dont les dérivées jusqu'à l'ordre $p$ sont définies et continues sur $I$.
On considère $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^3(I)/f(0) = f(1) = 0\}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^3(I)$.

b) Soient 2 réels $a$ et $b$ tels que : $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $s$ la fonction définie sur $I$ par :

$$s(x) = \begin{cases} (x-a)^4(x-b)^4 & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $s$ est dans $\mathcal{E}$.

c) Soit $k \in \mathcal{C}^1(I)$. Montrer les équivalences :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}, \int_0^1 k(x)f'(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow \forall\, f \in \mathcal{E}, \int_0^1 k'(x)f(x)\,dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, x \in [0,1], k'(x) = 0.$$

*Indication : pour la dernière implication directe, on pourra raisonner par contraposée, en supposant que $k'$ n'est pas la fonction nulle et en utilisant alors une fonction du type $s$, défini en b), pour des valeurs de $a$ et $b$ bien choisies).*

2. Soit $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,\theta) \mapsto g(x,\theta)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$.
Soit la fonction : $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(\theta) = \displaystyle\int_0^1 g(x,\theta)\,dx$,

a) Montrer que : $\exists\, M > 0, \forall\, h > 0, |g(x,h) - g(x,0) - h\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)| \leqslant h^2.M$

b) En déduire la dérivabilité de $\varphi$ en 0, avec $\varphi'(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\,dx$.

3. Soit la fonction $\psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,u) \mapsto \psi(x,u) = \dfrac{u^2}{2} - ux$.
On considère l'application :

$$\Psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 \psi(x, f'(x))\,dx = \int_0^1 \big(\frac{f'^2(x)}{2} - xf'(x)\big)\,dx$$

On dira que $\Psi$ admet un minimum strict sur $\mathcal{E}$ en la fonction $y$ si :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}, f \neq y \implies \Psi(f) - \Psi(y) > 0.$$

a) Montrer que si $\Psi$ admet un minimum strict sur $\mathcal{E}$ en $y$, alors, pour toute fonction $f$ non nulle de $\mathcal{E}$, l'application $G_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \Psi(y + \theta f)$ présente un minimum local strict en $\theta = 0$.

b) Utiliser la question 2 pour prouver que $G_f$ est dérivable en 0 et que :

$$G'_f(0) = \int_0^1 (y'(x) - x)e'(x)\,dx.$$

En déduire que si $\Psi$ présente un minimum strict en $y \in \mathcal{E}$, aors $x \mapsto y'(x) - x$ est constante sur $I$.

---

**Solution :**

1. a) $\mathcal{E}$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.

b) Comme $a$ et $b$ sont racines d'ordre 4 du polynôme $(X-a)^4(X-b)^4$, les dérivées à gauche en $b$ et à droite en $a$ sont nulles jusqu'aux dérivées troisièmes. Comme les dérivées à gauche en $a$ et à droite en $b$ sont toutes nulles, il en résulte que $s$ est bien de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$. Enfin, on a clairement $s(0) = s(1) = 0$. Bref $s \in \mathcal{E}$.

c) En intégrant par parties, pour $f \in \mathcal{E}$ :

$$\int_0^1 k(x)f'(x)\,dx = \big[k(x)f(x)\big]_0^1 - \int_0^1 k'(x)f(x)\,dx = -\int_0^1 k'(x)f(x)\,dx$$

Ce qui démontre la première équivalence.

Supposons l'intégrale nulle. Si $k' \neq 0$, il existe un segment $[a,b]$, avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ sur lequel $k'$ (étant continue) est (par exemple) positive, $\forall x \in [a,b], k'(x) > 0$.

Alors, pour $f = s$ (la fonction définie à la question précédente), on aurait :

$$\int_0^1 k'(x)f(x)dx > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $k' = 0$ sur $I$, ce qui entraine que $k$ est constante sur $I$.

2. a) Soit $h > 0$, par l'inégalité de Taylor sur $[0,h]$ :

$$\big|g(x,h) - g(x,0) - h\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\big| \leqslant \frac{h^2}{2}\sup_I \big|\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\big| = h^2 M,$$

ce qui a bien un sens, puisque $\theta \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(x,\theta)$ est continue sur $I$ borné, donc majorée par un réel $2M > 0$.

b) Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \big|\frac{g(x,h) - g(x,0)}{h} - \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\big|dx \leqslant hM$ et, *a fortiori*

$$\big|\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)dx\big| \leqslant hM$$

d'où, en passant à la limite lorsque $h$ tend vers 0 :

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)\,dx$$

3. a) On a : $G_f(\theta) = F(y + \theta f)$. Donc :

$$\begin{aligned} F \text{ présente un minimum strict } &\implies \forall \theta \neq 0, F(y+\theta f) > F(y) \\ &\implies \forall \theta \neq 0,\ G_f(\theta) > G_f(0). \end{aligned}$$

b) On pose $g(x,\theta) = \psi(x, y'(x) + \theta f'(x))$, alors $g$ est de classe $\mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$ (car $\psi \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R})$ et $f$ et $y$ sont dans $\mathcal{C}^3(I)$).

On peut appliquer le résultat de la question 2 :

$G_f$ est dérivable en 0 et $G'_f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0)dx$.
On a : $g(x,\theta) = \frac{1}{2}(y'(x)+\theta f'(x))^2 - x(y'(x)+\theta f'(x))$, d'où :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,\theta) = y'(x)f'(x) + \theta f'^2(x) - xf'(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(x,0) = (y'(x)-x)f'(x)$$

d'où : $G'_f(0) = \displaystyle\int_0^1 (y'(x)-x)f'(x)dx$.

Si $F$ présente un minimum strict en $y \in \mathcal{E}$, alors : $\forall f \in \mathcal{E}, G'_f(0) = 0$, ce qui donne $\forall\, f \in \mathcal{E}$, $\displaystyle\int_0^1 (y'(x)-x)f'(x)dx = 0$, soit :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, y'(x) - x = C \text{ (en utilisant 1. c)}$$

---

**Exercice 1.6.**

1. a) Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geqslant \ln\big(\frac{k+1}{2}\big)$.

   b) Justifier, pour tout $u < 1$, $\ln(1-u) \leqslant -u$.

   c) On définit une suite $(a_n)$ par $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$ et, pour $k$ entier, $k \geqslant 2$ :

$$a_k = (-1)^{k-1}\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\prod_{j=2}^{k}\frac{2j-3}{2j}$$

À l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout $k \geqslant 1$ :

$$|a_k| \leqslant \Big(\frac{2}{k+1}\Big)^{3/2}$$

2. a) Soit $g : ]-1,+\infty[ \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(t) = \sqrt{1+t}$.
Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$ :

$$\Big|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k\Big| \leqslant t^{n+1}\,\Big(\frac{2}{n+2}\Big)^{3/2}$$

   b) Soit $f$ la fonction définie pour $x$ réel par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\; dt$$

Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.

   c) Montrer que, pour tout $x$ de $D$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$$

---

**Solution :**

1. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour $j \geqslant 2$, $\dfrac{1}{j} \geqslant \displaystyle\int_j^{j+1} \frac{dx}{x}$.
Par sommation, il vient :

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geqslant \int_2^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln\Big(\frac{k+1}{2}\Big)$$

b) Cette inégalité classique résulte de la concavité de la fonction logarithme népérien.

c) On a : $\ln(|a_k|) = \ln\big(\frac{1}{2}\big) + \sum\limits_{j=2}^{k} \ln(1 - \frac{3}{2j}\big) \leqslant -\frac{3}{2}\sum\limits_{j=2}^{k}\frac{1}{j}$, d'où :

$$\ln(|a_k|) \leqslant -\frac{3}{2}\ln\big(\frac{k+1}{2}\big) \text{ et } |a_k| \leqslant \big(\frac{2}{k+1}\big)^{3/2}$$

2. a) On a $g(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$g'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$, $g''(t) = \frac{1}{2}\times\big(-\frac{1}{2}\big)(1+t)^{-\frac{3}{2}}$, et par récurrence, on obtient :

$$g^{(k)}(t) = k!a_k(1+t)^{\frac{1}{2}-k}$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 donne alors, pour $t \geqslant 0$ :

$$\big|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\big| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|g^{(n+1)}(u)| \leqslant t^{n+1}|a_{n+1}| \leqslant t^{n+1}\big(\frac{2}{n+2}\big)^{3/2}$$

b) La fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et équivalente à $t \mapsto t^{-x}$ au voisinage de 0. Ainsi l'intégrale converge si et seulement si $-x > -1$, soit :

$$D = ]-\infty, 1[$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned}\big|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1-x}\big| &= \big|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 a_k t^{k-x}dt\big|\\ &\leqslant \int_0^1 t^{-x}\big|\sqrt{1+t} - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\big|dt\\ &\leqslant \int_0^1 t^{n+1-x}\big(\frac{2}{n+2}\big)^{3/2}dt \leqslant \big(\frac{2}{n+2}\big)^{3/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que pour $x \in D$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+1-x}$$

---

**Exercice 1.7.**

Soit $p$ un entier naturel.

Pour tout entier naturel $n$, on note $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx$.

1. Montrer l'existence de $S_n$

2. Pour $a$ et $b$ entiers naturels, avec $b > 0$, on note $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a\mathrm{e}^{-bx}\,dx$.
Montrer l'existence de $T(a,b)$ et calculer $T(a,b)$ en fonction de $a$ et $b$.

3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}$$

4. En déduire : $\forall\, n \geqslant 1, S_0 = (p+1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p+2}} + S_n$.

5. Montrer que la suite $S_n$ est convergente.

6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

7. Conclure.

---

**Solution :**

1. $\star$ La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$, $f$ est prolongeable par continuité en 0.
$\star$ La présence du facteur $\dfrac{1}{e^x - 1}$ suffit pour assurer que l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, et la convergence pour la borne infinie résulte de la règle de Riemann.

2. En posant $bx = t$, il vient :
$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{b}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{b} = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} t^{a+1-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{b^{a+1}} \Gamma(a+1)$$
Ce calcul prouve l'existence de $T(a, b)$ et donne en prime :
$$T(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}$$

3. Pour $x > 0$, on a $0 < e^x < 1$, ce qui permet d'utiliser l'identité géométrique, qui s'écrit :
$$\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k = \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}$$
et, en séparant :
$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

4. En multipliant la relation précédente par $x^{p+1}$ et en intégrant, il vient :
$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx}\,dx + S_n = \sum_{k=1}^{n} T(p + 1, k) + S_n$$
$$S_0 = (p + 1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$$

5. La série de terme général $\dfrac{1}{k^{p+2}}$, $k \geqslant 1$ est une série de Riemann convergente, puisque $p + 2 > 1$.
Comme $S_n = S_0 - (p+1)! \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{p+2}}$, la convergence de la suite $(S_n)$ en résulte.

6. La fonction $x \mapsto x^p \dfrac{1}{e^x - 1}$ est prolongeable par continuité en 0 et de limite nulle en $+\infty$.
Par conséquent cette fonction (positive) est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et si on note $M$ un majorant, on a :
$$0 \leqslant S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} M.e^{-nx}\,dx = \frac{M}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

7. On a donc montré l'égalité :
$$S_0 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

**Exercice 1.8.**

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$.

1. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, le réel $u_n$ est-il défini ?

2. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave et en déduire que pour tout $x$ de $[0,1]$ : $(\ln 2).x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

b) Montrer que : $\forall\, n \geqslant -1, \ln 2 \leqslant (n+2)u_n \leqslant 1$.

c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$, de la série $\sum u_n$ ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

a) Etudier les suites $(T_{2p})$ et $(T_{2p+1})$, en déduire la nature de la suite $(T_n)$.

b) On considère le programme Pascal :

```
program Oral-escp ;
Var K,N,signe :integer ; t : real ;
begin
for N :=0 to 99 do
  begin
  for K :=0 to N do
    begin
    t :=t + signe/(K+1) ;
    signe :=-signe ;
    end ;
  writeln(t) ; end ;
end.
```

Le corriger de telle sorte qu'il affiche les 100 premiers termes de la suite $(T_n)$ : $T_0, \dots, T_{99}$.

4. a) Montrer que si $x \neq -1$ : $\dfrac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^n S_n(x) + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{1+x}$.

b) En intégrant par parties en déduire :

$$(n+1)u_n = (\ln 2)[1+(-1)^n] + (-1)^{n+1}T_n$$

5. En déduire un encadrement de la suite $T_n$.

6. Etudier la nature de la suite $(n.u_n)$.

---

**Solution :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ est positive et continue sur $]0,1]$.

- Si $n \geqslant 0$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable.
- Si $n = -1$, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ admet un prolongement par continuité en 0, en posant $0 \mapsto 1$.
- Si $n < 0$, au voisinage de 0, $x^n \ln(1+x) \sim x^{n+1}$. Par référence standard, $u_n$ existe si et seulement si $-n-1 < 1$, soit $n > -2$ donc $n \geqslant -1$.

$$u_n \text{ existe si et seulement si } n \geqslant -1.$$

2. a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $C^2$ et de dérivée seconde négative sur $[0,1]$. Par concavité, elle est au-dessous de sa tangente en 0 et au dessus

de la corde joignant l'origine au point $(1, \ln 2)$ pour ses points d'abscisse $x$ telle que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ce qui donne, pour tout $x$ de $[0,1]$,
$$\ln 2 \cdot x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

b) Il suffit de multiplier les inégalités précédentes et d'intégrer sur $[0,1]$ pour obtenir, pour tout $n \geqslant -1$
$$\ln 2 \leqslant (n+2)u_n \leqslant 1$$

c) La première inégalité montre que la série $\sum u_n$ est divergente.

3. a) On vérifie que la suite $(T_{2p})_p$ est décroissante alors que la suite $(T_{2p+1})_p$ est croissante. De plus
$$\lim_{p \to +\infty} |T_{2p} - T_{2p+1}| = \lim_{p \to +\infty} \tfrac{1}{2p+1} = 0$$
montre que les deux suites sont adjacentes et donc convergent vers une même limite.

b) Il manque essentiellement les initialisations de $t = 0$ et signe=1. Ainsi, un programme possible est :

```
Program Oral ;
Var K,N,signe : integer ;
     t : real ;
Begin
For N := 0 to 99 do
   Begin
   t := 0 ; signe := 1 ;
      For K := 0 to N do
       Begin
       t := t+signe/(K+1) ;
       signe := -signe
       end ;
   writeln(t)
   end ;
end.
```

4. a) $S_n(x)$ représente la somme partielle d'une suite géométrique de raison $-x$. Donc
$$S_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

b) En intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et 1, il vient :
$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx = (-1)^n \int_0^1 S_n(x)\, dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$
Et une intégration par parties (licite car les fonctions sont de classe $C^1$) de la partie gauche de l'équation précédente donne :
$$(n+1)u_n = (\ln 2)(1 + (-1)^n) + (-1)^n T_n$$

5. Pour $n$ pair, il vient $T_n = 2\ln 2 - (n+1)u_n$ et en utilisant l'encadrement trouvé pour $u_n$, on obtient : $2\ln 2 - 1 \leqslant T_n \leqslant \dfrac{3\ln 2}{2}$.

Pour $n$ impair, $T_n = (n+1)u_n$ et : $\dfrac{\ln 2}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$.

Donc, dans les deux cas :
$$\frac{\ln 2}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{3\ln 2}{2}$$

6. Par la question 4. b) : $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = T_n + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

Donc : $|\ln 2 - T_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln 2$$

Or, pour $n$ pair, : $(n+1)u_n = 2\ln 2 - T_n$, et pour $n$ impair, $(n+1)u_n = T_n$. Par conséquent, en regroupant ces deux cas :

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)u_n = \ln 2$$

Par la question 2, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \ln 2$$

---

**Exercice 1.9.**

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel.

On se propose d'étudier l'ensemble $A$ des suites réelles vérifiant pour tout entier naturel $n$, la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2.u_n + (-1)^n$$

1. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ que l'on déterminera, tel que la suite $w$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha.n.(-1)^n$, soit élément de $A$.

2. Montrer que $u$ appartient à $A$ si et seulement si la suite $v = u - w$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

3. Calculer $v_n$ en fonction de $v_0$, $v_1$ et $n$, puis en fonction de $u_0$, $u_1$ et $n$.
En déduire $u_n$ en fonction de $u_0$, $u_1$ et $n$.
Donner un équivalent simple de $u_n$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4. On suppose ici que $u_0 = u_1 = 1$. Calculer $u_n$ en fonction de $n$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

---

**Solution :**

1. On remplace $u_n$ par $\alpha\, n(-1)^n$ dans l'équation de récurrence et on obtient $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n \\ w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n \end{cases}$

En soustrayant, la suite $v = u - w$ est élément de $A$ si et seulement si $v$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$$

3. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence précédente est $r^2 - r - 2 = 0$. Les réels $-1$ et $2$ en sont les solutions. Aussi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

En considérant les conditions initiales $v_0, v_1$, il vient :

$$\mu = \frac{1}{3}\left(v_0 + v_1\right), \qquad \lambda = \frac{1}{3}\left(2v_0 - v_1\right)$$

et :

$$v_n = \frac{1}{3}\left(2v_0 - v_1\right)(-1)^n + \frac{1}{3}\left(v_0 + v_1\right)2^n$$

Un calcul immédiat donne $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1 + \frac{1}{3}$. Donc :

$$v_n = \frac{1}{3}\left[(2u_0 - u_1 - \frac{1}{3})(-1)^n + (u_0 + u_1 + \frac{1}{3})2^n\right], \text{ et } u_n = v_n + \frac{1}{3}n(-1)^n$$

Par conséquent :

- Si $(u_0 + u_1 + \frac{1}{3}) \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{1}{3}(u_0 + u_1 + \frac{1}{3})2^n$.
- Si $(u_0 + u_1 + \frac{1}{3}) = 0$, alors $(v_n)$ est bornée et $u_n \sim \frac{1}{3}\, n(-1)^n$.

4. On applique les résultats des questions précédentes. Il vient :

$$u_n = \frac{1}{9}\left(2(-1)^n + 7{\times}2^n + 3n(-1)^n\right)$$

Enfin, on vérifie la propriété $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$ par récurrence sur $n$ :

- c'est immédiat pour $n = 0, n = 1$ ;
- supposons la propriété vérifiée pour $u_k$, avec $k \leqslant n + 1$. Alors :

$$|u_{n+2}| \leqslant |u_{n+1}| + 2|u_n| + 1 \leqslant 2^{n+2} - 1 + 2(2^{n+1} - 1) + 1 < 2^{n+3} - 1$$

On conclut par le principe de récurrence.

---

**Exercice 1.10.**

On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = k(\cos x)\mathrm{e}^{-y},$$

où $k \in ]0, 1/\sqrt{2}[$. On désignera par $I$ le segment $[0, 1]$.

1. Montrer que $f(I \times I) \subseteq I$.

2. Soient $(u, v)$ et $(u', v')$ deux éléments de $I \times I$. On définit l'application $\varphi$ sur $[0, 1]$, en posant :

$$\varphi(t) = f(u + t(u' - u), v + t(v' - v))$$

Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$.
En déduire que : $|f(u', v') - f(u, v)| \leqslant k\sqrt{2}\max(|u' - u|, |v' - v|)$.

3. Soit $(a, b) \in I \times I$.
On pose $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$, pour tout entier $n$.
Vérifier que la suite $(u_n)$ est bien définie.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(v_n)$, par :

$$v_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$$

a) La série $\sum v_n$ est-elle convergente ?

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

5. On considère la fonction $g$ d'une variable réelle définie par $g(t) = k(\cos t)\mathrm{e}^{-t} - t$.

a) Etudier la fonction $g$ sur l'intervalle $I$.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\ell \in I$ tel que $g(\ell) = \ell$.

c) Montrer que la limite de la suite $(u_n)$ est indépendante du choix de $(a, b)$.

---

**Solution :**

1. On a $0 < k < 1$, $\cos(I) \subset I$ et pour $x \in I$, $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, donc $f(I \times I) \subseteq I$.
La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est dérivable sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions dérivables et par théorème :

$$\varphi'(t) = (u' - u)\frac{\partial f}{\partial x}(u + t(u' - u), v + t(v' - v)) \\ + (v' - v)\frac{\partial f}{\partial y}(u + t(u' - u), v + t(v' - v))$$

Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u', v') - f(u, v)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |\varphi'(t)|$$

Or :

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big| = |k \sin x.\mathrm{e}^{-y}| \leqslant k \sin x \text{ , et } \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big| = |k \cos x.\mathrm{e}^{-y}| \leqslant k \cos x$$

entraînent que :

$$|f(u', v') - f(u, v)| \leqslant k\sqrt{2} \max(|u' - u|, |v' - v|)$$

3. La suite $(u_n)$ est bien définie puisque $f(I \times I) \subseteq I$.

4. a) On a : $|u_{n+3} - u_{n+2}| = |f(u_{n+1}, u_{n+2}) - f(u_n, u_{n+1})| \leqslant k\sqrt{2}v_n$.
Ainsi $v_{n+1} \leqslant k\sqrt{2}v_n$.
Cette majoration par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 entraîne la convergence de la série $\sum v_n$.

b) La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est donc absolument convergente, et *a fortiori* convergente.

Par « télescopage », cela entraîne que la suite $(u_n)$ est elle-même convergente.

5. a) La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur $I$, dérivable et :

$$g'(t) = -k(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^{-t} - 1 < 0.$$

Cette fonction est strictement décroissante de $I$ sur $[k, g(1)]$, avec $g(1) < 0$.

b) On invoque la question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires.

c) Notons $\lambda$ la limite de la suite $(u_n)$. Par continuité de $f$, il vient :

$$\lambda = f(\lambda, \lambda), \text{ soit } g(\lambda) = 0 \text{ et } \lambda = \ell$$

Donc $\lambda$ ne dépend que de $\ell$ !

---

**Exercice 1.11.**

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose :

$$\Delta = \inf_{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + \ldots + x_n t^n)^2 \, dt$$

1. Justifier l'existence de $\Delta$.

2. En considérant le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, établir l'existence et l'unicité de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)^2 \, dt$$

On définit alors la fonction $F$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n+1}$$

3. Montrer que : $\Delta = F(0)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x)$.

5. Prouver que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], F(k) = 0$.

6. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \frac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

7. Établir que : $P(X) = \dfrac{1}{n+1}(1-X)(2-X)\cdots(n-X)$.

8. En déduire que : $\Delta = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

---

**Solution :**

1. L'ensemble $\left\{\displaystyle\int_0^1 (1+x_1 t+\cdots+x_n t^n)\, dt\right\}$ est un ensemble de nombres réels positifs, et est donc minoré. Aussi $\Delta$ existe-t-il.

2. Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$. Avec ces notations, $\Delta$ n'est autre que la distance de 1 au sous-espace $F = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$.

On sait, par le cours, que non seulement cette distance existe mais qu'elle est atteinte en un unique polynôme de $F$ qui est la projection orthogonale de 1 sur $F$.

Ce polynôme $Q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} -a_i X^i$ est de plus défini par :

$$\text{pour tout } j \in [\![1, n]\!], \langle 1 - Q(X), X^j\rangle = 0.$$

3. À l'aide de la norme euclidienne associée au produit scalaire :

$$\begin{aligned}\Delta &= ||1 - Q(X)||^2 = \langle 1 - Q(X), 1 - Q(X)\rangle = \langle 1 - Q(X), 1\rangle \\ &= \int_0^1 (1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\, dt = 1 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = F(0)\end{aligned}$$

4. On a :

$$(x+1)F(x) = (x+1)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n+1}\Big)$$

et $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x) = 1$.

5. Par la remarque faite à la fin de la question 2, on sait que, pour tout $k \in [1, n]\!]$ :

$$\int_0^1 (1 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) t^k \, dt = 0$$

soit :

$$0 = \frac{1}{k+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k+i+1} = F(k)$$

6. La réduction au même dénominateur de la fraction définissant $F$ montre l'existence du polynôme $P$. De plus ce polynôme est unique, car si l'on a, pour tout $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$, $\dfrac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \dfrac{Q(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, alors le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, donc $P = Q$.

7. le polynôme $P$ est de degré $n$. Les deux questions précédentes montrent que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(k) = 0$. Ainsi, il existe une constante $C$ réelle telle que $P(X) = C(X-1)\cdots(X-n)$.

Enfin, $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)F(x) = 1 = \lim\limits_{x \to -1} (x+1)\dfrac{P(x)}{(x+2)\cdots(x+n+1)}$, entraîne que

$$C = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

8. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}$ :

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \times \frac{(1-x)(2-x)\cdots(n-x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}, \text{ et } \Delta = F(0) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

---

**Exercice 1.12.**

1. On considère les fonctions hyperboliques définies par :

$$\operatorname{sh}(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

a) Etudier rapidement ces deux fonctions et esquisser leur représentation graphique, dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Montrer que l'on a : pour tout réel $t$, $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$.

2. Pour toute fonction $f$ de classe $C^1$ sur un intervalle $[a, b]$, on admet que la longueur $L(f)$ de la courbe représentative de $f$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est donnée par :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

a) Calculer la longueur de la courbe $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, sur un intervalle $[a, b]$ donné de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $\psi : t \to \sqrt{1+t^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire l'inégalité :

$$\text{pour tout couple } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \psi(t) \geqslant \psi(s) + (t-s)\psi'(s)$$

c) On suppose désormais que $f$ est une fonction convexe de classe $C^2$ sur un intervalle $[a, b]$ et que $g$ est une fonction de classe $C^2$ sur $[a, b]$ telle que $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et qui vérifie : $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

En utilisant l'inégalité précédente, prouver que $L(f) \leqslant L(g)$.

d) On considère une fonction $g$ de classe $C^2$ sur un intervalle $[a, b]$ qui est telle que $g(x) \leqslant \operatorname{ch}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ avec $g(-1) = g(1) = \operatorname{ch}(1)$. Quelle inégalité portant sur $L(g)$ en déduit-on ?

**Solution :**

1. a) On voit que $\mathrm{sh}'(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$ . La fonction $t \mapsto \mathrm{sh}(t)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$, admet un point d'inflexion en $t = 0$. Elle est concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$. Enfin $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{sh}(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{sh}(t) = -\infty$. Notons d'ailleurs que sh est impaire.

La fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ est paire. Sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ ; elle y est donc croissante vers $+\infty$. Enfin elle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Les représentations graphiques ne posent pas de problème.

b) Un calcul immédiat donne :

$$\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 4\frac{\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{-t}}{4} = 1$$

2. a) La longueur de la courbe $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ (appelée chaînette) sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}\, dt = \int_a^b \mathrm{ch}(t)\, dt = \mathrm{sh}(b) - \mathrm{sh}(a)$$

b) Immédiatement $\psi'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\psi''(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$. la fonction $t \mapsto \psi(t)$ est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative reste au-dessus de sa tangente en tout point $s$, ce qui donne l'inégalité demandée.

c) On utilise l'inégalité précédente avec $t = g'(x)$ et $s = f'(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
L(g) = \int_a^b \psi(g'(x))dx &\geqslant \int_a^b \left(\psi(f'(x)) + (g'(x) - f'(x))\psi'(f'(x))\right) dx \\
&= L(f) + \int_a^b (g'(x) - f'(x))\psi'(f'(x))\, dx \\
&= L(f) + \left[(g(x) - f(x))\psi'(f'(x))\right]_a^b - \int_a^b (g(x) - f(x))\psi''(f'(x))f''(x)\, dx \\
&= L(f) + \int_a^b (f(x) - g(x))\psi''(f'(x))f''(x)dx \geqslant L(f)
\end{aligned}$$

la dernière intégrale étant positive puisque $f \geqslant g$ et $\psi$ et $f$ sont convexes.

d) En appliquant l'inégalité précédente, il vient $L(g) \geqslant L(f) = 2\,\mathrm{sh}(1)$.

---

**Exercice 1.13.**

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$.

1. Montrer que $\varphi$ admet un prolongement par continuité en $t = 0$. (On notera encore $\varphi$ la fonction ainsi prolongée.)

On admet que cette fonction admet, en 0, un développement limité à tout ordre $N \geqslant 0$ de la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{t^k}{k!} + o(t^N)$$

2. Calculer $b_0, b_1, b_2, b_3$.

3. Montrer que $\varphi(t)-b_1t$ est une fonction paire. En déduire $b_{2n+1}$ pour tout $n\geqslant 1$.

4. On pose pour tout $x$ réel et tout $t$ réel : $f(x,t)=\mathrm{e}^{tx}\varphi(t)$.

Montrer que $t\mapsto f(x,t)$ admet un développement limité à tout ordre $N$ au voisinage de 0, que l'on écrit :

$$f(x,t)=\sum_{k=0}^{N}B_k(x)\frac{t^k}{k!}+o(t^N)$$

montrer que, pour tout $k\geqslant 0$, $B_k$ est un polynôme unitaire de degré $k$. Exprimer $B_k(0)$ en fonction de $b_k$.

5. Montrer que pour tout $k\geqslant 0$, $B_k(1-x)=(-1)^kB_k(x)$.

En déduire la valeur de $B_k(1)$, en fonction de $b_k$, pour tout $k\geqslant 1$.

6. Montrer que pour tout $k\geqslant 1$, $B_k(x+1)-B_k(x)=kx^{k-1}$.

---

**Solution :**

1. Comme $\mathrm{e}^t-1\underset{(0)}{\sim}t$, il vient : $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=1$. On peut donc prolonger $\varphi$ par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=1$.

2. De même, au voisinage de 0 : $\mathrm{e}^t-1=t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{t^4}{24}+o(t^4)$, et :

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\frac{1}{1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+o(t^3)}\\&=1-\big(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}\big)+\big(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}\big)^2-\big(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}\big)^3+o(t^3)\\&=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{12}+o(t^3)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, il vient :

$$b_0=1,b_1=-\frac{1}{2},b_2=\frac{1}{12},b_3=0$$

3. On écrit : $\varphi(t)-b_1t=\varphi(t)+\dfrac{1}{2}t=\dfrac{t}{2}\times\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}$

et :

$$\varphi(-t)-b_1(-t)=\varphi(-t)-\frac{1}{2}t=\frac{t}{2}\times\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}=\varphi(t)-b_1t$$

Une fonction paire admettant un développement limité, n'ayant dans son développement que des puissances paires de $t$, il vient :

$$b_{2n+1}=0,\text{ pour tout } n\geqslant 1.$$

4. La fonction $t\mapsto f(x,t)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre, comme produit de deux fonctions en admettant un. On sait alors que pour obtenir la partie régulière de ce développement, il suffit de faire le produit des deux parties régulières qu'on tronque à l'ordre voulu, soit :

$$\sum_{k=0}^{N}c_k\frac{t^k}{k!}+o(t^N)=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kx^k}{k!}\right)\times\left(\sum_{k=0}^{N}b_k\frac{t^k}{k!}\right)+o(t^N)$$

d'où :

$$c_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{b_j}{j!}\times\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}$$

et :

$$c_k = B_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_j x^{k-j}$$

Ainsi $B_k(x)$ est-il un polynôme unitaire de degré $k$, avec $B_k(0) = b_k$.

5. Un calcul donne, pour tout $x$ réel, pour tout $t$ réel : $f(1-x,t) = f(x,t)$. Or :

$$\begin{cases} f(1-x,t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(1-x)\dfrac{t^k}{k!} + o(T^N) \\ f(x,-t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x)(-1)^k\dfrac{t^k}{k!} + o(T^N) \end{cases}$$

Par unicité du développement limité : $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.
Donc $B_{2k+1}(1) = b_{2k+1} = 0$ et $B_{2k}(1) = b_{2k}$.

6. On utilise la même méthode que dans la question précédente : pour tous $x, t$ réels

$$f(x+1,t) - f(x,t) = t.\mathrm{e}^{xt} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k \frac{t^{k+1}}{k!} + o(t^N)$$

Donc $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.

---

**Exercice 1.14.**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} \times u_n$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$
Déterminer $\alpha$ pour que la série de terme général $\ln v_n$ converge.

3. En déduire que la série de terme général $u_n$ converge.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$$

5. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

---

**Solution :**

1. Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. La relation de récurrence montre alors que la suite $(u_n)$ est décroissante ; comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Pour déterminer $\ell$, on utilise la fonction logarithme :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{3}{2n+5}\right) = -\frac{3}{2n+5} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série $\sum[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)]$ est donc divergente et son terme général est négatif. Donc :

$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ce qui entraîne (limite de la fonction exponentielle) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On a : $v_n = \dfrac{2n^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}}{2n^{\alpha+1}\left(1+\frac{5}{2n}\right)}$. Donc :

$$\begin{aligned}\ln v_n &= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)\\ &= \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4} - \alpha - 1\right)\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum \ln v_n$ converge si et seulement si $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

3. On a, pour tout $N \geqslant 2$ :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln v_n = \frac{3}{2}\ln N + \ln u_N - \ln u_1$$

Donc

$$u_N = \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} \ln v_n + \ln u_1 - \frac{3}{2}\ln N\right)$$

et, en notant $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln u_n$, on a : $u_N \sim u_1 \dfrac{\mathrm{e}^S}{N^{3/2}}$ et (référence de Riemann) :

la série $\sum u_n$ converge.

4. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$. Il reste à sommer ces égalités pour obtenir le résultat demandé.

5. Ainsi : $2u_0 = 2(n+1)u_{n+1} + 3u_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

On a donc, en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 3u_0 = 3$$

---

**Exercice 1.15.**

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $1 < \beta < \alpha$.

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction $f$ définie, pour $x$ et $y$ strictement positifs avec $x \neq y$, par :

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta}$$

1. Étude d'une fonction d'une variable réelle.

a) Montrer que la fonction $\phi$ définie par $\phi(t) = \dfrac{1-t^\alpha}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 1.

b) Démontrer que ce prolongement est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et étudier ses variations.

2. Étude de $f$.

a) Justifier que la fonction $f$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha - y^\alpha}{x^\beta - y^\beta} & \text{si } x \neq y \\[2mm] \dfrac{\alpha}{\beta}\, x^{\alpha-\beta} & \text{si } x = y \end{cases}$$

est de classe $C^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U} = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$.

b) Montrer que :

i) $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, f(x, y) = f(y, x)$.

ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha-\beta} f(x, y)$.

c) Dériver, par rapport à $\lambda$, les deux membres de l'égalité précédente et en déduire :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\alpha - \beta) f(x, y)$$

Rechercher les points critiques de $f$ sur $\mathcal{U}$ .

d) Quelle est l'image $f(\mathcal{U})$ ?

---

**Solution :**

1. a) La fonction $\phi$ est continue et $C^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On a : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1 - t^\alpha}{1 - t} = \alpha$, (définition de la dérivée en 1 de $t \mapsto t^\alpha$)
On peut donc prolonger $\phi$ par continuité en $t = 1$, en posant $\phi(1) = \alpha$.

Pour $t$ au voisinage de 1 : $\phi(t) = \alpha + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(t-1) + o(t-1)$. La fonction $\phi$, convenablement prolongée est donc dérivable en 1, avec : $\phi'(1) = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$.

b) On a : $\phi'(t) = \dfrac{\alpha t^{\alpha-1}(t - 1) - (t^\alpha - 1)}{(t - 1)^2}$.
Le signe de $\phi'$ est celui de son numérateur $N$ et, pour tout $t$ :

$$N'(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(t - 1)$$

qui est du signe de $t - 1$. La fonction $\phi$ est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
De plus on remarque, avec un développement limité au voisinage de $t = 1$, que $\lim\limits_{t\to 1} \phi'(t) = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$, ce qui montre que le prolongement proposé est de classe $C^1$.

2. a) Notons $\phi_\alpha(t) = \dfrac{1 - t^\alpha}{1 - t}$. Alors, pour $x \neq y$,

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right)}{x^\beta \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right)} = x^{\alpha-\beta}\,\frac{\phi_\alpha(y/x)}{\phi_\beta(y/x)}$$

et pour $x = y$, la question précédente montre que

$$f(x, x) = x^{\alpha-\beta}\,\frac{\phi_\alpha(1)}{\phi_\beta(1)}$$

La fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathcal{U}$ comme composée, produit, quotient de telles fonctions.

b) Les deux propriétés se vérifient immédiatement

c) En utilisant le théorème de dérivation d'une composée, pour tout $\lambda$ réel :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = (\alpha - \beta)\lambda^{\alpha-\beta-1} f(x, y)$$

Puis on prend $\lambda = 1$.

Si $(x, y)$ est un point critique de $f$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, donc $f(x, y) = 0$, ce qui est impossible au vu des variations des fonctions $\phi_\alpha$ et $\phi_\beta$.

d) On a $f(\mathcal{U}) = ]0, +\infty[$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $f(x, y) > 0$ et la restriction de $f$ à toute demi-droite prend toutes les valeurs de $]0, +\infty[$.

---

**Exercice 1.16.**

La fonction de satisfaction $S$ d'un consommateur dépend du revenu $R$ et du temps de loisir $L$ de la manière suivante :

$$S(R, L) = \frac{RL}{R + L}$$

1. On suppose que la fonction $S$ est définie sur l'ensemble

$$\Omega = \{(R, L) \in \mathbb{R}^2 / R > 0 \text{ et } L > 0\}$$

Montrer que $S$ n'admet pas d'extremum sur $\Omega$.

2. Montrer que $S$ est prolongeable par continuité sur l'ensemble

$$\overline{\Omega} = \{(R, L) \in \mathbb{R}^2 / R \geqslant 0 \text{ et } L \geqslant 0\}.$$

On notera encore $S$ la fonction ainsi prolongée.

3. On suppose maintenant que $R = sW$, où $W$ désigne le temps de travail et $s$ le taux horaire de salaire.
On définit alors la fonction $S^*$ sur $\Omega_T = \{(W, L) \in \Omega / W + L \leqslant T\}$ par :

$$S^*(W, L) = S(sW, L).$$

($T > 0$ désigne le temps total disponible.)
Rechercher les extremums de $S^*$ sur $\Omega_T$.

---

**Solution :**

1. L'ensemble $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Sur $\Omega$, la fonction $S$ est différentiable et les points critiques de $S$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{(R + L)^2} = 0 \\ \dfrac{R^2}{(R + L)^2} = 0 \end{cases}$$

Le seul point critique est $(0, 0)$ qui n'appartient pas à $\Omega$.

2. On prolonge $S$ par continuité aux points $(R, 0)$, avec $R \neq 0$,, par $S(R, 0) = 0$ et aux points $(0, L)$, avec $L \neq 0$, par $S(0, L) = 0$.
En $(0, 0)$, on pose $R = \rho \cos\theta, L = \rho \sin\theta$, avec $\theta \in ]0, \pi/2[$ et $\rho \geqslant 0$ et :

$$|S(R, L)| = \rho \left| \frac{cos\theta \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \right| \leqslant \rho$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $\rho$ tend vers 0. On pose donc $S(0, 0) = 0$.

3. L'ensemble $\Omega_T$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. La fonction $S^*$ étant continue sur cet ensemble, elle admet au moins un maximum et un minimum.

La fonction $S^*$ est clairement minimale pour $W = 0$ ou $L = 0$.

Par la première question, cette fonction admet son maximum au bord de $\Omega_T$, donc sur la droite $W + L = T$.

On peut ainsi étudier la fonction d'une seule variable réelle $f : W \mapsto S^*(W, T-W)$.

On a : $f(W) = \dfrac{sW(T-W)}{(s-1)W+T}$.

• Si $s = 1$. La fonction $f$ est clairement maximale pour $W = \dfrac{T}{2}$. Donc $S^*$ est maximale en $\left(\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right)$.

• Si $s > 1$. La fonction $f$ est dérivable sur $[0, T]$ et :

$$f'(W) = -s\frac{-T^2+2TW+sW^2-W^2}{(sW+T-W)^2}$$

Cette quantité s'annule pour $W_1 = \dfrac{T}{\sqrt{s}+1} > 0$ et $W_2 = \dfrac{T}{1-\sqrt{s}} < 0$. Dans ce cas, $f$ est maximale pour $W = W_1$ et $S^*$ est maximale en $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$.

• Si $0 < s < 1$. Les calculs sont identiques aux calculs du cas précédent, mais cette fois $W_2 > T$. Ainsi $f$ est maximale pour $W = W_1$ et $S^*$ est maximale en $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$.

Finalement le point $\left(\dfrac{T}{\sqrt{s}+1}, \dfrac{\sqrt{s}T}{\sqrt{s}+1}\right)$ est le point où $S^*$ est maximale dans les trois cas.

---

**Exercice 1.17.**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que $F_a$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée en fonction de $f$. Montrer que la fonction $F_a$ est impaire ; dresser son tableau de variation et préciser ses limites aux bornes de son domaine de définition.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x_a \in \mathbb{R}$, tel que $F_a(x_a) = 1$.
On pose dans la suite, $g(a) = x_a$.

3. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2\ell}$.

4. On suppose que $f$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que $f$ vérifie les hypothèses de la première question. Donner la limite de $g$ associée à $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $F_a$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et par les théorèmes de dérivation des intégrales dépendants de leurs bornes :

$$F_a'(x) = f(a+x) + f(a-x) > 0$$

De plus :

$$F_a(-x) = \int_{a+x}^{a-x} f(t)\,dt = -F_a(x)$$

Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ ou elle est strictement croissante.

On a de manière évidente,

$\lim\limits_{x\to 0} F_a(x) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$, et

$\lim\limits_{x\to +\infty} F_a(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$ par divergence de l'intégrale d'une fonction positive.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. La question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires nous assurent de l'existence et de l'unicité de $x_a > 0$ tel que $F_a(x_a) = 1$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour $x > A$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Alors, comme

$$1 = F_a(x_a) = \int_{a-x_a}^{a+x_a} f(t)\,dt$$

il vient, en intégrant l'inégalité ci-dessus :

$$|1 - 2g(a)\ell| < \varepsilon 2g(a)|$$

ou

$$\Big|\frac{1}{g(a)} - 2\ell\Big| < \varepsilon$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{2\ell}$.

4. La fonction $f$ est définie et continue à valeurs dans $]0,1[$,

et comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Bien sûr, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

---

**Exercice 1.18.**

Soit $f$ la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$$

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.

2. Étudier le sens de variation de $f$ sur $D$.

3. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D$.

4. a) Calculer $f(0)$.

b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers la borne supérieure de $D$.

**Solution :**

1. La fonction $t \mapsto t^{-x}\sqrt{1+t}$ positive est continue sur $]0,1]$ donc intégrable sur tout segment $[\alpha, 1]$, avec $0 < \alpha \leqslant 1$.

Au voisinage de 0 elle est équivalente à $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1+2} \frac{1}{t^x}\,dt$ converge si et seulement si $x < 1$.
Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $f$ est donc $]-\infty, 1[$.

2. Pour tout $t \in ]0,1]$, la fonction $x \mapsto t^{-x}$ est croissante et comme $\sqrt{1+t} > 0$, la fonction $f$ est croissante sur $\mathcal{D}$.

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^x} = \frac{\sqrt{2}}{1-x}$$

cette dernière quantité tendant vers 0 lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
De même, pour tout $x \in \mathcal{D}$ :

$$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}$$

cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures.

4. a) Un calcul immédiat donne $f(0) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

b) On utilise une intégration par parties de fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle $[a, 1]$, avec $a > 0$. Il vient :

$$f(x) = \big[t^{-x}\tfrac{2}{3}(1+t)^{3/2}\big]_a^1 + \tfrac{2}{3}x\int_a^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt + \tfrac{2}{3}x\int_a^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$$

Lorsque $a$ tend vers 0 par valeurs supérieures, chacun des objets ci-dessus admet une limite. Ce qui donne :

$$f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2x}{3}f(x+1) + \frac{2x}{3}f(x)$$

soit :

$$f(x+1) = \big(\tfrac{3}{2x} - 1\big)f(x) - \frac{2\sqrt{2}}{x}$$

c) Lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures, il vient :

$$f(1+x) = \big(\tfrac{3}{2x} - 1\big)\big(\tfrac{4\sqrt{2}}{3} - \tfrac{2}{3} + o(1)\big) - \frac{2\sqrt{2}}{x} = -\frac{1}{x} + o\big(\tfrac{1}{x}\big)$$

Finalement, au voisinage à droite de 1, on a : $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$.

---

**Exercice 1.19.**

1. Soit $f(t) = \ln\big(1 + \mathrm{e}^{-2t}\big)$.

Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

2. Écrire la formule de Taylor avec «reste intégral» à l'ordre $n$ au point 0, pour la fonction $g$ définie par $g(x) = \ln(1+x)$. On notera $R_n(x)$ le reste d'ordre $n$.

3. Pour $x > 0$, étudier la fonction $\varphi(u) = \dfrac{x-u}{1+u}$ sur l'intervalle $[0, x]$.

4. En déduire
$$(\forall x > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |R_n(x)| \leqslant x^{n+1}$$

5. Montrer que
$$\Big| I - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2} \Big| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(n+1)t}\, dt$$
et en déduire une expression de $I$ sous la forme d'une somme d'une série.

---

**Solution :**

1. La fonction : $t \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{-2t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et au voisinage de $+\infty$, elle est équivalent à $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ donc l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ converge. Ainsi :
$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ convergee.}$$

2. On montre facilement, par récurrence sur $n$, que pour tout $n \geqslant 1$ :
$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$
Aussi, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$ s'écrit :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x (-1)^n \frac{(x-u)^n}{(1+u)^{n+1}}\, du$$

3. Une étude élémentaire montre que $\varphi$ est une bijection décroissante de $[0, x]$ sur lui-même.

4. Aussi, pour $x \geqslant 0$ :
$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^x |\varphi(u)|^n \frac{du}{1+u} \leqslant \int_0^x x^n\, du = x^{n+1}$$

5. On peut donc écrire :
$$I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-2t})\, dt = \int_0^{+\infty} \Big( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\mathrm{e}^{-2kt}}{k} + R_n(\mathrm{e}^{-2t}) \Big)\, dt$$
et
$$\Big| \int_0^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-2t})\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2kt}\, dt \Big|$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} |R_n(\mathrm{e}^{-2t})|\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(n+1)t}\, dt.$$
Un calcul élémentaire donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\Big| \int_0^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-2t})\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2} \Big| \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$$
ce qui montre que :
$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}.$$

---

**Exercice 1.20.**

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(x, y) = 3x^4 - 4x^2 y + y^2.$$

1. a) Justifier que $F$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / F(x,y) = 0\}$$

c) Étudier le signe de $F(x,y)$ et représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{N}$) des points $M$ du plan de coordonnées $(x,y)$ vérifiant $F(x,y) \geqslant 0$ (resp. $F(x,y) \leqslant 0$).

d) L'application $F$ présente-t-elle des extremums locaux ?

e) Montrer que la restriction de $F$ à toute droite passant par l'origine $O = (0,0)$ admet un minimum strict en 0.

f) La fonction $F$ admet-elle des extremums globaux ?

2. a) Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F(x,y)} = \frac{\alpha}{y - x^2} + \frac{\beta}{y - 3x^2}$$

b) Soit $a$ un paramètre réel. Déterminer les intervalles $I$ de $\mathbb{R}$ et les fonctions $g$ d'une variable réelle, définies et dérivables sur $I$, telles que, pour tout $t \in I$ :

$$F(a,t)\, g'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(a,t)\, g(t)$$

Y a-t-il des solutions sur $I = \mathbb{R}$ ?

---

**Solution :**

1. a) La fonction $F$ est polynomiale en les variables $x$ et $y$ : elle est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) En regardant $F(x,y) = 0$ comme une équation du second degré en $y$, il vient :

$$F(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

c) Ainsi, $F(x,y) < 0$ pour tous les points $(x,y)$ du plan situés entre les deux paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = 3x^2$, $F(x,y) = 0$ si et seulement si $y = x^2$ ou $y = 3x^2$ et $F(x,y) > 0$ pour les autres points.

d) Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, et $F$ de classe $\mathcal{C}^1$, on recherche les points où $F$ a un extremum local parmi les points critiques de $F$, c'est-à-dire solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x(3x^2 - 2y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y - 2x^2) = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0,0)$.

Or $(0,0)$ n'est pas un extremum local car pour tout $x$ non nul, $F(x,0) = 3x^4 > 0$ et $F(x, 2x^2) = -x^4 < 0$.

e) On a $h(x) = F(x, ax) = 2x(6x^2 - 6ax + a^2)$, expression qui s'annule sans changer de signe en 0. De même pour $F(0,y)$.

f) Non (voir la question d).

2. a) Par identification :

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F(x,y)} = \frac{2y-4x^2}{(y-x^2)(y-3x^2)} = \frac{1}{y-x^2} + \frac{1}{y-3x^2}$$

b) On a $(a,t) \in \mathcal{D}$ si et seulement si :

$$I \subset ]-\infty, a^2[ \text{ ou } I \subset ]a^2, 3a^2[ \text{ ou } I \subset ]3a^2, +\infty[.$$

De plus, pour $t \in I$, où $I$ désigne l'un des trois intervalles précédent :

$$g'(t) = \Big(\frac{2t-4a^2}{(t-a^2)(t-3a^2)}\Big)g(t) \implies g(t) = \lambda \exp\Big(\int (\frac{1}{t-a^2} + \frac{1}{t-3a^2})dt\Big)$$

où $\lambda$ est une constante quelconque et où $\int$ désigne l'une quelconque des primitives de la fonction placée après ce symbole.

Donc : $g(t) = \lambda \exp\big(\ln|t-a^2| + \ln|t-3a^2|\big) = \lambda \exp\big(|(t-a^2)(t-3a^2)|\big)$,

et en laissant $\lambda$ prendre en charge le problème de la valeur absolue :

Sur chaque intervalle $I_1 = ]-\infty, a^2[$, $I_2 = ]a^2, 3a^2[$, et $I_3 = ]3a^2, +\infty[$ défini ci-dessus, il existe une solution $g_i$ de la forme :

$$g_i(t) = \lambda_i(t-a^2)(t-3a^2) = \lambda_i(t^2 - 4a^2 t + 3a^4) \text{ définie sur } I_i.$$

Toutes ces solutions sont prolongeables par continuité en $a^2$ et en $3a^2$, en prolongeant par 0.

D'autre part, on a alors :

$$\forall\, t < a^2, g_1'(t) = \lambda_1(2t-4a^2) \text{ et } \lim_{x\to(a^2)^-} g_1'(t) = -2a^2\lambda_1,$$

$$\forall\, t \in ]a^2, 3a^2[, g_2'(t) = \lambda_2(2t-4a^2)) \text{ et } \lim_{x\to(a^2)^+} g_2'(t) = -2a^2\lambda_2.$$

Ainsi une solution sur $I_1$ et une solution sur $I_2$, prolongée par 0 en $a^2$ est une solution sur $]-\infty, 3a^2[$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

De même une solution sur $I_2$ et une solution sur $I_3$ se « recollent » en $3a^2$ si $\lambda_2 = \lambda_3$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda(t-a^2)(t-3a^2)$ est définie, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et est solution sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions sont d'ailleurs les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$.

# 2

# ALGÈBRE

---

**Exercice 2.1.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $||\ ||$ la norme euclidienne associée.
Un endomorphisme $g$ de $E$ est dit *orthogonal* si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

1. Soit $g$ un endomorphisme de $E$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) $g$ est orthogonal.

ii) Pour tout $x \in E$, $||g(x)|| = ||x||$.

iii) L'image par $g$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$.

2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $F$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$ (on pourra montrer que si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$, il existe un élément de $O_n(\mathbb{R})$ (que l'on exhibera) qui ne laisse pas $F$ stable).

3. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose *pour toute la suite de l'exercice* que $f$ commute avec tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

a) $\operatorname{Ker} f$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

b) pour tout réel $\lambda$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = \{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = E$

4. On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^{2p+1}$ admet au moins une valeur propre réelle.

On suppose que $n$ est impair. Montrer qu'il existe $\lambda_0$ tel que $f = \lambda_0 Id$.

---

**Solution :**

1. i) $\Longrightarrow$ ii) Pour tout vecteur $x$ de $E$, on a :
$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$
Donc la conservation du produit scalaire entraine celle de la norme.
ii) $\Longrightarrow$ i) Comme $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, la conservation de la norme et la linéarité de $g$ permettent d'écrire, pour tous vecteurs $x$ et $y$ :
$$\begin{aligned}\langle g(x), g(y)\rangle &= \frac{1}{4}(\|g(x)+g(y)\|^2 - \|g(x)-g(y)\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|g(x+y)\|^2 - \|g(x-y)\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$
i) $\Longrightarrow$ iii) Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$, et $g$ un endomorphisme orthogonal, on a : $\forall\, i \neq j, \langle g(e_i), g(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, donc $g(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de $E$.
iii) $\Longrightarrow$ ii) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $x$ un vecteur de $E$. On a : $x = \sum x_i e_i \implies g(x) = \sum x_i g(e_i)$ et comme $f(\mathcal{B})$ est aussi orthonormée :
$$\|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, distinct de $\{0\}$ et $E$. On considère une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F$ que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$.
On considère l'application linéaire $g$ définie par :
$$\forall\, i \in [\![1, n-1]\!], g(e_i) = e_{i+1} \text{ et } g(e_n) = e_1$$
$g$ est bien un endomorphisme orthogonal et puisque $g(e_p) = e_{p+1}$, l'endomorphisme $g$ ne laisse pas $F$ stable.
Comme il est clair que $E$ et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme orthogonal, la question est achevée.

3. a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $g \in O_n$, on a : $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f$ est stable par $g$.

b) Si $f$ commute avec tous les éléments de $O_n$, il en est de même de $f - \lambda Id$ et donc le résultat de a) montre que $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ est stable par tous les éléments de $O_n$.

c) Par conséquent, le résultat de la question 2. montre que $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = \{0\}$ ou $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = E$.

4. Par hypothèse, $f$ admet au moins une valeur propre $\lambda_0$.
Par conséquent $\operatorname{Ker}(f - \lambda_0 Id) \neq \{0\}$ et ainsi $\operatorname{Ker}(f - \lambda_0 Id) = E$, ce qui prouve que $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda_0$.

---

**Exercice 2.2.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice réelle $M = (m_{i,j})$, on dit que $M \geqslant 0$, si $m_{i,j} \geqslant 0$ pour tous indices $i$ et $j$.

1. Montrer que dès que le produit de matrices $MN$ a un sens, on a :

$$\begin{cases} M \geqslant 0 \\ N \geqslant 0 \end{cases} \implies MN \geqslant 0.$$

2. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$, $M \geqslant 0$ et $M$ non inversible.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\Big[A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \text{ et } A^{-1} \geqslant 0\Big] \iff \Big[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX \geqslant 0 \implies X \geqslant 0\Big]$$

4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$ et $A^{-1} \geqslant 0$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de $A$ et $a'_{i,j}$ ceux de $A^{-1}$.

a) Montrer que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \forall\ k \in [\![1,n]\!], a_{i,k}\, a'_{k,j} = 0.$$

b) En déduire que dans chaque ligne et dans chaque colonne de $A$, il y a un unique élément non nul.

---

**Solution :**

1. Avec des notations évidentes : $(MN)_{i,j} = \sum\limits_k m_{i,k} n_{k,j}$

Donc si $M$ et $N$ sont à coefficients dans $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la matrice $MN$.

2. On peut proposer $M = E_{i,j}$ (notation canonique), qui est de rang 1, donc non inversible puisque $n \geqslant 2$.

3. $\star$ Si $AX \geqslant 0$, comme $A^{-1} \geqslant 0$, on a $X = A^{-1}(AX) \geqslant 0$.

$\star$ • Soit $X \in \operatorname{Ker} A$, on a $AX = 0 \geqslant 0$, donc l'hypothèse donne $X \geqslant 0$. Mais on a aussi $-X \in \operatorname{Ker} A$ et ainsi $-X \geqslant 0$.
Les coefficients de la colonne $X$ sont à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$, donc sont tous nuls et $X = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

• Soit $C_j$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $A^{-1}$ ; comme $AA^{-1} = I$, $AC_j$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et est donc une matrice colonne $\geqslant 0$. L'hypothèse faite entraîne alors que l'on a $C_j \geqslant 0$ et en faisant varier $j$ de 1 à $n$, tous les coefficients de $A^{-1}$ sont $\geqslant 0$. On a bien $A^{-1} \geqslant 0$.

4. a) Pour $i \neq j$, on a $(AA^{-1})_{i,j} = (I)_{i,j} = 0$, soit : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} a'_{k,j} = 0$, et comme il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls, il vient bien :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \forall\ k \in [\![1,n]\!], a_{i,k}\, a'_{k,j} = 0.$$

b) $\star$ Supposons qu'il existe un indice de ligne $i$ pour lequel il existe deux indices $k$ et $\ell$ tels que $a_{i,k} \neq 0$ et $a_{i,\ell} \neq 0$. Alors pour tout indice $j$ différent de $i$, on a :

$$a'_{k,j} = a'_{\ell,j} = 0$$

Donc les lignes d'indices respectifs $k$ et $\ell$ de $A^{-1}$ ont tous leurs termes nuls, sauf peut-être le $i^{\text{ème}}$ terme. Ainsi ces lignes $L'_k$ et $L'_\ell$ forment une famille liée, ce qui contredit le fait que $A^{-1}$ est inversible.
Par contraposée, on a montré que chaque ligne de $A$ contient un terme non nul et un seul.

$\star$ On peut procéder de même pour les colonnes de $A$, ou remarquer que chaque ligne de $A$ contient un terme non nul et un seul et que le terme non nul de deux lignes distinctes ne peut se placer sur la même colonne (sinon $A$ aurait deux lignes liées) ; ainsi il y a en fait un terme non nul et un seul sur chaque ligne et sur chaque colonne.

---

**Exercice 2.3.**

On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$, par :

$$\operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $M_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$.

1. Étudier les variations des fonctions ch et sh et tracer leur graphe dans un repère orthonormé du plan. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t$.
En déduire que si $a, b$ sont deux réels vérifiant $a^2 - b^2 = 1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $a = \varepsilon \operatorname{ch} t$ et $b = \varepsilon \operatorname{sh} t$.

2. Montrer que la matrice $M_t$ est diagonalisable et que l'on peut choisir une base de vecteurs propres de $M_t$ indépendants de $t$.

3. Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective et vérifie pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $\theta(t + t') = \theta(t)\theta(t')$.

4. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $q(x, y) = x^2 - y^2$.
On cherche les éléments $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $q \circ f = q$.
Montrer que $f$ est solution de cette équation si et seulement si sa matrice $M$ vérifie la relation $(\star)$ : ${}^tMJM = J$.
Déterminer l'ensemble des matrices qui vérifient la relation $(\star)$ et montrer qu'il contient les matrices $M_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

---

**Solution :**

1. $\star$ Les fonctions ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\operatorname{ch}'(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t\,;\ \operatorname{sh}'(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

De plus la fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$ et clairement à dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$, donc positive sur $\mathbb{R}^+$ et ch est paire sur $\mathbb{R}$ et de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$. Les limites étant claires on obtient :

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sh}'(t)$ | $+$ | |
| sh | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{ch}'(t)$ | $+$ | |
| ch | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

La représentation graphique s'en déduit ...

$\star$ On a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} + 2 - \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t} + 2\big) = 1$

$\star$ Si $a$ et $b$ sont tels que $a^2 - b^2 = 1$, alors $|a| \geqslant 1$ et on peut trouver $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $t \in \mathbb{R}$ (et même $t \in \mathbb{R}^+$) tels que $a = \varepsilon \operatorname{ch} t$.

On en déduit $b^2 = a^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t$, et quite à changer $t$ en $-t$ (ce qui est sans influence sur le calcul de $a$), on a alors $b = \varepsilon \operatorname{sh} t$.

2. Sans même mettre en place les méthodes de réduction, on voit que :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $M_t$ est diagonalisable et on peut prendre comme matrice de passage diagonalisante la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$M_t = PD_tP^{-1} \text{ avec } D_t = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$$

3. La fonction sh étant injective, il est clair que $t \mapsto M_t$ est injective.
D'autre part, on a : $D_tD_{t'} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{t'}, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-t'}) = D_{t+t'}$, d'où :

$$\theta(t + t') = \theta(t)\theta(t')$$

4. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $f : (x, y) \mapsto (x', y')$, d'où : $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

$q \circ f = f \iff x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2 \iff (ax + by)^2 - (cx + dy)^2 = x^2 - y^2$.
En prenant $x = 1, y = 0$, puis $x = 0, y = 1$ et enfin $x = y = 1$, il vient :

$$q \circ f = f \implies a^2 - c^2 = 1, b^2 - d^2 = -1, ab - cd = 0$$

La réciproque étant claire, on a même équivalence.
Or : ${}^tMJM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$
donc $q \circ f = f$ est bien équivalent à ${}^tMJM = J$.
On peut alors trouver $t$ et $t'$ dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$a = \varepsilon \operatorname{ch} t, c = \varepsilon \operatorname{sh} t \,;\, b = \varepsilon' \operatorname{sh} t', d = \varepsilon' \operatorname{ch} t'$$

La condition supplémentaire $ab - cd = 0$ s'écrit $\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t' - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t' = 0$, soit en développant $\operatorname{sh}(t - t') = 0$ et donc $t = t'$.
Donc $M$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon \operatorname{ch} t & \varepsilon' \operatorname{sh} t \\ \varepsilon \operatorname{sh} t & \varepsilon' \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = \varepsilon' = 1$ permet de retrouver les matrices $M_t$.

---

**Exercice 2.4.**

On se donne $p \in [0, 1]$ et on pose $q = 1 - p$. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$, de matrice $A$ dans la base canonique avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $C^2$, montrer que $C$ n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable sauf pour $\alpha = 0$, et calculer $C^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que 1 et $-1$ sont valeurs propres de $A$ et donner pour chacune un vecteur colonne propre associé que l'on notera respectivement $u_1$ et $u_2$.

3. On pose $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice $B$ de $f$ dans cette base. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ?

4. Calculer $B^n$ et exprimer la matrice $A^n$ en fonction de $B$ et de la matrice de passage $P$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathcal{B}$.

5. Un pion se déplace sur les sommets d'un carré notés $M_1, M_2, M_3, M_4$ (dans le sens trigonométrique).
À chaque déplacement, la probabilité de tourner en sens direct (sens trigonométrique) est $p$ et de tourner en sens inverse est $q$ et ces mouvements sont indépendants les uns des autres. Il ne peut avancer de plus d'un sommet.
Sachant qu'il est en $M_1$ au départ, montrer que la donnée de la première ligne de $A^n$ donne la probabilité qu'il soit en $M_i$ à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.

---

**Solution :**

1. $C^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} = -\alpha^2 I_2$. Si $\lambda$ est une valeur propre (réelle) de $C$, on a donc $\lambda^2 = -\alpha^2$, ce qui est impossible sauf si $\alpha = 0$, auquel cas $C = 0$. Donc, par manque de valeur propre réelle, $C$ n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable (mais est $\mathbb{C}$-diagonalisable).
Comme $C^2 = -\alpha^2 I_2$, une récurrence simple donne :
$$C^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} I_2 \text{ et } C^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n} C$$

2. On résout les systèmes $AX = X$ et $AX = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, ou on se contente de « voir » que :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ q+p \\ q+p \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Les manipulations faites étant évidentes :
$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Ce qui prouve que $P$ est inversible, donc que $\mathcal{B}$ est une base.
On a déjà $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -u_2$. Un calcul simple donne $f(u_3) = (q-p)u_4$ et $f(u_4) = (p-q)u_3$. Ainsi :

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \\ 0 & 0 & 1-2p & 0 \end{pmatrix}$$

Rechercher les valeurs propres de $B$ revient à chercher les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et de la matrice $C(2p-1)$ ; donc la matrice $B$ est diagonalisable si et seulement si $2p-1=0$, *i.e.* $p = \dfrac{1}{2}$.

4. On voit que le calcul de $B^p$ revient au calcul de $C^p$, et en distinguant selon la parité de $p$ :

$$B^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} \end{pmatrix}$$

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}(2p-1)^{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

5. Avec des notations évidentes, on a : $P(M_{i,n+1}) = \sum\limits_{j=1}^{4} P(M_{j,n})P(M_{i,n+1}/M_{j,n})$.

Il suffit alors de poser $L_n = \begin{pmatrix} P(M_{1,n}) & P(M_{2,n}) & P(M_{3,n}) & P(M_{4,n}) \end{pmatrix}$ (matrice ligne) pour se rendre compte que les formules précédentes se réduisent à la relation matricielle $L_{n+1} = L_n A$.

Ainsi, par récurrence $L_n = L_0 A^n$ et comme $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la ligne $L_n$ est la première ligne de $A^n$.

---

**Exercice 2.5.**

Soit $T$ un entier naturel non nul et $(u_n)$ une suite à termes complexes. On dit que la suite $(u_n)$ est périodique de période $T$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$.

1. Exemples.

Vérifier que les suites $(a_n), (b_n)$ et $(c_n)$ suivantes sont périodiques et pour chacune donner une période :

a) $(a_n)$ suite constante égale à 2.

b) $(b_n)$ est définie explicitement par $\forall\, n \in \mathbb{N}, b_n = (i)^n$, où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

c) $(c_n)$ est définie par récurrence : $c_0 = 0, c_1 = \dfrac{1}{2}$, et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = \sqrt{3}c_{n+1} - c_n.$$

2. On note $E$ l'ensemble des suites à termes complexes qui sont périodiques.

a) Démontrer que $E$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer les suites géométriques éléments de $E$.

c) Soit $(u_n) \in E$ et $T$ une période de $(u_n)$. On dira que $u \in E_0$ si $\sum\limits_{k=0}^{T-1} u_k = 0$.

Vérifier que $E_0$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que $E = \mathrm{Vect}((a_n)) \oplus E_0$.

3. À tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ on associe $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

Vérifier que $u'$ est une suite périodique.

a) Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ qui à une suite $u$ associe $f(u) = u'$. Expliciter les images des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies à la première question.

Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

b) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $f$.

---

**Solution :**

1. a) Toute suite constante est périodique de période fondamentale 1.

b) On a : $b_{4n} = 1, b_{4n+1} = i, b_{4n+2} = -1$ et $b_{4n+3} = -i$, donc $b$ est périodique de période fondamentale 4.

c) L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre 2 est :

$$r^2 - \sqrt{3}\,r + 1 = 0 \text{ de racines } \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Comme $c_0$ et $c_1$ sont réels, il est plus agréable de travailler sous forme trigonométrique et il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que pour tout $n$ on ait :

$$c_n = \lambda\cos(\frac{n\pi}{6}) + \mu\sin(\frac{n\pi}{6})$$

Les valeurs de $c_0$ et $c_1$ donnent alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

et $c$ est périodique de période fondamentale 12.

2. Notons que si $u$ est périodique, $T$ étant une période de $u$, alors pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $kT$ est encore une période de $u$.

a) $E$ est non vide (on vient de montrer quelques exemples !) et si $u$ et $v$ sont périodiques de périodes respectives $T_u$ et $T_v$, alors $u$ et $v$ sont périodiques de période $T = T_1T_2$ et pour tout scalaire $\lambda$ :

$$(u + \lambda v)_{n+T} = u_{n+T} + \lambda v_{n+T} = u_n + \lambda v_n = (u + \lambda v)_n$$

Donc $u + \lambda v$ est périodique et $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

b) $\star$ La suite nulle est géométrique (de raison 0) et périodique.
$\star$ Une suite $u$ géométrique non nulle de raison $r$ avec $|r| > 1$ est telle que $\lim |u| = +\infty$, donc ne peut être périodique. De même si $|r| < 1$, $u$ est non nulle de limite nulle, donc ne peut être périodique.
$\star$ Enfin une suite de la forme $u_n = u_0(\mathrm{e}^{i\theta})^n$, est périodique de période $T$ si et seulement si $\mathrm{e}^{i\theta}$ est une racine $T^{\text{ème}}$ de l'unité, *i.e.* est de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}}$.

c) $\star$ Soit $u$ une suite périodique de période $T$ telle que $u \in E_0$. Alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on a aussi $\sum\limits_{i=0}^{kT-1} u_i = 0$, et la condition de nullité est donc vérifiée pour toute période de $u$.
$\star$ Il est clair que si $u$ et $v$ sont périodiques, on peut choisir une période $T$ commune et si la somme de leurs $T$ premiers termes est nulle, il en est de même pour la somme des $T$ premiers termes de la suite $u + \lambda v$, pour tout scalaire $\lambda$. Donc $E_0$, qui est non vide, est un sous-espace vectoriel de $E$.

