1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On admet que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

Soit Ψ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\Psi(x) = \dfrac{d}{dx}\big(\ln \Gamma(x)\big)$

1. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Psi(x+1) = \Psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

   b) Montrer que la fonction Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(2x)}$.

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \ln f(x)$, de dérivée F' .

a) Montrer que les fonctions f, F et F' sont périodiques, de période 1.

b) Etablir, pour tout réel $x \in]0, 1[$ et pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$F'(n) - 2\big[\Psi(2n+2) - \Psi(2n)\big] \leqslant F'(x) \leqslant F'(n) + 2\big[\Psi(2n+2) - \Psi(2n)\big]$$

c) Montrer que la fonction f est constante. En déduire une relation entre $\Gamma(x), \Gamma(x + \frac{1}{2})$ et $\Gamma(2x)$.

Solution :

1. a) Comme $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$, une intégration par parties (ou un résultat bien connu) permet d'affirmer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

La fonction Γ étant à valeurs strictement positives, il vient :

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln x + \ln \Gamma(x)$$

Il ne reste qu'à dériver cette expression pour obtenir :

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

b) On admet que la fonction Γ est de classe C^∞. Ainsi Ψ est dérivable et comme $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, on a :

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln t \ (t^{(x-1)/2})^2 (\mathrm{e}^{-t/2})^2 dt\right)^2$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \times \Gamma''(x)$$

ce qui montre que pour tout $x > 0$, $\Psi'(x) \geqslant 0$.

2. a) Il vient, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{2^{2x+1}\Gamma(x+1)\Gamma(x+\frac{3}{2})}{\Gamma(2x+2)} \\ &= \frac{2^{2x-1} \times 4 \times (x\Gamma(x)) \times ((x+\frac{1}{2})\Gamma(x+\frac{1}{2}))}{(2x+1)(2x)\Gamma(2x)} \\ &= \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $F(x+1) = \ln f(x+1) = \ln f(x) = F(x)$, et enfin, comme F est dérivable, sa dérivée F' est également 1-périodique.

b) Par dérivation et définition de la fonction Ψ, on obtient :

$$F'(x) = 2\ln 2 + \Psi(x) + \Psi(x+\frac{1}{2}) - 2\Psi(2x)$$

La périodicité de F' permet d'écrire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F'(x+n) = F'(x).$$

La croissance de Ψ entraîne que pour tout $x \in \,]0,1]$:

$$\Psi(x+n) \geqslant \Psi(n),\ \Psi(x+n+\frac{1}{2}) \geqslant \Psi(n+\frac{1}{2}),\ \text{et } \Psi(2x+2n) \leqslant \Psi(2n+2).$$

Par suite :

$$F'(x+n) = F'(x) \geqslant 2\ln 2 + \Psi(n) + \Psi(n+\frac{1}{2}) - 2\Psi(2n+2)$$

et :

$$F'(x+n+1) = F'(x) \leqslant 2\ln 2 + \Psi(n+1) + \Psi(n+\frac{3}{2}) - 2\Psi(2n)$$

Donc :

$$F'(n) - 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) \leqslant F'(x) \leqslant F'(n+1) + 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n))$$

On conclut avec $F'(n) = F'(1)$ que :

$$F'(1) - 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) \leqslant F'(x) \leqslant F'(1) + 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n))$$

c) On sait, en appliquant deux fois le résultat 1. a) que :

$$2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) = \frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}.$$

Donc, pour $x \in]0,1]$:

$$F'(1) - \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \leqslant F'(x) \leqslant F'(1) + \frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient, pour $x \in]0,1]$: $F'(x) = F'(1)$. Ainsi F' est constante sur $]0,1]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue et de période 1.

Aussi $F(x)$ est-elle affine, mais également périodique de période 1, donc constante.

Comme $f(x) = \exp(F(x))$, f est également constante, égale à $f(1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or la connaissance de l'intégrale de Gauss et le changement de variable $t = u^2$ donnent :

$$f(1) = 2\Gamma\big(\frac{3}{2}\big) = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-1/2}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

D'où, pour tout $x > 0$:

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Exercice 1.2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1 : u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-(\frac{u_n}{2^n})^2}}}$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n \sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|\pi - u_n| \leqslant \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$.

4.Soit $p \in \mathbb{N}$ *fixé*. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, u_n admet le développement suivant :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6{\times}4^n} + \cdots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!{\times}4^{pn}} + o\big(\frac{1}{4^{pn}}\big)$$

5. On définit une nouvelle suite (v_n) par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{3}(-u_n + 4u_{n+1}).$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers π et qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $(v_n - \pi) = o(u_n - \pi)$.

6. Donner un équivalent de $(v_n - \pi)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathcal{P}_n$: $u_n = 2^n \sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$.

• $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = 2 = 2\sin\frac{\pi}{2}$.

• Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie. Par hypothèse de récurrence, $\frac{u_n}{2^n} = \sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-(\sin(\frac{\pi}{2^n}))^2}}} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2^n}))^2}}} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}{\times}2^n\sin(\frac{\pi}{2^n})}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+1}})}} = \frac{2^n{\times}2\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})} = 2^{n+1}\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée et on conclut par le principe de récurrence.

2. On a $u_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2^n})}{\frac{\pi}{2^n}}\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

3. Soit $f : x \mapsto \sin x$. On applique à f l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$. De $|f^{(3)}| \leqslant 1$, on déduit :

$\big|\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big) - \frac{\pi}{2^n}\big| \leqslant \frac{\pi^3}{6{\times}2^{3n}}$, donc $|\pi - u_n| \leqslant \frac{\pi^3}{6{\times}4^n}$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. D'après le théorème de Taylor-Young appliqué à f en 0 à l'ordre $2p+1$, on a :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+1})$$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$, en substituant $\frac{\pi}{2^n}$ à x, on trouve :

$$\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}{\times}\frac{\pi^{2k+1}}{2^n 2^{2kn}} + o\big(\frac{1}{2^n 2^{2pn}}\big)$$

Donc :

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2kn}} + o\Big(\frac{1}{4^{pn}}\Big)$$

5. $v_n = \dfrac{1}{3}(-u_n + 4u_{n+1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}(-\pi + 4\pi) = \pi$. On applique ensuite la formule de la question précédente avec $p = 1$:

$$\begin{cases} u_n = \pi - \dfrac{\pi^3}{6{\times}4^n} + o\Big(\dfrac{1}{4^n}\Big) \\ u_{n+1} = \pi - \dfrac{\pi^3}{6{\times}4^{n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{4^{n+1}}\Big) = \pi - \dfrac{\pi^3}{6{\times}4^{n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{4^n}\Big) \end{cases}$$

En effectuant une combinaison linéaire de ces deux égalités, on trouve :

$$v_n - \pi = \frac{-(u_n - \pi) + 4(u_{n+1} - \pi)}{3} = o\Big(\frac{1}{4^n}\Big)$$

Or $u_n - \pi \sim -\dfrac{\pi^3}{6{\times}4^n}$, donc $(v_n - \pi) = o(u_n - \pi)$.

6. Pour obtenir un équivalent de $(v_n - \pi)$, on applique la formule de la question (4) avec $p = 2$:

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6{\times}4^n} + \frac{\pi^5}{5!{\times}4^{2n}} + o\Big(\frac{1}{4^{2n}}\Big)$$

On en déduit par combinaison linéaire :

$$v_n - \pi \ \sim \ -\frac{\pi^5}{5!{\times}4^{2n+2}}$$

Exercice 1.3.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\, u \in [-A, A], 0 \leqslant \mathrm{e}^u - 1 - u \leqslant Mu^2$$

2. Pour x réel, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

a) Soit x fixé et h non nul ; montrer, à l'aide du résultat de la question 1, que :

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\, dt \Big) = 0$$

b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\, dt$$

3. a) Calculer $\varphi(0)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \varphi(x^2) + \Big(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\Big)^2$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout x réel : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\, du$.

c) En déduire que f' est la fonction nulle, donc que f est constante sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de cette constante

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

Solution :

1. On écrit une formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \int_0^u (u-t)\mathrm{e}^t\, dt$$

ce qui donne en majorant e^t par e^A et en faisant attention au signe de u de façon à gérer les problèmes de signes et de position des bornes d'intégration :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^u - 1 - u \leqslant \mathrm{e}^A \frac{u^2}{2} = Mu^2$$

2. a) Soit $\Delta(h)$ l'expression entre parenthèses. On a :

$$\Delta(h) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\big(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\big)\, dt$$

et, avec $M = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2|h|}$

$$|\Delta(h)| \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)} Mh^2(1+t^2)^2\, dt \leqslant |h|\mathrm{e}^{2|h|}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}(1+t^2)\, dt$$

Cette dernière expression tend vers 0, lorsque h tend vers 0.

b) Il suffit de traduire le résultat précédent.

3. a) On a $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Comme $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

4. a) Comme φ est dérivable, tout comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2x\varphi'(x^2) + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt - 2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\, dt$$

b) Le changement de variable linéaire $t = xu$ donne, pour $x \neq 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,du$$

Ce résultat reste clairement valable pour $x = 0$.

c) Ainsi $f'(x) = 0$ pour tout x réel, et f est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on a, pour tout x réel $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

5. Comme on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ existe, par passage à la limite, il vient :

$$\frac{\pi}{4} = 0 + \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\Big)^2$$

puis, par positivité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 1.4.

Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $[-1, 1]$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}$; montrer que la fonction h_u définie sur $[-1, 1]$ par :

$$h_u(x) = f(x) + ug(x)$$

est bornée et atteint ses bornes.