$\star$ Soit $u \in \mathrm{Vect}(a) \cap E_0$ ; $u$ est constante de somme nulle sur une période, donc est la suite nulle : $\mathrm{Vect}(a) \cap E_0 = \{0\}$.

$\star$ Soit $u \in E$ une suite périodique de période $T$ ; notons $S = \dfrac{1}{2T}\sum\limits_{i=0}^{T-1} u_i$.

En écrivant $u = (u - S.a) + S.a$, la suite $u - S.a$ est périodique de somme nulle sur une période, donc est élément de $E_0$, tandis que $S.a \in \mathrm{Vect}(a)$. Ainsi

$$E = E_0 \oplus \mathrm{Vect}(a)$$

3. Si $u$ est périodique de période $T$, il en est de même de $n \mapsto u_{n+1}$ et $u'$ est $T$-périodique.

a) $\star$ $a$ est constante, donc $a'$ est la suite nulle. On a $b'_n = i^n(i-1)$, donc $b'$ est périodique de période 4.

$\star$ On note $D$ l'application qui à toute suite $u$ associe la suite $v$ définie par $v_n = u_{n+1}$ ($D$ pour «décalage»). Il est clair que l'application $D$ est linéaire et $f = D - Id$ est aussi linéaire. Donc $f$ est un endomorphisme de $E$ (on a d'ailleurs $f(E) \subset E_0$).

b) $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ si $u$ est non nul et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \lambda u_n,\ i.e.\ u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$$

Donc $u$ est géométrique de raison $1+\lambda$, et comme il faut que cette suite soit périodique, il existe $T \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $1 + \lambda = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}}$

$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \exists\, T \in \mathbb{N}^*, \exists\, k \in \mathbb{N}, \lambda = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}} - 1$$

Le sous-espace propre associé est alors la droite engendrée par la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

**Exercice 2.6.**

On note $E$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments $M$ de $E$ tels que si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, alors $m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et donner sa dimension.

2. Soit $A \in E$ de rang égal à 1. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

a) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

b) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u \neq \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. En déduire que $A$ est encore semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

3. On suppose que $A \in E$ est de rang 2. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

a) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

b) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u \neq \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, u$. Soit alors $x$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, u$ et $y$ tel que $x = u(y)$. En utilisant ces deux vecteurs, montrer que $A$ est encore semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

4. Soit $A \in E$ admettant une valeur propre réelle. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

---

**Solution :**

1. Avec les notations habituelles concernant la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{2,3})$$

Cette famille étant libre, car extraite d'une base, ceci prouve que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 6.

2. a) Si $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, le théorème du rang assure que $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires. Soit alors $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $(e_1)$ soit une base de $\mathrm{Im}\, u$ et $(e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Le vecteur $u(e_1)$ étant colinéaire à $e_1$, la matrice de $u$ dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est semblable à $A$ et appartient à $\mathcal{F}$.

b) Si $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$, la droite $\mathrm{Im}\, u$ ($A$ est de rang 1) est contenue dans le plan $\mathrm{Ker}\, u$.
Soit alors $x$ un vecteur tel que $u(x) \neq 0$ ; comme $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$, on peut compléter de façon à obtenir une base $(u(x), y)$ de $\mathrm{Ker}\, u$. La famille $(y, u(x), x)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$, car $x \notin \mathrm{Ker}\, u$ et la matrice de $u$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien encore une matrice de $\mathcal{F}$.

3. a) A nouveau $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ et en construisant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(e_1)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et $(e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$ qui est bien dans $\mathcal{F}$.

b) Cette fois, c'est la droite $\mathrm{Ker}\, u$ qui est contenue dans le plan $\mathrm{Im}\, u$.
Soit donc $(x)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Comme $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, u$, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = u(y)$ et on peut compléter $(x)$ en une base $(x, t)$ de $\mathrm{Im}\, u$. Ainsi il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $t = u(z)$.

La famille $(z, x, y)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car la relation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ donne en appliquant $u$ : $\beta x + \gamma t = 0$, d'où $\beta = \gamma = 0$ et il reste $\alpha x = 0$, avec $x \neq 0$.

La matrice de $u$ relativement à cette base est de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 1 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la deuxième étoile est de trop.

Ecrivons alors $u(z) = ax + by + cz$. En posant $z' = z - ay$, la famille $(z', x, y)$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$ et $u(z') = by + cz = (b - ac)y + cz'$.

La matrice de $u$ relativement à la base $(z', x, y)$ est alors $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b - ac & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien dans $\mathcal{F}$.

4. Si $A$ admet $\lambda \in \mathbb{R}$ pour valeur propre, alors $A - \lambda I_3$ est de rang 0 (si $A = \lambda I$) ou de rang 1 ou 2. Dans tous les cas, $A - \lambda I_3$ est semblable à une matrice $B \in \mathcal{F}$.
Alors $A$ est semblable à $B + \lambda I_3$ qui appartient encore à $\mathcal{F}$.

---

**Exercice 2.7.**

Soit $M$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$, à coefficients réels, telle que :

— la famille $(I_3, M, M^2)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;
— on a : $M^3 = M^2 - 2M - 4I_3$.

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de $f$ ? L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

2. a) Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ sont en somme directe et que $\mathrm{Im}(f + Id) \subset \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f + Id) = \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

4. Montrer que si $e_1$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$, alors $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

5. Dans cette question, on suppose $n = 3$ et que $-1$ est valeur propre de $f$.
Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f + Id)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

---

**Solution :**

1. Le polynôme $X^3 - X^2 - 2X - 4 = (X + 1)(X^2 - 2X + 4)$ est un polynôme annulateur de $f$.
Comme $X^2 - 2X + 4 = (X - 1)^2 + 3$, la seule valeur propre réelle possible de $M$ est $\lambda = -1$, ce qui montre que $f$ n'est pas diagonalisable, car autrement $f$ serait égal à $-Id$ et $M$ et $I_3$ seraient alors liées.

2. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+I) \cap \mathrm{Ker}(f^2-2f+4I)$. On a alors $f(x) = -x$, $f^2(x) = x$ et $0 = (f^2 - 2f + 4I)(x) = 7x$. Donc $x = 0$.
De plus $(f^2 - 2f + 4I) \circ (f + Id) = 0$ entraîne :

$$\mathrm{Im}(f + Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id).$$

b) Par la question précédente et le théorème du rang :

$$\begin{aligned} n &= \dim \mathrm{Im}(f + Id) + \dim \mathrm{Ker}(f + Id) \\ &\leqslant \dim \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) + \dim \mathrm{Ker}(f + Id) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id)) \leqslant n \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id)) = n$, ce qui montre que

$$\mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 4I) \oplus \mathrm{Ker}(f + I) = E.$$

3. Par le théorème du rang et les deux questions précédentes, on obtient :

$$n = \dim \mathrm{Im}(f + Id) + \dim \mathrm{Ker}(f + Id)$$

$$n = \dim \operatorname{Ker}(f + Id) + \dim(\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$$

d'où $\dim \operatorname{Im}(f + Id) = \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ et l'inclusion vue en 2. a) donne :

$$\operatorname{Im}(f + Id) = \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id).$$

4. Supposons que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit liée. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$. Donc $\lambda = -1$ et $(f^2 - 2f + 4Id)(e_1) = 6e_1 = 0$ : contradiction.

5. Lorsque $n = 3$ et $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) \neq 0$, on a les cas suivants :

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 3$. Alors $f = -Id$, ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 2$. Alors $\dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + Id) = 1$, en contradiction avec la question précédente.

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 1$. Alors $\dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + Id) = 2$, ce qui est possible.

On peut proposer par exemple $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 2.8.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u$ un endomorphisme non nul de $E$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un entier naturel $q_x \geqslant 1$ tel que $u^{q_x}(x) = 0$.

Montrer qu'il existe un entier $q \geqslant 2$ tel que pour tout $x \in E$, $u^q(x) = 0$.

Soit alors $p$ l'unique entier naturel tel que $p \geqslant 2$, et $u^p = 0$, $u^{p-1} \neq 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de $u$. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

3. Soit $v$ l'application définie par : $v = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k}{k!}$.

a) Montrer que $v$ est bien définie et est un endomorphisme de $E$.

b) Montrer que $v$ est inversible. Déterminer son inverse en fonction de $u$.

4. a) Déterminer une relation entre $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v - Id)$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $v$.

5. Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$. On définit $u$ par :

$$u : P \mapsto Q(X) = P(X + 1) - P(X)$$

Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$ vérifiant les hypothèses de l'exercice.

---

**Solution :**

1. On suppose que $E$ est de dimension $n$ et que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $q_i \geqslant 1$ tel que $u^{q_i}(e_i) = 0$. Soit $q = \max(q_i)$.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a alors :

$$u^q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u^q(e_i) = 0$$

Ainsi il existe $q \geqslant 1$ tel que $u^q = 0$. On pose $p = \min\{q \geqslant 1 \mid u^q = 0\}$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. Il existe $x \neq 0$ de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Donc, $0 = u^p(x) = \lambda^p x$, ce qui entraîne que $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible est donc 0.
En fait, 0 est effectivement valeur propre de $u$ puisque $u^p = 0$ entraîne que $u$ n'est pas inversible et donc que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$.

3. a) En fait $v = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{u^k}{k!}$ ; c'est donc un endomorphisme de $E$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$. On a alors

$$x + u(x) + \cdots + \frac{u^k}{k!}(x) + \cdots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)!}(x) = 0$$

On applique $u^{p-1}$ à cette égalité : il vient $u^{p-1}(x) = 0$, donc il reste

$$x + u(x) + \cdots + \frac{u^k}{k!}(x) + \cdots + \frac{u^{p-2}}{(p-2)!}(x) = 0$$

On applique alors $u^{p-2}$ : il vient $u^{p-2}(x) = 0$, etc. A la fin de ce processus, on obtient $x = 0$ et $\operatorname{Ker} v = \{0\}$.

Il reste à vérifier que $v^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} (-1)^k \dfrac{u^k}{k!}$.

Pour cela, on considère la composée $v \circ \sum\limits_{k=0}^{p-1} (-1)^k \dfrac{u^k}{k!}$, et un calcul immédiat donne l'identité.

4. a) Si $u(x) = 0$, alors $(v - Id)(x) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \dfrac{u^k}{k!}(x) = 0$.

Donc $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v - Id)$.

b) La question précédente montre que 1 est valeur propre de $v$.

Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre éventuelle de $v$ et $x$ un vecteur propre associé ($v(x) = \lambda x$). On a alors :

$$(\lambda - 1)x = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k}{k!}(x)$$

En appliquant $u^{p-1}$ ; il vient $(\lambda - 1)u^{p-1}(x) = 0$, donc $u^{p-1}(x) = 0$, qu'on réinjecte dans l'équation de départ, soit :

$$(\lambda - 1)x = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{u^k}{k!}(x)$$

En recommençant ce processus, il vient $x = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

La seule valeur propre de $v$ est donc 1.

5. L'application $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, puisque $\deg(u(P)) < \deg(P)$.

C'est un endomorphisme nilpotent pour la même raison ; à chaque composition par $u$, on abaisse le degré de $P$ d'au moins une unité (en fait exactement d'une unité tant que l'on n'a pas un polynme constant). Comme $u^n(X^n) \neq 0$, on a $u^{n+1} = 0$ et $u^n \neq 0$.

---

**Exercice 2.9.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice de terme général $a_{i,j}$ défini par :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = i \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que $A$ est diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $s = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que :

$$AX = \lambda X \text{ si et seulement si } \begin{cases} s & = \lambda x_1 \\ s & = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ s & = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$$

3. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$.

4. Établir la réciproque de la question précédente, à savoir :
   si $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$, alors $\lambda$ est une valeur propre de $A$.

5. En déduire que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.

---

**Solution :**

1. La matrice $A$ est symétrique, réelle et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. L'équation $AX = \lambda X$ s'écrit comme le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \lambda x_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} s = \lambda x_1 \\ s = (\lambda - 1)x_2 \\ \qquad \vdots \\ s = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$$

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ un vecteur propre associé.

S'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda = k - 1$, alors, en utilisant la $k$-ième équation, on a $s = 0$ et $x_i = 0$, pour tout $i \neq k$ ; donc comme $s = 0$, $x_k = 0$ et $X = 0$.

Donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda \neq k-1$ et le système d'équations précédent est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\lambda} = x_1 \\ \dfrac{s}{\lambda - 1} = x_2 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{s}{\lambda - n + 1} = x_n \end{cases}$$

avec $s \neq 0$. En sommant toutes ces équations, il vient : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$.

4. Réciproquement, l'équation $AX = \lambda X$ reste équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\lambda} = x_1 \\ \dfrac{s}{\lambda - 1} = x_2 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{s}{\lambda - n + 1} = x_n \end{cases}$$

ce système est équivalent au système obtenu en gardant les $(n-1)$ premières équations et l'équation obtenue en les sommant toutes, soit $s \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = s$. Cette dernière équation étant vérifiée, ce système est un système homogène à $n$ inconnues et $n-1$ équations ; il admet une solution non triviale.

5. La fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x-k} - 1$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0, \ldots, n-1\}$ et est une bijection de chaque intervalle $]k, k+1[$ $(k \in [\![1, n-1]\!])$ sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc exactement une fois sur chacun de ces intervalles. De plus, $f(]-\infty, 0[) = ]-\infty, -1[$ et $f(]n-1, +\infty[) = ]-1, +\infty[$.
Dans ce dernier intervalle se trouve le $n$-ième zéro de $f$.

---

**Exercice 2.10.**

On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes à coefficients réels (on confondra polynôme et fonction polynomiale associée). Pour tout couple $(p, q)$ d'éléments de $\mathcal{P}$, on pose :

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente est convergente et que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

2. Soit $(T_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = X \\ \forall\, n \geqslant 1, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}$$

a) Vérifier que $T_n$ est un polynôme de degré $n$. Déterminer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

b) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et tout $t$ réel, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite orthogonale de $(\mathcal{P}, \langle ., . \rangle)$. Quelle est la norme de $T_n$ ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n$ de $\mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall p \in \mathcal{P}_n, \langle p, P_n \rangle = p(1)$$

b) Donner les coordonnées de $P_n$ dans la base $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ de $\mathcal{P}_n$. En déduire que la norme de $P_n$ vaut $\sqrt{\dfrac{2n+1}{\pi}}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $(1-x)P_n = aT_n + bT_{n+1}$.

---

**Solution :**

1. $P$ et $Q$ sont des fonctions polynômes, donc sont continues sur le segment $[0,1]$ et en posant $C = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |PQ(x)|$, on a : $\dfrac{|P(x)Q(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\star$ La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\star$ Au voisinage de 1 elle est équivalente à $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$, et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ est convergente (intégrale de référence de Riemann). On conclut de même au voisinage de $-1$, par parité de $f$.

Ainsi $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est bien définie (l'intégrale est même absolument convergente).

La bilinéarité de $\langle .,. \rangle$ est claire, ainsi que la positivité, et :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

entraîne, par positivité de $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$, que $P$ est identiquement nul sur $]-1,1[$ donc a une infinité de racines et est le polynôme nul.

$$\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{P}$$

2. a) $\star$ On montre par une récurrence simple que $T_n$ est un polynôme de degré $n$.

$\star$ Comme $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$, les conditions initiales $T_0(1) = T_1(1) = 1$ donnent $T_n(1) = 1$.

$\star$ De même $T_n(-1) = (-1)^n$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

• Le résultat est banal pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Supposons le résultat acquis pour tout $k \leqslant n$. Alors

$$T_{n+1}(\cos t) = 2\cos t \cos(nt) - \cos((n-1)t) = \cos((n+1)t)$$

( en utilisant la formule trigonométrique

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \text{ )}$$

c) Dans l'intégrale définissant le produit scalaire, on effectue le changement de variable $x = \cos t$ qui est de classe $C^1$ et bijectif de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Il vient, pour tout $m, n$ de $\mathbb{N}$ :

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{T_n(\cos t)T_m(\cos t)}{\sin t} (\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\big)\,dt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

3. a) Soit $\varphi$ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Son noyau est l'hyperplan formé des polynômes $Q$ tels que $Q(1) = 0$, soit $Q(X) = (X-1)R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Comme $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = n$, il existe $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Ker}\varphi \oplus^\perp \operatorname{Vect}(P_0),$$
(donc $P_0(1) \neq 0$).
De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $q \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $\lambda$ réel (uniques) tels que $p = q + \lambda P_0$. Ainsi $p(1) = q(1) + \lambda P_0(1) = \lambda P_0(1)$ et $\langle p, P_0\rangle = \lambda ||P_0||^2$. On choisit alors :
$$P_n(X) = P_0(1)\frac{P_0(X)}{||P_0||^2}.$$
Le polynôme $P_n$ ainsi défini est unique. En effet, supposons qu'il en existe un second $Q_n$, alors $P_n - Q_n$ est orthogonal à tout $\mathbb{R}_n[X]$ donc est identiquement nul.

b) On écrit $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k T_k(X)$. Aussi, pour tout $k \in [0, n]\!]$
$$1 = T_k(1) = \langle P_n, T_k\rangle = a_k ||T_k||^2$$
Donc
$$P_n = \frac{2}{\pi}\big(\frac{T_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k\big)$$
et
$$P_n(1) = \langle P_n, P_n\rangle = ||P_n||^2 = \frac{2}{\pi}\big(\frac{T_0(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k(1)\big) = \frac{2n+1}{\pi}$$

c) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
$$\langle (1-X)P_n, T_k\rangle = \langle P_n, (1-x)T_k\rangle = (1-X)T_k(X)_{|X=1} = 0$$
On décompose le polynôme $(1-X)P_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_{n+1})$. La relation précédente montre que les coordonnées sur $T_0, \ldots, T_{n-1}$ sont nulles et qu'il existe deux réels $a, b$ (qui dépendent a priori de $n$) tels que
$$(1-X)P_n = aT_n + bT_{n+1}.$$
Pour déterminer $a$ et $b$, il suffit de trouver deux équations indépendantes : par exemple en particularisant l'égalité $(1-X)P_n = aT_n + bT_{n+1}$ en substituant à $X$ les valeurs 1 et $-1$.

---

**Exercice 2.11.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel.
1. Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie, et $L$ l'application de $F \times G$ vers $E$ définie par $L(x, y) = x + y$.

a) Déterminer le noyau de $L$.

b) En déduire que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

2. a) Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \qquad (*).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

b) Donner un exemple de deux endomorphismes $f$ et $g$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ et tels que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.(1, 1, \ldots, 1)$.

3. Soit $\Gamma$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par : $\Gamma(P) = P''$.

a) Déterminer $\mathrm{Im}(\Gamma)$ et $\mathrm{Ker}(\Gamma)$.

b) Montrer qu'il existe deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ vérifiant la relation $(*)$ et tels que aucune des deux sommes de $(*)$ ne soit directe.

---

**Solution :**

1. a) On a : $\mathrm{Ker}\, L = \{(x, y) \in E \times F / x = -y\} = F \cap G$.
(on montre cette dernière égalité par double inclusion).

b) On sait que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ et que $\mathrm{Im}(L) = F + G$. Le théorème du rang donne

$$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$$

Pour montrer que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on montre que $F \times G$ est isomorphe à $F \times \{0\} \oplus \{0\} \times G$ par l'application $\theta : (x, y) \to (x, 0) + (0, y)$, (on peut aussi revenir à des bases de $F$ et $G$).

2. a) On utilise le théorème du rang. On a :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2n$$

Par la question précédente :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, g) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$$

et :

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$$

Donc

$$2n - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 2n$$

et

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$
$$\implies \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$

b) On note $e_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ qu'on complète en $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. Les applications $f$, définie comme la projection sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $g$, définie comme la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ conviennent.

3. a) On a évidemment $\mathrm{Im}\, \Gamma = \mathbb{R}[X]$ et $\mathrm{Ker}\, \Gamma = \mathbb{R}_1[X]$.

b) On prend $f = \Gamma$ et $g : P \longmapsto P(0)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_0[X], \quad \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$$

Donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(X)$.

---

**Exercice 2.12.**

Dans cet exercice $n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ un espace euclidien de dimension $n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Un vecteur de $E$ est dit unitaire s'il est de norme égale à 1.

1. Soit $k$ un réel et $A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$ tel que pour tout couple $(i,j)$ d'entiers compris entre 1 et $n+1$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer pour quelles valeurs de $k$ la matrice $A$ est non inversible.

2. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs unitaires de $E$, tels que, pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,n]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = k$.

a) Justifier l'existence de $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

b) Déduire de ce qui précède que $k \in \left\{1, -\dfrac{1}{n}\right\}$.

c) Montrer que si $k \neq 1$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $E$.

3. Montrer que si $n = \dim E = 2$, il existe trois vecteurs unitaires $x_0, x_1, x_2$ de $E$ tels que pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,2]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\dfrac{1}{2}$.

4. On se propose de montrer le résultat analogue en dimension 3.

a) Montrer que si $n = \dim E = 3$ et que $x_0, x_1, x_2, x_3$ sont 4 vecteurs unitaires de $E$ tels que pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,3]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\dfrac{1}{3}$, on peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(x_1, x_2, x_3)$.

b) Exprimer alors les vecteurs $x_0, x_1, x_2, x_3$ dans la base orthonormée ainsi construite.

c) Conclure.

---

**Solution :**

1. Notons que l'on a : $A = kJ + (1-k)I_{n+1}$, où $J$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Des calculs simples montrent que les valeurs propres de $J$ sont 0 et $n+1$ (on a $J^2 = (n+1)J$), par conséquent les valeurs propres de $A$ sont $1-k$ et $k(n+1) + (1-k) = kn+1$.

$A$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $A$, soit si et seulement si $k \neq 1$ et $k \neq -\dfrac{1}{n}$.

2. a) La famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ : elle est donc liée.

b) Par conséquent, il existe $(n+1)$ scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Ceci entraîne que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$$

et comme $\langle x_i, x_i\rangle = 1$, $i \neq j \implies \langle x_i, x_j\rangle = k$, le système précédent s'écrit :

$$A\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Comme ce système a une solution non triviale, $A$ n'est pas inversible et $k \in \{0, -\frac{1}{n}\}$.

c) Toute sous-famille de $n$ vecteurs, par exemple $(x_1, \dots, x_n)$ est libre car, si $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont des scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0$, alors pour tout $j$ de $[\![1, n]\!]$, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$, ce qui conduit à un système du même type, avec une matrice $A'$ d'ordre $n$. La première question montre que $A'$ est inversible, puisque $k = -\dfrac{1}{n}$ donc est différent de $-\dfrac{1}{n-1}$. Ainsi les coefficients $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont tous nuls et $(x_1, \dots, x_n)$ est libre de cardinal ad hoc, donc est une base de $E$.

3. Si $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée de $E$, il suffit de poser :

$$x_0 = e_1,\ x_1 = -\frac{1}{2}\,e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_2 \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}\,e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_2$$

(pensez aux nombres complexes $1, j$ et $j^2$).

4. a) On sait que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre. On peut donc lui appliquer le processus de Gram Schmidt ; on obtient une base $(e_1, e_2, e_3)$ orthonormée de $E$ telle que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i)$, avec $\langle x_i, e_i\rangle > 0$.

b) En appliquant ce processus, les formules de Gram-Schmidt donnent :

$$\begin{cases} x_1 = e_1\\ x_2 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e_2\\ x_3 = -\frac{1}{3}e_1 + \big(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\big)e_2 + \big(\frac{7-\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2}\big)e_3\\ x_0 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}e_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_3 \end{cases}$$

c) Réciproquement, en partant d'une base orthonormée de $E$, on définit les quatre vecteurs $x_0, \dots, x_3$ ci-dessus. On vérifie ensuite que ces vecteurs répondent à la question.

---

**Exercice 2.13.**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On confondra $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^2 = M \text{ et } M^T = M\}$,

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels et $M^T$ désigne la transposée de $M$.

1. a) Montrer que pour tout $M \in S$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a : $X^T M X \geqslant 0$.

b) Caractériser $\{X \in \mathbb{R}^n / X^T M X = 0\}$.

2. Soit $(P,Q) \in S^2$ vérifiant la propriété $(\star)$ suivante : pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T(P-Q)X \geqslant 0$.

a) On note $p$ et $q$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, canoniquement associés à $P$ et $Q$. Montrer que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$.

b) En déduire que $Q = QP$ et $Q = PQ$.

c) Montrer que $(P-Q) \in S$ et $(I-P+Q) \in S$, où $I$ représente la matrice identité.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P-Q)^n \in S$ et $P^n - Q^n \in S$.

3. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$A_r = \sum_{k=0}^{r} (P^k - Q^k), B_s = \sum_{k=0}^{s} (P-Q)^k$$

a) Simplifier les expressions de $A_r$ et $B_s$

b) Déterminer les matrices $P$ et $Q$ telles que $A_r$ soit inversible.

c) Exprimer $B_s^2$ en fonction de $B_s$ et $I$. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $B_s$ est inversible et déterminer son inverse $B_s^{-1}$.

d) Montrer que quels que soient $r \geqslant 1, s \geqslant 1$, les matrices $A_r$ et $B_s$ sont diagonalisables.

---

**Solution :**

1. a) On peut écrire

$$X^TMX = X^TM^2X = X^TM^TMX = (MX)^T(MX) = ||MX||^2 \geqslant 0$$

b) Ainsi $X^TMX = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X$ appartient à $\operatorname{Ker} M$.

2. a) La relation donnée s'écrit également $X^TPX \geqslant X^TQX$. Donc si $X \in \operatorname{Ker} P$, on a $X^TPX = 0$ ce qui entraîne que $0 \leqslant X^TQX \leqslant 0$, donc que $X \in \operatorname{Ker} Q$.

b) Les endomorphismes $p$ et $q$ étant des projecteurs, on sait que $E = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$ et que si $X \in \operatorname{Im} P$, alors $PX = X$.
Donc, si $X \in \operatorname{Ker} P$, $QPX = 0$ et par la question précédente, $QX = 0$, et si $X \in \operatorname{Im} P$, $QPX = QX$. Donc, par linéarité, pour toute colonne $X$, $QX = QPX$ et $Q = QP$.
Enfin , par transposition $Q = Q^T = P^TQ^T = PQ$.

c) La transposition est linéaire et comme $PQ = QP$, on a $(P-Q)^2 = P-Q$. De même pour $I-(P-Q)$ qui est le projecteur supplémentaire de $P-Q$.

d) Comme $(P-Q)^2 = P-Q$, pour tout $n \geqslant 1$, $(P-Q)^n = P-Q \in S$, et ceci reste vérifié pour $n = 0$ ($(P-Q)^0 = I \in S$).
Comme $P^2 = P, Q^2 = Q$, on a en fait pour tout $n \geqslant 2$, $P^n = P, Q^n = Q$, donc $P^n - Q^n = P - Q \in S$, et ceci reste vérifié pour $n = 1$.

3. a) On a

$$A_r = I - I + (P-Q) + \sum_{2}^{r}(P-Q) = r(P-Q), \text{ et } B_s = I + s(P-Q)$$

b) La matrice $A_r$ est inversible si et seulement si $P - Q$ est inversible. Or $P - Q$ est un projecteur ; donc $P - Q$ est inversible si et seulement si $P - Q = I$.

c) On a

$$B_s^2 = I + 2s(P - Q) + s^2(P - Q) = (s + 2)B_s - (s + 1)I$$

Donc

$$(B_s - (s + 2)I)\times\Big(\frac{-1}{s+1}B_s\Big) = I$$

d) La matrice $P - Q$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable ; il en est de même pour $A_r$ et $B_s$.

---

**Exercice 2.14.**

Soit $n \geqslant 2$. A tout polynome $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $T(P)$ défini par :

$$T(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}X^k(1 - X)^{n-k}.$$

On note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k(X) = X^k$.

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) Calculer $T(P_0)$ et $T(P_1)$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q(X) = XP(X)$.

Montrer que : $T(Q)(X) = \dfrac{X(1 - X)}{n}\big(T(P)\big)'(X) + X.T(P)(X)$.

c) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$ , $T(P_k)$ est un polynôme de degré $k$ dont le coefficient dominant est $a_k = \dfrac{n!}{n^k(n - k)!}$ .

d) $T$ est-il diagonalisable ?

3. a) Calculer $T(P_2)$.

b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ , $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(\frac{k}{n} - x\big)^2 x^k(1 - x)^{n-k}$.

c) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(\frac{k}{n} - x\big)^2 x^k(1 - x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

---

**Solution :**

1. L'application $T$ est clairement linéaire et comme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(X^k(1 - X)^{n-k}) = n$, $T(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.

2. a) On a immédiatement :

$$T(P_0)(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1 - X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1$$

et

$$T(P_1)(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^k(1 - X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^k(1 - X)^{n-k} = X$$

b) On a : :

$$(T(P))'(X) = \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k}$$
$$- \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)(n-k)\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{X(1-X)}{n}(T(P))'(X) &= \sum_{k=1}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k+1}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} P\big(\frac{k}{n}\big)\big(1-\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k}\\ &\quad - X\sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k}\\ &= T(Q)(X) - XT(P)(X)\end{aligned}$$

c) On sait que $T(P_0)(X) = 1$. Supposons que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $T(P_j)$ soit un polynôme de degré $k$ et de coefficient dominant $\dfrac{n!}{n^j(n-j)!}$.
Comme $P_{k+1} = XP_k$, la relation précédente donne :

$$T(P_{k+1})(X) = \frac{X(1-X)}{n}(T(P_k))'(X) + XT(P_k)(X)$$

et le coefficient de $X^{k+1}$ dans $T(P_{k+1})$ est :

$$a_{k+1} = -\frac{1}{n}ka_k + a_k = \frac{n!}{n^{k+1}(n-k-1)!}$$

d) La matrice associée à l'application $T$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale :

$$\big(1, 1, \frac{n!}{n^2(n-2)!}, \dots, \frac{n!}{n^k(n-k)!}, \dots, \frac{n!}{n^n}\big)$$

Ses valeurs propres se lisent sur cette diagonale, ces coefficients sont distincts, hormis les deux premiers qui sont égaux à 1. Or la question 2.a montre que 1 et $X$ sont vecteurs propres de $T$ associés à la valeur propre 1. L'endomorphisme $T$ est donc diagonalisable.

3. a) On applique le résultat de la question 2.a. Il vient

$$T(P_2)(X) = \frac{X(1-X)}{n} + X^2$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= T(P_2)(x) - 2xT(P_1)(x) + x^2T(P_0)(x)\\ &= \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

c) Comme $\sup\limits_{x\in[0,1]}(x(1-x)) = \dfrac{1}{4}$, il vient :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n}$$

---

**Exercice 2.15.**

Soit $n$ un entier $\geqslant 2$.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 1 \text{ ou } i = n \text{ ou } j = 1 \text{ ou } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$.

1. Diagonaliser $A$, dans le cas $n = 2$.

*Dans la suite on suppose $n \geqslant 3$.*

2. a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

   b) Comparer $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

   c) Diagonaliser $f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ (endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ induit par $f$).

   d) Diagonaliser $A$.

On considère l'équation $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Dans cette question, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une solution particulière de cette équation et en déduire sa solution générale.

b) Donner la forme générale des matrices $B$ pour lesquelles le problème admet au moins une solution. Quelle est alors la solution générale de l'équation ?

c) On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Pour $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, existe-t-il des vecteurs $X$ qui minimisent $\|AX - B\|$ ? Si oui, les déterminer.

---

**Solution :**

1. Dans le cas où $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de rang 1, donc 0 est valeur propre et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $A$ est symétrique réelle, on sait que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal au précédent vecteur, est également un vecteur propre. La valeur propre associée est 2.

En conclusion, la matrice symétrique réelle est diagonalisable ; ses valeurs propres sont 0 et 2, de vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a) La matrice $A$ est clairement de rang 2, car ses deux premières colonnes forment une famille libre, alors que les autres colonnes sont liées à ces deux premières colonnes.
Ainsi, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$, et par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$, une base de $\operatorname{Ker} f$ est :

$$(e_2 - e_2, e_4 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_2, e_n - e_1)$$

b) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \ldots & 2 & n \\ 2 & & \ldots & & 2 \\ \vdots & & 2 & & \vdots \\ 2 & & \ldots & & 2 \\ n & 2 & \ldots & 2 & n \end{pmatrix}$

On remarque que $\dim \operatorname{Ker} f^2 = n - 2$, et comme, pour tout endomorphisme, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$, il vient ici $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors $x = f(y)$ et $f(x) = 0$. Donc $f^2(y) = f(x) = 0$, ce qui entraîne que $y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, donc que $x = f(y) = 0$. On termine cette question à l'aide du théorème du rang.

c) Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ induit par $f$. L'endomorphisme $\tilde{f}$ agit sur un espace de dimension 2 et dans la base de $\operatorname{Im} f$ déterminée dans la question précédente, sa matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix}$.

On détermine ses valeurs propres par la méthode du pivot (par exemple) et on trouve :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2n-3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$$

Cette matrice étant diagonalisable (deux valeurs propres distinctes), l'endomorphisme $\tilde{f}$ est diagonalisable dans une base $(u_1, u_2)$ de $\operatorname{Im} f$.

d) Dans la base $(u_1, u_2)$ complétée par une base de $\operatorname{Ker} f$, les questions précédentes montrent que $f$ est diagonalisable et que la matrice $A$ est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1 + \sqrt{2n-3}, 1 - \sqrt{2n-3}, 0, \ldots, 0)$.