Soit M la fonction qui à tout réel u associe le maximum de la fonction h_u sur $[-1, 1]$ et $E(u)$ l'ensemble des éléments de $[-1, 1]$ en lesquels h_u atteint son maximum $M(u)$.

2. Déterminer la fonction M et $E(u)$ lorsque $f : x \mapsto (1-x^2)^{1/2}$ et $g : x \mapsto x$.

On revient au cas général.

3. Soit u et v réels, $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Montrer que l'on a :

$$(v - u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)g(y)$$

4. Montrer que la fonction M est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On suppose qu'il existe une fonction r de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ telle que pour tout u de $\mathbb{R}$, $r(u)$ appartient à $E(u)$. On pose alors $\varphi(u) = g(r(u))$.
Montrer que si u, v, w sont tels que $u < v < w$ et si y appartient à $E(v)$, on a :

$$\varphi(u) \leqslant g(y) \leqslant \varphi(w)$$

Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. Les fonctions f et g étant continues sur le segment $[-1,1]$, elles y sont bornées et la fonction h_u est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes. Ainsi, $M(u)$ est défini et $E(u)$ n'est pas vide.

2. On a $h'_u(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + u$ qui est nul si et seulement si $u = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Donc $h'_u(x) = 0$ si et seulement si $x^2(1+u^2) = u^2$, avec u et x de même signe, donc si et seulement si $x = \alpha = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \in]-1,1[$.

On a alors le tableau de variations :

x	-1		α		1
$h'_u(x)$		$+$	0	$-$	
h_u	$-u$	$\nearrow$	$\sqrt{1+u^2}$	$\searrow$	u

Donc :
$$E(u) = \{\alpha\} = \left\{\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right\} \text{ et } M(u) = \sqrt{1+u^2}$$

3. Soit $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Alors :
$$M(u) = f(x) + ug(x) \text{ et } M(v) = f(y) + vg(y).$$
D'autre part,
$$f(y) + ug(y) \leqslant M(u) \text{ et } f(x) + vg(x) \leqslant M(v).$$
Donc en combinant égalités et inégalités :
$$(f(x)+vg(x))-(f(x)+ug(x)) \leqslant M(v)-M(u) \leqslant (f(y)+vg(y))-(f(y)+ug(y))$$
Soit :
$$(v-u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y)$$

4. Supposons $v - u \geqslant 0$. Comme g est continue sur $[-1,1]$, il existe deux constantes, a, A telles que pour tout $x \in [-1,1]$, $a \leqslant g(x) \leqslant A$. Aussi :
$$(v-u)a \leqslant (v-u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y) \leqslant (v-u)A$$
En prenant la limite lorsque v tend vers u, ceci qui montre que M est continue à droite en tout point u. On adapte le raisonnement lorsque $v - u \leqslant 0$ et finalement M est continue en tout point u.

5. On applique le résultat de la question 3 à $x = r(u)$. Il vient :
$$(v-u)\varphi(u) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y)$$
Donc $\varphi(u) \leqslant g(y)$. On l'applique ensuite à y (à la place de x) et $r(w)$ (à la place de y). Il vient, car $w - v > 0$:

$$(w-v)g(y) \leqslant M(w) - M(v) \leqslant (w-v)\varphi(w)$$

Donc $g(y) \leqslant \varphi(w)$.

Finalement $\varphi(u) \leqslant \varphi(w)$, ce qui montre que la fonction φ est croissante.

Exercice 1.5.

Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$. Pour tout nombre réel $x > 0$ on définit :

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^2}\, dt$$

1. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \geqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

b) Montrer que la fonction f est croissante.

c) Montrer que f admet une limite lorsque x tend vers 0^+ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

2. a) Montrer que, pour tout réel $k > 1$, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, on a :

$$t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant kt$$

b) En déduire la limite de f en 0^+.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$ admet une limite lorsque x tend vers 0^+. Calculer cette limite.

b) Retrouver le résultat de la question 2. b) à l'aide de la question précédente.

Solution :

1. a) La fonction exponentielle est convexe, donc son graphe se situe au-dessus de sa tangente au point $(0, \mathrm{e}^0)$, soit :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^t - 1 \geqslant t$$

Par croissance de l'intégration, comme $ax \leqslant bx$ pour $x > 0$, on en déduit que :

$$f(x) \geqslant \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \big[\ln t\big]_{ax}^{bx} = \ln \frac{b}{a}$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$f'(x) = b\frac{\mathrm{e}^{bx} - 1}{(bx)^2} - a\frac{\mathrm{e}^{ax} - 1}{(ax)^2} = \frac{1}{x^2}(g(b) - g(a))$$

en posant $g(u) = \dfrac{e^{ux} - 1}{u}$.
On montre alors que g est croissante en la dérivant deux fois (ou bien on reconnaît que g est le taux de variation entre 0 et u de la fonction $u \mapsto e^{ux}$, qui est convexe, donc g est croissante). Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante.

c) La fonction f est croissante et minorée, donc elle a une limite à droite en 0, d'après le théorème de la limite monotone.

2. a) $\star$ La minoration proposée est vraie sur $\mathbb{R}$ (cf. question 1. a)).

$\star$ La majoration (locale) peut se démontrer en étudiant localement la fonction associée, mais résulte du fait que, comme la fonction exponentielle est convexe, son graphe se situe au-dessous de toutes ses cordes, et en particulier de la corde de pente $k > 1$ qui passe par le point $(0, 1)$ et un autre point d'abscisse plus grande.

b) Pour tout x tel que $[ax, bx] \subset [0, \varepsilon]$ (soit pour $x \leqslant \dfrac{b}{\varepsilon}$), par croissance de l'intégration, on a :

$$\ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant k \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = k \ln \frac{b}{a}$$

Comme la limite de f existe (question 1. c), en faisant tendre x vers 0^+, on obtient :

$$\ln \frac{b}{a} \leqslant \lim_{x \to 0^+} f(x) \leqslant k \ln \frac{b}{a}$$

Comme ceci est vrai pour tout $k > 1$, par encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln \frac{b}{a}$$

3. a) Comme $t \mapsto e^t$ est croissante, pour tout $t \in [ax, bx]$, on a :

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{e^{ax}}{x} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{bx}}{t}$$

On en déduit que :

$$\ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t}\, dt \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{e^{bx}}{t}\, dt = e^{bx} \ln \frac{b}{a}$$

Comme le majorant et le minorant ont la même limite quand x tend vers 0^+, par le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}$$

b) Par intégration par parties on a :

$$f(x) = \Big[-\frac{e^t - 1}{t} \Big]_{ax}^{bx} - \int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t}\, dt$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln \dfrac{b}{a}$.

Exercice 1.6.

Si u et v sont deux suites réelles, on appelle *produit de convolution* de u et v la suite $w = u \star v = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

1. Soient a et b des réels fixés. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{b^n}{n!}$. Déterminer le produit de convolution $w = u \star v$ des suites u et v.

2. On suppose que u et v sont deux suites convergentes. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement convergent ?

3. On suppose, pour cette question seulement, que $u = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution.

a) Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$, on a : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + v_1 u_n + 2v_n$ et $w_{2n+1} \leqslant v_0 u_{2n+1} + v_1 u_n + 2v_{n+1}$

c) En déduire que le produit de convolution w converge, et préciser sa limite.

4. On suppose, pour cette question, que $u = \left((-\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la suite w converge, et préciser sa limite.

Solution :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} \times \dfrac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k} = \dfrac{1}{n!}(a+b)^n$, d'après la formule du binôme de Newton.

2. En prenant pour u et v la suite constante égale à 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[u \star v]_n = n + 1$, ce qui prouve que u et v peuvent être convergentes sans que $u \star v$ le soit.

3. a) Pour $n < m$, on a $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^n} = u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$$

Par décroissance de v, on en déduit :

$$w_{2n} \leqslant v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k + u_{2n} v_0$$

D'après la question 2, on obtient enfin :

$$w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$$

De même :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n-k} + u_{2n+1} v_0$$

$$w_{2n} \leqslant v_{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k + u_{2n+1} v_0$$

$$w_{2n+1} \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$$

c) On constate que (w_{2n}) et (w_{2n+1}) sont des suites positives majorées par des suites de limite nulle. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. En notant $u' = \left((\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et $w' = u' \star v$, on a immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant w'_n$.
Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} w'_n = 0$, donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Exercice 1.7.

1. Déterminer le domaine de définition D de l'application g telle que :

$$g : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x\sin(t)} dt$$

2. Montrer que g est de classe C^1 sur D et que pour tout x de D, on a :

$$g'(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \mathrm{e}^{x\sin(t)} dt$$

3. Montrer que pour tout t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

En déduire une fonction minorant g sur $\mathbb{R}^+$ et une fonction majorant g sur $\mathbb{R}^-$.

4. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine D.

5. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

Solution :

1. Pour tout x réel, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x \sin t}$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Au vu de l'énoncé, il faut étudier la limite de

$$g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)}\,dt$$

lorsque h tend vers 0. Or :

$$g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)}dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x\sin t}(\mathrm{e}^{h\sin t} - 1 - h\sin t)dt$$

Par l'inégalité de Taylor, avec $|h| \leqslant 1$, on a :

$$\left|\mathrm{e}^{h\sin t} - 1 - h\sin t\right| \leqslant \frac{h^2|\sin t|^2}{2} \sup_{u\in[-1,1]} \mathrm{e}^{|u|} \leqslant Ch^2,\ C \text{ constante}$$

Donc :

$$\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)}dt\right| \leqslant Kh^2,\ K \text{ constante}$$

En divisant cette inégalité par h, on obtient le résultat souhaité.

3. Cet encadrement classique s'obtient, soit par étude des fonctions associées, soit par invocation de la concavité de la restriction de la fonction sin à l'intervalle $[0, \pi/2]$.

$\star$ Ainsi, pour $x \geqslant 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2xt/\pi}dt \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{xt}dt$$

ou :

$$\frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi} - 1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}(\mathrm{e}^{x\pi/2} - 1)$$

ce qui donne en particulier une minoration de g sur $\mathbb{R}^+$.

$\star$ Pour $x \leqslant 0$, comme $\sin t \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{xt}dt \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2xt/\pi}dt$$

ou :

$$\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{x\pi/2}-1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1)$$

ce qui donne en particulier une majoration de g sur $\mathbb{R}^-$.

4. Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1) = 0$.

5. La dérivée g' de g est positive sur $\mathbb{R}$, tout comme g.
La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

La minoration montre que la branche infinie est « très » parabolique... A vous de faire

---

Exercice 1.8.

Soit (u_n) la suite à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

1. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos(\pi u_n)$ et $b_n = \sin(\pi u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe ε_n tel que $a_n = \cos\big(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n\big)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite que l'on calculera.

b) Montrer que $\forall\, n \geqslant 1$, on a les inégalités suivantes :

$$0 < b_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a_n < 1$$

3. Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Solution :

1. On a $u_k^2 - u_{k-1}^2 = 8(k-1)+5$, donc par télescopage :

$$u_n^2 = u_n^2 - u_0^2 = 8\sum_{k=1}^{n}(k-1) + 5n = 4n(n-1) + 5n$$

Soit :

$$u_n = \sqrt{4n^2+n}$$

2. a) On a : $u_n = 2n\big(1+\frac{1}{4n}\big)^{1/2} = 2n(1+\frac{1}{8n}+o(1/n))$, donc

$$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + o(1)$$

Ainsi $a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + o(1))$, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n), \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

On a de même $b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) En revenant sur les calculs précédents, on a : $\frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n = \pi\big(\sqrt{4n^2+n} - 2n - \frac{1}{4}\big)$, d'où :

$$\varepsilon_n = 4n\Big(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 1 - \frac{1}{8n}\Big) = 4n \times \frac{1 + \frac{1}{4n} - (1+\frac{8}{n})^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}} + (1+\frac{8}{n})}$$

$$= -\frac{1}{16n} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}} + (1+\frac{8}{n})}$$

et donc :

$$-\frac{1}{32n} \leqslant \varepsilon_n < 0$$

Cet encadrement est largement suffisant pour affirmer que

$$0 < b_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a_n < 1$$

3. On a $\varepsilon_n = 4n\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 4n - \frac{1}{2} = \varphi(4n)$, avec :

$$\varphi(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{2}$$

On a $\varphi'(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} - 1 = \dfrac{(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} > 0.$

Par conséquent la fonction φ est croissante et les monotonies des fonctions sin et cos sur le domaine utile montrent que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. Comme ces suites sont convergentes de même limite, on conclut :

$$(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Exercice 1.9.

Dans les questions 1 et 2, a et b sont deux constantes réelles.
Soit y_0 un réel donné. On note (E) le problème différentiel d'inconnue la fonction dérivable y :

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit A un réel strictement positif et N un entier supérieur ou égal 2. On définit une subdivision $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ de l'intervalle $[0, A]$, par $t_k = \dfrac{kA}{N}$, et on pose pour tout k de $[\![0, N-1]\!]$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{A}{N}(ay_k + b)$$

1. a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête « `Euler (a,b,y0,A) : real` » qui rend la valeur de y_N.

b) Préciser en fonction de N le nombre d'opérations effectuées.

2. On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = 0$.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Préciser l'expression de y_N en fonction de N. Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} y_N$. Donner un équivalent de $(y_N - \lim\limits_{N\to+\infty} y_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que $a = 0$ et que $b = b(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} y_N$.

Solution :

1. a) Une proposition de programme est :

```
Function Euler(a,b,y0,A :real ;N :integer) :real
Var s :real ; k :integer ;
Begin s :=y0 ;
For k :=1 to N do s :=s+A/N*(a*s+b) ;
Euler :=s
End.
```

b) On passe dans la boucle N fois, à chaque passage il y a 1 division, 2 multiplications et 2 additions, donc ...

2. a) L'équation différentielle $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y : x \mapsto C.\mathrm{e}^{ax}$. La condition initiale $y(0) = y_0$ donne donc :

$$y(t) = y_0.\mathrm{e}^{at} \text{ et } y(A) = y_0.\mathrm{e}^{aA}$$

b) On a $y_{k+1} = \left(1 + \frac{aA}{N}\right)y_k$, d'où $y_N = \left(1 + \frac{aA}{N}\right)^N y_0$.

Lorsque N tend vers l'infini, on a :

$$N \ln\left(1 + \frac{aA}{N}\right) \sim N \times \frac{aA}{N} = aA$$

Ainsi $\lim\limits_{N\to\infty} N\ln\big(1+\frac{aA}{N}\big) = aA$ et, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{N\to\infty} y_N = y_0.\mathrm{e}^{aA} = y(A)$$

Pour aller plus loin, on effectue un développement limité :

$$N\ln\big(1+\frac{aA}{N}\big) = aA + \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

D'où :

$$\ln\big(\frac{y_N}{y(A)}\big) = \ln y_N - \ln y(A) = \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

et :

$$\frac{y_N}{y(A)} = \exp\big(\frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)\big) = 1 + \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

Donc :

$$y_N - y(A) \sim y(A)\times\frac{(aA)^2}{2N}$$

3. L'équation différentielle se réduit à $y'(t) = b(t)$, avec $y(0) = y_0$ et sa solution est donc :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b(u)\,du$$

Dans ce cas on a : $y_{k+1} - y_k = \frac{A}{N}b(t_k)$ et par télescopage :

$$y_N - y_0 = \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N} b\big(\frac{kA}{N}\big)$$

dont la limite est $\displaystyle\int_0^A b(u)\,du$ (sommes de Riemann associées à la fonction b sur le segment $[0, A]$).

Exercice 1.10.

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, à valeurs réelles, par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1. a) Montrer que f est continue et de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   b) Déterminer les points critiques de f.
   c) Quelle est la nature de ces points critiques ?
   d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2. a) Montrer que pour tout (a,b,c) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\frac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{1/3}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on calculera.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^y \leqslant \mathrm{e}^{x+y}(3 - \mathrm{e}^y)$.

Solution :

1. a) f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{2y^{3/2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$

Les points critiques sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{x}{2y^{3/2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} y = x^4 \\ x^3 = 1 \end{cases}.$$

Le seul point critique est donc le point $(1,1)$.

c) Avec les notations de Monge, on trouve au point $(1,1)$:

$$r = 2, s = -\frac{1}{2} \text{ et } t = \frac{1}{2}$$

Ainsi $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, ce qui prouve qu'au point critique, f admet un minimum local.

d) On a, par exemple : $f(x,1) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$, donc f est clairement non majorée sur son domaine de définition.

2. a) La fonction ln vérifie : $\forall\, x > 0, \ln''(x) = \dfrac{1}{x^2} < 0$, donc la fonction ln est concave sur son domaine de définition et :

$$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}_+^*, \ln\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \geqslant \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)$$

d'où, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{1/3}$$

b) Avec $a = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $b = \sqrt{y}$ et $c = \dfrac{1}{x}$, l'inégalité précédente donne $f(x,y) \geqslant 3$.

Comme $f(1,1) = 3$, f atteint bien en ce point son minimum global.

3. On pose $X = \mathrm{e}^x$ et $Y = \mathrm{e}^{2y}$. L'inéquation devient :

$$X^2 + \sqrt{Y} + XY \leqslant 3X\sqrt{Y}, \text{ soit } f(X,Y) \leqslant 3$$

Résoudre l'inéquation, c'est donc en fait résoudre l'équation associée.

Or il n'y a égalité dans l'inégalité de concavité entre moyenne arithmétiquue et moyenne géométrique de la question 2. a) que si $a = b = c$ (la fonction ln est strictement concave). En reportant dans 2. b), l'égalité ne peut donc se produire que si $X = Y = 1$, soit $x = y = 0$.

Exercice 1.11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par la relation : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. En utilisant un encadrement de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. En écrivant : $u_n - u_{n-1} = \varphi(\frac{1}{n})$ pour une certaine fonction φ, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. En déduire qu'elle est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note γ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad n \leqslant x \leqslant n + 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}.$$

a) Représenter graphiquement D_n et montrer que l'aire de D_n est égale à $u_n - u_{n+1}$.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

(on pourra utiliser de deux manières différentes la convexité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$).

4. En déduire l'encadrement suivant, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - \frac{1}{2n} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \frac{1}{2(n+1)}$$

Solution :

1.Pour $x \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où en intégrant sur le segment $[k, k+1]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

$\rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) > \ln n.$

$\rightarrow 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} [\ln k - \ln(k-1)] = 1 + \ln n.$

Donc :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

2. On a $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n}) = \varphi(\dfrac{1}{n})$, avec :

$$\varphi(x) = x + \ln(1-x)$$

La concavité de la fonction ln donne $x \geqslant \ln(1+x)$, soit $\ln(1-x) \leqslant -x$ et $\varphi(x) \leqslant 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
Etant décroissante et minorée par 0 elle est convergente de limite universellement notée γ (constante d'Euler).