3. a) On remarque que $B = f(5e_1 - 4e_2)$. Le vecteur $X_0 = 5e_1 - 4e_2$ est donc solution de l'équation $AX = B$. L'ensemble des solutions de cette équation est alors $X_0 + \operatorname{Ker} f$.

b) L'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si $B$ appartient à $\operatorname{Im} f$ ; donc lorsque le vecteur $B$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, la solution générale appartient à $\lambda e_1 + \mu e_2 + \operatorname{Ker} f$.

c) On sait que $||AX - B||$ est minimal pour $X_0$ égal à la projection orthogonale de $B$ sur $\operatorname{Im} f$. Pour déterminer cette projection, on écrit $B = \alpha u_1 + \beta u_2 + v$, avec $v \in [\operatorname{Vect}(u_1, u_2)]^{\perp}$. On résout alors le système :

$$\begin{cases} \langle B, u_1 \rangle = \alpha \langle u_1, u_1 \rangle + \beta \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle B, u_2 \rangle = \alpha \langle u_1, u_2 \rangle + \beta \langle u_2, u_2 \rangle \end{cases} \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 1 = n\alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

dont la solution est $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Les solutions sont les antécédents du vecteur $\frac{u_2}{2}$.

On résout donc l'équation $AX = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On trouve comme condition $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}$.

---

**Exercice 2.16.**

On note $E$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n$ entier naturel, $F_n$ est le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

On munit $E$ du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini par :

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

1. Soit $g$ l'élément de $E$ défini par : $\forall\, t \in [-1,1], g(t) = t^3 - \frac{3}{5}\,t$.
Montrer que $g$ est orthogonal à tout élément de $F_2$.

2. Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)$ de réels, que l'on déterminera, tel que pour tout $P$ de $F_2$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = aP\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) + bP(0) + cP\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)$$

3. Si $(a,b,c)$ est le triplet déterminé à la question précédente, montrer que pour tout $P$ de $F_5$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = aP\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) + bP(0) + cP\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)$$

4. Montrer que l'application $\theta : F_2 \to \mathbb{R}^3, P \mapsto \big(P\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big), P(0), P\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\big)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^3$. On note $P = \theta^{-1}\big(f\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big), f(0), f\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\big)$.

a) Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $c \in ]-1,1[$ tel que :

$$f(t) = P(t) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\,g(t)$$

[Pour cela, si $t$ fixé n'est pas une racine de $g$, on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - A.g(x)$, où $A$ est tel que $\varphi(t) = 0$, et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.]

b) En déduire l'existence d'un réel positif $M$ indépendant de $f$ tel que si $(a,b,c)$ désigne le triplet déterminé à la question 2 :

$$\Big| \int_{-1}^{1} f(t)\,dt - af\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) - bf(0) - cf\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) \Big| \leqslant M. \max_{u\in[-1,1]} |f^{(3)}(u)|$$

---

**Solution :**

1. Il suffit de vérifier que :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)dt=\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)t\,dt=\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)t^2\,dt=0$$

seule la deuxième intégrale demande un petit calcul (ne pas oublier que si $h$ est une fonction impaire, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(t)\,dt=0$).

2. L'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)dt=aP\big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)+bP(0)+cP\big(\sqrt{\frac{3}{5}}\big)$ est vérifiée pour tout $P\in F_2$ si et seulement si elle est vérifiée pour $P(t)=1$, $P(t)=t$ et $P(t)=t^2$.

Cela conduit au système $\begin{cases} 2=a+b+c \\ 0=-\sqrt{\frac{3}{5}}\,a+\sqrt{\frac{3}{5}}\,c \\ \frac{2}{3}=\frac{3}{5}a+\frac{3}{5}c \end{cases}$, qui donne :

$$a=c=\frac{5}{9},b=\frac{8}{9}$$

3.Il suffit maintenant de le vérifier pour $P(t)=t^4$ et $P(t)=t^5$, ce qui ne pose pas de problème.

4. On sait que $\dim F_2=\dim\mathbb{R}^3=3$. Il est évident que l'application $\theta$ est linéaire. Pour montrer que c'est un isomorphisme, montrons que son noyau est réduit au vecteur nul.
En effet, si $P\in\operatorname{Ker}\theta$, alors, le polynôme $P$ qui est de degré au plus 2, admet 3 racines distinctes : c'est le polynôme nul.

5. a) Soit $t\in[-1,1]$ fixé.
• Si $t$ est une des racines de $g$, l'égalité est vérifiée quel que soit $c$, puisque les deux membres de l'équation sont nuls.
• Sinon, soit $\varphi$ la fonction définie par $\varphi(x)=f(x)-P(x)-Ag(x)$, où $A$ est choisi de façon que $\varphi(t)=0$.

Cette fonction est de classe $C^3$ sur $[-1,1]$ et s'annule en 4 points : les trois racines de $g$ et le point $t$. Par le théorème de Rolle, $\varphi'$ s'annule en trois points distincts, $\varphi''$ s'annule en deux points distincts et $\varphi^{(3)}$ s'annule en un point $c$. Il existe donc $c\in]-1,1[$ tel que

$$0=\varphi^{(3)}(c)=f^{(3)}(c)-6A$$

Comme $A=\dfrac{f(t)-P(t)}{g(t)}$, il vient :

$$f(t)=P(t)+\frac{f^{(3)}(c)}{6}g(t)$$

b) Par construction $\big(f(-\sqrt{\frac{3}{5}}),f(0),f(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)=\big(P(-\sqrt{\frac{3}{5}}),P(0),P(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)$
Donc :

$$\begin{aligned}\Delta&=\Big|\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\big(\frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)\Big|\\ &=\Big|\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\big(\frac{5}{9}P(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}P(0)+\frac{5}{9}P(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)\Big|\\ &=\Big|\int_{-1}^{1}(f(t)-P(t))\,dt\Big|\leqslant\int_{-1}^{1}|f(t)-P(t)|\,dt\end{aligned}$$

D'après la question a), on a, pour tout $t\in[-1,1]$

$$|f(t) - P(t)| \leqslant \frac{\sup\limits_{u\in[-1,1]} |f'''(u)|}{6} |g(t)|$$

Donc

$$\Delta \leqslant M \times \sup_{u\in[-1,1]} |f'''(u)|, \text{ avec } M = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} |g(t)|\, dt$$

---

**Exercice 2.17.**

On note $E$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients complexes.

Une matrice $A$ de $E$ vérifie la propriété $(\Delta)$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = \lambda I_n$, où $I_n$ désigne la matrice identité de $E$.

1. Soit $A$ une matrice vérifiant la propriété $(\Delta)$. Montrer que $A$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, $A^{-1}$ vérifie la propriété $(\Delta)$.

2. Soient $A, B$ telles que $A, B$ et $A + B$ vérifient la propriété $(\Delta)$. Montrer que $AB + BA$ est une matrice scalaire.

3. Soit $A$ une matrice vérifiant la propriété $(\Delta)$, et $\lambda$ le scalaire ainsi associé à $A$.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de $A$ ?

b) Montrer que si $\lambda = 0$ et $A \neq 0$, la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

c) Montrer que si $\lambda \neq 0$, la matrice $A$ est diagonalisable (on pourra utiliser les deux racines carrées $\mu_1, \mu_2$ de $\lambda$).

4. Dans cette question $n = 4$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $F$ le sous espace vectoriel de $E$ engendré par les trois matrices $M, N, P$.

a) Montrer que tout élément de $F$ vérifie la propriété $(\Delta)$.

b) Déterminer les éléments de $F$ qui sont diagonalisables.

---

**Solution :**

1. Si $\lambda \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}A$, et si $\lambda = 0$, alors $A^2 = 0$ et si $A$ était inversible, alors, en multipliant par $A^{-1}$, on aurait $A = 0$, ce qui est absurde.

De plus

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{\lambda^2}\, A^2 = \frac{1}{\lambda} I$$

2. On a $A^2 = \lambda I, B^2 = \mu I$ et $(A + B)^2 = \nu I$. Donc

$$AB + BA = (\nu - \lambda - \mu)I$$

3. a) Le polynôme $P(X) = X^2 - \lambda$ est un polynôme annulateur de $A$. Les valeurs propres possibles sont les racines de ce polynôme.

b) Si $\lambda = 0$, le polynôme ci dessus admet une unique racine qui est 0. Ainsi si la matrice $A$ est diagonalisable, elle est semblable (donc égale) à 0.

c) Si $\lambda \neq 0$, notons $\mu_1, \mu_2$ les deux racines complexes de $\lambda$. On a :

$$0 = A^2 - \lambda I = (A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I)$$

On montre alors que $E = \operatorname{Ker}(A - \mu_1 I) \oplus \operatorname{Ker}(A - \mu_2 I)$. Pour cela, on analyse le problème en écrivant, pour $x$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, que si on a :
$x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Ker}(A - \mu_1 I)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(A - \mu_2 I)$, alors :
$Ax = Ax_1 + Ax_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$, ce qui conduit à $x_1 = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}(Ax - \mu_2 x)$ et $x_2 = \dfrac{1}{\mu_2 - \mu_1}(Ax - \mu_1 x)$
On vérifie alors que ces valeurs conviennent.

4. a) On vérifie par le calcul les relations suivantes $M^2 = I, N^2 = -I, P^2 = I$. Puis, les matrices suivantes (hors la matrice $J$) étant formé de 4 blocs de matrices $2 \times 2$, que l'on a :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\ NM = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

$$NP = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix},\ PN = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix},\ \text{avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix},\ NM = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

et si $A = aM + bN + cP$, alors $A^2 = (a^2 - b^2 + c^2)I$.

b) Par les questions précédentes :

$A$ est diagonalisable si et seulement si $a^2 - b^2 + c^2 \neq 0$.

---

**Exercice 2.18.**

On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Partie A**

1. Soit $f$ un élément de $\mathcal{C}$. On pose pour tout $x$ réel :

$$g(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\,dt \text{ et } h(x) = f(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt.$$

Montrer que $g$ et $h$ sont éléments de $\mathcal{C}$.

2. On considère les applications $T$ et $T'$ définies par :

$$\text{pour tout } f \text{ de } \mathcal{C},\ T(f) = g \text{ et } T'(f) = h.$$

où $g$ et $h$ sont définies en 1.
Montrer que $T$ et $T'$ sont des endomorphismes de $\mathcal{C}$.

3. Calculer, pour $f$ élément de $\mathcal{C}$, $T \circ T'(f)$. Peut-on en déduire que $T$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$ ? Montrer que $T$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$.

**Partie B**

1. A tout élément $f$ de $\mathcal{C}$ on associe la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} f(t)\,dt.$$

Montrer que $F$ est élément de $\mathcal{C}$.

2. Soit $G$ définie sur $\mathcal{C}$ par $G(f) = F$, où $F$ est définie en 1. Montrer que $G$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $G$.

---

**Solution :**

A. 1. La fonction $f$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on sait que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'argument est identique pour $h$.

2. Par linéarité de l'intégration, les applications $T$ et $T'$ sont linéaires. La question précédente montre que ce sont des endomorphismes de $\mathcal{C}$.

3. On a pour tout $x$ :

$$(T \circ T')(f)(x) = T(h)(x) = h(x) - \int_0^x h(t)\,dt$$
$$= f(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x (\mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du)\,dt$$

En posant $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (\mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-u} f(u)\,du)\,dt = \mathrm{e}^x \Phi(x) - \int_0^x f(t)\,dt$$

et donc $(T \circ T')(f)(x) = f(x)$, soit $(T \circ T')(f) = f$.

Ceci ne montre pas que $T'$ est l'inverse de $T$, puisque l'espace sur lequel $T$ opère n'est pas de dimension finie. Il faut calculer aussi $(T' \circ T)(f)$.

Pour tout $x$ :

$$(T' \circ T)(f)(x) = T'(g)(x) = g(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\,dt$$
$$= f(x) - \int_0^x f(t)\,dt + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t}(f(t) - \int_0^t f(u)\,du)\,dt$$
$$= f(x) - \int_0^x f(t)\,dt + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt - \mathrm{e}^x \int_0^x (\mathrm{e}^{-t} \int_0^t f(u)\,du)\,dt$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (\mathrm{e}^{-t} \int_0^t f(u)\,du)\,dt = -\mathrm{e}^{-x} \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\,dt$$

et on obtient : $(T' \circ T)(f)(x) = f(x)$.

Finalement, l'endomorphisme $T$ est bijectif, d'inverse $T'$.

B. 1. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. La linéarité de l'intégration prouve que l'application $G$ est linéaire et la question précédente montre que c'est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

L'application $G$ est injective. En effet si $G(f)=0$, alors en dérivant :

$$\forall\, x, \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt = 0 \implies \forall\, x, f(x)\mathrm{e}^{-x^2}=0 \implies f=0$$

L'application $G$ n'est pas surjective sur $\mathcal{C}$, puisque, par exemple, la fonction continue $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

[On peut remarquer que l'image de $G$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^1$. En effet, si $h \in C^1(\mathbb{R})$, alors son antécédent par $G$ sera $f(x) = h'(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

---

**Exercice 2.19.**

1. On se donne un réel $a$ et à chaque polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe le polynôme $\ell(P)$ défini par :

$$\ell(P)(X) = XP(X) + (X - X^2)P'(X) + (aX^3 - X^2 + X - 1)P''(X)$$

a) Vérifier que l'application $\ell$ est linéaire. Déterminer une valeur de $a$ pour laquelle $\ell$ est un endomorphisme de $R_2[X]$.

b) Le réel $a$ étant ainsi choisi, décrire le noyau et l'image de $\ell$, puis comparer $\ell^2 = \ell \circ \ell$ et $\ell^3 = \ell^2 \circ \ell$.

c) Montrer que $\left(X, X-1, \frac{1}{2}X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrire la matrice de $\ell$ dans cette base.

2. Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ qui vérifie $f^2 = f^3$.

a) Vérifier que $f^2$ est un projecteur.

b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$.

c) Dans cette question on suppose de plus que $f$ est injectif. Démontrer que $f = Id$.

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^2 = M^3$ et telles que $\dim \mathrm{Ker}(M - I_3) = 1$.
Démontrer que :

a) Les matrices diagonalisables de $\mathcal{E}$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Les matrices non diagonalisables de $\mathcal{E}$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

**Solution :**

1. a) La linéarité de $\ell$ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétéés des opérations. Si $P$ s'écrit $\alpha + \beta X + \gamma X^2$, alors :

$$\ell(P)(X) = -2\gamma + (\alpha + \beta + 2\gamma)X + \gamma(2a - 1)X^3$$

Ainsi pour $a = 1/2$, on a $\ell(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

b) Et alors : $\ell(P)(X) = -2\gamma + (\alpha + \beta + 2\gamma)X$.

D'où : $\mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{Vect}(X - 1)$ et $\mathrm{Im}(\ell) = \mathbb{R}_1[X]$.

De plus $\ell^2(P) = (\alpha + \beta)X$, et une récurrence facile montre que pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\ell^n(P)(X) = (\alpha + \beta)X$$

c) On remarque que $1 = X-(X-1)$. Ceci est suffisant pour montrer que la famille proposée est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans cette base, la matrice associée à $f$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a) On a $f^2 \circ f^2 = f^3 \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f^2$. Ainsi $f^2$ est un projecteur.

b) Si $f(x) = x$, alors $f^2(x) = f(x) = x$. Donc $\mathrm{Ker}(f - Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$. Réciproquement, si $f^2(x) = x$, alors $f^2(x) = f^3(x) = f(x)$, donc $f(x) = x$, et $\mathrm{Ker}(f^2 - Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f - Id)$, d'où l'égalité.

c) Puisque $f^2$ est un projecteur, on sait que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$. Si $f$ est injectif et si $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$, alors $f^2(x) = 0$ entraîne $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ donc $f(x) = 0$, et par injectivité de $f$ : $x = 0$ et $\mathrm{Ker}\, f^2 = \{0\}$.

Ainsi : $E = \mathrm{Ker}(f^2 - Id) = \mathrm{Ker}(f - Id)$, et $f = Id$.

3. On utilisera ici les résultats de la question précédente avec $E = \mathbb{R}^3$.
Comme $1 = \dim \mathrm{Ker}(f - Id) = \dim \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$, on a $\dim \mathrm{Ker}\, f^2 = 2$. Donc $f$ n'est pas injective, et sachant que $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2$, deux cas sont possibles :

• $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Dans ce cas, $f$ est diagonalisable, ses valeurs propres étant 1 et 0, les sous-espaces propres associés étant respectivement de dimension 1 et 2.

• $\mathrm{Ker}\, f$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle et $\mathrm{Ker}\, f^2$ un plan.
Soit $e_3$ un vecteur de $\mathrm{Ker}\, f^2$, tel que $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, f$. Si $e_2 = f(e_3)$, alors $e_2 \in \mathrm{Ker}\, f$, et la famille $(e_2, e_3)$ est libre dans $\mathrm{Ker}\, f^2$.
On la complète par un vecteur $e_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id)$. La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice associée à $f$ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas diagonalisable, puisque les valeurs propres sont 0 et 1, les sous-espaces propres associés étant tous deux des droites.

---

**Exercice 2.20.**

On considère dans cet exercice un entier $n \geqslant 1$ fixé et deux matrices symétriques $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive (resp. définie négative) si, pour toute colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX > 0$ (resp. ${}^tXMX < 0$).
On suppose que la matrice $B$ est définie positive.

1. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Montrer que toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $C_x$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $b(x,y) = {}^tC_xBC_y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

*On suppose dans la suite que $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire $b$.*

3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et $Q_1$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{C}$. Montrer que l'on a : $B = {}^tQ_1Q_1$.

4. On note $A' = {}^tQ_1^{-1}AQ_1^{-1}$. Montrer qu'il existe une matrice $Q_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_2Q_2 = I_n$ et que ${}^tQ_2A'Q_2$ soit une matrice diagonale.

5. En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = {}^tPP$ et $A = {}^tPAP$.

6. Montrer que les matrices $D + iI_n$ et $A + iB$ appartiennent à $GL_n(\mathbb{C})$ (où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

7. On note $\Delta_1$ et $\Delta_2$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(D+iI_n)^{-1} = \Delta_1+i\Delta_2$. Montrer que les coefficients diagonaux de $\Delta_2$ sont strictement négatifs.

On note $U$ et $V$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(A + iB)^{-1} = U + iV$. Montrer que $V$ est définie négative.

---

**Solution :**

1. La matrice $B$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre $\lambda$. On peut alors écrire

$$0 < X^TBX = \lambda X^TX = \lambda ||X||^2$$

ce qui implique que $\lambda > 0$.

2. Il faut montrer que l'application $b$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

• L'application $b$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ : c'est une «forme».

• L'application $b$ est symétrique, puisque :

$$b(y,x) = C_y^TBC_x = (C_y^TBC_x)^T = C_x^TBC_y = b(x,y).$$

• L'application $b$ est clairement linéaire par rapport à son deuxième argument, et par symétrie ...

• On a $b(x,x) = C_x^TBC_x > 0$, par la première question, et toujours grâce à cette question $b(x,x) = 0$ entraîne $x = 0$.

3. Notons, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $C'_x$ la colonne des coordonnées de $x$ dans la base $b$-orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$. Par changement de base, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $C_x = Q_1C'_x$ et que :

$$b(x,y) = C_x^TBC_y = (C'_x)^TC'_y$$

Donc, pour tout $x, y$ de $\mathbb{R}^n$ :

$$C_x^TQ_1^TQ_1C_y = C_x^TBC_y$$

ce qui entraîne que $B = Q_1^TQ_1$.

4. La matrice $A'$ étant symétrique réelle, il existe une matrice $Q_2$ orthogonale $(Q_2^{-1} = Q_2^T)$ telle que $Q_2^TA'Q_2$ est diagonale.

5. En posant $P = Q_2^{-1}Q_1$, on obtient une matrice inversible vérifiant :

$$A = Q_1^T(Q_2^{-1})^TDQ_2^{-1}Q_1 = P^TDP$$

et :
$$P^T P = Q_1^T (Q_2^{-1})^T Q_2^{-1} Q_1 = Q_1^T (Q_2 Q_2^T) Q_1 = Q_1^T Q_1 = B$$

6. Les éléments diagonaux de la matrice $D$ sont réels, donc ceux de la matrice $D + iI_n$ sont non nuls, puisque de partie imaginaire égale à 1. De plus $A + iB = P^T(D + iI_n)P$ implique que la matrice $A + iB$ est inversible, puisque $P$ l'est.

7. On sait que $(a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$. Les éléments de $\Delta_2$ sont donc de la forme $-\dfrac{1}{a^2+1} < 0$.
Comme $A + iB = P^T(D + iI_n)P$, il vient :
$$U + iV = (A + iB)^{-1} = P^{-1}(D + iI_n)^{-1}(P^T)^{-1} = P^{-1}(\Delta_1 + i\Delta_2)(P^T)^{-1}$$
Par conséquent $V = P^{-1}\Delta_2(P^T)^{-1}$ est une matrice symétrique réelle et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul :
$$X^T V X = ((P^T)^{-1}X)^T \Delta_2((P^T)^{-1}X) < 0$$
puisque les éléments de la matrice diagonale $\Delta_2$ sont tous strictement négatifs.

# 3

# PROBABILITÉS

---

**Exercice 3.1.**

Dans tout cet exercice, les variables aléatoires sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $X$ une variable aléatoire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(X > x) > 0$.

Justifier, pour tout $x > 0$, l'existence de :

$$\varphi(x) = \lim_{h \to 0^+} \left[ \frac{1}{h} \times \frac{P\big(x < X \leqslant x + h\big)}{P(X > x)} \right]$$

On appelle *taux de panne* de $X$ la fonction $\varphi$ ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels. Déterminer la constante $K$ pour que la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{K}{(1 + \beta\, x)^{\alpha+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Calculer le taux de panne d'une variable aléatoire $Y$ de densité $g$.

3. Déterminer les lois des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.

4. Déterminer la (les) loi(s) (densité et fonction de répartition) d'une variable aléatoire $W$ admettant pour taux de panne la fonction :

$$h(t) = a\, \lambda^a\, t^{a-1}, \text{ pour } t > 0,$$

où $a$ et $\lambda$ sont deux paramètres strictement positifs.

Que retrouve-t-on pour $a = 1$ ?

---

**Solution :**

1. On a $P(X > x) \neq 0$ et en notant $F$ la fonction de répartition de $X$ :

$$\frac{1}{h}\times\frac{P\big(x < X \leqslant x+h\big)}{P(X > x)} = \frac{1}{1-F(x)}\times\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Comme $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-F(x)}\times f(x)$$

2. $\star$ Pour $K \geqslant 0$, la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet une limite à gauche et une limite à droite en 0.

$\star$ On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+\beta x)^{\alpha+1}} = \Big[-\frac{1}{\alpha\beta}(1+\beta x)^{-\alpha}\Big]_0^{\to+\infty} = \frac{1}{\alpha\beta}$

Ainsi $g$ est une densité de probabilité si et seulement si $K = \alpha\beta$.

En notant alors $G$ la fonction de répartition associée, le calcul précédent donne :

$$\forall\, x \geqslant 0, G(x) = 1 - \frac{1}{(1+\beta x)^{\alpha}}$$

et

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{1-G(x)} = \frac{\alpha\beta}{1+\beta x}$$

3. Si $\varphi$ est constante, cette constante ne peut être nulle (sinon $f$ serait la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas raisonnable pour une densité de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$). En notant $\lambda > 0$ cette constante, on a donc :

$$\forall\, x > 0, \frac{F'(x)}{1-F(x)} = \lambda \text{ , soit } -\ln\big(1-F(x)\big) + \ln\big(1-F(0)\big) = \lambda x$$

et comme $F(0) = 0$ :

$$\forall\, x > 0, F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

4. On a, pour $t > 0$ : $\dfrac{F_W'(t)}{1-F_W(t)} = h(t) = a\,\lambda^a\, t^{a-1}$, d'où :

$$-\ln\big(1-F_W(t)\big) + \ln\big(1-F_W(0)\big) = \lambda^a t^a$$

et en intégrant sur $[0, x]$ :

$$\forall\, x \geqslant 0, F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda x)^a}$$

Par dérivation,une densité de $W$ est donc :

$$\forall\, x > 0, f_W(x) = a\lambda^a x^{a-1}\mathrm{e}^{-(\lambda x)^a}\text{, sinon } f_W(x) = 0$$

Si $a = 1$, on retrouve $h(t) = \lambda$ et pour $x \geqslant 0$, $F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

La variable $W$ suit donc la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

---

**Exercice 3.2.**

Soit $N$ un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant $N$ jetons numérotés de 1 à $N$ dans lequel on peut effectuer une succession de tirages **avec remise** d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $T_n$ le nombre (aléatoire) de numéros distincts obtenus au cours des $n$ premiers tirages.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul.

   a) Quelles sont les valeurs prises par $T_n$ ?

   b) Calculer $P([T_n = 1])$ et $P([T_n = n])$.

   c) Déterminer $P([T_n = 2])$.

2. Soit $(k, n)$ un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$.
Déterminer une relation entre $P([T_{n+1} = k])$, $P([T_n = k])$ et $P([T_n = k-1])$.

3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère le polynôme :

$$G_n = \sum_{k=1}^{N} P([T_n = k])X^k$$

a) Prouver l'égalité :

$$G_{n+1} = \frac{1}{N}(X - X^2)G_n' + XG_n$$

b) Pour tout entier naturel $n$ non nul, en reliant l'espérance $E(T_n)$ à $G_n$, exprimer $E(T_{n+1})$ à l'aide de $E(T_n)$, $N$ et $n$, puis déterminer $E(T_n)$ en fonction de $N$ et $n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{E(T_N)}{N}$.

---

**Solution :**

1. a) Si $n \leqslant N$, alors $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si $n \geqslant N$, $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$, ce que l'on peut écrire :

$$T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]$$

b) $\star$ Il y a $N^n$ listes de tirages possibles, toutes équiprobables et $N$ listes pour lesquelles $[T_n = 1]$ est réalisé (obtenir toujours le même numéro), soit :

$$P(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}$$

$\star$ Si $n > N$, l'événement $[T_n = n]$ est impossible, et si $n \leqslant N$ les listes réalisant $[T_n = n]$ sont les arrangements de $n$ éléments pris parmi les $N$ éléments présents, soit :

$$P([T_n = n]) = \frac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}$$

c) Les listes réalisant $(T_n = 2)$ sont constituées ainsi :
$\rightarrow$ on choisit les deux éléments $a$ et $b$ obtenus parmi les $N$ de $\dbinom{N}{2}$ façons ;
$\rightarrow$ il existe $2^n$ mots de longueur $n$ ne contenant pas d'autres lettres que les lettres $a$ et $b$, et il faut exclure les deux mots $a \ldots a$ et $b \ldots b$ qui réalisent $[T_n = 1]$ et pas $[T_n = 2]$. Ainsi :

$$P([T_n = 2]) = \frac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n}$$

2. Si on réalise $(T_n = k)$, alors au rang précédent $T_{n-1}$ n'a pu prendre que les valeurs $k-1$ et/ou $k$. Dans le premier cas on obtient au $n$-i'eme tirage un nouveau numéro, parmi les $N - (k-1)$ numéros non encore obtenus, et dans le second cas, on obtient au $n^{\text{ème}}$ tirage, un des $k$ numéros déjà obtenus. De manière plus formelle :

$$P(T_{n+1} = k) = P(T_n = k)P_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) + P(T_n = k-1)P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k)$$

Soit, compte tenu de ce que nous venons de dire :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N - (k-1)}{N}P(T_n = k-1)$$

3. a) On a $G_n = \sum\limits_{k=1}^{N} P(T_n = k)X^k$, donc $G_n' = \sum\limits_{k=1}^{N} kP(T_n = k)X^{k-1}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
G_{n+1} &= \sum_{k=1}^{N} P(T_{n+1}=k)X^k \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} P(T_n=k)X^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{N-(k-1)}{N} P(T_n=k-1)X^k \\
&= \frac{X}{N} \sum_{k=1}^{N} kP(T_n=k)X^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)P(T_n=j)X^{j+1} \\
&= \frac{X}{N} G'_n + \sum_{j=1}^{N} P(T_n=j)X^{j+1} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} jP(T_n=j)X^{j+1}
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$G_{n+1} = \frac{X}{N} G'_n + XG_n - \frac{X^2}{N} G'_n$$

b) On remarque que $E(T_n) = G'_n(1)$, donc en dérivant la relation précédente, il vient :

$$G'_{n+1} = \frac{1}{N}(1-2X)G'_n + \frac{1}{N}(X-X^2)G''_n + G_n + XG'_n$$

ce qui donne en 1, en sachant que $G_n(1) = 1$ :

$$E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n)$$

c'est-à-dire :

$$E(T_{n+1}) = \big(1 - \frac{1}{N}\big)E(T_n) + 1$$

Le traitement d'une telle suite arithmético-géométrique est standard : son point fixe est $N$, d'où l'on déduit : $E(T_n) - N = \big(1 - \frac{1}{N}\big)^n (E(T_0) - N)$, soit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, E(T_n) = N\big[1 - \big(1 - \frac{1}{N}\big)^n\big]$$

c) $\dfrac{E(T_N)}{N} = 1 - \big(1 - \frac{1}{N}\big)^N = 1 - \mathrm{e}^{N\ln(1-\frac{1}{N})}$.

Comme on sait que $\ln(1-u) \underset{(0)}{\sim} -u$, il vient :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(T_N)}{N} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

---

**Exercice 3.3.**

Soit $n > 0$ un entier naturel fixé.

1. On considère la suite $(P_j)_{j\geqslant 1}$ de fonctions polynômes définie par :

$$P_1(x) = x^{n-1} \text{ et pour } j \geqslant 1,\ P_{j+1}(x) = P_j(x) + \frac{1-x}{n} P'_j(x)$$

Montrer par récurrence que : $P_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (1 - \frac{i}{n})^{j-1}(x-1)^i$.

2. On dispose de $n$ boîtes dans lesquelles on lance au hasard l'une après l'autre des billes. Les résultats des lancers sont indépendants les uns des autres. Pour $j \geqslant 1$, on note $X_j$ le nombre de boîtes non vides après les $j$ premiers lancers.

a) i) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire $X_j$ ?

ii) Déterminer les lois de $X_j$ pour $j \in \{1, 2\}$.

iii) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{(X_j=i)}(X_{j+1} = k)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

iv) En déduire l'expression de $P(X_{j+1}=k)$, en fonction des $P(X_j=i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) Soit la fonction $G_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_j=k)x^{n-k}$.

Vérifier que les suites $(G_j(x))_{j\geqslant 1}$ et $(P_j(x))_{j\geqslant 1}$ sont égales.

c) En déduire : $P(X_j=n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})^{j-1}$.

d) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})^{j-1} = 0.$$

---

**Solution :**

1. $\star$ Pour $j=1$, on écrit :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i} = (1+(x-1))^{n-1} = x^{n-1} = P_1(x)$$

$\star$ Supposons le résultat acquis pour un certain rang $j$, alors en dérivant :

$$P_j'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} i(x-1)^{i-1}(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}$$

et en remplaçant :

$$\begin{aligned}P_j(x)+\frac{1-x}{n}P_j'(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}&(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}\\ &+ i(x-1)^{i-1}(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}\\ = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}&(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j-1}\binom{n-1}{i}(1-\frac{i}{n})\\ = \sum_{i=0}^{n-1}&(x-1)^i(1-\frac{i}{n})^{j}\binom{n-1}{i} = P_{j+1}(x)\end{aligned}$$

ce qui montre que le résultat est valide au rang $j+1$. On conclut par le principe de récurrence.

2. a) i) $X_j$ prend ses valeurs entre 1 et $\min(j,n)$.

ii) Sans problème :

$$P(X_1=1)=1 \text{ et } P(X_2=1)=\frac{1}{n},\ P(X_2=2)=\frac{n-1}{n}.$$

iii) En suivant l'évolution du nombre de boîtes non vides entre la fin du $j^{\text{ème}}$ et la fin du $(j+1)^{\text{ème}}$ tirage selon le résultat obtenu au $(j+1)^{\text{ème}}$ tirage :

$P_{(X_j=k)}(X_{j+1}=k) = \frac{k}{n}$

$P_{(X_j=k-1)}(X_{j+1}=k) = \frac{n-k+1}{n}$

si $i \notin \{k-1,k\}$, $P_{(X_j=i)}(X_{j+1}=k)=0$.

iv) La formule des probabilités totales se réduit alors à :

$$P(X_{j+1}=k) = \frac{k}{n}P(X_j=k) + \frac{n-k+1}{n}P(X_j=k-1)$$

b) On a $G_{j+1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_{j+1}=k)x^{n-k}$, soit en remplaçant :

$$\begin{aligned}G_{j+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P(X_j = k)x^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} P(X_j = k-1)x^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-n+n}{n} P(X_j = k)x^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n} P(X_j = k-1)x^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_j = k)x^{n-k} + \frac{1-x}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k)P(X_j = k)x^{n-k-1}\end{aligned}$$

$$G_{j+1}(x) = G_j(x) + \frac{1-x}{n} G'_j(x)$$

Comme $G_1(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)x^{n-k} = P(X_1 = 1)x^{n-1} = x^{n-1}$, les suites $(P_j)$ et $(G_j)$ ont les mêmes termes initiaux et vérifient les mêmes relations de récurrence, donc sont égales :

$$G_j(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x-1)^i (1-\frac{i}{n})^{j-1}$$

c) En particulier, pour $x = 0$ :

$$P(X_j = n) = G_j(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i (1-\frac{i}{n})^{j-1}$$

d) Pour $j$ tel que $1 \leqslant j < n$, l'événement $P(X_j = n)$ est impossible, donc de probabilité nulle, ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i (1-\frac{i}{n})^{j-1} = 0.$$

---

**Exercice 3.4.**

Une urne contient des boules noires et blanches, la proportion de boules noires étant $p$, avec $0 < p < 1$. On effectue une suite de tirages d'une boule avec, à chaque fois, remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.

**I.** On note $N$ le rang aléatoire où l'on obtient pour la première fois une boule noire et $B$ le rang aléatoire où l'on obtient pour la première fois une boule blanche.

1. Donner les lois, espérances et variances des variables aléatoires $N$ et $B$.

2. $N$ et $B$ sont-elles indépendantes ?

**II.** On note $X$ la longueur de la première suite de boules de même couleur et $Y$ la longueur de la deuxième suite de boules de même couleur.

Ainsi, l'événement $(X = 2, Y = 3)$ est réalisé si et seulement si on a tiré $(n, n, b, b, b, n, \ldots)$ ou $(b, b, n, n, n, b, \ldots)$ , où $n$ désigne le tirage d'une boule noire et $b$ celui d'une boule blanche.

1. Quelle est la loi du couple $(X, Y)$ ?

2. Déterminer la loi de $X$ et son espérance $E(X)$. Montrer que $E(X) \geqslant 2$.

3. Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.

4. Calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.

5. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si $p = 0{,}5$.

6. Déterminer la loi de $X+Y$. On distinguera les cas $p \neq 0{,}5$ et $p = 0{,}5$.

---

**Solution :**

**I)** 1. Les tirages ayant lieu avec remise, on sait que :

$$N \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et } B \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$$

et donc :

$$E(N) = \frac{1}{p},\ E(B) = \frac{1}{q} \text{ et } V(N) = \frac{q}{p^2},\ V(B) = \frac{p}{q^2}$$

2. $P([N=1] \cap [B=1]) = 0 \neq P(N=1)P(B=1)$, donc $N$ et $B$ ne sont pas indépendantes.

**II)** 1. Réaliser $(X = i) \cap (Y = j)$, c'est obtenir d'abord $i$ boules noires, puis $j$ boules blanches et enfin une boule noire, ou bien obtenir d'abord $i$ boules blanches, puis $j$ boules noires et enfin une boule blanche. Donc par indépendance des résultats des différents tirages :

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = p^i q^j p + q^i p^j q = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j$$

2. La loi marginale de $X$ est donc donnée par :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, P(X=i) = \sum_{j=1}^{\infty} (p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j) = p^{i+1} \sum_{j=1}^{\infty} q^j + q^{i+1} \sum_{j=1}^{\infty} p^j$$

$$= p^{i+1} \times \frac{q}{1-q} + q^{i+1} \times \frac{p}{1-p}$$

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, P(X=i) = qp^i + pq^i$$

Notons que $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = q \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{q}{1-q} = p + q = 1$ et $X$ est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

La convergence des série rencontrées étant claire, on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X=i) = qp \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} + pq \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$$

$$E(X) = qp \frac{1}{(1-p)^2} + pq \frac{1}{(1-q)^2}$$

soit :

$$E(X) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq}$$

Comme $p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2 \geqslant 0$, on a $p^2 + q^2 \geqslant 2pq$ et $E(X) \geqslant 2$ (avec égalité seulement pour $p = q = \frac{1}{2}$).

3. De la même façon, on obtient la loi marginale de $Y$, par sommation :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^*, P(Y=j) = \sum_{i=1}^{\infty} (p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j) = q^j p^2 \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} + p^j q^2 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$$

$$= q^j p^2 \times \frac{1}{1-p} + p^j q^2 \times \frac{1}{1-q}$$

$$P(Y=j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$$

(on peut encore vérifier que $\sum_{j=1}^{\infty} P(Y=j) = p^2 \times \frac{1}{1-q} + q^2 \times \frac{1}{1-p} = 1$ )

La convergence ne pose toujours pas de problème, et :

$$E(Y) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1} + q^2 \sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1}$$
$$= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2$$

Enfin :

$$E(Y(Y-1)) = p^2 q \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)q^{j-2} + q^2 p \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)p^{j-2}$$
$$= p^2 q \times \frac{2}{(1-q)^3} + q^2 p \times \frac{2}{(1-p)^3} = 2\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)$$

D'où par la formule de Koenig :

$$V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = 2\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} - 1\right)$$

4. $P(X = Y) = \sum_{i=1}^{\infty} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (p + q)(pq)^i = \sum_{i=1}^{\infty} (pq)^i$

$$P(X = Y) = \frac{pq}{1 - pq}$$

5. $\star$ Si $p = \frac{1}{2}$, on a :

$$P((X = i)(Y = j)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j = P(X = i)P(Y = j)$$

Donc $X$ et $Y$ sont indépendantes.

$\star$ Si $p \neq \frac{1}{2}$, on a :

$P(X = 1) = 2pq$, $P(Y = 1) = p^2 + q^2$, $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = p^2 q + q^2 p = pq$

et :

$pq = 2pq(p^2 + q^2) \iff p^2 + q^2 = \frac{1}{2} \iff 2p^2 - 2p + \frac{1}{2} = 0 \iff (p - \frac{1}{2})^2 = 0$

Donc, pour $p \neq \frac{1}{2}$, les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ ne sont pas indépendants et *a fortiori* les variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

6. $X + Y$ prend ses valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et pour $k \geqslant 2$ :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=1}^{k-1} (p^{i+1} q^{k-i} + q^{i+1} p^{k-i})$$
$$= pq^k \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{p}{q}\right)^i + qp^k \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$\star$ Si $p = q = \frac{1}{2}$, alors $\frac{p}{q} = \frac{q}{p} = 1$ et $P(X + Y = k) = 2(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$\star$ Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $\frac{p}{q} \neq 1$ et $\frac{q}{p} \neq 1$, l'identité géométrique donnant :

$$P(X + Y = k) = pq^k \frac{\frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q}\right)^k}{1 - \frac{p}{q}} + qp^k \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \frac{q}{p}}$$

Ce que l'on peut aussi écrire :

$$P(X + Y = k) = pq \frac{(p^k - q^k) + pq(p^{k-2} - q^{k-2})}{p - q} = pq \frac{p^{k-1} - q^{k-1}}{p - q}$$

---

**Exercice 3.5.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \{0, 1\}^p$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in ]0,1[$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_n = \{\omega \in \Omega / X_{np+1}(\omega) = s_1, X_{np+2}(\omega) = s_2, \ldots, X_{(n+1)p}(\omega) = s_p\}$$

Si $E$ est un événement, on désignera par $E^c$ son complémentaire dans l'univers $\Omega$.

1. Justifier l'assertion :

$\omega \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i) \implies s$ apparaît une infinité de fois dans $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots)$

2. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

3. Déterminer l'événement $\Big(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i)\Big)^c$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a : $P\Big(\bigcap\limits_{i=k}^{\infty} B_i^c\Big) = 0$.

5. En déduire que $P\Big(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i)\Big) = 1$ et interpréter ce résultat.

---

**Solution :**

1. $\omega \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i) \implies \forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i \implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists i \geqslant k, \omega \in B_i$, et donc $\omega$ appartient à une infinité de $B_i$ (sinon à partir d'un certain rang $\omega$ n'appartiendrait plus à aucun $B_i$).

2. $B_n$ dépend des variables aléatoires $X_{np+1}, X_{np+2}, \ldots, X_{(n+1)p}$. Donc des événements $B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$ (avec les indices $n_i$ deux à deux distincts) utilisent chacun des variables autres que les variables utilisées par les autres, on sait alors que l'indépendance des variables aléatoires $X_i, i \in \mathbb{N}^*$ donne l'indépendance des événements $B_n, n \in \mathbb{N}^*$.

3. $$\omega \in \Big(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i)\Big)^c \Longleftrightarrow \omega \notin \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \omega \notin \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i$$
$$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \forall i \geqslant k, \omega \notin B_i \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcap\limits_{i=k}^{\infty} B_i^c$$
$$\Longleftrightarrow \omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (\bigcap\limits_{i=k}^{\infty} B_i^c)$$

(on peut aussi appliquer directement les lois de Augustus de Morgan).

4. $\star$ Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_p$, on a :

$$P(B_0) = P(X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_p = s_p) = \alpha^r (1-\alpha)^{p-r},$$

où $r$ est le nombre de 1 de la séquence $s$. Le résultat est évidemment le même pour n'importe quel événement $B_i$.

$\star$ Donc $P(B_i^c) = 1 - \alpha^r (1-\alpha)^{p-r}$ et par indépendance :

$$P\Big(\bigcap_{i=k}^{k+j} B_i^c\Big) = [1-\alpha^r(1-\alpha)^{p-r}]^{j+1}$$

Comme $0 \leqslant 1-\alpha^r(1-\alpha)^{p-r} < 1$, on a $\lim\limits_{j\to+\infty} P\Big(\bigcap\limits_{i=k}^{k+j} B_i^c\Big) = 0$. Par le théorème de limite monotone , on a donc :

$$P\Big(\bigcap_{i=k}^{+\infty} B_i^c\Big) = 0$$

5. La probabilité d'une réunion étant majorée par la somme des probabilités, on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\Big) = 0$$

Donc :

$$P\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\Big) = 1$$

Ainsi, dans la succession des expériences de Bernoulli de ce problème, la liste $s$ de résultats consécutifs, à partir d'un rang de la forme $kp+1$, apparaît presque sûrement une infinité de fois.

---

**Exercice 3.6.**

Un sac contient $n$ billes numérotées de 1 à $n$. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac.

On appelle $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur ce numéro. Lorsque ce numéro est $k$, on tire sans remise $k$ billes que l'on distribue au hasard dans $p$ boîtes $B_1, \ldots, B_p$. On désigne par $Y_i$ la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par la boîte $B_i$ ($i \in \{1, \ldots, p\}$).

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y_i)$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$.

2. En déduire, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, la loi de $Y_i$ et calculer son espérance.

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\dfrac{Y_i}{X}$.

4. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(Y_1, \ldots, Y_p)$ ?

---

**Solution :**

1. La variable $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $Y_i$ est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit donc $(k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![0, n]\!]$, on a

$\star$ Si $\ell > k$, il est clair que $P((X = k) \cap (Y_i = \ell)) = 0$

$\star$ Si $\ell \leqslant k$, $P((X = k) \cap (Y_i = \ell)) = P(X = k)P_{(X=k)}(Y_i = \ell)$

Or $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$ et $P_{(X=k)}(Y_i = \ell) = \dbinom{k}{\ell}\Big(\dfrac{1}{p}\Big)^{\ell}\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)^{k-\ell}$ (succession de $k$ expériences indépendantes à deux issues : tomber dans $B_i$ ou tomber dans une autre boîte). Ainsi :

$$P((X = k) \cap (Y_i = \ell)) = \frac{1}{n}\binom{k}{\ell}\Big(\frac{1}{p}\Big)^{\ell}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{k-\ell}$$

2. Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, il vient par sommation :

$P(Y_i = \ell) = \sum\limits_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y_i=\ell)) = \sum\limits_{k=\ell}^{n} P((X=k)\cap(Y_i=\ell))$

$$P(Y_i=\ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}\big(\frac{1}{p}\big)^{\ell}\big(1-\frac{1}{p}\big)^{k-\ell}$$

Par conditionnement : $E(Y_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(Y_i/X=k)P(X=k)$

Or la loi conditionnelle de $Y_i$, conditionnée par la réalisation de l'événement $(X=k)$ est la loi $\mathcal{B}(k,\frac{1}{p})$ d'espérance $\frac{k}{p}$. Ainsi :

$$E(Y_i) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{np} = \frac{n(n+1)}{2np} = \frac{n+1}{2p}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} E\big(\frac{Y_i}{X}\big) &= \sum_{k=1}^{n} E\big(\frac{Y_i}{X}/X=k\big)P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} E\big(\frac{Y_i}{k}/X=k\big)P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}E\big(Y_i/X=k\big)P(X=k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{k}{np} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$E\big(\frac{Y_i}{X}\big) = \frac{1}{p}$$

4. On remarque que $Y_1+\cdots+Y_p = X$, donc :

$\star$ Si $\ell_1+\cdots+\ell_p \notin [\![1,n]\!]$, $P((Y_1=\ell_1)\cap\ldots\cap(Y_p=\ell_p)) = 0$

$\star$ Si $\ell_1+\cdots+\ell_p \in [\![1,n]\!]$,

$\alpha = P((Y_1=\ell_1)\cap\ldots\cap(Y_{p-1}=\ell_{p-1})\cap(Y_p=\ell_p))$

$\quad = P((Y_1=\ell_1)\cap\ldots\cap(Y_{p-1}=\ell_{p-1})\cap(X=\ell_1+\cdots+\ell_p))$

$\quad = P((Y_1=\ell_1)\cap\ldots\cap(Y_{p-1}=\ell_{p-1})/X=\ell_1+\cdots+\ell_p)P(X=\ell_1+\cdots+\ell_p)$

Sachant que $(X = \ell_1+\cdots+\ell_p)$ est réalisé, nous sommes en présence d'une distribution multinomiale (urne à $p$ catégories) ; les proportions valant $\frac{1}{p},\frac{1}{p},\ldots,\frac{1}{p}$ et donc, facilement :

$$\alpha = \frac{(\ell_1+\cdots+\ell_p)!}{\ell_1!\ell_2!\ldots\ell_p!}\times\big(\frac{1}{p}\big)^{\ell_1}\ldots\big(\frac{1}{p}\big)^{\ell_p}\times\frac{1}{n}$$

$$P((Y_1=\ell_1)\cap\ldots\cap(Y_p=\ell_p)) = \frac{(\ell_1+\cdots+\ell_p)!}{\ell_1!\ell_2!\ldots\ell_p!}\times\big(\frac{1}{p}\big)^{\ell_1+\cdots+\ell_p}\times\frac{1}{n}$$

---

**Exercice 3.7.**

Un point se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé. Il part de l'origine $O$ des coordonnées à l'instant 0.

Si à l'instant $t=k, k\in\mathbb{N}$ il se situe au point de coordonnées $(X_k,Y_k)$, alors à l'instant $t=k+1$ il se trouve au point de coordonnées $(X_{k+1},Y_{k+1})$ de sorte que $A_{k+1} = X_{k+1}-X_k$ et $B_{k+1} = Y_{k+1}-Y_k$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On suppose les $A_i$ et les $B_j$ mutuellement indépendantes.

Soit $\Phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\varphi_{m,\sigma}$ une densité de cette loi.

On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1. a) Quelle est la loi suivie par $X_n$ ?

 b) Soit $M_n$ le point de coordonnées $(X_n,Y_n)$.

Exprimer, à l'aide de la fonction $\Phi_{0,1}$, la probabilité qu'à l'instant $n$ le point $M_n$ se trouve dans le carré $C = [-1,1]^2$.

2. Soit $D_n$ la distance de $M_n$ à l'origine : $D_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$.

a) Reconnaître la loi de $X_n^2$, puis celle de $D_n^2$. En déduire la loi de $D_n$ et calculer son espérance.

b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $n$ le point se trouve dans le disque de centre $O$ et de rayon 1 ?

---

**Solution :**

1. a) Par télescopage $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. Les variables $A_i, i \in \mathbb{N}$ étant indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, on sait que $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,n)$.

b) $M$ est dans le carré voulu si et seulement si $-1 \leqslant X_n \leqslant 1$ et $-1 \leqslant Y_n \leqslant 1$, soit par indépendance des variables $X_n$ et $Y_n$ (les variables $A_i$ sont aussi indépendantes des variables $B_j$) :

$$P(M_n \in C) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1)P(-1 \leqslant Y \leqslant 1) = \big(\Phi_{0,\sqrt{n}}(1) - \Phi_{0,\sqrt{n}}(-1)\big)^2$$
$$= \big(2\Phi_{0,\sqrt{n}}(1) - 1\big)^2$$

Or $\Phi_{0,\sqrt{n}}(1) = P(X_n \leqslant 1) = P\big(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\big) = \Phi_{0,\sqrt{n}}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$, d'où :

$$P(M_n \in C) = \big(2\Phi\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big) - 1\big)^2$$

2. a) $X_n^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$ :

$$P(X_n^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X_n \leqslant \sqrt{x}) = 2\Phi_{0,\sqrt{n}}(\sqrt{x})$$

Par dérivation, une densité de $X_n^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi_{0,\sqrt{n}}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2n\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2n}}$$

Ainsi :

$$\text{pour } x > 0,\ f_{X^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\big(\frac{x}{2n}\big)^{\frac{1}{2}-1}\frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2n}}$$

On reconnaît une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi $\Gamma(2n, \frac{1}{2})$.

Comme $D_n^2 = X_n^2 + Y_n^2$, avec $X_n^2$ et $Y_n^2$ indépendantes, on sait alors que :

$$D_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2n, 1) = \mathcal{E}\big(\frac{1}{2n}\big)$$

de densité sur $\mathbb{R}_+^*$, $f_{D_n^2}(x) = \frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-\dfrac{x}{2n}}$

La variable $D_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geqslant 0$,

$$P(D_n \leqslant x) = P(D_n^2 \leqslant x^2)$$

ce qui donne par dérivation :

$$f_{D_n}(x) = 2xf_{D_n^2}(x^2) = \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}}$$

Par le théorème de transfert et sous réserve de convergence (absolue) de l'intégrale :

$$E(D_n) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \times \frac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2n}}\,dt$$

La convergence est claire et le changement de variable $u = \dfrac{t}{2n}$ donne :

$$E(D_n) = \sqrt{2n}\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\, \mathrm{e}^{-u}\, du = \sqrt{2n}\Gamma(3/2)$$

Comme $\Gamma(3/2) = \dfrac{1}{2}\Gamma(1/2)$, il vient finalement :

$$E(D_n) = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

b) $M_n$ est dans le disque unité si et seulement si $(D_n^2 \leqslant 1)$ est réalisé. Ainsi, la connaissance de la fonction de répartition de $D_n^2$ donne :

$$P(D_n \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}$$

---

**Exercice 3.8.**

Soit $a$ un réel strictement positif.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\ \exp\left(a\times\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. Étudier la continuité de $f$.

2. Déterminer la constante $C$ telle que $C\times f$ soit une fonction densité (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - \dfrac{1}{x}$).

3. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $C\times f$. Soit $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$, où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

a) Déterminer la loi de probabilité de $\left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$.

b) Déterminer la fonction de répartition de $Y$, puis une densité de $Y$.

---

**Solution :**

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1, et :

$\star$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{a} = 0 = f(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$, donc $f$ est continue au point 0.

$\star$ En revanche $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = 0 \neq 1 = f(1)$ et $f$ n'est pas continue en 1.

2. L'existence de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ne pose aucun problème et le changement de variable $x \mapsto u = 1 - \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, donc légitime et puisque $du = \dfrac{dx}{x^2}$, il donne :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{au}\,du = \left[\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{au}\right]_{\to-\infty}^0 = \frac{1}{a}$$

Soit :

$$C = \frac{1}{a}$$

3. a) La variable aléatoire $X$ prend ses valeurs dans $]0,1]$, donc $\dfrac{1}{X}$ dans $[1,+\infty[$ et sa partie entière dans $\mathbb{N}^*$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, en notant $F$ la fonction de répartition de $X$ :

$$\begin{aligned} P\big(\lfloor \tfrac{1}{X} \rfloor = k\big) &= P\big(k \leqslant \tfrac{1}{X} < k+1\big) = P\big(\tfrac{1}{k+1} < X \leqslant \tfrac{1}{k}\big) \\ &= F\big(\tfrac{1}{k}\big) - F\big(\tfrac{1}{k+1}\big) \end{aligned}$$

Or, pour $\alpha \geqslant 0$ :

$$F(\alpha) = \frac{1}{a}\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{1-\frac{1}{\alpha}} \mathrm{e}^{au} du = \mathrm{e}^{a(1-\frac{1}{\alpha})}$$

Donc :

$$P\big(\lfloor \tfrac{1}{X} \rfloor = k\big) = \mathrm{e}^{a(1-k)} - \mathrm{e}^{a(1-(k+1))} = \mathrm{e}^{-ak}(\mathrm{e}^{a} - 1)$$

b) $Y$ prend ses valeurs entre 0 et 1 et pour $y \in [0,1[$, on a par disjonction des cas :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\big((\lfloor \tfrac{1}{X} \rfloor = k) \cap (Y \leqslant y)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} P\big(\tfrac{1}{k+y} \leqslant X < \tfrac{1}{k}\big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \big[F\big(\tfrac{1}{k}\big) - F\big(\tfrac{1}{k+y}\big)\big] = \sum_{k=1}^{\infty} \big[\mathrm{e}^{a(1-k)} - \mathrm{e}^{a(1-k-y)}\big] \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-ay}) \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{-a})^{k-1} \end{aligned}$$

soit, par l'identité géométrique :

$$\forall\, y \in [0,1[, F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-ay}}{1 - \mathrm{e}^{-a}}$$

Par dérivation une densité $f_Y$ de $Y$ est, par exemple :

$$\forall\, y \in [0,1], f_Y(y) = \frac{a}{1-\mathrm{e}^{-a}}\,\mathrm{e}^{-ay}\ ;\ f_Y(y) = 0 \text{ sinon}$$

---

**Exercice 3.9.**

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Face avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ et Pile avec la probabilité $q = 1-p$. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face de suite (c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs). On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité $P$, modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n$ l'événement «on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéro $n$ et $n+1$», et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $A_n$ l'événement «les $n$ premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Face», et $B_n$ l'événement «les $n$ premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Pile».
Enfin, on pose $x_n = P(A_n), y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.

b) Trouver pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre $x_n$ et $u_n$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :

$$P(A_{n+1}/A_n), P(A_{n+1}/B_n), P(B_{n+1}/A_n), P(B_{n+1}/B_n)$$

d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = py_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose que $p = 1/2$.

a) On pose $v_n = 2^n y_n$. Déterminer une relation de récurrence entre $v_{n+1}, v_n$ et $v_{n-1}$.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de $x_n$ puis de $u_n$, en fonction de $n$.

c) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, et en donner une interprétation.

---

**Solution :**

1. a) Avec des notations évidentes :

$$u_1 = P(F_1F_2) = p^2,$$
$$x_2 = P(A_2) = P(P_1F_2) = pq,\ y_2 = P(B_2) = P(P_1P_2 \cup F_1P_2) = P(P_2) = q,$$
$$u_2 = P(P_1F_2F_3) = qp^2,$$
$$x_3 = P(P_2F_3) = pq,\ y_3 = P(P_3) - P(F_1F_2P_3) = q - p^2q$$
$$u_3 = P(P_2F_3F_4) = p^2q.$$

b) Clairement $u_n = P(A_nF_{n+1})$ et comme $F_{n+1}$ est indépendant des résultats des lancers précédents :

$$u_n = P(A_n)P(F_{n+1}) = px_n$$

c) $\star$ Si $A_n$ est réalisé, la série de lancers se termine par un résultat Face et $A_{n+1}$ ne peut plus se réaliser (on aurait eu deux fois de suite Face)

$$P(A_{n+1}/A_n) = 0$$

$\star$ En suivant le résultat du rang $n$, on a :

$$P(A_{n+1}/B_n) = P(F_{n+1}) = p\,;\ P(B_{n+1}/A_n) = P(P_{n+1}) = q$$
$$P(B_{n+1}/B_n) = P(P_{n+1}) = q$$

d) Pour $n \geqslant 2$, $(A_n, B_n)$ est un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales :

$$x_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(B_n)P(A_{n+1}/B_n) = y_np$$
$$y_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P(B_{n+1}/A_n) + P(B_n)P(B_{n+1}/B_n) = x_nq + y_nq$$
$$\begin{cases} x_{n+1} = py_n \\ y_{n+1} = qx_n + qy_n \end{cases}$$

2. On a ici : $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$

a) Donc, pour $n \geqslant 2$, $y_{n+2} = \dfrac{1}{2}(x_{n+1} + y_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\, y_{n+1} + \dfrac{1}{4}\, y_n$

ce que l'on peut écrire :

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

b) Le traitement des suites de Fibonacci est classique et il existe des scalaires $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\forall\, n \geqslant 2, v_n = \lambda\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \mu\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

En posant $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, les conditions initiales donnent alors

$$v_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

d'où l'on déduit :

$$y_n = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\Big)\ ;\ x_n = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{\beta^{n} - \alpha^{n}}{\beta - \alpha}\Big)$$

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\frac{\beta^{n} - \alpha^{n}}{\beta - \alpha}\Big)$$

c) La formule donnant $u_n$ est encore valable pour $n = 1$ et donc, la convergence des séries rencontrées étant évidente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{\beta}{2}\big)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{\alpha}{2}\big)^n\Big)$$

$$= \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\Big(\frac{1}{1-\frac{\beta}{2}} - 1 - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} + 1\Big) = \frac{1}{(2-\beta)(2-\alpha)}$$

Comme $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$ (racines de l'équation caractéristique ... ou calcul direct), on a finalement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$$

Ce qui prouve que l'on est quasi-certain d'obtenir au moins une fois deux Face de suite dans une succession indéfinie de lancers d'une pièce honnête.

---

**Exercice 3.10.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise ... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. a) Quel est le nombre total $N$ de tirages effectués lors de cette épreuve ?

b) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

2. On désigne par $X_k$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon.
On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

a) Calculer $P(X_1 = 1), P(X_2 = 1)$.

b) Pour tout entier naturel $j \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.

3. Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on note $U_j$ l'événement « On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage ».

a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.

b) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

c) Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des événements $(U_j)$, et en déduire la valeur de $P(X = 1)$.

Calculer $P(X = n)$.

---

**Solution :**

1. a) Suivons le nombre de boules restant dans l'urne après chaque pas du tirage :

$$n-1, n-1, n-2, n-2, \cdots, 1, 1, 0.$$

Il y a donc eu exactement $N = 2(n-1)+1 = 2n-1$ tirages pour vider l'urne.

b) Comme il y a remise après le $(2j)$-ième tirage, il y a autant de boules restantes avant le $(2j)$-ième tirage qu'après le $(2j)$-ième tirage (voir la question précédente). Il reste donc $n - j$ boules.

2. a) L'événement $(X_1 = 1)$ est l'événement « la boule noire est sortie au premier tirage » ; donc $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{n}$.
L'événement $(X_2 = 1)$ est l'événement « la boule noire est sortie au second tirage et pas au premier » ; donc

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1/X_1 = 0) = (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

b) Comme il n'y a pas remise lors des tirages impairs, il vient

$$(X_{2j} = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-1} = 0) \cap (X_{2j} = 1)$$

Par la formule des probabilités composées (c'est-à-dire en suivant la composition de l'urne au cours du temps) :

$$P(X_{2j} = 1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}$$

Et comme après le $(2j)$-ième tirage, l'urne se retrouve dans le même état qu'auparavant, on a

$$P(X_{2j+1} = 1) = P(X_{2j} = 1).$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $X_k$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

3. a) L'événement $U_n$ correspond à « la boule noire est sortie au dernier tirage ». Le tirage précédent étant pair, il y a eu remise, et c'est la même boule qui est sortie au $(2n-2)$-ième tirage. Ainsi la boule noire ne peut être sortie au dernier tirage, et $P(U_n) = 0$.

b) Comme

$$U_j = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_{2j-2} = 0) \cap (X_{2j-1} = 1),$$

par la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(U_j) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j+1} = \tfrac{n-j}{n(n-1)}$$

c) Seuls les tirages d'ordre impair évacuent la boule noire dès son apparition. Donc $(X = 1) = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$. Ces derniers événements étant deux à deux incompatibles, il vient :

$$P(X=1)=\sum_{j=1}^{n} P(U_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(n-j)=\frac{1}{2}$$

L'événement $(X=n)$ correspond à « la boule noire est sortie à tous les tirages pairs et n'a pas été choisie lors des tirages impairs, sauf lors du dernier ». Soit :

$(X=n)=(X_1=0)\cap(X_2=1)\cap(X_3=0)\cap\cdots\cap(X_{2n-2}=1)\cap(X_{2n-1}=1)$

En utilisant de nouveau la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(X=n)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}\times\cdots\times1\times1=\frac{1}{n!}$$

---

**Exercice 3.11.**

Deux trains sont prévus au départ d'une ville $A$ : un premier train doit partir à 12 heures et le suivant à 13 heures, mais ces départs peuvent subir un retard. Les retards sont des variables aléatoires $Z_1$ et $Z_2$ indépendantes, de même loi à valeurs dans $[0,1]$ (l'unité de temps est donc l'heure), de densité $f$, de fonction de répartition $F$, d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$.

1. Un voyageur arrive à l'instant $x$ après 12 heures, avec $x\in[0,1]$. On note $T_x$ le temps qu'il faudra à ce voyageur pour commencer son voyage.

 a) Montrer que $T_x$ prend ses valeurs entre 0 et $2-x$.

 b) Montrer que :

$$P(T_x\leqslant t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant 0\\ F(t+x)-F(x) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1-x\\ 1-F(x)+F(x)F(t+x-1) & \text{si } 1-x\leqslant t\leqslant 2-x\\ 1 & \text{si } 2-x\leqslant t\end{cases}$$

En déduire une densité de $T_x$.

2. Montrer que l'espérance $m(x)$ de $T_x$ vérifie :

$$\begin{aligned} m(x)&=\int_0^{1-x} tf(t+x)\,dt+(\mu+1-x)F(x)\\ &=1-x-\int_x^1 F(u)\,du+(\mu+1-x)F(x)\end{aligned}$$

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 F(z)\,dz$ et $\displaystyle\int_0^1 zF(z)\,dz$ en fonction de $\mu$ et $\sigma^2$.

 b) On suppose que le voyageur arrive au hasard entre midi et 13 heures.

On admet que l'espérance $M$ de son temps d'attente avant de commencer son voyage est alors donnée par :

$$M=\int_0^1 m(x)\,dx$$

Calculer $M$.

---

**Solution :**

1. a) La variable aléatoire $T_x$ prend ses valeurs entre 0 et $2-x$, puisque soit il prend le premier train (qui avait du retard et part juste à ce moment), soit le second (qui peut avoir jusqu'à une heure de retard).

b) • Si $x+t<1$. Dans ce cas $P(T_x \leqslant t)$ représente la probabilité que le train de 12 h. parte dans l'intervalle $[x, x+t]$. Donc $P(T_x \leqslant t) = F(t+x) - F(x)$.

• Si $1 \leqslant x+t < 2$. La probabilité de partir avec le train de midi est $1 - F(x)$, et celle de partir avec le train de 13 h. est la probabilité d'avoir raté celui de midi multiplié par la probabilité d'avoir un retard dans l'intervalle $[0, x+t-1]$. Ainsi $P(T_x \leqslant t) = 1 - F(x) + F(x)F(t+x-1)$.

• Si $x+t \geqslant 2$. On est alors certain d'avoir le train de 13 h. Donc $P(T_x \leqslant t) = 1$.

Par dérivation (par rapport à $t$) une densité de $T_x$ est :

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(x+t) & \text{si } 0 < t < 1-x \\ F(x)f(x+t-1) & \text{si } 1-x < t < 2-x \\ 0 & \text{si } 2-x < t \end{cases}$$

2. Un calcul évident donne :

$$\begin{aligned} E(T_x) &= \int_0^{1-x} tf(t+x)\,dt + \int_{1-x}^{2-x} tF(x)f(x+t-1)\,dt \\ &= \int_x^1 (u-x)f(u)du + F(x)\int_0^1 (u-x+1)f(u)\,du \\ &= \int_x^1 uf(u)\,du - x\int_x^1 f(u)\,du + \mu F(x) + (1-x)F(x) \\ &= 1 - x - \int_x^1 F(u)\,du + (\mu+1-x)F(x) \end{aligned}$$

la dernière ligne s'obtenant par une intégration par parties de la première intégrale.

3. a) Il vient :

$$\mu = \int_0^1 zf(z)\,dz = \big[zF(z)\big]_0^1 - \int_0^1 F(z)\,dz, \text{ d'où : } \int_0^1 F(z)\,dz = 1-\mu$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 (z-\mu)^2 f(z)\,dz = \big[(z-\mu)^2F(z)\big]_0^1 - 2\int_0^1 (z-\mu)F(z)\,dz$$

$$\int_0^1 zF(z)\,dz = \frac{1-\mu^2-\sigma^2}{2}$$

b) Il vient :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 E(T_x)\,dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\,dx - \int_0^1 \left(\int_x^1 F(z)dz\right) dx + \int_0^1 (\mu+1-x)F(x)\,dx \end{aligned}$$

À l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 F(z)\,dz\right) dx = \left[x\int_x^1 F(z)\,dz\right]_0^1 + \int_0^1 xF(x)\,dx = \frac{1-\mu^2-\sigma^2}{2}$$

et,

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1-\mu^2-\sigma^2}{2} + 1 - \mu^2 - \frac{1-\mu^2-\sigma^2}{2} = \frac{1}{2} + \sigma^2$$

Ainsi $E(W)$ est minimal lorsque $\sigma^2 = 0$, par exemple lorsqu'on est sûr que les trains sont à l'heure ...

**Exercice 3.12.**

Soient $X_1, X_2, X_3$ trois variables aléatoires réelles discrètes et centrées.
On note $M$ leur matrice de variance-covariance, soit : $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, avec

$$m_{i,j} = E(X_i X_j)$$

1. Montrer que la matrice $M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. On suppose dans cette question que :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de $M$.
Les variables aléatoires $X_1, X_2, X_3$ sont-elles alors mutuellement indépendantes ?

3. Soit $Y$ une variable aléatoire centrée. On définit une fonction $F$ sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(x_1, x_2, x_3) = E\big[\big(Y - \sum_{i=1}^{3} x_i X_i\big)^2\big]$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $F$ admette un *minimum* en $(a, b, c)$ est :

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$$

4. On suppose dans cette question que la matrice $M$ est celle de la question 2.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma)$ pour que le système linéaire $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ admette une solution.

b) Sous cette condition, donner l'expression de cette solution.

---

**Solution :**

1. La matrice $M$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont positives ou nulles car :

$$\begin{aligned} X^T M X &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j E(X_i X_j) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 E(X_i^2) + 2\sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(x_i X_i, x_j X_j) \\ &= V\big(\sum_{i=1}^{3} x_i X_i\big) \geqslant 0 \end{aligned}$$

2. On remarque que

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -J$$

On sait que les valeurs propres de $J$ sont 0, de sous-espace propre associé le plan engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et 3, la droite propre associée étant dirigée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $M$ sont donc 3 et 0, les sous-espaces propres étant les mêmes.