3. a) Facilement :

$$\mathcal{A}(D_n) = \int_n^{n+1} (\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1})dx = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}.$$

b) $\star$ La représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est située sous sa corde passant par les points de cette courbe d'abscisse n et $n+1$. En clair :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$$

D'où $u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}) - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$

$\star$ En revanche la représentation graphique est située au-dessus de sa tangente au point de la courbe d'abscisse $n+1$.
Cette tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{(n+1)^2}(x - (n+1)) + \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$u_n - u_{n+1} \geqslant \int_n^{n+1} -\frac{1}{(n+1)^2}(x-(n+1))dx = \frac{1}{2(n+1)^2} \geqslant \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Soit :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

4.Par sommations et télescopage, il vient alors :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+2}) \leqslant u_n - u_{N+1} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1})$$

Puis par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$$

Il n'y a plus qu'à tout remettre dans l'ordre.

Exercice 1.12.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

1. Justifier l'existence de $S(x)$ pour $x > 0$.

2. Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b$. Soit $(x, x_0) \in [a, b]^2$.

   a) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$, indépendant de x et x_0, tel que :
$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant C|x - x_0|.$$

   b) En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.

3. a) Montrer que pour tout $x > 0$: $S(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$.

   b) En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Soit $x > 0$, alors $\dfrac{1}{(n+x)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la règle de Riemann pour les séries à termes positifs donne la convergence voulue.

2. a) Par regroupement et réduction au même dénominateur :
$$S(x) - S(x_0) = (x_0 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + x + x_0}{(n+x)^2(n+x_0)^2}$$
Puis, par majoration des numérateurs et minoration des dénominateurs (sans perdre la convergence) :
$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |x_0 - x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 2b}{(n+a)^4}$$

   b) La fonction S est donc continue sur $[a, b]$ (et même lipschitzienne) et, par globalisation, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Par simple décalage :
$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = S(x) - \frac{1}{x^2}$$

   b) Comme S est continue en 1, on a $\lim\limits_{x \to 0} S(x+1) = S(1)$, qui est un nombre réel donc est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$. Donc :
$$S(x) = S(x+1) + \frac{1}{x^2} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a par décroissance de la fonction à intégrer :

$$\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{(t+x)^2}\leqslant\frac{1}{(n+x)^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{(t+x)^2}$$

Par sommation et passage à la limite (tout converge), il vient :

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{(t+x)^2}\leqslant S(x)\leqslant\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{(t+x)^2}$$

Soit $\dfrac{1}{x+1}\leqslant S(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$, d'où par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x)=1$, *i.e.*

$$S(x)\underset{(+\infty)}{\sim}\frac{1}{x}$$

Exercice 1.13.

On pose pour tout réel $t>0$: $g(t)=\frac{1}{t}\times\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$.

1. Montrer que g admet une limite lorsque t tend vers 0^+. Montrer que la fonction ainsi prolongée en 0 est dérivable à droite en 0.

2. On pose, pour tout réel $t\geqslant 0$, $h(t)=\displaystyle\int_1^t g(u)\,du$.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de h au voisinage de $t=1$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $g(t)=\dfrac{1}{n}$.

a) Montrer que pour n assez grand, (E_n) admet une unique solution $x_n\in\,]0,1[$ et une unique solution $y_n\in\,]1,+\infty[$.

b) Étudier les suites (x_n) et (y_n) ainsi que leurs limites respectives.

Solution :

1. On a $\lim\limits_{u\to-\infty}u.\mathrm{e}^{-u}=\lim\limits_{u\to-\infty}u^2.\mathrm{e}^{-u}=0$ et comme $\lim\limits_{t\to0^+}-\dfrac{1}{t}=-\infty$, on a :

$$\lim_{t\to0^+}g(t)=0,\ \lim_{t\to0^+}\frac{g(t)}{t}=0$$

Ce qui prouve que g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0)=0$ et g est alors dérivable (à droite) en 0 avec $g'_d(0)=0$.

2. h est indéfiniment dérivable au voisinage de 1, de dérivée première g, donc admet un développement limité à tout ordre donné par la formule de Taylor :

$$h(t)=h(1)+\frac{t-1}{1!}h'(1)+\frac{(t-1)^2}{2!}h''(1)+\frac{(t-1)^3}{3!}h'''(1)+o((t-1)^3)$$

$$h'(t)=g(t)=\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-1/t}\implies h'(1)=\mathrm{e}^{-1}$$

$$h''(t) = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-1/t} + \frac{1}{t^3}\,\mathrm{e}^{-1/t} \implies h''(1) = 0$$
$$h'''(t) = \frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-1/t} - \frac{1}{t^4}\,\mathrm{e}^{-1/t} - \frac{3}{t^4}\,\mathrm{e}^{-1/t} + \frac{1}{t^5}\,\mathrm{e}^{-1/t} \implies h'''(1) = -\mathrm{e}^{-1}$$

Comme $h(1) = 0$, il reste :

$$h(t) = \mathrm{e}^{-1}\big((t-1) - \frac{(t-1)^3}{6} + o((t-1)^3)\big)$$

3. a) On a vu que $g'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3}\,(1-t)$, d'où le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

$\star$ La restriction de g à $[0,1]$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1/\mathrm{e}]$, donc la réciproque γ_1 réalise une bijection strictement croissante de $[0,1/\mathrm{e}]$ sur $[0,1]$.

Ainsi l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution et une seule dans $[0,1]$ pour $n \geqslant 3$, à savoir $x_n = \gamma(\dfrac{1}{n})$. Les variations de γ montrent que la suite (x_n) est décroissante de limite nulle.

On refait le même raisonnement à partir de la restriction de g à $[1,+\infty[$ qui réalise une bijection strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $[1/\mathrm{e},+\infty[$. Ainsi la suite (y_n) est définie à partir du rang 3, croissante de limite $+\infty$.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. a) Justifier que A est diagonalisable.

b) Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Montrer que λ est réel et que les composantes $v_1, \dots, v_n$ de v vérifient la relation :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], v_{k+1} - (2-\lambda)v_k + v_{k-1} = 0$$

en posant $v_0 = v_{n+1} = 0$.

2. En exploitant la relation (1), montrer que 0 et 4 ne sont pas valeurs propres de A.

3. On suppose que λ est une valeur propre de A telle que $0 < \lambda < 4$.

a) Montrer que les racines distinctes r_1 et r_2 du polynôme $r^2-(2-\lambda)r+1 = 0$ sont complexes et conjuguées. On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$.

b) En calculant successivement r_1r_2 et r_1+r_2, montrer que $\rho = 1$ puis que les valeurs propres de A dans l'intervalle $]0,4[$ sont au nombre de n et peuvent s'écrire :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\big(\frac{k\pi}{n+1}\big)$$

avec $k \in [\![1,n]\!]$.

Solution :

1. a) La matrice A est diagonalisable car symétrique réelle.

b) On traduit $Av = \lambda v$ en un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = \lambda v_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 2v_1 - v_2 = \lambda v_1 \\ -v_{n-1} + 2v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

En introduisant v_0 et v_{n+1} tels que $v_0 = v_{n+1} = 0$, on a bien le résultat annoncé.

2. On suppose que 0 est valeur propre. Dans ce cas, l'équation caractéristique associée à la récurrence d'ordre 2 sur (v_i) admet 1 comme racine double. Il existe donc α et β dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, i \in [\![0, n+1]\!], \quad v_i = \alpha + \beta i$$

Le fait que $v_0 = v_{n+1} = 0$ implique que $\alpha = \beta = 0$ soit $v = 0$, ce qui est contredit le fait que 0 soit valeur propre.
Le raisonnement est identique en supposant que 4 est valeur propre.

3. a) Si $\lambda \in]0,4[$, le discriminant de l'équation caractéristique, égal à $\lambda(\lambda-4)$, est donc négatif. Les racines de l'équation sont donc complexes et conjuguées. En notant $r_1 = \rho e^{i\theta}$ une des racines, on en déduit l'existence de α et β dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout k de $[\![0,n]\!]$:

$$v_k = (\alpha\cos(k\theta) + \beta\sin(k\theta))\rho^k$$

La relation $v_0 = 0$ implique $\alpha = 0$ tandis que la relation $v_{n+1} = 0$ implique que $\beta\sin((n+1)\theta))\rho^{n+1} = 0$, soit nécessairement pour que $v \neq 0$, $\sin((n+1)\theta) = 0$.

b) On a $r_1r_2 = 1$ et $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ (somme et produit des racines).
La première relation implique que $\rho = 1$ tandis que la seconde implique que $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$. En supposant que λ est valeur propre, la question précédente montre que $\sin((n+1)\theta) = 0$, soit θ de la forme $\dfrac{k\pi}{n+1}$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, en notant $\lambda_k = 2 - 2\cos\big(\frac{k\pi}{n+1}\big)$, λ_k est bien une valeur propre de A et un vecteur propre associé peut s'écrire :

$$v_\ell = \beta \sin\left(\ell \frac{k\pi}{n+1}\right) \qquad (\ell \in [\![1, n]\!])$$

avec $\beta \in \mathbb{R}^*$.

On a ainsi trouvé n valeurs propres distinctes de A dans l'intervalle $]0, 4[$. Elles y sont toutes !

Exercice 2.2.

On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

2. Soit $B = A^2$.

a) Montrer que B est une matrice symétrique réelle.

b) Quel est le signe des valeurs propres non nulles de B ?

c) En déduire la forme des valeurs propres complexes de A.

3. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la matrice $I_n + A$ est inversible.

b) Montrer que $P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale.

4. Déterminer les valeurs propres réelles possibles de P.

Solution :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On peut écrire $AX = \lambda X$ et

$$\lambda ||X||^2 = {}^tXAX = {}^t({}^tAX)X = -{}^tXAX = -\lambda ||X||^2$$

Comme $X \neq 0$, il vient $\lambda = 0$.