Comme $E(X_iX_j) = -1 \neq E(X_i)E(X_j) = 0$, les variables aléatoires $(X_i)$ ne sont pas indépendantes.

3. On a :
$F(x_1, x_2, x_3) = E(Y^2) - 2\sum_{i=1}^{3} x_iE(YX_i) + \sum_{i=1}^{3} x_i^2E(X_i^2) + 2\sum_{i<j} x_ix_jE(X_iX_j)$

Les points critiques de $F$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, sont donnés par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -2E(YX_1) + 2x_1E(X_1^2) + 2x_2E(X_1X_2) + 2x_3E(X_1X_3) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -2E(YX_2) + 2x_2E(X_2^2) + 2x_1E(X_1X_2) + 2x_3E(X_2X_3) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = -2E(YX_3) + 2x_3E(X_3^2) + 2x_3E(X_1X_3) + 2x_2E(X_2X_3) = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations est équivalent à l'équation matricielle

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1Y) \\ E(X_2Y) \\ E(X_3Y) \end{pmatrix}$$

Ainsi :
• si $F$ admet un minimum en $(a, b, c)$, c'est un point critique donné par la résolution de l'équation matricielle $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1Y) \\ E(X_2Y) \\ E(X_3Y) \end{pmatrix}$.

• Si $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1Y) \\ E(X_2Y) \\ E(X_3Y) \end{pmatrix}$, alors $(a, b, c)$ est un extremum de $F$ et $F(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0$ entraîne que cet extremum est un minimum.

4. a) L'équation $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ admet une solution si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ appartient à l'image de $M$, donc si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu)$ réels tels que :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} \alpha & = & 2\lambda - \mu \\ \beta & = & -\lambda + 2\mu \\ \gamma & = & -\lambda - \mu \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (en fait $x + y + z = 0$ est l'équation de l'image de $M$).

b) Sous la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la solution est :

$$x_1 = \frac{\alpha - \gamma}{3}, x_2 = \frac{\beta - \gamma}{3}, x_3 = \frac{2\gamma - \alpha - \beta}{3}$$

---

**Exercice 3.13.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $p \in ]0,1[$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme à densité sur $[0,n]$, et $N_n$ une variable aléatoire indépendante des $X_i$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

On pose :

$U_n = \max(X_0,\dots,X_n)$, $V_n = \min(X_0,\dots,X_n)$, $W_n = \min(X_0,\dots,X_{N_n})$

1. Déterminer la loi de $U_n$ , son espérance et sa variance.

2. Montrer que la loi de $V_n$ est celle de $n - U_n$. En déduire $E(V_n)$ et $V(V_n)$.

3. On note $G_n$ la fonction de répartition de $V_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(t)$ suivant les valeurs de $t$. Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer la fonction de répartition $H_n$ de $W_n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(t)$ suivant les valeurs de $t$. Conclure.

---

**Solution :**

1. Il vient immédiatement par indépendance :

$$F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ P\big(\bigcap\limits_{i=0}^{n}(X_i \leqslant x)\big) = \big(\frac{x}{n}\big)^{n+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Une densité de $U_n$ est alors, par dérivation :

$$f_{U_n}(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n}\big(\frac{x}{n}\big)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul immédiat donne :

$$E(U_n) = \frac{n(n+1)}{n+2}, V(U_n) = \frac{n^2(n+1)}{(n+3)(n+2)^2}$$

2. Comme $n - U_n = n - \max(X_0,\dots,X_n) = \min(n - X_0,\dots,n - X_n)$, et comme $n - X_i$ suit la loi uniforme sur $[0,n]$, la variable aléatoire $n - U_n$ suit la même loi que la variable $V_n$, et

$$E(V_n) = n - E(U_n) = \frac{n}{n+2}, V(V_n) = V(U_n)$$

3. Pour tout $x$ réel :

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \big(1 - \frac{x}{n}\big)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$$

et de manière évidente, pour $x$ fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi $(V_n)$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 1.

4. On a bien évidemment $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$, et $H_n(x) = 1 - P(W_n \geqslant x)$.

Lorsque $x \in [0, n]$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $((N=k))_{0\leqslant k\leqslant n}$, il vient :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{n} P(W_n > x \mid N=k)P(N=k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{k+1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)\left(p\left(1-\frac{x}{n}\right)+q\right)^n \\ &= 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{px}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Donc, à $x$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-px} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, et :

$(W_n)$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre $p$.

---

**Exercice 3.14.**

Une urne contient $n_1 \geqslant 1$ boules blanches, $n_2 \geqslant 1$ boules noires et $r \geqslant 0$ boules rouges. On note $n = n_1 + n_2$. Le jeu consiste à effectuer une succession de tirages au hasard une boule de l'urne, sans remise, jusqu'à ce que la boule tirée soit :

— ou blanche, auquel cas la partie est gagnée,

— ou noire, et la partie est perdue.

La longueur de la partie est le nombre de boules sorties de l'urne à la fin de la partie.

1. Compléter le programme Pascal qui suit pour qu'il simule le déroulement d'une partie :

```
program simul-escp
var n1,n2,r :integer ; L :integer ; x : char ;
begin
  readln(n1) ; readln(n2) ; readln(r) ;
  randomize ;
  ...
  repeat
    ...
    alea :=1+ random(n1+n2+r) ;
    if ((1 <= alea) and (alea <= n1))
    then ...
    ...
  until (x \= 'r') ;
  if (x='n') then write('perdu') else write('gagné') ;
  writeln (' et en ',L,' coups.') ;
end.
```

2. L'urne contenant au départ $r$ boules rouges, on note $G_r$ la variable aléatoire égale à 1 si le joueur gagne et à 0 sinon et $E(G_r)$ l'espérance de $G_r$.

a) Déterminer $E(G_r)$ pour $r = 0$ puis $r = 1$.

b) Montrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul $r$ :

$$E(G_r) = \frac{n_1}{n+r} + \frac{r}{n+r}E(G_{r-1}).$$

En déduire la valeur de $E(G_r)$.

3. On note $L_r$ la variable aléatoire égale à la longueur d'une partie lorsque l'urne contient $r$ boules rouges.

a) Quelles sont les valeurs possibles de $L_r$ ?

b) Calculer $E(L_0), E(L_1)$.

c) Déterminer une relation entre $P(L_{r-1} = k-1)$ et $P(L_r = k)$, pour $r \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$.

d) Etablir une relation de récurrence entre : $E(L_r)$ et $E(L_{r-1})$, pour $r \geqslant 1$.

e) En déduire l'expression de $E(L_r)$.

---

**Solution :**

1. Une proposition de programme :

```
Program simul ;
Var n1,n2,r,L : integer ; x : char ;
Begin
   readln(n1) ; readln(n2) ; readln(r) ;
   randomize ;
   L := 0 ;
   Repeat
      L := L+1 ;
      alea := 1 + random(n1+n2+r) ;
      if ((1<= alea) and (alea <= n1)) then
         Begin
         x : = 'b' ; n1 := n1-1 ;
         End
      else if ((n1+1 <= alea) and ( alea <= n1+n2)) then
         Begin
         x := 'n' ; n2 := n2-1
         end
      else
         Begin
         x := 'r' ; r := r-1
         end
   until (x <> 'r') ;
   if x='n' then write ('perdu') else write('gagné') ;
   writeln(' en',L,' coups')
End.
```

2. a) La variable aléatoire $G$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(G = 1) = E(G)$.

• Si $r = 0$, l'événement $(G = 1)$ est l'événement «tirer une boule blanche au premier tirage». Donc $E(G) = \dfrac{n_1}{n}$.

• Si $r = 1$, l'événement $(G = 1)$ est l'événement «tirer une boule blanche au premier tirage ou tirer une rouge puis une blanche au second tirage».

$$P(G = 1) = \frac{n_1}{n+1} + \frac{n_1}{n}\times\frac{1}{n+1} = \frac{n_1}{n}$$

b) On note $B_1, N_1, R_1$ les événements «tirer une boule blanche, (resp. noire, rouge) au premier tirage». C'est un système complet d'événements.

Notons $f(r) = E(G)$. Alors :
$P(G=1) = P(G_1 = 1/B_1)P(B_1) + P(G_1 = 1/N_1)P(N_1) + P(G_1 = 1/R_1)P(R_1)$
d'où :
$$f(r) = \frac{n_1}{n+r} + 0 + f(r-1)\times\frac{r}{n+r} = \frac{n_1}{n+r} + f(r-1)\times\frac{r}{n+r}$$
On sait que $f(0) = f(1) = \dfrac{n_1}{n}$.
Supposons que $f(r-1) = \dfrac{n_1}{n}$. La relation précédente montre que $f(r) = \dfrac{n_1}{n}$.
Finalement, par le principe de récurrence :
$$E(G) = \frac{n_1}{n}$$

3. a) On a $L(\Omega) = [\![1, r+1]\!]$.

b) Comme $L_0 = 1$, on a $E(L_0) = 1$.
On a $P(L_1 = 1) = \dfrac{n}{n+r}$ et $P(L_1 = 2) = 1 - P(L_1 = 1)$. D'où $E(L_1) = \dfrac{n+2}{n+1}$.

c) Soir $r \geqslant 1$. Alors, si $k \geqslant 2$,
$$P(L_r = k) = P(R_1)P(L_r = k/R_1) = \frac{r}{n+r}P(L_{r-1} = k-1).$$

d) Il vient :
$$E(L_r) = P(L_r = 1) + \sum_{k=2}^{r+1} kP(L_r = k)$$
$$= \frac{n}{n+r} + \frac{r}{n+r}\sum_{k=2}^{r+1} kP(L_{r-1} = k-1) = \frac{n}{n+r} + \frac{r}{n+r}\big(E(L_{r-1})+1\big)$$

e) On montre par récurrence (immédiate) que $E(L_r) = \dfrac{n+r+1}{n+r}$.

---

**Exercice 3.15.**

Soit $n$ un entier naturel non nul et $\lambda$ un nombre réel fixé. On pose
$$P_n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$$
Soit $X_1, \dots, X_n$ $n$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

1. Montrer que $P_n$ est strictement concave sur l'intervalle $[n-1, n]$.

2. Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $P_n(n-1) + P'_n(n-1) = P_{n-1}(n-1)$.

3. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que la suite $\big(P_n(n)\big)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

4. Quelle est la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ? A l'aide du théorème de la limite centrée, démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(n) = \dfrac{1}{2}$.

5. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a $P_n(n) > \dfrac{1}{2}$.

---

**Solution :**

1. En dérivant, il vient :

$$P_n'(\lambda) = -\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = -\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

et

$$P_n''(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\big(\frac{\lambda}{n} - 1\big) \leqslant 0, \qquad \text{si } \lambda \in ]n-1, n[$$

Ainsi $\lambda \mapsto P_n(\lambda)$ est strictement concave sur $[n-1, n]$.

2. Par calcul

$$\begin{aligned}P_n(n-1) + P_n'(n-1) &= \mathrm{e}^{-n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)^k}{k!} - \mathrm{e}^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)^k}{k!} \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)^k}{k!} \\ &= P_{n-1}(n-1)\end{aligned}$$

3. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 appliquée à $P_n$ sur $[n-1, n]$. Il vient :

$$P_n(n) = P_n(n-1) + P_n'(n-1) + \int_{n-1}^{n}\frac{(n-t)^2}{2}P_n''(t)\,dt$$

Donc, par la question précédente, et par concavité de $t \mapsto P_n(t)$

$$\begin{aligned}P_n(n) - P_{n-1}(n-1) &= P_n(n) - P_n(n-1) + P_n(n-1) - P_{n-1}(n-1) \\ &= P_n(n) - P_n(n-1) - P_n'(n-1) \\ &= \int_{n-1}^{n}\frac{(n-t)^2}{2}P_n''(t)dt < 0\end{aligned}$$

4. On remarque immédiatement que $P_n(n) = P(S_n \leqslant n)$. Ainsi :

$$P_n(n) = P(S_n - n \leqslant 0) = P(S_n - E(S_n) \leqslant 0) = P\big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0)$$

On termine en invoquant le théorème de la limite centrée, qui nous assure de la convergence en loi de $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

5. La suite $(P_n(n))$ est strictement décroissante et tend vers $1/2$, par valeurs supérieures, d'où le résultat.

---

**Exercice 3.16.**

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\theta$. On désire estimer, de la meilleure façon possible, $\mathrm{e}^{-\theta}$.

1. Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on pose $Y_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ sinon.

On pose $N = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Montrer que $\frac{1}{n}N$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

b) Calculer sa variance, et montrer que cet estimateur est convergent.

c) Interpréter ce résultat en expliquant pourquoi cet estimateur est un estimateur «naturel» de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

2. Pour tout entier naturel $j$, on définit la probabilité conditionnelle :

$$\varphi(j) = P(X_1 = 0/S_n = j)$$

Calculer $\varphi(j)$ (on vérifiera que le résultat est indépendant de la valeur de $\theta$).

3. a) Montrer que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

b) Calculer la variance de $\varphi(S_n)$ et montrer que $\varphi(S_n)$ est un estimateur convergent.

c) Montrer que, quelle que soit la valeur de $\theta$, $\varphi(S_n)$ a une variance inférieure à celle de $\frac{1}{n}N$.

---

**Solution :**

1. a) Pour tout $i$, la variable aléatoire $Y_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i$, avec

$$p_i = P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = e^{-\theta}$$

Donc

$$E\Big(\frac{N}{n}\Big) = \frac{1}{n}\times n\,\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-\theta}$$

Ainsi $\frac{1}{n}N$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

b) Les variables aléatoires $Y_i$ sont indépendantes, puisque les variables $X_i$ le sont. Au vu de la loi de $Y_i$, $V(Y_i) = \mathrm{e}^{-\theta}(1-\mathrm{e}^{-\theta})$ et :

$$V\Big(\frac{N}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\times nV(Y) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}$$

Ainsi $\frac{1}{n}N$ est un estimateur sans biais convergent de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

c) $\frac{1}{n}N$ représente la proportion, parmi les variables $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires égales à 0. C'est donc un estimateur naturel de $P(X_i = 0)$.

2. On a :

$$\varphi(j) = P(X_1 = 0/S_n = j) = \frac{P(X_1 = 0) \cap (S_n = j))}{P(S_n = j)}$$

$$= \frac{P(X_1 = 0) \cap (X_2 + \cdots + X_n = j))}{P(S_n = j)}$$

$$\varphi(j) = \frac{P(X_2 + \cdots + X_n = j)P(X_1 = 0)}{P(S_n = j)}$$

Or, par le cours, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$ et $\sum_{i=2}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $(n-1)\theta$. Aussi :

$$\varphi(j) = \frac{\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)\theta}(n-1)^j\theta^j}{j!}}{\mathrm{e}^{-n\theta}\frac{n^j\theta^j}{j!}} \times \mathrm{e}^{-\theta} = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^j$$

3. a) Par le théorème de transfert :

$$E(\varphi(S_n)) = E\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{S_n} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^k \mathrm{e}^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\theta}$$

Ainsi $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

b) On peut écrire :

$$\begin{aligned} E(\varphi(S_n)^2) &= E\big(\big(\frac{n-1}{n}\big)^{2S_n}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{n-1}{n}\big)^{2k}\mathrm{e}^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-n\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\big[(\frac{n-1}{n})^2 n\theta\big]^k = \mathrm{e}^{-n\theta}\mathrm{e}^{(\frac{n-1}{n})^2 n\theta} \end{aligned}$$

D'où :

$$V(\varphi(S_n)) = \mathrm{e}^{(n-2+\frac{1}{n})\theta-n\theta} - \mathrm{e}^{-2\theta} = \mathrm{e}^{-2\theta}(\mathrm{e}^{\theta/n}-1)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\varphi(S_n)) = 0$ et $\varphi(S_n)$ qui est un estimateur sans biais est un estimateur convergent de $\mathrm{e}^{-\theta}$.

c) Il s'agit de montrer ici l'inégalité $\mathrm{e}^{-\theta}(\mathrm{e}^{\theta/n}-1) \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\theta}}{n}$, ce qui revient à montrer que $\mathrm{e}^{\theta/n}-1 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\theta}-1}{n}$

Pour cela, on étudie sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - n.\mathrm{e}^{x/n} + n$, et on montre sa croissance, puisque sa dérivée est $h'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x/n}$ qui est positive. Comme $h(0) = 0$, $h$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

**Exercice 3.17.**

Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $S_k$ par : $S_k = \max(U_1, U_2, \ldots, U_k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire $X_n$ qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, et on pose alors $T_n = S_{X_n}$.

1. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_n$.

2. En déduire que $T_n$ est une variable aléatoire à densité. Donner une densité de $T_n$, puis calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$.

3. On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(T_n)$.

4. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_n$.

5. Écrire une fonction PASCAL dont l'intitulé est :

```
function maxi(S :array[0..9] of real) :real ;
```

qui rend le plus grand nombre du tableau `S`.

6. Écrire un programme en PASCAL permettant de simuler la variable aléatoire $T_{10}$.

---

**Solution :**

1. la famille $((X_n = 1), \ldots, (X_n = n))$ forme un système complet d'événements. Donc, pour tout $x$ réel,

$$P(T_n \leqslant x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n \leqslant x / X_n = k)P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(S_k \leqslant x)$$

Par indépendance des variables aléatoires $(U_i)$, il vient :

$$P(S_k \leqslant x) = \prod_{i=1}^{k} P(U_i \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^k & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soit :

$$F_{T_n}(x) = P(T_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x^k & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. La fonction $F_{T_n}$ est continue, croissante, de classe $C^1$ par morceaux, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$. Par dérivation, la variable aléatoire $T_n$ admet une fonction densité définie par :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

Un calcul immédiat d'espérance et de variance donne :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}, V(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+2} - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)^2$$

3. En écrivant $k = (k+1) - 1$, il vient :

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\left(n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)$$

et par l'équivalent proposé :

$$\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 1$$

Un argument similaire permet de dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 1 - 1 = 0$.

4. Si $x \leqslant 0$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 0$.

Si $x \geqslant 1$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = 1$.

Si $x \in ]0,1[$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \leqslant x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} \times \dfrac{1-x^n}{1-x} = 0$.

Donc $(T_n)_n$ converge en loi vers la variable aléatoire constante égale à 1.

5. Une proposition de programme :

```
Function maxi(S :array[0..9] of real) : real ;
Var k : integer ; m : real ;
begin
m := S[0] ;
For k := 1 to 9 do if S[k]>m then m := S[k] ;
maxi := m
end ;
```

6. Une proposition de programme :

```
Program exo ;
Var k,x : integer ; S : array[0..9] of real
function maxi(...)
Begin
For k := 0 to 9 do S[k]=0 ;
randomize ;
x := random(10)+1 ;
For k := 1 to x-1 do S[k] := random
```

```
writeln(maxi(S)) ;
End.
```

**Exercice 3.18.**

Le but de l'exercice est l'estimation d'un paramètre $\theta$ d'une variable aléatoire $X$ de densité $f$. On désigne par $n$ un entier naturel non nul. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un $n$-échantillon de la loi de $X$. On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un échantillon observé. Pour un tel échantillon observé donné, on appelle vraisemblance de $\theta$ la fonction $L$ définie par :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à utiliser comme estimation de $\theta$ pour un échantillon observé donné $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une valeur notée $\widehat{\theta}$ pour laquelle la vraisemblance $L(\theta)$ ou, de façon équivalente, $\ln(L(\theta))$ atteint un maximum. Cette valeur $\widehat{\theta}$ est fonction de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et on peut alors construire un estimateur $Y_n$ du paramètre $\theta$ comme fonction correspondante des variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Par exemple, si $\widehat{\theta} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, on prendra : $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1. *Estimation de la moyenne d'une loi normale*

On suppose que $X$ suit une loi normale de paramètres $m$ et $\sigma^2$, où $\theta = m$ est un réel inconnu et $\sigma$ un réel strictement positif connu.

a) Pour un échantillon observé donné $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, déterminer l'expression de $L(\theta)$.

b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à $\theta$ associe $\ln(L(\theta))$ et montrer que la valeur $\widehat{\theta}$ pour laquelle cette fonction atteint son maximum est :

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

c) En déduire un estimateur $Y_n$ de $m$. Est-il sans biais ? La suite d'estimateurs $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $m$ est-elle convergente ?

2. *Estimation de la variance d'une loi normale*

On suppose que $X$ suit une loi normale de paramètres $m$ et $\sigma^2$, où $\theta = \sigma^2$ est un réel inconnu et $m$ un réel connu.

a) Pour un échantillon observé donné $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, déterminer l'expression de $L(\theta)$.

b) Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction qui à $\theta$ associe $\ln(L(\theta))$ et montrer que la valeur $\widehat{\theta}$ pour laquelle cette fonction atteint son maximum est :

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

c) En déduire un estimateur $Z_n$ de $\sigma^2$. Est-il sans biais ? La suite d'estimateurs $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\sigma^2$ est-elle convergente ?

---

**Solution :**

Rappelons que si $X$ suit la loi normale de paramètres $m$ et $\sigma^2$, une densité $f$ de $X$ est : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

1. a) On peut écrire :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

b) Posons $\varphi(\theta) = \ln L(\theta)$. Il vient :

$$\varphi(\theta) = -n\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i)^2 = -n\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}g(\theta)$$

Ainsi, maximiser $\varphi$ revient à minimiser $g$. Or :

$$g'(\theta) = 2\sum_{i=1}^{n}(\theta - x_i) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \theta \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \widehat{\theta}$$

Ainsi $\varphi$ est maximale pour la moyenne empirique $\widehat{\theta}$.

c) D'après l'énoncé, $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Immédiatement, $E(Y_n) = m$ et $V(Y_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$. La suite d'estimateurs $(Y_n)$ est sans biais et convergente.

2. a) Cette fois, pour $\theta > 0$ :

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right)$$

b) Posons $\psi(\theta) = \ln(L(\theta))$. Il vient :

$$\psi(\theta) = -\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi\theta) = -\frac{1}{2}h(\theta)$$

avec :

$$h(\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 + n\ln(2\pi\theta)$$

Maximiser $\psi$ revient à minimiser $h$. Comme

$$h'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$$

$$h'(\theta) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \theta \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \widehat{\theta}$$

c) Un estimateur de $\sigma^2$ est donc :

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 = \widehat{\theta}$$

Un calcul immédiat donne $E(Z_n) = \sigma^2$. C'est un estimateur sans biais.

Par indépendance des $(X_i)$, il vient $V(Z_n) = \dfrac{1}{n}V((X-m)^2)$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Z_n) = 0$. La suite d'estimateurs $(Z_n)$ est une suite d'estimateurs sans biais et convergente de $\sigma^2$.

---

**Exercice 3.19.**

$n$ joueurs ($n \geqslant 2$) $J_1, J_2, \ldots, J_n$ jouent l'un après l'autre dans l'ordre de leurs indices. À chaque joueur $J_k$ est imparti un événement $A_k$ dont la probabilité de réalisation est un réel $p_k \in ]0,1[$. On notera $q_k = 1 - p_k$ et on pose $q_0 = 1$.

Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.
Lorsqu'aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, puis si de nouveau aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, *etc.*

On note $G_k$ l'événement « le joueur $J_k$ gagne » et on suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, le joueur $J_k$ ne peut jouer qu'aux coups $pn + k$.

2. En déduire la probabilité de $G_k$ en fonction des réels $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ et $p_k$.

3. Montrer que le jeu se termine de façon presque certaine après un nombre fini de coups.

4. On dit que le jeu est équitable si chaque joueur à la même probabilité de gagner soit $\dfrac{1}{n}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_1, \dots, p_n)$ pour que le jeu soit équitable.

5. On suppose que le jeu est équitable.
   a) Montrer que $p_1 \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   b) On suppose que l'on a $p_1 = \dfrac{1}{n}$. Déterminer alors $p_2, \dots, p_n$.

6. On suppose encore le jeu équitable. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Déterminer l'espérance de $X$.

---

**Solution :**

1. Le joueur $J_k$ joue (éventuellement) au coup $k$. Il rejouera (éventuellement) après un tour complet soit au coup $n + k$, puis (éventuellement) au coup $2n + k$, etc.

2. Notons $A_{k,p}$ l'événement « le joueur $J_k$ gagne au coup $(np + k)$ ». Au vu de la définition du jeu :
$$P(A_{k,p}) = (q_0 q_1 \dots q_n)^p (q_0 q_1 \dots q_{k-1}) p_k$$
Comme $G_k = \bigcup_{p \geqslant 0} A_{k,p}$, il vient par indépendance :
$$P(G_k) = \sum_{p=0}^{\infty} P(A_{k,p}) = \sum_{p=0}^{\infty} (q_0 q_1 \dots q_n)^p (q_0 q_1 \dots q_{k-1}) p_k$$
$$P(G_k) = (q_0 q_1 \dots q_{k-1}) p_k \times \frac{1}{1 - q_0 q_1 \dots q_n}$$
ou
$$P(G_k) = \frac{1}{1 - q_0 q_1 \dots q_n} (q_0 q_1 \dots q_{k-1} - q_0 q_1 \dots q_k)$$

3. On calcule :
$$\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = \frac{1}{1 - q_0 q_1 \dots q_n} \sum_{k=1}^{n} (q_0 q_1 \dots q_{k-1} - q_0 q_1 \dots q_k)$$
$$= \frac{1}{1 - q_0 q_1 \dots q_n} (q_0 - q_0 q_1 \dots q_n) = 1$$
(ne pas oublier que $q_0 = 1$)

4. On veut que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(G_k) = P(G_{k+1})$, soit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ :

$$q_0 \dots q_{k-1} - q_0 \dots q_k = q_0 \dots q_k - q_0 \dots q_{k+1}$$

Si l'on note $a_k = q_0 \dots q_k$, l'équation précédente s'écrit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ :

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} = 0$$

Son équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$. On sait alors qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a_k = \lambda + \mu k$, avec :

$$\begin{cases} a_0 = q_0 = 1 = \lambda \\ a_1 = q_1 = 1 + \mu \end{cases}$$

(on peut aussi remarquer que la relation précédente caractérise les suites arithmétiques)

Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si :

$$\text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!],\ a_k = 1 - k(1-q_1) = 1 - kp_1.$$

5. a) Supposons que le jeu est équitable. Alors comme $a_n = 1 - np_1 \leqslant 1$, il vient $p_1 \leqslant \dfrac{1}{n}$.

b) Si $p_1 = \dfrac{1}{n}$, alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = q_0 \dots q_k = 1 - \dfrac{k}{n}$.

- $a_1 = q_1 = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $p_1 = \dfrac{1}{n}$.
- $a_2 = q_1 q_2 = \big(1 - \frac{1}{n}\big)q_2 = 1 - \dfrac{2}{n}$ et $p_2 = \dfrac{1}{n-1}$.
- Supposons que pour un certain rang $i < k$, on ait $p_{i-1} = \dfrac{1}{n-i+2}$. alors :

$a_i = \big(1 - \frac{1}{n}\big)\big(1 - \frac{1}{n-1}\big)\dots\big(1 - \frac{1}{n-i+2}\big)q_i = 1 - \dfrac{i}{n} \implies q_i = \dfrac{n-i}{n-i-1}$

et $p_i = \dfrac{1}{n-i+1}$ ; on conclut par le principe de récurrence limité.

6. On a $X(\Omega) = [1, +\infty[$ et $(X = pn + k) = A_{k,p}$. On sait que

$$P(A_{k,p}) = (1-np_1)^p(1-(k-1)p_1)\frac{p_1}{1-(k-1)p_1} = (1-np_1)^p p_1$$

Donc :

$$E(X) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}(pn+k)P(A_{k,p}) = \sum_{p=0}^{+\infty} pn^2(1-np_1)^p p_1 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$E(X) = p_1 \times \frac{n^3(n+1)}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} p(1-np_1)^p$$

Après calculs :

$$E(X) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1-np_1}{p_1}$$

---

**Exercice 3.20.**

Dans tout cet exercice, les variables aléatoires sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et à densité continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $X$ une variable aléatoire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(X > x) > 0$.

Justifier, pour tout $x > 0$, l'existence de :

$$\varphi(x) = \lim_{h \to 0^+}\left[\frac{1}{h} \times \frac{P\big(x < X \leqslant x + h\big)}{P(X > x)}\right]$$

On appelle *taux de panne* de $X$ la fonction $\varphi$ ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer le taux de panne d'une variable aléatoire $Y$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

3. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité $f > 0$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction de répartition $F$ et de taux de panne $\varphi$.
On note $G = 1 - F$.

a) Étudier, pour $a > 0$, la convergence des intégrales

$$\int_0^a \varphi(t)\,dt \text{ et } \int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

et justifier que, pour $x > 0$, on peut définir

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

b) La fonction $\Phi$ est-elle bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

4. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \Phi(X)$.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

---

**Solution :**

1. On a : $\dfrac{1}{h} \times \dfrac{P(x < X \leqslant x+h)}{P(X > x)} = \dfrac{1}{1 - F(x)} \times \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$
donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{P(x < X \leqslant x+h)}{P(X > x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

puisque la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Si $Y$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, il vient, pour tout $x > 0$ :

$$\varphi(x) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \lambda$$

3. a) Les hypothèses impliquent que $\varphi \geqslant 0$, continue, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\varphi = \dfrac{f}{1 - F}$, une primitive de $\varphi$ est $-\ln(1 - F)$, et :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^a \varphi(t)\,dt = -\ln(1 - F(a))$$

Ainsi $\Phi(a) = \displaystyle\int_0^a \varphi(t)\,dt$ existe bien, pour tout $a > 0$.
En revanche, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x \varphi(t)\,dt = \ln(1 - F(a)) - \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - F(x)) = +\infty$$

et donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ diverge

b) Comme $f > 0$, la fonction $\varphi$ est strictement positive et $\Phi$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même car elle est continue et strictement croissante et $\displaystyle\lim_{+\infty} \Phi = +\infty$.

4. a) Pour $y > 0$, il vient :

$$P(\Phi(X) \leqslant y) = P(X \leqslant \Phi^{-1}(y)) = F(\Phi^{-1}(y)) = 1 - \exp -(\Phi(\Phi^{-1}(y))) = 1 - \mathrm{e}^{-y}$$

Donc $X$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

b) On a $F = 1 - \mathrm{e}^{-\Phi}$, d'où :

$$P(Y \leqslant y) = P(1 - y \leqslant e^{-\Phi(X)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{\ln(1-y)} = y & \text{si } 0 < y < 1 \end{cases}$$

Ainsi $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

---

**Exercice 3.21.**

Une fabrique d'appareils de précision utilise dans une de ses deux usines des machines de modèle 1 dont la caractéristique de production suit une loi normale d'espérance $m_1$ et d'écart-type $\sigma_1$ et dans l'autre des machines de modèle 2 dont la caractéristique de production suit une loi normale d'espérance $m_2$ et d'écart-type $\sigma_2$.

Pour contrôler l'homogénéité de la production, on considère d'une part $n_1$ variables aléatoires $X_i$ associées à la production des machines de type 1 et d'autre part $n_2$ variables aléatoires $Y_j$ associées à la production des machines de type 2, toutes ces variables aléatoires étant indépendantes.

1. Montrer que $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1} \sum\limits_{i=1}^{n_1} X_i$ est un estimateur sans biais et convergent de $m_1$ et que $\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2} \sum\limits_{j=1}^{n_2} Y_j$ est un estimateur sans biais et convergent de $m_2$.

En déduire un estimateur sans biais $T$ de $\theta = m_1 - m_2$. Donner la loi de $T$, son espérance et sa variance.

2. On suppose $\sigma_1^2 = 5.10^{-4}$ , $\sigma_2^2 = 6.10^{-4}$ , $n_1 = 50$ et $n_2 = 40$.

a) Déterminer la probabilité d'avoir une estimation qui s'écarte de la valeur nulle de plus de 0,01 lorsque $m_1 = m_2$. (*)

b) même question lorsque $m_1 - m_2 = 0{,}005$. (*)

3. On règle les machines de façon que $m_1 = m_2$.

a) On suppose $m_1 = m_2$ , $\sigma_1^2 = 5.10^{-4}$ , $\sigma_2^2 = 6.10^{-4}$ , $n_1 = 50$ et $n_2 = 40$. Déterminer $a$ tel que $P(|T| \leqslant a) \geqslant 0{,}95$. (*)

b) Le réglage est considéré comme convenable si l'estimation de $\theta$ donné par les réalisations des deux échantillons $(X_i)$ et $(Y_j)$ a une valeur qui s'écarte d'au plus 0,01 de la valeur nulle. Le réglage peut-il être considéré comme convenable pour les observations suivantes : $\sum\limits_{i=1}^{50} X_i = 90{,}2$ et $\sum\limits_{j=1}^{40} Y_j = 72{,}2$ ?

(*) $\Phi$ étant la fonction de répartition de la loi normale réduite, on donne :

$\Phi(1) \simeq 0{,}841$ , $\Phi(1,96) \simeq 0{,}975$, $\Phi(2) \simeq 0{,}977$ et $\Phi(3) \simeq 0{,}999$.

---

**Solution :**

1. Un calcul immédiat donne :

$$E(\overline{X}) = m_1, V(\overline{X}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} \text{ et } E(\overline{Y}) = m_2, V(\overline{Y}) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Donc $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$) est un estimateur sans biais convergent de $m_1$ (resp. $m_2$). Ainsi $T = \overline{X} - \overline{Y}$ est un estimateur sans biais de $m_1 - m_2$.
La variable $T$ suit la loi normale de paramètres :

$$E(T) = m_1 - m_2 \text{ et } V(T) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

2. Un calcul donne $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = 0.25{\times}10^{-4}$ et $\sigma(T) = 0.5{\times}10^{-2}$.

a) Lorsque $m_1 = m_2$ ; $T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 0.25{\times}10^{-4})$, et $T^\star = 200T$ suit la loi normale centrée réduite. Donc :

$$P(|T| \geqslant 0.01) = 1 - P(|T^\star| < 2) = 1 - 0.954 = 0.046$$

b) Lorsque $m_1 - m_2 = 0.005$ ; $T$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0.005; 0.25{\times}10^{-4})$, et $T^\star = 200(T - 0.005)$ suit la loi normale centrée réduite. Donc :

$$P(|T| \geqslant 0.01) = 1 - P(-3 < T^\star < 1) = 0.16$$

3. a) On sait que dans cette configuration :

$$P(|T| \leqslant a) = P(|T^\star| \leqslant 200a) = 2\Phi(200a) - 1$$

et

$$P(|T| \leqslant a) \geqslant 0.95 \iff \Phi(200a) \geqslant 0.975 \iff 200a \geqslant 1.96$$
$$\iff a \geqslant 0.0098$$

b) On a :

$$\theta = \frac{90.2}{50} - \frac{72.2}{40} = -0.001$$

Le réglage peut être considéré comme correct.

---

**Exercice 3.22.**

Un concessionnaire vend un type de véhicule selon trois modes différents, l'un de ces modes étant la vente par le biais d'un site Internet. On suppose que chacun des achats est effectué indépendamment des autres et ne porte que sur un véhicule. Pour une suite aléatoire d'achats, on s'intéresse à la probabilité que le nombre d'achats par Internet soit exactement $\frac{1}{3}$ des ventes effectuées, c'est à dire que la fréquence des choix d'achat par Internet soit $\frac{1}{3}$.
On suppose que la probabilité qu'un acheteur choisisse Internet est $p \in ]0, 1[$.

1. On observe une suite de $3n$ achats ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) quelle est la probabilité $p_n$ que la fréquence d'achats sur Internet soit $\frac{1}{3}$ ?

b) Montrer que $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant \frac{27}{4}(1-p)^2 p$.

En déduire que $p_n \leqslant \left(\frac{27}{4}p(1-p)^2\right)^{n-1} p_1$.

c) En étudiant les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{27}{4}x^2(1-x)$, montrer que si $p \neq \frac{1}{3}$, la série de terme général $p_n$ converge.

On suppose dans la suite $p \neq \dfrac{1}{3}$.

2. Lors de l'observation d'une série d'achats, on note $q_n$ la probabilité que la fréquence d'achat par Internet soit égale, pour la première fois, à $\dfrac{1}{3}$ lors du $(3n)^{\text{ème}}$ achat.

a) Montrer que $p_1 = q_1$ et que $\forall\, n \geqslant 2, p_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_i p_{n-i} + q_n$.

b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - q_k) = \sum\limits_{2 \leqslant i+j \leqslant n} p_i q_j$, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} q_j\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k).$$

3. On note $Q_n$ la probabilité d'obtenir au moins une fois la fréquence $\dfrac{1}{3}$ d'achats par Internet au cours d'une série de $3n$ achats.

a) Quelle est la valeur de $Q_n$ en fonction des probabilités $q_k$ ?

b) Montrer que la série de terme général $q_n$ est convergente.

c) On note $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = \dfrac{S}{S+1}$. Quelle est la signification de ce résultat ?

---

**Solution :**

1. a) La fréquence sera de $1/3$ si sur les $3n$ achats, $n$ ont été effectués sur le Net, soit :

$$p_n = \binom{3n}{n} p^n (1-p)^{2n}.$$

b) Il vient :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} p(1-p)^2 \leqslant 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} p(1-p)^2 = \frac{27}{4} p(1-p)^2$$

Donc $p_{n+1} \leqslant \dfrac{27}{4} p(1-p)^2 p_n$ et une récurrence immédiate donne :

$$\forall\, n \geqslant 1, p_n \leqslant \Big(\frac{27}{4} p(1-p)^2\Big)^{n-1} p_1$$

c) La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{27}{4} x(1-x)^2$ est maximale pour $x = 1/3$, le maximum étant égal à 1. Donc lorsque $p \neq 1/3$, $\sup |\varphi(x)| < 1$ et, par la règle de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum p_n$ converge.

2. a) Au bout de $3n$ achats, la fréquence vaut $1/3$ si et seulement si l'un des événements incompatibles suivants est réalisé :

« $1/3$ des achats ont été effectués sur le Net pour la première fois au bout de $3k$ achats et lors des $3(n-k)$ achats suivants, la fréquence des achats sur le Net est de $1/3$ », $k$ décrivant $[\![1, n]\!]$ et la deuxième partie de l'événement disparaissant si $k = n$.

Ce qui donne

$$p_1 = q_1 \text{ et pour } n \geqslant 2, p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n$$

b) Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k - q_k) = \sum_{k=2}^{n}(p_k - q_k) = \sum_{k=2}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} q_i p_{k-i}\Big) = \sum_{2\leqslant i+j\leqslant n} p_i q_j$$

or

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\Big)\times\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i\Big) = \sum_{2\leqslant i+j\leqslant 2n} p_i q_j$$

Donc, par positivité des objets concernés :

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k - q_k) \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\Big)\times\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{2n}(p_k - q_k)$$

3. a) On a immédiatement $Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$.

b) Comme $Q_n$ est une probabilité, $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \leqslant 1$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum q_i$.

c) Posons $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ et $Q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$.

Par le résultat de la question précédente, $S - Q = SQ$ et $Q = \dfrac{S}{S+1}$, donc $Q < 1$.

Ainsi, si $p \neq 1/3$, il n'est pas quasi-certain que l'on ait au moins à un moment un tiers des achats effectués sur le Net.

---

**Exercice 3.23.**

Soit $n$ un entier naturel non nul. Une urne contient initialement $n$ boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à $n$. On effectue une succession de tirages d'une boule de cette urne selon le protocole suivant :

tant que l'urne n'est pas vide, si à un rang quelconque on obtient la boule portant le numéro $k$, alors on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à $k$ avant de procéder au tirage suivant.

On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages juste nécessaires pour vider l'urne de toutes ses boules et on note $u_n$ l'espérance de $X_n$.

1. a) Déterminer les lois de $X_1, X_2$ et $X_3$.

b) Calculer $u_1, u_2$ et $u_3$.

2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i + 1$.

3. En déduire que pour $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.

4. Donner un équivalent de $u_n$ au voisinage de l'infini.

---

**Solution :**

1. On a $X_1(\Omega) = \{1\}$, $P(X_1 = 1) = 1$.

De même $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} = P(X_2 = 2) = 2$.
Ainsi :

$$E(X_1) = 1,\ E(X_2) = \frac{3}{2}.$$

Enfin, $X_3(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$ et $P(X_3 = 2) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$E(X_3) = \frac{11}{6}.$$

2. On sait que $X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ et que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

Notons $T$ la variable aléatoire représentant le numéro de la boule sortie au premier tirage. La variable $T$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et, pour $k \geqslant 2$ :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \sum_{i=2}^{n} P(X_n = k/T = i)P(T = i) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n} \times P(X_n = k/T = i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n} \times P(X_{i-1} = k-1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{n} \times P(X_i = k-1) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} k\Big(\sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{n} \times P(X_i = k-1)\Big) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{k}{n} P(X_i = k-1) = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} \frac{k+1}{n} P(X_i = k) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i + 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} u_i + 1 \end{aligned}$$

3. On a :

$$nu_n = n + \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \quad \text{et} \quad (n-1)u_{n-1} = (n-1) + \sum_{i=1}^{n-2} u_i$$

d'où, en soustrayant : $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.

4. Ainsi $u_k - u_{k-1} = \dfrac{1}{k}$, et en sommant, $u_n - u_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, donc $u_n \sim \ln n$, cette équivalence classique se démontrant par comparaison série–intégrale.

---

**Exercice 3.24.**

Une particule se déplace dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$, de façon rectiligne.

— Elle part de la position initiale $P_0 = (0, 0)$. Elle parcourt une distance $d$ dans une direction faisant un angle aléatoire $\theta_1$ par rapport à l'axe des abscisses, $\theta_1$ suivant la loi uniforme sur le segment $[-\pi, \pi]$. Elle atteint alors la position $P_1 = (x_1, y_1)$

— Ensuite, l'opération recommence : la particule repart de $P_1$ avec les mêmes règles, elle parcourt une distance $d$ dans une direction faisant un angle aléatoire $\theta_2$ par rapport à l'axe des abscisses, $\theta_2$ suivant la loi uniforme sur le segment $[-\pi, \pi]$.

— Et ainsi de suite.

Soient $X_n$, $Y_n$ et $\rho_n$, les variables aléatoires correspondant respectivement à l'abscisse, à l'ordonnée de la particule et à la distance $OP_n$.

On suppose enfin que les variables aléatoires $\theta_i$ sont mutuellement indépendantes, et suivent toutes la même loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$

1. Montrer que :

$$X_n = d(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \ldots + \cos(\theta_n))$$
$$Y_n = d(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) + \ldots + \sin(\theta_n))$$
$${\rho_n}^2 = X_n^2 + Y_n^2$$

2. Montrer que : ${\rho_n}^2 = d^2(n + \sum\limits_{i\neq j} \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sum\limits_{i\neq j} \sin(\theta_i)\sin(\theta_j))$.

Dans la suite, on pose $T_n = \sum\limits_{i\neq j} \cos(\theta_i)\cos(\theta_j)$ et $U_n = \sum\limits_{i\neq j} \sin(\theta_i)\sin(\theta_j))$.

3. a) Calculer l'espérance et la variance de $X_n$ et de $Y_n$.

b) Calculer l'espérance de $T_n$ et de $U_n$.

c) En déduire l'espérance de ${\rho_n}^2$.

4. En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que la probabilité de l'événement $[-d\sqrt{2n} \leqslant X_n \leqslant d\sqrt{2n}]$ a une limite peu différente de 0.9555 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Même question pour $Y_n$.
[On donne $\Phi(2) \simeq 0.97725$, $\Phi$ désignant la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.]

---

**Solution :**

1. Notons $\overrightarrow{OP_n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{OP_i}$ ; alors $X_n$ (resp. $Y_n$) est l'abscisse (resp. l'ordonnée) de $\overrightarrow{OP_n}$. Comme
$$\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = d(\cos\theta_n \overrightarrow{\imath} + \sin\theta_n \overrightarrow{\jmath})$$
il vient :
$$X_n = d\times \sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i \text{ et } Y_n = d\times \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i$$
et :
$$\rho_n^2 = d^2(X_n^2 + Y_n^2)$$

2. Immédiatement :
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i) + \sum_{i\neq j} \cos\theta_i\cos\theta_j + \sum_{i\neq j} \sin\theta_i\sin\theta_j$$

Comme $\cos^2 + \sin^2$ est la fonction constante égale à 1, on en déduit le résultat demandé.

3. a) Par le théorème de transfert :
$$E(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\, dt = 0, E(\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = 0$$
Par linéarité de l'espérance :
$$E(X_n) = E(Y_n) = 0.$$
De même :
$$E(\cos^2\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}, E(\sin^2\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}$$
et
$$V(\cos\theta) = V(\sin\theta) = \frac{1}{2}$$

Donc, par indépendance :

$$V(X_n) = d^2 n V(\cos\theta) = \frac{d^2}{2} = V(Y_n)$$

b) Par indépendance :

$$E(T_n) = \sum_{i\neq j} E(\cos\theta_i)E(\cos\theta_j) = 0,\ \text{ et } E(U_n) = \sum_{i\neq j} E(\sin\theta_i)E(\sin\theta_j) = 0$$

et

$$E(\rho_n^2) = nd^2$$

4. Par le théorème de la limite centrée, pour tout $a < b$ :

$$P\Big(a < \frac{\frac{X_n}{n}}{\frac{d\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}} < b\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a)$$

d'où :

$$P\Big( -bd\frac{\sqrt{2n}}{2} < X_n < bd\frac{\sqrt{2n}}{2}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\Phi(b) - 1$$

et $2\Phi(2) - 1 \approx 0.9555$.

Les variables aléatoires $X_n$ et $Y_n$ ayant même espérance et même variance, on obtient le même résultat pour $Y_n$.

---

**Exercice 3.25.**

Soit $(A, B)$ un couple de variables aléatoires discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, telles que, pour tout $(i, j)$ de $\mathbb{N}^2$, on a :

$$P[(A = i)\bigcap(B = j)] = C\times\frac{\mathrm{e}^{-i}}{j^2 + 3j + 2}.$$

1. a) Montrer que $C = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

b) Déterminer la loi de $A$, préciser son espérance et sa variance.

c) Les variables aléatoires $A$ et $B$ sont-elles indépendantes ?

2. Soit $Z$ la variable aléatoire égale à $5A + 7B$.

a) Ecrire un programme turbo-pascal qui, $n$ étant donné, calcule $P(Z = n)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement $(Z = 23)$.

c) Montrer que, pour $n > 23$, l'événement $(Z = n)$ n'est jamais quasi-impossible.

---

**Solution :**

1. a) On a :

$$1 = C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j^2 + 3j + 2}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-i}\Big) = \frac{C}{1 - \mathrm{e}^{-1}}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\Big)$$

et comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}\Big) = 1 - \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient :

$$C = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

b) La loi de $A$ est donnée par, pour tout $i \in \mathbb{N}$ :

$$P(A = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(A = i \cap B = j) = \mathrm{e}^{-i}(1 - \mathrm{e}^{-1})$$

Donc $A+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - \mathrm{e}^{-1}$, et :
$$E(A) = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \text{ et } V(A) = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

c) On a $B(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ :
$$P(B = j) = \frac{1}{j^2 + 3j + 2}$$
ce qui entraîne que $A$ et $B$ sont indépendantes.

2. a) Définissons d'abord la fonction $f$ sur $\mathbb{N}$ telle que $f(k) = \mathrm{e}^k$. Par exemple :

```
function f(n : integer) : real ;
const e= 2.71828183
var k : integer ; x : real ;
Begin
x := 1 ;
For k=0 to n do x :=x*e ;
f := x
end ;
```

puis

```
function pz( n : integer) : real ;
var b : integer ; p : real ;
Begin
p := 0 ;
For b := 0 to int(n/7) do
If int((n-7*b)/4)=(n-7*b)/4 then
p :=p+(1-1/e)*f((n-7*b)/4)/(b*b+3*b+2) ;
pz := p
end ;
```

b) On a $P(Z = 23) = 0$ : il suffit d'essayer les valeurs possibles de $B$ qui sont $0, \ldots, 3$, pour voir que $23 - 7B$ n'est pas un multiple de 5.

c) On remarque que :
$$24 = 5{\times}2 + 7{\times}2\,;\ 25 = 5{\times}5 + 7{\times}0\,;\ 26 = 5{\times}1 + 7{\times}3$$
$$27 = 5{\times}4 + 7{\times}1\,;\ 28 = 5{\times}0 + 7{\times}4$$
Soit $n \geqslant 29$, supposons que pour tout $k \in [\![24, n]\!]$, on a $P(Z = k) > 0$, alors, comme
$$5a + 7b = n - 4 \implies 5(a+1) + 7b = n + 1,$$
on a $P(Z = n+1) \geqslant P(Z = n-4) > 0$.
Donc $n+1$ est aussi une valeur accessible pour $Z$. On conclut par le principe de récurrence.

---

**Exercice 3.26.**

1. Soit $m$ un entier strictement positif et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, m\}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On appelle fonction génératrice de $X$ la fonction de la variable réelle $t \in \mathbb{R}^+$ définie par :
$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{m} t^k P(X = k).$$
Justifier la formule $G_X(t) = E(t^X)$, où $E$ désigne l'opérateur « espérance ».
Montrer que l'on a :

$$E(X) = G'_X(1) \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2,$$
où $V$ désigne l'opérateur « variance ».

2. Soient $(X_k)_{1 \leqslant p \leqslant n}$, $n$ variables aléatoires indépendantes, définies sur $\Omega$, de même loi et toutes à valeurs dans $\{0, \dots, \ell\}$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire $N$, définie sur $\Omega$, indépendante des variables $X_k$ et à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. On définit une variable aléatoire $Y$ par :

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

a) Déterminer la fonction génératrice $G_Y$ de $Y$ en fonction de celles de $N$ et de $X = X_1$ (on pourra utiliser la formule de l'espérance totale).

b) En déduire l'expression de l'espérance et de la variance de $Y$ en fonction de celles de $N$ et de $X_1$.

3. Une urne contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$ et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec la probabilité $p$, avec $0 < p < 1$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton.

Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de piles obtenus.

---

**Solution :**

1. Par le théorème de transfert, on a $E(t^X) = G_X(t)$.

La fonction $G_X$ étant polynomiale, elle est de classe $C^\infty$ et, après dérivations :

$$E(X) = G'_X(1), E(X(X-1)) = G''_X(1)$$

d'où :

$$E(X) = G'_X(1), V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$$

2. a) La famille $(N = k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme un système complet d'événements. On lui applique la formule de l'espérance totale :

$$G_Y(t) = \sum_{k=1}^{n} E(t^Y / N = k) P(N = k)$$

Par indépendance de la variable $N$ et des variables $(X_1, \dots, X_n)$, on a :

$$E(t^Y / N = k) = E(t^{X_1 + \dots + X_k}) = \prod_{i=1}^{k} E(t^{X_i}) = (E(t^{X_1}))^k = (G_X(t))^k$$

Finalement :

$$G_Y(t) = \sum_{k=1}^{n} [G_X(t)]^k P(N = k) = G_N(G_X(t))$$

b) Par la formule précédente :

$$E(Y) = G'_Y(1) = G'_N(G_X(1)) \times G'_X(1) = E(N) \times E(X)$$

D'autre part : $G''_Y(t) = G''_N(G_X(t))(G'_X(t))^2 + G'_N(G_X(t))G''_X(t)$, donne en 1 :

$$G''_Y(1) = G''_N(1)(G'_X(1))^2 + G'_N(1)G''_X(1)$$

et comme $V(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - G'^2_Y(1)$, il vient :

$V(Y) = E(N(N-1))[E(X)]^2 + E(N)E(X(X-1))$
$$+ E(N)E(X) - [E(N)]^2[E(X)]^2$$

Soit, après calculs :

$$V(Y) = E(N)V(X) + V(N)E(X)$$

3. Notons $N$ la variable aléatoire représentant le numéro du jeton tiré, et $X_1, \ldots, X_n$, $n$ variables aléatoires associées au lancer de la pièce, qui suivent donc la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

Le nombre de piles obtenu est donné par la variable aléatoire $Y = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.

La variable $N$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et :

$$E(Y) = E(N) \times E(X) = \frac{p(n+1)}{2}$$

$$V(Y) = E(N) \times V(X) + V(N) \times E(X) = \frac{(n+1)pq}{2} + \frac{(n^2-1)p^2}{12}$$

soit :

$$V(Y) = \frac{p(n+1)(6+np-7p)}{12}$$

---

**Exercice 3.27.**

**A.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire réelle $X_n$ de loi exponentielle de paramètre $1/n$, et on définit la variable aléatoire $Y_n$, par $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel $x$.

1. Préciser les valeurs prises par $Y_n$ et déterminer la loi de $Y_n$.

2. Calculer l'espérance $E(Y_n)$ et la variance $V(Y_n)$.

**B.** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_n - Y_n$. On définit ainsi une suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Z_n$.

2. Calculer l'espérance $E(Z_n)$. Montrer que la suite $(E(Z_n))_{n \geqslant 1}$ admet une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire $U$ dont on donnera la loi.

---

**Solution :**

A. 1. On a $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$P(Y_n = k) = P(k \leqslant X_n < k+1) = \int_k^{k+1} \frac{1}{n} \,\mathrm{e}^{-x/n}\, dx = \mathrm{e}^{-k/n}(1 - \mathrm{e}^{-1/n})$$

2. Les résultats précédents montrent que $Y_n + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-1/n}$ et donc :

$$E(Y_n) = \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{1 - \mathrm{e}^{-1/n}}, \quad V(Y_n) = \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{(1 - \mathrm{e}^{-1/n})^2}$$

B. 1. On a $Z_n(\Omega) = [0,1[$ et, pour $z \in [0,1[$ :

$$(Z_n \leqslant z) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (k \leqslant X_n \leqslant k+z)$$

Par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(Z_n \leqslant z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leqslant X_n \leqslant z+k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_k^{k+z} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-x/n}\, dx \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mathrm{e}^{-k/n} - \mathrm{e}^{-(k+z)/n} \right) = (1 - \mathrm{e}^{-z/n}) \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1-\mathrm{e}^{-z/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \end{aligned}$$

et, bien évidemment, pour $z < 0$, $P(Z_n \leqslant z) = 0$ et pour $z > 1$, $P(Z_n \leqslant z) = 1$.

Finalement :

$$F(z) = P(Z_n \leqslant z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-z/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} & \text{si } z \in [0,1[ \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

On vérifie ensuite facilement que la fonction $F : z \mapsto P(Z_n \leqslant z)$ est une fonction de répartition en étudiant chacune des propriétés définissant une telle fonction.

Une densité est alors :

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [0,1[ \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-z/n}}{n(1-\mathrm{e}^{-1/n})} & \text{si } z \in [0,1[ \end{cases}$$

2. Un calcul immédiat donne :

$$E(Z_n) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \int_0^1 \frac{z.\mathrm{e}^{-z/n}}{n}\, dz = n - \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}$$

$$\begin{aligned} n - \frac{\mathrm{e}^{-1/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} &= \frac{n - n\mathrm{e}^{-1/n} - \mathrm{e}^{-1/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \\ &= \frac{n - n(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \\ &= \frac{\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \frac{1}{2}.$$

3. Pour tout $z \in [0,1[$ fixé, en utilisant à nouveau les développements limités (ici il s'agit simplement d'équivalents) :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leqslant z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-z/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} = z$$

On vient de montrer que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

---

**Exercice 3.28.**

Une grande boule transparente contient des paillettes roses et bleues bien mélangées en proportion $\frac{1}{3}$ de roses et $\frac{2}{3}$ de bleues.

Un jeu consiste à faire tourner la boule, ce qui déclenche, après quelques tours, une sortie aléatoire de $N$ paillettes.

$N$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = P(N = n)$.

Le joueur sépare ensuite les paillettes selon leur couleur : $R$ représente le nombre de paillettes roses et $B = N - R$ représente le nombre de paillettes bleues.

1. Dans cette question les paillettes sont «grosses» et $N$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Quelle est la probabilité que le joueur obtienne exactement deux fois plus de paillettes bleues que de paillettes roses ? (on pourra remarquer que l'événement $(B = 2R)$ est inclus dans l'événement ($N$ est multiple de 3)).

2. Dans cette question les paillettes sont «petites» et notre modèle suppose que $N$ suit une loi discrète infinie : $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $P(N > a) \neq 0$.

L'animateur prétend que $B$ et $R$ sont indépendantes. Il s'agit de vérifier si cela est possible.

a) Justifier que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P(B = h) = \left(\frac{2}{3}\right)^h \frac{1}{h!} \sum\limits_{n=h}^{+\infty} \frac{n!\alpha_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}$

b) On pose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!\alpha_n$.
- Pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\varphi(h) = \sum\limits_{n=h}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-h)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-h}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi(k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

Démontrer que l'indépendance de $R$ et $B$ se traduit par :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{N}^2, u_{h+k} = \varphi(h) \times \psi(k)$$

c) En déduire que la suite $(u_n)$ doit être géométrique de raison $\lambda = \dfrac{\varphi(1)}{\varphi(0)}$, puis que la loi de $N$ doit être la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

d) On suppose que $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Vérifier que l'animateur est crédible.

---

**Solution :**

1. On a l'égalité :

$(B = 2R) = ((N = 0) \cap (R = 0)) \cup ((N = 3) \cap (R = 1)) \cup ((N = 6) \cap (R = 2))$

Ces trois événements sont incompatibles. On calcule chacune des probabilités en utilisant la loi conditionnelle de $R$ conditionnée par $(N = k)$, qui est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, 1/3)$. Ainsi :

$$P(B = 2R) = \sum_{j=0}^{2} P(N = 3j) \binom{3j}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{2j} = \frac{431}{2187}$$

2. a) La famille $(N = n)_{n \geqslant 0}$ est un système complet d'événements. Comme ci-dessus :

$$P(R = r / N = n) = \binom{n}{r} \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{n-r}$$

et
$$P(B=h/N=n)=\binom{n}{h}\big(\frac{2}{3}\big)^h\big(\frac{1}{3}\big)^{n-h}$$
Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{N}$ :
$$P(B=h)=\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\binom{n}{h}\big(\frac{2}{3}\big)^h\big(\frac{1}{3}\big)^{n-h}=\sum_{n=h}^{\infty}\alpha_n\frac{n!}{h!(n-h)!}\big(\frac{2}{3}\big)^h\big(\frac{1}{3}\big)^{n-h}$$
$$P(B=h)=\big(\frac{2}{3}\big)^h\frac{1}{h!}\sum_{n=h}^{\infty}\frac{n!\alpha_n}{(n-h)!}$$
b) De manière identique, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :
$$P(R=k)=\big(\frac{1}{3}\big)^k\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!\alpha_n}{(n-k)!}$$
Or on a $((B=h)\cap(R=k))=((N=h+k)\cap(B=h))$, donc :
$$P((B=h)\cap(R=k))=P(N=h+k)\binom{h+k}{h}\big(\frac{2}{3}\big)^h\big(\frac{1}{3}\big)^k$$
$$=\frac{u_{h+k}}{h!k!}\big(\frac{2}{3}\big)^h\big(\frac{1}{3}\big)^k$$
Donc l'indépendance des variables aléatoires $R$ et $B$ se traduit par :
$$\forall(h,k), u_{h+k}=\varphi(h)\times\psi(k)$$
c) En particulier pour $h=0$ et $k=n$, il vient $u_n=\varphi(0)\psi(n)$ et pour $h=1$ et $k=n$, il vient $u_{n+1}=\varphi(1)\psi(n)$.

Par l'hypothèse « pour tout $a \in \mathbb{N}$, $P(N>a)\neq 0$ », les fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont strictement positives et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\varphi(1)}{\psi(0)}=\lambda$$
Le suite $(u_n)$ est donc géométrique, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$P(N=n)=\alpha_n=u_0\frac{\lambda^n}{n!}$$
La condition $\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)=1$ impose que $u_0=\mathrm{e}^{-\lambda}$, et $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. $B$ et $R$ sont indépendantes.

d) Réciproquement, si $N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, les formules ci-dessus montrent que $R$ suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{3}$ et que $B$ suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{2\lambda}{3}$, et que pour tout $(h,k)\in\mathbb{N}^2$,
$$P((B=h)\cap(R=k))=P(B=h)\times P(R=k) :$$
$B$ et $R$ sont indépendantes.

---

**Exercice 3.29.**

Soit $n \geqslant 2$ et $p \in ]0,1[$. Soient $X, Y, Z$ trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant chacune la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega)$ la matrice $M(\omega)=\begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega)\\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega)\\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega)\end{pmatrix}$.

1. La matrice $M$ peut-elle être inversible ?

2. Déterminer la probabilité que $M$ soit la matrice d'un projecteur.

3. Soit $T$ la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le cardinal de l'ensemble des valeurs propres de $M(\omega)$.

a) Montrer que $T(\Omega) = \{1, 2\}$.

b) Déterminer la loi de $T$ et son espérance.

c) Calculer la probabilité que la matrice $M$ soit diagonalisable.

4. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.

Déterminer la probabilité pour qu'une ligne de $M$ soit égale à la somme des deux autres lignes de $M$.

---

**Solution :**

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, la matrice $M(\omega)$ est une matrice de rang 1. Donc

$$P(M(\omega) \text{ inversible}) = 0.$$

2. La matrice $M(\omega)$ est celle d'un projecteur si et seulement si $M^2(\omega) = M(\omega)$. Or :

$$M^2(\omega) = (X + Y + Z)(\omega)M(\omega)$$

Donc la probabilité cherchée est celle que $X + Y + Z = 1$.
Par indépendance des variables aléatoires, $X + Y + Z$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3n, p)$ et :

$$P(M^2(\omega) = M(\omega)) = 3n{\times}p(1 - p)^{3n-1}$$

3. a) A priori $T(\Omega) \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$. Mais comme la matrice $M(\omega)$ est de rang 1, on sait que 0 est valeur et que le sous-espace propre associé est de dimension 2. Donc $T(\Omega) \subseteq \{1, 2\}$.

b) On a vu dans la question précédente que $M^2(\omega) = (X+Y+Z)(\omega)M(\omega)$. Donc

• Si $(X + Y + Z)(\omega) = 0$. Dans ce cas, $M^2(\omega) = 0$ et $T(\omega) = 1$ (la seule valeur propre est 0).

• Si $(X + Y + Z)(\omega) \neq 0$. Dans ce cas, $T(\omega) = 2$ (la matrice $M(\omega)$ admet deux valeurs propres qui sont 0 et $(X + Y + Z)(\omega)$) et :

$$\begin{cases} P(T = 1) = P(X + Y + Z = 0) = p^{3n} \\ P(T = 2) = P(X + Y + Z \neq 0) = 1 - p^{3n} \end{cases}$$

Finalement $E(T) = 2 + p^{3n}$.

c) La matrice $M(\omega)$ est diagonalisable si et seulement si $T(\omega) = 2$ ou $(T(\omega) = 1$ et $M(\omega) = 0)$. Ainsi :

$P(M(\omega) \text{ diagonalisable }) = 1-p^{3n}+P(X = Y = Z = 0) = 1-p^{3n}+(1-p)^{3n}$

4. L'événement $X = Y + Z$ est l'événement $\bigcup_{k=0}^{n} ((K = k) \cap (Y + Z = k))$. Donc :

$$\begin{aligned} P(X = Y + Z) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y + Z = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{2n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{3n}{n}$$

La dernière égalité (de Vandermonde) se démontrant en comparant les coefficients de $x^n$ dans $(1+x)^{3n}$ et $(1+x)^n(1+x)^{2n}$.

---

**Exercice 3.30.**

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $X_n^* = \sqrt{n}(\overline{X_n} - 1)$.

1. a) Donner l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.

b) Montrer que $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers 1.

2. On note $F_n$ la fonction de répartition de $X_n^*$ .

a) Quelle est, pour $x \in \mathbb{R}$, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

b) Calculer une valeur approchée de $P(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X_n} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}})$, pour $n$ assez grand.

(Si $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale réduite, on donne $\Phi(2) \simeq 0{,}977$).

3. Étude des densités.

a) Quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ? En donner une densité $g_n$.

b) En déduire une densité $h_n$ de $\overline{X_n}$.

c) En déduire une densité $f_n$ de $X_n^*$.

4. On admet la formule de Stirling : $n! \underset{(+\infty)}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, la limite de $f_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

---

**Solution :**

1. a) D'après le cours $E(\overline{X_n}) = 1$ et $V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}$.

b) Par la loi faible des grands nombres, $(\overline{X_n})_n$ converge en probabilité vers 1.

2. a) D'après le théorème de la limite centrée, pour tout $x$ réel, la suite $(F_n(x))_n$ converge vers $\Phi(x)$, où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

b) Il vient :

$$P\Big(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X_n} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\Big) = P(-2 \leqslant X_n^\star \leqslant 2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0.954$$

3. a) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi $\Gamma(1,1)$. D'après le cours, la variable aléatoire $Y_n$ suit la loi $\Gamma(1,n)$, de densité $g_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Pour tout $x$ réel, $P(\overline{X_n} \leqslant x) = P(Y_n \leqslant nx)$ ; donc si $h_n$ désigne une densité de $\overline{X_n}$, il vient $h_n(x) = ng_n(nx)$, soit :

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{n^n x^{n-1}\mathrm{e}^{-nx}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) Pour tout $x$ réel, on a $F_n(x) = P(\sqrt{n}(X_n - 1) \leqslant x) = P\big(\overline{X_n} \leqslant 1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\big)$.

Donc :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\sqrt{n} \\ \dfrac{n^n(1+\frac{x}{\sqrt{n}})^{n-1}\mathrm{e}^{-n(1+\frac{x}{\sqrt{n}})}}{\sqrt{n}(n-1)!} & \text{si } x > -\sqrt{n} \end{cases}$$

4. Soit $x$ réel fixé. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x > -\sqrt{n}$. Et alors :

$$f_n(x) = \frac{n^n\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}}{n!}\big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\big)\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})-\sqrt{n}x}$$

La formule de Stirling admise donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\sqrt{n}e^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et un développement limité au voisinage de 0 donne

$$\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})-\sqrt{n}x} \sim \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+o(1)}$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

---

**Exercice 3.31.**

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\big(1 - \frac{x}{\theta}\big) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $\theta$ est un paramètre inconnu strictement positif.

On cherche à estimer $\theta$ à partir d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ .

1. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$, $E(X)$ et $V(X)$.

2. a) Déterminer la constante $a$ pour que $T_n = a\overline{X_n}$ soit un estimateur sans biais du paramètre $\theta$.

b) Calculer le risque quadratique de $T_n$.

3. a) Déterminer la loi de $M_n$.

On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^n\,du$ et on admet que $I_n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

b) Montrer que : $E(M_n) = \theta(1 - I_n)$. Que peut-on en déduire pour $M_n$ en tant qu'estimateur de $\theta$ ?

c) Montrer (ou admettre) que : $V(M_n) = \theta^2\big(\dfrac{1}{n+1} - I_n^2\big)$.

d) Calculer le risque quadratique de $M_n$. Entre $T_n$ et $M_n$ , quel estimateur choisiriez-vous, et pourquoi ?

4. a) Donner un estimateur sans biais de $\theta$ de la forme $M'_n = a_n M_n$, $a_n$ étant un réel dépendant de $n$.

b) Entre $M'_n$ et $T_n$ , quel estimateur choisiriez-vous, et pourquoi ?