2. a) On a ${}^tB = {}^tA^2 = ({}^tA)^2 = A^2 = B$. Ainsi B est une matrice symétrique réelle ; ses valeurs propres sont réelles et B est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Soit $\lambda \neq 0, X \neq 0$ tels que $BX = \lambda X$. Alors :

$$\lambda ||X||^2 = {}^tXA^2X = {}^t({}^tAX)AX = -||AX||^2$$

Comme $AX \neq 0$ (autrement $BX = 0$), il vient : $\lambda < 0$.

c) Soit $\mu = a + ib, b \neq 0$ une valeur propre complexe de A.

Alors $\mu^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ est une valeur propre réelle négative de B. Donc $ab = 0$, et $b \neq 0$ entraîne que $a = 0$ et $\mu = ib$.

Les valeurs propres complexes de A sont des imaginaires purs.

3. a) La matrice $I + A$ est inversible si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de A, ce qui est le cas par les questions précédentes.

b) Comme $P = (I - A)(I + A)^{-1}$, on a :
${}^tP = {}^t[(I + A)^{-1}]{}^t(I - A) = [{}^t(I + A)]^{-1}.{}^t(I - A) = (I - A)^{-1}(I + A)$.
D'autre part : $P^{-1} = [(I - A)(I + A)^{-1}]^{-1} = (I + A)(I - A)^{-1}$
Or $I - A$ et $I + A$ commutent, donc $I + A$ et $(I - A)^{-1}$ commutent. D'où :
$$ {}^tP = P^{-1}.$$

4. Les valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale P ne peuvent être que 1 et/ou -1, car, pour tout vecteur X, $||PX|| = ||X||$.

Ici, supposons que -1 soit valeur propre de $P = (I - A)(I + A)^{-1}$. Il existe $X \neq 0$ tel que $(I - A)(I + A)^{-1}X = -X$.

Posons $Y = (I + A)^{-1}X$. Alors $X = (I + A)Y$ et :
$$(I - A)Y = -(I + A)Y, \text{ } i.e. \text{ } 2IY = 0 \text{ et } Y = 0$$
Donc $X = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

La seule valeur propre réelle possible de $(I - A)(I + A)^{-1}$ est donc 1.

Exercice 2.3.

1. On considère $n + 1$ réels distincts $a_0, a_1, \dots, a_n$.
Montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté L_k, tel que : pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,
$$L_k(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$
Montrer que ce polynôme est donné par : $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$

2. a) Montrer que $(L_0, L_1 \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Donner les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$.

3. On suppose maintenant que les réels a_j sont définis par : $\forall\, j \in [\![0, n]\!], a_j = j$.

a) Montrer que, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $L_k(X) = \dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\dbinom{n}{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (X - j)$

b) Déterminer le polynôme Q défini par : $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} kL_k$.

c) Soit A la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_0, L_1 \ldots, L_n)$. On ne demande pas d'écrire la matrice A, mais de donner :

- la première ligne de la matrice A ;
- la somme des éléments de toute autre ligne de A ;
- la somme des éléments des différentes colonnes de A.

d) Donner la matrice A^{-1}.

Solution :

1. $\star$ Pour l'existence, il suffit de vérifier que le polynôme proposé convient effectivement, ce qui est facile.
$\star$ Pour l'unicité : on suppose qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont solutions. On a alors, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, $P(a_j) = Q(a_j)$, soit également $(P - Q)(a_j) = 0$.
Le polynôme $P - Q$ qui est de degré inférieur ou égal à n possède $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. On a donc $P = Q$, d'où l'unicité.

2. a) La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base.
On considère $n+1$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$. On évalue cette égalité en a_j, il reste $\alpha_j = 0$. Comme ceci est vrai pour tout j de $[\![0, n]\!]$, on a bien pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = 0$ et la famille est libre.

b) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$. P se décompose dans la base sous la forme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$. En évaluant là encore cette égalité au point α_j, il reste $P(\alpha_j) = \alpha_j$.
Conclusion : P se décompose sous la forme : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$.

c) En appliquant la décomposition précédente au polynôme $P = 1$, on obtient exactement $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k = 1$.

3. a) On applique la formule $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$ en remplaçant a_j par j.

On obtient :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{X-j}{k-j}.$$

Or :

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{k-j} = \frac{1}{k(k-1)\dots 1(-1)(-2)\dots(-(n-k))} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}$$

Ce qui est bien le résultat attendu.

b) La valeur k est la valeur du polynôme X au point k. On a donc, d'après ce qui précède : $\sum\limits_{k=1}^{n} kL_k = X$.

c) i) Dans la matrice A, la première ligne représente les coordonnées des polynômes L_k sur le vecteur 1. C'est donc la valeur des polynômes L_k en 0, c'est donc $(L_0(0), L_1(0), \dots, L_n(0)) = (1, 0, \dots, 0)$.

ii) Les autres lignes représentent les coordonnées des polynômes sur les vecteurs X^k. Or la coordonnée d'un polynôme P sur X^k est $\dfrac{P^k(0)}{k!}$ (formule de Taylor, exacte pour les polynômes). La somme des coefficients de ces lignes est donc $\dfrac{(L_0+L_1+\dots+L_n)^{(k)}(0)}{k!}$. Comme $L_0+L_1+\dots+L_n = 1$, la dérivée est nulle et il en est de même de la somme des coefficients de ces lignes.

iii) La somme des termes d'une colonne représente la somme des coefficients du polynôme considéré et cette somme s'obtient en évaluant le polynôme en 1. Comme $L_k(1) = 0$ pour $k \neq 1$ et que $L_1(1) = 1$, ces $n+1$ sommes sont, dans l'ordre $(0, 1, 0, \dots, 0)$.

d) La matrice A^{-1} est la matrice de passage de la base $(L_0, L_1 \dots, L_n)$ à la base canonique. Ses colonnes sont donc les coordonnées de $1, X, \dots, X^n$ dans $(L_0, L_1 \dots, L_n)$.

Comme on a vu que, pour un polynôme quelconque : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\alpha_k)L_k$, on a donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & \dots & 1^n\\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & \dots & 2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ 1 & n & n^2 & \dots & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2.4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 stable par la multiplication matricielle :

$$\forall (M, M') \in F^2,\ MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. a) Soit p le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.
Montrer que $\forall (M, M') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $p(MM') = p(M)p(M')$.

b) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à F, alors M appartient à F.

c) Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 0 sauf à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne où se trouve un 1).
Calculer $E_{i,j}\times E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

d) Montrer que F contient la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e) Conclure.

Solution :

1. Soit $A \in F \cap \mathrm{Vect}(I_n)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$; si $\lambda \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda}A \in F$. Or $\dfrac{1}{\lambda}A = I_n \notin F$. Donc $\lambda = 0$ et $A = 0$.
Comme $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(I_n) = n^2$, on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. a) Soit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = A' + \lambda' I_n$ avec $A, A' \in F$. Alors

$$MM' = AA' + \lambda A' + \lambda A' + \lambda\lambda' I_n.$$

Or F est stable par produit donc $AA' \in F$ et donc $AA' + \lambda A' + \lambda A' \in F$. Par conséquent on vient de trouver la décomposition de MM' sur $F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ et :

$$p(MM') = \lambda\lambda' I_n = p(M)p(M').$$

b) La relation $M^2 \in F$ implique $p(M^2) = 0$. Or $p(M^2) = (p(M))^2$, d'après la question précédente.
En écrivant $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$, alors $p(M) = \lambda I_n$ et $(\lambda I_n)^2 = 0$. Ainsi $\lambda = 0$ et $M = A \in F$.

c) On sait que $E_{i,j}\times E_{k,l} = 0$ si $k \neq j$. Si $k = j$ alors $E_{i,j}\times E_{j,l} = E_{i,l}$.

d) Si $i \neq j$, alors $(E_{i,j})^2 = 0 \in F$, donc $E_{i,j} \in F$ d'après la question 2.b.

De plus $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i}$ pour un $i \neq j$. Or $E_{i,j}, E_{j,i} \in F$ et F est stable par produit, donc $E_{i,i} \in F$.
Ainsi F contient bien la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e) Si F contient la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors F contient I_n, ce qui contredit la supposition.

En conclusion tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit contient I_n.

Exercice 2.5.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

À tout P de E on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que l'application $T : P \mapsto Q$ est un endomorphisme de E.

2. Écrire la matrice associée à T dans la base canonique de E.

3. Soit P un polynôme propre de T.

a) Montrer que P est de degré n.

b) Soit z_0 une racine de P. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $z_0 \in \{-1, 1\}$.

c) En déduire que si P est un polynôme propre de T, alors P est de la forme : $P(X) = \alpha(X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$.

4. Déterminer les valeurs propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application T est linéaire par les propriétés de distributivité de la multiplication sur l'addition et parce que la dérivation est linéaire.

On remarque que :

$$T(1) = X, T(X) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)X^2 + \frac{1}{n}$$

et, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $T(X^k) = \big(1 - \frac{k}{n}\big)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^{k-1}$. Enfin $T(X^n) = X^{n-1}$.
Ceci montre que si $\deg(P) \leqslant n$, alors $\deg(T(P)) \leqslant n$ (même pour $n = 1$, car alors $T(X) = -1$).
Ainsi T est un endomorphisme de E.

2. Dans la question précédente, on a montré que la matrice associée à T dans la base canonique de E est tridiagonale, avec des 0 sur la diagonale, $(1, 1-\frac{1}{n}, \dots, 1-\frac{n-1}{n})$ sur la sous-diagonale et $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$ sur la sur-diagonale.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n/n & 0 & 2/n & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)/n & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 & n/n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Soit P un polynôme unitaire propre de degré p, avec $p < n$. On écrit $P(X) = X^p + \cdots$, on a alors :

$$T(P) = X(X^p + \cdots + a_0) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)(pX^{p-1} + \cdots) = \lambda(X^p + \cdots)$$

En se focalisant sur les termes de plus haut degré, il vient :

$$\left(1 - \frac{p}{n}\right)X^{p+1} + \cdots = \lambda(X^p + \cdots + \cdots)$$

Ceci n'est possible que si $p = n$.

b) Soit z_0 une racine complexe de P, avec $z_0 \notin \{-1, 1\}$.

Comme on a $(X - \lambda)P(X) = \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$, z_0 est également racine de P'. Plus précisément, lorsque z_0 est racine d'ordre r de P, z_0 est aussi racine d'ordre r de P', ce qui est impossible puisque toute racine d'ordre r de P est racine d'ordre $r - 1$ de P'.

Donc $z_0 \in \{-1, 1\}$.

4. Pour $P_k(X) = (X - 1)^k(X + 1)^{n-k}$, un calcul élémentaire donne

$$T(P_k) = \left(1 - \frac{2k}{n}\right)P_k.$$

Les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont donc polynômes propres de valeurs propres associées $1, 1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{4}{n} \dots, -1$.

T est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $(n+1)$ qui admet $n + 1$ valeurs propres : il est donc diagonalisable.

Exercice 2.6.

Soit a un réel non nul. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On considère l'équation d'inconnue X, $(\star)$: $X^n = A$, où n est un entier supérieur ou égal à 2 et X un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Soit X une solution éventuelle de $(\star)$.

i) Montrer que $XA = AX$.

ii) En déduire que tout vecteur propre de A est vecteur propre de X.

b) Montrer que $(\star)$ n'a pas de solution lorsque n est un entier pair.

3. Soit n un entier impair et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit X une solution de $(\star)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à X. Montrer qu'il existe (α, β, γ) tels que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$, soit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ \frac{\beta-\alpha}{2} & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

c) Résoudre l'équation $(\star)$ lorsque n est un entier impair.

Solution :

1. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ a & a-\lambda & a \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow aL_1 + \lambda l_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 - \lambda^2 \\ 0 & a-\lambda & a+\lambda \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

Il suffit de permuter les lignes L_1 et L_3 pour obtenir la forme réduite habituelle et les valeurs propres sont les valeurs de λ qui annulent $a - \lambda$ ou $a^2 - \lambda^2$, donc :

$$\operatorname{Spec} A = \{-a, a\}$$

On détermine les sous-espaces propres associés et on trouve

$$E_{(a)} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{(-a)} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. a) i) Comme $X^n = A$, il vient : $AX = X^{n+1} = XA$.

ii) Soit ω un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ $(A\omega = \lambda\omega)$. Alors :

$$A(X\omega) = X(A\omega) = \lambda X\omega$$

Comme $\dim E_{(\lambda)}(A) = 1$, il existe α, éventuellement nul, tel que $X\omega = \alpha\omega$, ce qui signifie que ω est vecteur propre de X.

b) Supposons que $n = 2p$, on suppose également que $a > 0$.
Soit ω un vecteur propre associé à la valeur propre $-a$.
On a vu qu'il existe α réel tel que $X\omega = \lambda\omega$ et :
$$-a\omega = A\omega = X^{2p}\omega = \alpha^{2p}\omega$$
Comme $\omega \neq 0$, il vient : $\alpha^{2p} = -a < 0$, ce qui est impossible.

3. a) L'équation $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3(e_1 - e_3) = 0$ est équivalente à
$$(a_1 - a_3)e_1 + a_2e_2 - a_3e_3 = 0$$
dont la seule solution est clairement $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille, qui est donc une base de $\mathbb{R}^3$, puisque de cardinal 3.

b) La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
L'endomorphisme associé à A a pour matrice associée dans la base $\mathcal{B}$
$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = PAP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$
Si l'on note Y la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$, on a Y de la forme
$$Y = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & \alpha & 0 \\ z & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
(les deux dernières colonnes correspondent aux vecteurs propres de u qui sont e_2 et $e_1 - e_3$).
alors $Y\widetilde{A} = \widetilde{A}Y$ montre que Y est de la forme :
$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ \dfrac{\beta - \alpha}{2} & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

c) Comme $Y^n = \widetilde{A}$ et n impair, on a $\beta = -\alpha$.
On calcule ensuite Y^n par récurrence sur n et on trouve :
$$Y^{2p+1} = \begin{pmatrix} \alpha^{2p+1} & 0 & 0 \\ (2p+1)\alpha^{2p}\gamma & \alpha^{2p+1} & 0 \\ (-\alpha)^{2p+1} & 0 & (-\alpha)^{2p+1} \end{pmatrix}$$
Finalement, en revenant dans la base initiale, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ s & r & s \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$r = a^{\frac{1}{2p+1}}, \quad s = \frac{1}{2p+1} a^{\frac{1}{2p+1}}$$

Exercice 2.7.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tM = -M\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les éléments propres de J.

b) Soit X un vecteur propre de J. On pose $X = U + iV$, où U et V sont deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que U et V sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = -A$. On pose $B = A^2$.

3. a) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que les valeurs propres de B sont négatives ou nulles.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de A sont de la forme ia, avec a réel non nul.

4. Soit $X = U + iV$ un vecteur colonne propre de A associé à la valeur propre non nulle ia, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AU + aV$.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle U, V\rangle$.

5. $X = U + iV$ un vecteur colonne propre de A, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. A-t-on toujours $\langle U, V\rangle = 0$?

Solution :

1. On vérifie immédiatement que l'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, puisque dire que

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}$, c'est dire que pour tout i, $a_{i,i} = 0$, et pour $i \neq j, a_{i,j} = -a_{j,i}$. Une base de ce sous-espace est donc $(E_{i,j} - E_{j,i})_{i<j}$.

2. a) Les valeurs propres de J sont complexes : i et $-i$. On a

$$E_{(i)}(J) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ et } E_{(-i)}(J) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

b) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre i. Alors :

$$X = (a+ib)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

et le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ est nul.

La démonstration est identique pour tout vecteur propre associé à la valeur propre $-i$, car les vecteurs propres sont conjugués, puisque la matrice J est réelle et les valeurs propres sont complexes et conjuguées.

3. a) On a : ${}^tB = B$ (vérification immédiate)

b) Soit $\lambda \neq 0, X \neq 0$ tels que $BX = \lambda X$. Alors

$$\lambda\|X\|^2 = {}^tXA^2X = {}^t({}^tAX)AX = -\|AX\|^2$$

Comme $AX \neq 0$ (autrement $BX = 0$), il vient $\lambda < 0$.

c) Soit $\mu = a + ib, b \neq 0$ une valeur propre complexe de A.
Alors $\mu^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ est une valeur propre réelle négative de B. Donc $ab = 0$ et $b \neq 0$, ce qui entraîne que $a = 0$ et $\mu = ib$.

Les valeurs propres complexes de A sont des imaginaires purs.

4. a) On a

$$A(U+iV) = ia(U+iV) \implies AU + iAV = -aV + iaU \implies AU + aV = 0$$

b) De même

$${}^t(AU)U = {}^tU{}^tAU = -{}^tUAU = -{}^t(AU)U \implies {}^t(AU)U = 0$$

Or $AU = -aV$ et $a \neq 0$, donc ${}^tVU = 0$.

5. La réponse est non. Soit, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A donc $(1+i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aussi et

$$(1+i)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\neq 0.$$

Exercice 2.8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \geqslant 0, e_n(x) = x^n \exp(-x).$$

On donne un entier N non nul.
Soit E l'espace vectoriel engendré par $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_N)$.

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E ?

2. Les éléments de E sont en particulier des applications dérivables. On notera Δ la dérivation dans E : $\forall f \in E, \Delta(f) = f'$.

Démontrer que Δ est un automorphisme de E. Rechercher ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

3. Soit $f \in E$ et x quelconque dans $[0,+\infty[$.

a) Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente. On note alors $F : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

b) Vérifier que $F \in E$, et que l'application $\Phi : f \mapsto F$ ainsi définie est un automorphisme de E.

c) Démontrer que $\Phi \circ \Delta = \Delta \circ \Phi$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note X_n une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et dont $\dfrac{e_n}{n!}$ est une densité sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que X_n a des moments d'ordre 1 et 2, et calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

b) Dans cette question, $n = 1$. Calculer une densité de la variable aléatoire D, partie décimale de X_1, définie par : $D = X_1 - \lfloor X_1 \rfloor$, où $\lfloor X_1 \rfloor$ désigne la partie entière de X_1.

Solution :

1. La famille $(e_0, e_1, \dots, e_N)$ est clairement libre, par échelonnement des degrés des parties polynomiales. Ainsi $\dim E = N+1$.

2. La dérivation est une application linéaire. On calcule $e_n' : x \mapsto (nx^{n-1} - x^n)\mathrm{e}^{-x}$ qui se lit $\Delta(e_n) = ne_{n-1} - e_n$.

Ceci montre que Δ est un endomorphisme de E. La matrice M_Δ associée à Δ dans la base $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, avec -1 sur sa diagonale. Elle est donc inversible et Δ est un automorphisme de E.

Son unique valeur propre est -1 et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(e_0)$. L'endomorphisme Δ n'est pas diagonalisable.