---

**Solution :**

1. Un calcul simple donne :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\theta}\big(x - \dfrac{x^2}{2\theta}\big) & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}$$

et on obtient également sans problèmes :

$$E(X) = \frac{\theta}{3}, \qquad V(X) = \frac{\theta^2}{18}$$

2. a) Comme $E(\overline{X_n}) = \dfrac{\theta}{3}$, $T_n = 3\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

b) Son risque quadratique est alors :

$$r_{T_n}(\theta) = V(T_n) = 9V(\overline{X_n}) = \frac{\theta^2}{2n}$$

3. a) Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes et de même loi, on obtient : $F_{M_n}(x) = F^n(x)$ et $f_{M_n}(x) = nf(x)F^{n-1}(x)$, soit :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\big(\dfrac{2}{\theta}\big)^n\big(x - \dfrac{x^2}{2\theta}\big)^{n-1}\big(1 - \dfrac{x}{\theta}\big) & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) L'espérance de $M_n$ est alors, à l'aide du changement de variable $u = 1 - \dfrac{x}{\theta}$ :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^\theta 2n\big(\frac{x}{\theta}\big)^n\big(2 - \frac{x}{\theta}\big)^{n-1}\big(1 - \frac{x}{\theta}\big)\,dx \\ &= \theta\int_0^1 2nu(1-u^2)^{n-1}(1-u)\,du \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne ensuite

$$E(M_n) = \theta\Big(\big[-(1-u^2)^n(1-u)\big]_0^1 - \int_0^1 (1-u^2)^n\,du\Big) = \theta(1 - I_n)$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ ; donc $M_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\theta$.

c) Une méthode identique à la précédente (même changement de variable) conduit à :

$$E(M_n^2) = \theta^2\big(1 + \frac{1}{n+1} - 2I_n\big) \text{ et } V(M_n) = \theta^2\big(\frac{1}{n+1} - I_n^2\big)$$

d) On a alors $r_{M_n(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n+1}$.

Ainsi $r_{M_n(\theta)} > r_{T_n(\theta)}$ ; donc $T_n$ est un estimateur « préférable » à $M_n$. En plus il est sans biais.

4. a) On choisit $M'_n = \dfrac{1}{1-I_n} M_n$.

b) On a :

$$V(M'_n) = \frac{1}{(1-I_n)^2} V(M_n)$$

et

$$\frac{V(M'_n)}{V(T_n)} = \frac{1}{(1-I_n)^2}\Big(\frac{2n}{n+1} - 2nI_n^2\Big)$$

ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V(M'_n)}{V(T_n)} = 2 - \frac{\pi}{2} < 1$$

Ainsi, pour $n$ « grand », $M'_n$ est un « meilleur » estimateur que $M_n$.

---

**Exercice 3.32.**

Soit $\alpha$ un réel strictement positif.
On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

2. Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f$. Étudier l'existence des moments (non centrés) de $X$. Les calculer lorsqu'ils existent.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi, de densité commune $f$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$Y_i = \ln(X_i), \quad Z_n = \frac{1}{X_1 X_2 \cdots X_n}$$

a) Déterminer une densité de $Y_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.

b) En déduire une densité de $Z_n$.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $U_n = (Z_n)^{1/n}$.

a) Montrer que la suite $(\ln(U_n))_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante $C$ que l'on déterminera.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $\mathrm{e}^C$.

---

**Solution :**

1. Il suffit de vérifier que $f$ est positive, continue sur $\mathbb{R}$ privé de 1, et de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \alpha x^{-\alpha-1}\,dx = 1$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, le moment $E(X^k)$ existe si et seulement si la fonction $x \mapsto x^{k-\alpha-1}$ admet une intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.
Cette fonction étant continue sur $[1, +\infty[$, les intégrales de Riemann montrent que $E(X^k)$ existe si et seulement si $\alpha + 1 - k > 1$ soit $0 \leqslant k \leqslant \lfloor \alpha - 1 \rfloor$.
Dans ce cas, un calcul élémentaire donne $E(X^k) = \dfrac{\alpha}{\alpha - k}$.

3. a) On a immédiatement $Y_i(\Omega) = ]0, +\infty[$ et pour $y > 0$ :

$$P(Y_i \leqslant y) = P(\ln X_i \leqslant y) = P(X_i \leqslant \mathrm{e}^y) = F_{X_i}(\mathrm{e}^y) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}$$

Une densité $f_i$ de $Y_i$ est ainsi :

$$f_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $Y_i$ suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$.

b) De même, $Z_n(\Omega) = ]0,1]$, et pour tout $z \in ]0,1]$ :

$$P(Z_n \leqslant z) = P\big(-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leqslant \ln z\big) = P\big(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \geqslant -\ln z\big)$$

Par stabilité des lois $\Gamma$ pour la somme, on sait que $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$ suit la loi $\Gamma\big(\frac{1}{\alpha}, n\big)$, d'où pour tout $z \in ]0,1]$ :

$$F_{Z_n}(z) = \int_{-\ln z}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

Une densité de $Z_n$ est alors :

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z > \text{ ou } z > 1 \\ \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}(-\ln z)^{n-1} z^{\alpha-1} & \text{si } z \in ]0,1] \end{cases}$$

4. a) Pour tout $n \geqslant 1$

$$\ln(U_n) = \frac{1}{n}\ln(Z_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Par la question précédente, les variables aléatoires $(Y_i)$ sont indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

Par la loi faible des grands nombres, la suite $(-\ln(U_n))$ converge en probabilité vers la variable constante égale à $\dfrac{1}{\alpha}$ et la suite $(\ln(U_n))$ converge en probabilité vers la variable constante égale ) $-\dfrac{1}{\alpha}$

b) Considérons la variable aléatoire constante égale à $C = \mathrm{e}^{-1/\alpha}$ caractérisée par sa fonction de répartition :

$$F_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \mathrm{e}^{-1/\alpha} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \mathrm{e}^{-1/\alpha} \end{cases}$$

Or, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon \leqslant \ln(U_n) \leqslant -\frac{1}{\alpha} + \varepsilon\big) = 1$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\varepsilon} \leqslant U_n \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{\varepsilon}\big) = 1$$

soit, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} [F_{U_n}\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{\varepsilon}\big) - F_{U_n}\big(e^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\big)] = 1$$

Comme une fonction de répartition prend ses valeurs entre 0 et que 1, cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\big) = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{e}^{\varepsilon}\big) = 1$.

ce qui signifie que pour $t > \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} F_{U_n}(t) = 1$, tandis que pour $t < \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}$ cette limite est nulle. Par conséquent :

$$(U_n) \text{ tend en loi vers } C.$$

---

**Exercice 3.33.**

Soit $r$ un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi du $\chi^2$ à $r$ degrés de liberté si $X$ suit la loi $\Gamma$ de paramètres 2 et $\frac{r}{2}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance d'une variable $X$ suivant la loi du $\chi^2$ à $r$ degrés de liberté.

2. a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda - t}\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

b) Soit $Y_1$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $X_{2n}$ une variable aléatoire suivant la loi du $\chi^2$ à $2n$ degrés de liberté.

Montrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_1 < n)$.

c) Écrire une fonction Pascal qui permet de simuler la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_{2n}$.

3. Soit $k$ un entier non nul et $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivantes toutes la loi gaussienne centrée réduite.

a) Déterminer la loi de $X_1^2$.

b) En déduire la loi de $X_1^2 + \cdots + X_k^2$.

---

**Solution :**

1. D'après le cours, on sait que si $X$ suit une loi $\Gamma(2, r/2)$, son espérance vaut $r$ et sa variance $2r$.

2. a) La fonction exponentielle étant de classe $C^{\infty}$, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$ donne :

$$\mathrm{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{t}\, dt$$

Le changement de variable affine $t \mapsto \lambda - t$ donne la formule désirée.

b) On sait que :

$$P(X_{2n} > 2\lambda) = \frac{1}{\Gamma(n)2^n} \int_{2\lambda}^{+\infty} x^{n-1} \mathrm{e}^{-x/2} dx = \frac{1}{\Gamma(n)2^n} \int_{\lambda}^{+\infty} 2^{n-1} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} 2dt$$

$$= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t} dt$$

et :

$$P(Y_1 < n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\Big[\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt\Big]$$

$$= 1 - \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt - \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

$$= \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = P(X_{2n} > 2\lambda)$$

c) La question précédente montre que $P(X_{2n} > x) = P(Y_{x/2} < n)$. Une fonction Pascal possible est donc

```
Function P(n : integer ; x : real) : real ;
Var lam, pois, prob : real ;
   k : integer ;
Begin
lam := x/2 ;
pois : = exp(-lam) ;
for k := 1 to n-1 do
begin
      pois := pois*lam/k ;
      prob := prob + pois
end ;
P := prob
end ;
```

3. a) Soit $x \geqslant 0$. Alors :

$$P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

Une densité de $X^2$ est donc :

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{2}} x^{1/2-1} \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui montre que $X^2$ suit la loi $\Gamma(2, 1/2)$.

b) Les variables aléatoires étant indépendantes, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{k} X_i^2$ suit la loi $\Gamma(2, k/2)$ (loi du $\chi^2$ à $k$ degrés de liberté).

---

**Exercice 3.34.**

Soit $k$ un réel strictement positif,

1. Déterminer le réel $\alpha$ pour que la fonction $f_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_k(x) = \max(0, \alpha - k|x|)$$

soit une densité de probabilité.

2. Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que :

- $E(X) = m$ ;
- $X - E(X)$ admet la fonction $f_k$ pour densité de probabilité.

a) Calculer les moments centrés $E[(X - m)^n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$.

3. On dispose d'un $n$-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi de $X$ à partir duquel on souhaite estimer le paramètre $k$.

Montrer que $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$ est un estimateur de $V(X)$ sans biais et convergent.

4. On suppose en outre $E(X) = m = 0$. Soit $Y$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2]$ indépendante de $X$.
Dans quel intervalle est-on sûr de trouver $X^2 + Y$ avec un risque inférieur à 5% ?

---

**Solution :**

1. La fonction $f_k$ est paire non nulle sur $\left]-\frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha}{k}\right[$, nulle ailleurs, et est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

- $f_k(x) \geqslant 0$ entraîne que $\alpha \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)\,dt = 1$ entraîne que $\alpha^2 = k$.

L'unique solution est donc $\alpha = \sqrt{k}$.

2. a) Une densité de $X - m$ étant une fonction paire, les moments d'ordre impair sont nuls et pour $n = 2p$ :

$$E((X-m)^n) = 2\int_0^{1/\sqrt{k}} t^n(\sqrt{k} - kt)\,dt = \frac{2}{(n+1)(n+2)}k^{-p}$$

b) Pour $n = 2$, il vient $V(X) = E((X - E(X))^2) = \dfrac{1}{6k}$.

3. La linéarité de l'espérance donne facilement $E(T_n) = V(X)$, ce qui montre que $T_n$ est un estimateur sans biais de $V(X)$.

La loi faible des grands nombres appliquée à la suite de variables aléatoires identiquement distribuées $((X_i - m)^2)$ montre ensuite que la suite $(T_n)$ converge en probabilité vers $V(X)$, ce qui permet d'écrire que la suite d'estimateurs $(T_n)$ est convergente.

4. Ici $m = 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Cebisheff à la variable aléatoire $Z = X^2 + Y$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|Z - E(Z)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{V(Z)}{\varepsilon^2}$$

Or $E(Z) = \dfrac{7}{6}$ et $V(Z) = \dfrac{67}{180}$.

On veut que $1 - \dfrac{V(Z)}{\varepsilon^2} \geqslant 0.95$, soit $\varepsilon^2 \geqslant \dfrac{V(Z)}{0.05}$ et donc $\varepsilon \geqslant \dfrac{\sqrt{67}}{3}$.

L'intervalle cherché est donc $\left]\dfrac{7-2\sqrt{67}}{6}, \dfrac{7+2\sqrt{67}}{6}\right[$.

# 4

# OPTION B/L

---

**Exercice 4.1.**

Deux joueurs $A$ et $B$ jouent à un jeu consistant en une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie.
Le joueur $A$ a la probabilité $p$ de gagner en obtenant « Pile » et $B$ a la probabilité $q = 1 - p$ de gagner en obtenant « Face ».
Le joueur qui gagne la partie est celui qui a, pour la première fois, deux victoires de plus que l'autre.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité pour qu'au $n^{\text{ème}}$ coup, les deux joueurs soient à égalité ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité pour qu'au $n^{\text{ème}}$ coup $A$ gagne la partie ?

3. Quelle est la probabilité que $A$ gagne la partie ?

4. Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête pas ?

5. Soit $X$ le nombre aléatoire de lancers effectués jusqu'à l'obtention d'un gagnant.

   a) Quelle est la loi de $X$ ?

   b) Montrer que $X$ admet une espérance et calculer sa valeur.

---

**Solution :**

1. Notons $E_n$ l'événement : « à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer les deux joueurs sont à égalité ».

• Clairement, si $n$ est impair, on a $P(E_n) = 0$.

• Si $n$ est pair, notons $n = 2k$, avec $k \geqslant 1$.

$\star$ L'événement $E_2$ est réalisé si $A$ gagne l'une des deux premières manches et $B$ gagne l'autre, d'où $P(E_2) = 2pq$.

$\star$ Pour $k > 1$, réaliser $E_{2k}$, c'est obtenir l'égalité au bout des 2 premières manches, puis à nouveau égalité au bout des 4 premières manches et ainsi de suite jusqu'à la $(2k)^{\text{ème}}$ manche. Cela signifie que pour chaque tranche « $(2i-1, 2i)$ », $1 \leqslant i \leqslant k$, l'un gagne une manche et l'autre l'autre ! Soit par indépendance des résultats des différentes tranches jouées :

$$P(E_{2k}) = (2pq)^k$$

Le résultat obtenu est donc valide pour $k = 1$.

2. Notons $AG_n$ l'événement « $A$ gagne à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ manche ». Il est clair que si $n$ est impair $AG_n$ est impossible, tandis que $AG_{2k}$ est réalisé lorsque l'on a égalité au rang $2k-2$, $A$ gagnant alors les manches de rangs $2k-1$ et $2k$. En notant $P_i$ la probabilité de l'événement « obtenir Pile au rang $i$ », il vient, même pour $k = 2$ :

Ainsi $P(AG_{2k}) = P(E_{2k-2} \cap P_{2k-1} \cap P_{2k})$. Soit par indépendance :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} P(AG_{2k}) & = & (2pq)^{k-1}p^2 \\ P(AG_{2k-1}) & = & 0 \end{cases}$$

3. Avec des notations évidentes :

$$P(AG) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(AG_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(AG_{2k}) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (2pq)^{k-1}$$

et comme $0 \leqslant 2pq < 1$ :

$$P(AG) = \frac{p^2}{1-2pq}$$

4. En permutant les rôles de Pile et Face, il vient de même :

$$P(BG_{2k}) = (2pq)^{k-1}q^2 \ ; \ P(BG) = \frac{q^2}{1-2pq}$$

D'où : $P(AG) + P(BG) = \dfrac{p^2+q^2}{1-2pq} = \dfrac{(p+q)^2 - 2pq}{1-2pq} = 1$

Il est donc quasi-impossible que personne ne gagne, c'est-à-dire que la partie dure indéfiniment.

5. a) Le résultat de la question précédente montre que $X$ est bien une variable aléatoire, prenant ses valeurs dans $2\mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(X = 2k) = P(AG_{2k}) + P(BG_{2k}) = (2pq)^{k-1}(p^2+q^2)$$

b) La convergence étant banale :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k(2pq)^{k-1}(1-2pq) = 2(1-2pq) \sum_{k=1}^{+\infty} k(2pq)^{k-1}$$

Soit :

$$E(X) = \frac{2(1-2pq)}{(1-2pq)^2} = \frac{2}{1-2pq}$$

---

**Exercice 4.2.**

Soit $f$ la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. a) Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.

b) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D$.

c) Montrer que $f$ est dérivable sur $D$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in D$.

d) En déduire les variations de $f$.

2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $D$ sur $D$, et déterminer $f^2 = f \circ f$.

3. Soit $x$ un réel donné, $x \in D$ et $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.

---

**Solution :**

1. a) $f(x)$ est bien défini lorsque $\ln x$ est défini et non nul, donc :

$$D = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

b) Sans problèmes :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1\,;\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^y = 0\,;\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} \mathrm{e}^y = +\infty$$

c) La fonction $f$ est dérivable sur son domaine de définition, car composée de fonctions dérivables, avec :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} \times \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

d) D'où :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

2. Le tableau de variation précédent montre que $f$ réalise une bijection de $D$ sur $D$ et pour tout $x$ de $D$, on a : $\ln\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{\ln x}$, soit : $\ln x = \dfrac{1}{\ln(f(x))}$ et :

$$x = \exp\Big(\frac{1}{\ln(f(x))}\Big) = f\big(f(x)\big)$$

Ainsi $f \circ f = Id_D$ et $f^{-1}$ concide avec $f$.

3. Notons déjà que puisque $f(D) \subset D$, la suite est bien définie et comme $f \circ f = Id_D$, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{2n} = f^{2n}(x) = u_0 = x, u_{2n+1} = f\big(f^{2n}(x)\big) = f(u_0) = u_1 = f(x)$

Par conséquent la suite $u$ converge si et seulement si $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff \exp\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) = x \iff \frac{1}{\ln x} = \ln x \iff (\ln x)^2 = 1$$

Finalement :

$$u \text{ converge} \iff x \in \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}\}$$

---

**Exercice 4.3.**

Soit $UVW$ un triangle équilatéral de côté de longueur 1. Une puce part du point $U$ à l'instant $n = 0$ et se déplace sur les sommets du triangle. Si à l'instant $n$ elle se trouve sur un sommet, elle se trouvera à l'instant $n+1$ sur l'un des deux autres sommets avec équiprobabilité.

On appelle $u_n$ (resp. $v_n$, $w_n$) la probabilité que la puce se trouve au sommet $U$ (resp. $V$, $W$) à l'instant $n$. Enfin, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A$, indépendante de $n$, telle que pour tout entier naturel $n$, on ait $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable.

3. Calculer $A^n$, pour $n \geqslant 1$ et en déduire les valeurs de $u_n, v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

4. Soit $L$ la longueur parcourue par la puce à l'instant où, pour la première fois, les trois sommets du triangle ont été visités.
Déterminer la loi de $L$ et calculer son espérance.

---

**Solution :**

1. Avec des notations évidentes, la formule des probabilités totales donne, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) + P(W_n)P_{W_n}(U_{n+1})$$

Soit, avec les probabilités conditionnelles données dans l'énoncé :

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{2}P(V_n) + \frac{1}{2}P(W_n) : u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + w_n)$$

De la même façon : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n)$ ; $w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
On peut donc prendre :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

3. On a $A = \frac{1}{2}(J - I)$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $2A = J - I$ et puisque $I$ et $J$ commutent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 2^n A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k(-I)^{n-k} = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k$$

Or un calcul élémentaire donne $J^2 = 3J$ et donc, par récurrence :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1}J$$

Ainsi, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} 2^n A^n &= (-1)^n I + \Big[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}\Big]J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k} - (-1)^n\Big]J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\big[(3-1)^n - (-1)^n\big]J \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{3{\times}2^n}\big[3(-1)^n I + (2^n - (-1)^n)J\big]$$

La relation $X_{n+1} = AX_n$ donne, pour $n \geqslant 1$, $X_n = A^n X_0$ et comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit de recopier la première colonne de $A^n$ pour obtenir :

$$\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3{\times}2^n} \ ; \ v_n = w_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3{\times}2^n}$$

4. Chaque déplacement est de longueur 1, donc $L$ n'est autre que le nombre $n$ de déplacements justes nécessaires pour visiter les trois sommets.

$\rightarrow$ A l'instant 1, on a visité le sommet $U$ et et l'un des points $V$ ou $W$ (nous noterons ce dernier point $P$, l'autre étant noté $Q$).

$\rightarrow$ A partir de cet instant, chaque déplacement fait amène la puce au point manquant avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et ramène la puce en un point déja visité avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ (en clair, tant que l'on ne visite pas le point manquant, la puce effectue des va-et-vient entre les points $U$ et $P$).

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, on conclut au rang $n$ si et seulement si du rang 2 au rang $n-1$, on se promène entre $U$ et $P$ et si au rang $n$ on arrive enfin en $Q$.
Par indépendance des déplacements faits, on a donc :

$$\forall n \geqslant 2, P(L = n) = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n-2} {\times} \tfrac{1}{2} = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n-1}$$

On vérifie alors que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^{n-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$, donc $L$ est bien une variable aléatoire. Mais on remarque également que $L-1$ suit en fait la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que $L$ admet une espérance, avec :

$$E(L) = E(L-1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

---

**Exercice 4.4.**

Soit $a$ un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I)(A - 2I)$, où $I$ représente la matrice identité d'ordre 3.

2. En déduire les valeurs propres possibles de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?

3. Montrer que $A$ est diagonalisable et déterminer une matrice $D$ diagonale, une matrice $P$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.

---

**Solution :**

1. Facilement : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = 2I + A$, d'où :

$$A^2 - 2I - A = (A + I)(A - 2I) = 0$$

2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ une colonne propre associée, on a $AX = \lambda X$ et $A^2X = \lambda^2 X$, d'où : $0 = (A^2 - A - 2I)X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X$, et :

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ et } \lambda \in \{-1, 2\}$$

Comme 0 n'est pas valeur propre de $A$, la matrice $A$ est inversible.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\star\ AX = -X \iff \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \dfrac{1}{a}x + y + az = 0 \\ \dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{1}{a}y + z = 0 \end{cases} \iff x + ay + a^2z = 0$$

Donc $-1$ est valeur propre, le sous-espace propre associé étant le plan d'équation $x+ay+a^2z = 0$, que l'on peut engendrer par les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\star$ Des calculs similaires donnent $AX = 2X \iff \begin{cases} y = az \\ x = a^2z \end{cases}$, ce qui prouve que 2 est valeur propre, le sous-espace propre étant la droite engendrée par $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$.

La théorie de la réduction montre alors que $A$ est diagonalisable et que pour

$$D = \mathrm{diag}(-1, -1, 2) \text{ et } P = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^2 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice $P$ est inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

---

**Exercice 4.5.**

Une infinité de joueurs $J_1, J_2, \ldots$ jouent l'un après l'autre dans l'ordre de leurs indices. À chaque joueur $J_k$ est imparti un événement $A_k$ dont la probabilité de réalisation est un réel $p_k \in ]0, 1[$. On notera $q_k = 1 - p_k$ et on pose $q_0 = 1$.

Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.

On note $G_k$ l'événement « le joueur $J_k$ gagne » et on suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués.

1. Déterminer pour tout $k \geqslant 1$, la probabilité $P(G_k)$ de l'événement $G_k$.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = q_0q_1 \cdots q_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} q_k$.

Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $a \in [0, 1]$.

3. Déterminer en fonction de $a$ la probabilité que le jeu se termine.

4. On suppose dans cette question que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $q_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n(n+1)}}$.
Soit $N$ la variable aléatoire donnant le numéro du joueur gagnant si le jeu se termine et donnant 0 sinon.
Déterminer la loi de $N$. La variable aléatoire $N$ admet-elle une espérance ?

---

**Solution :**

1. Pour que $J_k$ gagne, il faut d'abord que $J_k$ joue, ce qui est sûr pour $J_1$, mais nécessite que $J_1, \dots, J_{k-1}$ perdent si $k \geqslant 2$, $J_k$ jouant alors et gagnant. Ainsi, par indépendance supposée :

$$P(G_1) = p_1 \text{ et pour } k \geqslant 2,\ P(G_k) = q_1 q_2 \dots q_{k-1} p_k.$$

Avec la convention $q_0 = 1$, on peut donc écrire :

$$\forall\, k \geqslant 1, P(G_k) = \Big(\prod_{i=0}^{k-1} q_i\Big) p_k$$

2. La suite $(u_n)$ est clairement à valeurs dans $[0,1]$ et décroissante, donc convergente de limite $a$ appartenant à $[0,1]$ (elle est même strictement décroissante et $a \in [0,1[$).

3. Notons $T$ l'événement « le jeu se termine », c'est-à-dire « l'un des joueurs gagne ». Les événements $G_k$ étant deux à deux incompatibles, on a :

$$P(T) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_0 q_1 \dots q_{k-1} p_k$$

soit, en remplaçant $p_k$ par $1 - q_k$, et par télescopage :

$$P(T) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - \lim_{n\to\infty} u_n = 1 - a$$

4. On a ici :

$$u_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{1\times 2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\times 3}} \times \dots \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{(n-1)\times n}}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \times \dots \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{(n-1)}+\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}$$

⋆ Ainsi, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$P(N = n) = P(G_n) = u_n - u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-1}$$

Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1}-1} - \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$ et :

$$P(N = 0) = \mathrm{e}^{-1}$$

⋆ Pour $n \geqslant 1$ : $nP(N = n) = n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}\big(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\big) = n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}-1}\big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n(n+1)}}\big)$
et comme $1 - \mathrm{e}^{-x} \underset{(0)}{\sim} x$, il vient :

$$nP(N = n) \sim n\,\mathrm{e}^{-1} \frac{1}{(n+1)n} \sim \frac{1}{n\,\mathrm{e}}$$

La règle de Riemann assure alors que la série de terme général $nP(N = n)$ est divergente et $N$ ne possède pas d'espérance.

---

**Exercice 4.6.**

Soit $p$ un réel de $]0,1[$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ :
$$-\ln(1-p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k+1}}{k+1} + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

2. On définit une suite réelle $(u_k)_{k\geqslant 0}$, par, pour tout $k \geqslant 0$ :
$$u_k = -\frac{p^{k+1}}{(k+1)\ln(1-p)}$$
Montrer que $(u_k)$ est la loi d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. Après avoir établi leur existence, calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$.

---

**Solution :**

1. Pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ : $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, soit :
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
et en intégrant sur le segment $[0,p]$ (licite puisque $0 < p < 1$) :
$$\int_0^p \frac{dx}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^p x^k\,dx + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$
c'est-à-dire :
$$-\ln(1-p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k+1}}{k+1} + \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

2.Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx \leqslant \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-p}\,dx = \frac{1}{1-p} \times \frac{p^{n+2}}{n+2} \leqslant \frac{1}{(1-p)(n+2)}$

et, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^p \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx = 0$, ce qui prouve que la série de terme général $\dfrac{p^{k+1}}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, converge, de somme $-\ln(1-p)$.

Cela signifie exactement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1$ et puisque $u_k \geqslant 1$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien une loi de probabilité.

3. $\star$ Les séries de termes généraux respectifs $ku_k$ et $k^2u_k$ sont clairement convergentes, puisque par négligeabilité classique, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^4 u_k = 0$.

$\star$ On écrit :

$$E(X+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)u_k = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{\infty} p^{k+1} = -\frac{1}{\ln(1-p)} \times \frac{p}{1-p}$$
d'où :
$$E(X) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \times \frac{p}{1-p} - 1$$

$\star$ De même :

$$\begin{aligned}
E((X+1)(X+2)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)u_k = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)p^{k+1}\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)} \big(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)p^i - 1\big)\\
&= -\frac{1}{\ln(1-p)} \big(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\big)
\end{aligned}$$

Soit : $E(X^2+3X+2) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\big(\frac{1}{(1-p)^2}-1\big)$ et :

$$E(X^2) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\big(\frac{1}{(1-p)^2}-1\big) + 3\big(\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}+1\big) - 2$$

La variance $V(X)$ s'en déduit par la relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

---

**Exercice 4.7.**

On admet le résultat suivant : si $U$ et $V$ sont deux variables aléatoires continues indépendantes, de densités respectives $f_U$ et $f_V$, une densité de $U+V$ est donnée par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\,dt$$

Soit $X, Y, Z$ trois variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda$ est un réel strictement positif donné.

1. Déterminer la loi de $X+Y+Z$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega)$ la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

2. a) Déterminer la probabilité que $M$ soit diagonalisable.

b) Déterminer la probabilité que $M$ admette une valeur propre $\lambda$ telle que $|\lambda| > 1$.

---

**Solution :**

1. $\star$ Une densité $f_{X+Y}$ de $X+Y$ est donc donnée par :

pour $x \geqslant 0$, $f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t} f_Y(x-t)\,dt$

$$= \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,dt = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x dt, \text{ soit :}$$

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\star$ De la même façon, $Z$ étant indépendante de $X+Y$, une densité $f_{X+Y+Z}$ de $X+Y+Z$ est donnée par :

pour $x \geqslant 0$ :

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t)f_Z(x-t)\,dt = \int_0^x \lambda^2 t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,dt$$

$$= \lambda^3 \mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^x t\,dt, \text{ soit :}$$

$$f_{X+Y+Z}(x) = \begin{cases} \lambda^3 \frac{x^2}{2}.\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. a) On voit facilement que $[M(\omega)]^2 = (X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega))M(\omega)$.

Donc si $X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega) \neq 0$, alors $X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)$ est valeur propre de $M(\omega)$ et comme 0 est aussi valeur propre de sous-espace propre associé de dimension 2 (la matrice $M(\omega)$ est alors de rang 1), la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable.

Si $X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega) = 0$, alors $M(\omega) = 0$ qui est diagonalisable.

Comme $X, Y$ et $Z$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a fait le tour du problème et $M(\omega)$ est toujours diagonalisable.

b) $M(\omega)$ admet une valeur propre $\lambda$ telle que $|\lambda| > 1$ si et seulement si $|X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)| > 1$, soit en notant $p$ la probabilité ce cet événement :

$$p = P(|X+Y+Z| > 1) = P(X+Y+Z > 1) = \frac{\lambda^3}{2}\int_1^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

soit, tous calculs faits :

$$p = \frac{\lambda^3}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\big(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\big)$$

---

**Exercice 4.8.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait que $A_n$ est diagonalisable.

2. Donner les valeurs propres de $A_n$ ainsi que les espaces propres associés.

3. Calculer $(A_n)^n$.

4. On dit qu'une suite $(B_k)_k$ de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ converge si les suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$, $(c_k)_k$, $(d_k)_k$ définies par $B_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ sont convergentes.

La matrice $B = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} a_k & \lim\limits_{k\to\infty} b_k \\ \lim\limits_{k\to\infty} c_k & \lim\limits_{k\to\infty} d_k \end{pmatrix}$ est alors appelé limite de la suite $(B_k)_k$.

Montrer que les suites $(A_{2k}^{2k})_k$, $(A_{2k+1}^{2k+1})_k$ convergent vers des matrices $S$ et $T$ que l'on déterminera.

---

**Solution :**

1. La matrice $A_n$ est symétrique (réelle) donc diagonalisable.

2. Pour $n = 1$, on a : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1, le sous-espace propre associé étant $\mathbb{R}^2$.

Pour $n \geqslant 2$, on voit aisément que :

$\star$ 1 est valeur propre de $A_n$, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\star$ $-1 + \frac{2}{n}$ est valeur propre de $A_n$, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + \dfrac{2}{n} \end{pmatrix}$ on a $A_n = PDP^{-1}$, avec $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $A_n^n = PD^nP^{-1}$, soit tous calculs faits :

$$A_n^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (-1 + \frac{2}{n})^n & 1 - (-1 + \frac{2}{n})^n \\ 1 - (-1 + \frac{2}{n})^n & 1 + (-1 + \frac{2}{n})^n \end{pmatrix}$$

4. Si $n$ tend vers l'infini, on a $-1 + \dfrac{2}{n} < 0$ et il convient de faire très attention aux signes ...

Pour $k \geqslant 2$ : $\big(-1 + \frac{2}{2k}\big)^{2k} = \big(1 - \frac{2}{2k}\big)^{2k} = \mathrm{e}^{2k\ln(1-\frac{1}{k})}$

Pour $k \geqslant 1$ : $\big(-1 + \frac{2}{2k+1}\big)^{2k+1} = -\big(1 - \frac{2}{2k+1}\big)^{2k+1} = -\mathrm{e}^{(2k+1)\ln(1-\frac{2}{2k+1})}$

Sachant que $\ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$, il vient :

$$\lim_{k\to\infty} 2k\ln(1-\frac{1}{k}) = -2 \text{ et } \lim_{k\to\infty} (2k+1)\ln(1-\frac{2}{2k+1}) = -2$$

et donc, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} [(A_{2k})^{2k}] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} & 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} \\ 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} & 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \\ \lim\limits_{k\to\infty} [(A_{2k+1})^{2k+1}] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} & 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} \\ 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^2} & 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

# 5

# QUESTIONS COURTES

1. Soit $(u_n)$ une suite réelle. Que pensez-vous de l'assertion :
$$u_n \sim \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} \ ?$$

2. Etudier la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

3. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique $y_n$ solution de l'équation :
$$\ln x + x = \frac{1}{n}$$
Étudier la suite $(y_n)$.
En notant $\ell$ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

4. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on écrit en base 10 le nombre $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ et on note $u_n$ son chiffre des unités. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique, 20 étant une période de cette suite.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.
Montrer que les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ sont de même nature.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

   1. Soit $\lambda$ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$ ?
   2. Montrer que $A$ admet exactement $n$ valeurs propres réelles.

7. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

8. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

9. Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$.
On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de $E$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

10. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Existe-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $\langle A, P\rangle = P(0)$ ?
*(On pourra considérer les polynômes $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$)*

11. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité $f$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance $m_1$ non nulle. On note $F$ la fonction de répartition de $X$ et on définit la fonction $g$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - F(x)}{m_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que $g$ est une densité de probabilité.

12. Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels non nuls, deux urnes $U_1$ et $U_2$ et un stock de $n + m$ boules.
A chaque étape, indépendante des précédentes, on choisit une urne, l'urne $U_1$ étant choisie avec la probabilité $p$ et l'urne $U_2$ étant choisie avec la probabilité $q$ et on met une boule dans l'urne choisie.
On s'arrête lorsque l'urne $U_1$ contient $n$ boules ou lorsque l'urne $U_2$ contient $m$ boules. On note $X$ le nombre d'étapes ainsi effectuées.
Écrire une fonction en Pascal permettant de simuler la variable aléatoire $X$.

13. Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe $b$ tel que pour tout $x$ réel $f(b - x) = f(x)$. Quelle est l'espérance de $X$ ?

14. Soit $X$ une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et $F$ sa fonction de répartition. On suppose que :

$F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$X$ admet une espérance $E(X)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - F(x) + F(-x)) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(x) + F(-x)]\,dx$.

15. Une urne contient $n$ boules rouges et $n$ boules noires. On retire les boules de l'urne deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide, à chaque rang du tirage toutes les poignées de deux boules possibles étant supposées équiprobables. Quelle est la probabilité que tout au long de l'épreuve on n'obtienne que des paires bicolores ?