3. a) Tout f de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$. Toute combinaison linéaire de séries convergentes étant convergente, il suffit d'étudier la convergence demandée pour $f(x) = x^k \mathrm{e}^{-x}$.
On a alors :

$$n^2 \times f(x+n) = \mathrm{e}^{-x} n^2 (x+n)^k \mathrm{e}^{-n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \mathrm{e}^{-x} n^{k+2} \mathrm{e}^{-n}$$

Par négligeabilité classique, cette expression est de limite nulle lorsque n tend vers l'infini, ce qui prouve, par la règle de Riemann, que la série proposée est (absolument) convergente.

b) En développant par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \Phi(e_k)(x) = E_k(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} e_k(\ell + x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + x)^k \mathrm{e}^{-\ell - x} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \ell^j x^{k-j} \mathrm{e}^{-\ell} \mathrm{e}^{-x} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A_j x^{k-j} \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

avec $A_j = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell^j e^{-\ell}$ (toutes les séries écrites convergent)
Ainsi $\Phi(e_k) \in E$ et la linéarité de Φ étant évidente, Φ est un endomorphisme de E.
La matrice de Φ dans la base $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_N \\ 0 & A_0 & 2A_1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & NA_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec $A_0 \neq 0$ sur sa diagonale. Elle est donc inversible.

c) On vérifie que $M_\Delta M_\phi = M_\phi M_\Delta$ en effectuant le produit matriciel. On peut également comparer $\Phi(e'_k)$ et $(\Phi(e_k))'$.

4. La variable aléatoire X_n suit la loi $\Gamma(1, n+1)$. Ainsi

a) $E(X_n) = n+1, V(X_n) = n+1$.

b) La variable aléatoire D est à valeurs dans $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$P(D \leqslant x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \leqslant X_1 \leqslant x+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (B(x+n) - B(n))$$

où B est une primitive quelconque de e_1.
D'après M_Δ, on peut prendre $B = -e_0 - e_1$ et, puisque B appartient alors à E, on peut utiliser l'application Φ. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$P(D \leqslant x) = \Phi(B)(x) - \Phi(B)(0)$$

Comme la dérivation commute avec Φ, pour déterminer une densité d de D, il suffit d'écrire, pour tout $x \in [0,1]$:

$$d(x) = (\Phi(B))'(x) = \Phi(B')(x) = \Phi(e_1)(x) = (A_1 e_0 + A_0 e_1)(x)$$

Or : $A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}, A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$

Donc, pour $x \in [0,1]$:

$$d(x) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\big(x + \frac{1}{\mathrm{e}-1}\big)\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 2.9.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On se donne $(p+1)$ réels distincts $x_0, \dots, x_p$.

Soit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X]$; on pose : $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} A(i)B(i)$.

On note alors :

- $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$;
- $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$;
- $V(A) = C(A,A)$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

2. Démontrer, pour tous polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X])^2$, les relations suivantes :

a) $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ et $C(A,B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$.

b) $|C(A,B)| \leqslant \sqrt{V(A)V(B)}$.
Dans quel cas cette inégalité est-elle une égalité ?

3. Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$ fixé.

a) Déterminer, en fonction de $E(A)$ et de $V(A)$ le projeté orthogonal de A sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_0[X]$, puis la distance de A à ce sous-espace vectoriel.

b) Si $\deg(A) \geqslant 1$, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$ engendré par les polynômes 1 et A.
Déterminer une base orthonormale de F, dont le premier vecteur est le polynôme 1.

c) Soit B un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ différent de A.
Déterminer, en fonction de $E(A), E(B), V(A)$ et de $C(A,B)$, le projeté orthogonal du polynôme B sur le sous-espace vectoriel F, sous la forme $\lambda A + \mu$.
Préciser la distance de B à F.

Solution :

1. On a clairement défini une forme bilinéaire symétrique.
Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$. On a $\langle A, A\rangle = \dfrac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p} A(i)^2 \geqslant 0$, et $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si $0, \ldots, p$ sont des racines du polynôme A, ce qui implique que A est nul puisque c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à p.

$$\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}_p[X].$$

2. Pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}_p[X]$:

a) $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$, donc :

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \langle A, B\rangle - \langle A, E(B)\rangle - \langle E(A), B\rangle + \langle E(A), E(B)\rangle \\ &= \langle A, B\rangle - E(B)\langle A, 1\rangle - E(A)\langle 1, B\rangle + E(A)E(B)\langle 1, 1\rangle \\ &= \langle A, B\rangle - E(B)E(A) - E(A)E(B) + E(A)E(B) \\ &= \langle A, B\rangle - E(A)E(B) \end{aligned}$$

d'où $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ en prenant $B = A$.

b) On a : $|C(A,B)| \leqslant \sqrt{V(A)V(B)}$; c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux polynômes $A - E(A)$ et $B - E(B)$. Il y a égalité si ces polynômes sont proportionnels, ce qui revient à dire que A est constant ou qu'il existe des réels λ, μ tels que $B = \lambda A + \mu$.

3. Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$ fixé.

a) Une base orthonormale de $\mathbb{R}_0[X]$ est constituée (par exemple) du polynôme 1.

Le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X]$ est donc $p_0(A) = \langle 1, A\rangle 1 = E(A)$.

La distance de A à $\mathbb{R}_0[X]$ est $\|A - p_0(A)\| = \|A - E(A)\| = \sqrt{V(A)}$.

b) Posons $A_1 = A - E(A)$. On a immédiatement $\langle 1, A_1\rangle = 0$; de plus, si $\deg(A) \geqslant 1$, la famille $(1, A_1)$ est libre ; c'est donc une base orthogonale du plan vectoriel F. Il reste à la normaliser, en remplaçant A_1 par $A_2 = \dfrac{A_1}{\|A_1\|} = \dfrac{A - E(A)}{\sqrt{V(A)}}$.

(On a utilisé la méthode d'orthonormalisation de Schmidt.)

c) D'après la question précédente, le projeté orthogonal de B sur F est le polynôme :

$p_F(B) = \langle 1, B\rangle 1 + \langle A_2, B\rangle A_2 = E(B) + \dfrac{\langle A - E(A), B\rangle}{V(A)}(A - E(A))$

Or $\langle A - E(A), B\rangle = \langle A, B\rangle - E(A)\langle 1, B\rangle = \langle A, B\rangle - E(A)E(B) = C(A, B)$, d'où :

$$p_F(B) = \frac{C(A,B)}{V(A)}A + E(B) - \frac{C(A,B)}{V(A)}E(A) = \lambda A + \mu$$

avec : $\lambda = \dfrac{C(A,B)}{V(A)}$ et $\mu = E(B) - \dfrac{C(A,B)}{V(A)}E(A)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
d(B,F)^2 &= \|B - p_F(B)\|^2 = \|B\|^2 - \|p_F(B)\|^2 \\
&= E(B)^2 + V(B) - E(\lambda A + \mu)^2 - V(\lambda A + \mu) \\
&= E(B)^2 + V(B) - (\lambda E(A) + \mu)^2 - \lambda^2 V(A) \\
&= E(B)^2 + V(B) - E(B)^2 - \frac{C(A,B)^2}{V(A)} \\
&= \frac{V(A)V(B) - C(A,B)^2}{V(A)}
\end{aligned}$$

On remarque que c'est cohérent avec la réponse à la question 2.b.

Exercice 2.10.

1. $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire celui pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthonormée.

Soient deux réels a et b et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On note $B = {}^tAA$, la matrice produit de la transposée de A par A.

a) Rechercher les valeurs propres de B.

b) Calculer le maximum de ${}^tXBX$ lorsque X décrit l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1.

2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

Pour tout réel t, on définit la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} t & 2t & 2-t \\ 0 & 2(t-1) & 0 \\ 2-t & -2t & t \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $\alpha(t)$ qui a pour matrice $M(t)$ dans la base canonique.

a) Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres de $M(0)$ et $M(1)$.

b) Construire une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dont au moins 2 vecteurs soient des vecteurs propres à la fois pour $M(0)$ et pour $M(1)$. On ordonnera ces vecteurs pour que la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) soit symétrique. Ecrire la matrice de $\alpha(t)$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

c) Pour quelles valeurs du paramètre t, $\alpha(t)$ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. Le calcul de $B = {}^tAA$ donne
$$B = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

a) La matrice $B - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si ses deux lignes sont proportionnelles, ce qui est équivalent à :
$$(a^2-\lambda)(a^2+b^2-\lambda) - a^2b^2 = \lambda^2 - (2a^2+b^2)\lambda + a^4 = 0$$
Le discriminant Δ vaut $b^2(b^2+4a^2)$, et les valeurs propres de B sont :
$$\lambda_1 = \frac{(2a^2+b^2) - \sqrt{b^2(b^2+4a^2)}}{2} \ ; \ \lambda_2 = \frac{(2a^2+b^2) + \sqrt{b^2(b^2+4a^2)}}{2}$$

b) La matrice B est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Ainsi, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ telles que $B = {}^tQDQ$.

Ainsi ${}^tXBX = {}^t(QX)D(QX) = {}^tYDY$, avec $\|Y\| = \|X\|$, puisque Q est orthogonale.

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors :
$${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \leqslant \max(\lambda_1, \lambda_2)\|Y\|^2$$
Donc :

$$\sup_{\|X\|=1} {}^tXBX = \sup_{\|Y\|=1} {}^tYDY = \frac{(2a^2+b^2)+|b|\sqrt{b^2+4a^2}}{2}$$

ce supremum étant atteint pour un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre.

2. a) La matrice $M(0)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est symétrique réelle, donc diagonalisable. Un calcul *via* le pivot de Gauss permet d'obtenir que ses valeurs propres sont -2 et 2, puis que

$\star$ $E_{(2)}(M(0)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\star$ $E_{(-2)}(M(0))$ est le plan d'équation $x + z = 0$ (l'orthogonal du vecteur précédent).

b) De la même façon, on a $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est de rang 2. Donc 0 est valeur propre de sous-espace propre associé $E_{(0)}(M(1)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En effectuant à nouveau un pivot de Gauss sur la matrice $M(1) - \lambda I_3$, on n'obtient qu'une seule autre valeur propre, qui est 2, de sous-espace propre associé égal à $E_{(2)}(M(1)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

b) Un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} a + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$, soit $a = c = 0$. On peut choisir $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base est :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a : ${}^tP = P = P^{-1}$, et

$$PM(t)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(t-1) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}t & 2(t-1) \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire. Ainsi les valeurs propres de $M(t)$ sont $2, 2(t-1)$. Cette matrice est diagonalisable si et seulement si $t = 0$ (autrement le sous-espace propre associé à la valeur propre $2(t-1)$ est de dimension 1).

Exercice 2.11.

1. Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A.$$

2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$.

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

En déduire que $A^{-1} - B^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned}(A^{-1} - B^{-1})[B(B - A)^{-1}A] &= A^{-1}B(B - A)^{-1}A - (B - A)^{-1}A \\ &= A^{-1}(B - A + A)(B - A)^{-1}A - (B - A)^{-1}A \\ &= A^{-1}(B - A)(B - A)^{-1}A + A^{-1}A(B - A)^{-1}A \\ &\qquad -(B - A)^{-1}A \\ &= A^{-1}IA + (B - A)^{-1}A - (B - A)^{-1}A = I\end{aligned}$$

Cela suffit pour affirmer que $A^{-1} - B^{-1}$ est inversible, avec :

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$$

2. La matrice C est symétrique réelle et pour toute colonne X non nulle, on a ${}^tXCX > 0$, donc $CX \neq 0$ et C est inversible.

Soit alors X une colonne non nulle et $Y = C^{-1}X$, alors $X = CY$ et

$${}^tXC^{-1}X = {}^tYCC^{-1}CY = {}^tYCY > 0$$

Comme C^{-1} est encore symétrique, C^{-1} est bien une matrice de produit scalaire.

3 a) $B(B-A)^{-1}A = (B-A+A)(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$

b) Cette matrice est l'inverse d'une matrice symétrique, donc est elle-même symétrique et pour toute colonne X non nulle :

$$\begin{aligned}{}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X &= {}^tXB(B-A)^{-1}AX = {}^tXAX + {}^tXA(B-A)^{-1}AX \\ &= {}^tXAX + {}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX)\end{aligned}$$

Or, comme $B-A$ est une matrice de produit scalaire, il en est de même de $(B-A)^{-1}$ et ${}^t(AX)(B-A)^{-1}(AX) > 0$. Comme on a également ${}^tXAX > 0$, il vient ${}^tX(A^{-1}-B^{-1})^{-1}X > 0$ et $(A^{-1}-B^{-1})^{-1}$ est une matrice de produit scalaire.

Il en est de même de son inverse et $A^{-1}-B^{-1}$ est une matrice de produit scalaire.

Exercice 2.12.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (selon l'usage on confondra polynôme et fonction polynôme associée). On munit E du produit scalaire φ défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$$

On définit l'application u qui, à tout polynôme P de E, fait correspondre :

$$u(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.

2. On considère la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E.

a) Déterminer la matrice $M_u \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de u dans cette base. Montrer que la matrice M_u est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ de u que l'on rangera par ordre croissant. On note E_i le sous-espace propre associé à λ_i.

c) Déterminer E_0 et E_1.

3. Pour tout i, soit Q_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

a) Montrer que : $i \neq j \implies \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_i(x)Q_j(x)\,dx = 0.$

b) Déterminer le degré de Q_i.

c) Soit $P \in E$ de degré m. Montrer que si l'on a :

$$\forall i \in [\![0, m-1]\!], \int_{-1}^{1} P(x)Q_i(x)\,dx = 0,$$

alors P est un vecteur propre associé à λ_m.

4. On considère pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = [(X^2-1)^k]^{(k)}$ (dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme $(X^2-1)^k$)

a) Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_k.

b) Montrer que P_0 et P_1 sont des vecteurs propres de u associés à λ_0 et λ_1 respectivement.

c) Soient deux entiers ℓ et m vérifiant $0 \leqslant m < \ell \leqslant n$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)\,dx = 0$. Qu'en déduit-on pour les $P_i, i \in [\![0, n]\!]$?

Solution :

1. On remarque que $u(P) = ((X^2-1)P')'$, donc en intégrant par parties :

$$\varphi(u(P), Q) = \int_{1}^{1} u(P)(x)Q(x)\,dx$$

donne :

$$\begin{aligned}\varphi(u(P), Q) &= \left[(x^2-1)P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-1)P'(x)Q'(x)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{1} (x^2-1)P'(x)Q'(x)\,dx\end{aligned}$$

Cette dernière expression étant clairement symétrique, on a bien :

$$\varphi(u(P), Q) = \varphi(u(Q), P) = \varphi(P, u(Q))$$

2. a) $u(1) = 0$, $u(X) = 2X$ et pour $i \geqslant 2$,
$u(X^i) = (X^2-1).i(i-1)X^{i-2} + 2X.iX^{i-1} = i(i+1)X^i - i(i-1)X^{i-2}$
d'où :

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -n(n-1) \\ \vdots & & & & (n-1)n & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

La matrice u est diagonalisable, soit :
$\rightarrow$ parce que ses valeurs propres sont en évidence sur sa diagonale et sont au nombre de $n+1=\dim E$;
$\rightarrow$ parce que M_u traduit un endomorphisme symétrique (mais pas par rapport à une base orthonormée).

b) On vient de le dire :
$$\mathrm{Spec}(u)=\{0,2,6,\dots,n(n+1)\}$$

c) $E_0=\operatorname{Ker}u=\mathbb{R}_0[X]$ et $E_1=\operatorname{Ker}(u-2Id)=\mathrm{Vect}(X)$ (voir 2.a) et le fait que les sous-espaces propres sont tous des droites).

3. a) On a :
$$\begin{aligned}\lambda_i\varphi(Q_i,Q_j)&=\varphi(\lambda_iQ_i,Q_j)=\varphi(u(Q_i),Q_j)=\varphi(Q_i,u(Q_j))=\varphi(Q_i,\lambda_jQ_j)\\&=\lambda_j\varphi(Q_i,Q_j)\end{aligned}$$
et comme $\lambda_i\neq\lambda_j$:
$$\varphi(Q_i,Q_j)=0$$

b) La forme même de la matrice M_u montre que $\deg Q_i=i$.

c) Etant étagée en degrés, la famille $(Q_0,Q_1,\dots,Q_m)$ forme donc une base de l'espace $\mathbb{R}_m[X]$ et P est de la forme $\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_jQ_j$.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}P(x)Q_i(x)\,dx=0$ se réduit alors à $\alpha_i\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_i^2(x)\,dx$ et comme Q_i n'est pas le polynôme nul, on a $\alpha_i=0$. Ceci étant vrai pour $i\in[\![0,m-1]\!]$, P est bien colinéaire à Q_m, donc est propre pour la valeur propre λ_m.

4. a) $(X^2-1)^k=X^{2k}+\cdots$ donne :
$$[(X^2-1)^k]^{(k)}=(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k+\cdots=\frac{(2k)!}{k!}X^k+\cdots$$

b) $P_0=1$ et $P_1=(X^2-1)'=2X$, donc P_0 est propre pour u pour la valeur propre 1 et P_1 est propre pour la valeur propre 2.

c) Notons $R_k=(X^2-1)^k$, alors $P_k=R_k^{(k)}$ et par une intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_\ell(x)P_m(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}R_\ell^{(\ell)}(x)R_m^{(m)}(x)\,dx\\&=\big[R_\ell^{(\ell-1)}(x)R_m^{(m)}(x)\big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}R_\ell^{(\ell-1)}(x)R_m^{(m+1)}(x)dx\end{aligned}$$
Comme -1 et 1 sont valeurs propres d'ordre ℓ de R_ℓ, ces nombres sont racines de toutes les dérivées de R_ℓ jusqu'à la dérivée $(\ell-1)^{\text{ème}}$ incluse. Il reste donc :

$$\int_{-1}^{1} R_\ell^{(\ell)}(x) R_m^{(m)}(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} R_\ell^{(\ell-1)}(x) R_m^{(m+1)}(x) dx$$

On recommence, et au bout de ℓ intégrations par parties, il vient

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x)\, dx = (-1)^\ell \int_{-1}^{1} R_\ell(x) R_m^{(m+\ell)}(x) dx = 0$$

car $R_m^{(m+\ell)}$ est le polynôme nul.

Comme $(P_0, \ldots, P_{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a par linéarité :

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) Q_i(x)\, dx = 0 \text{ pour tout } i \text{ de } [\![0, m-1]\!]$$

et par le résultat 3. c), P_ℓ est propre pour u pour la valeur propre λ_ℓ.

Exercice 2.13.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note P' le polynôme dérivé défini par

$$P' = \sum_{p=1}^{r} p a_p X^{p-1} \text{ lorsque } P = \sum_{p=0}^{r} a_p X^p.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P de E soit divisible par son polynôme dérivé (c'est-à-dire : il existe $Q \in E$ tel que $P = QP'$)

On pourra distinguer les cas : P est le polynôme nul, P est une constante non nulle, P est de degré 1, P est de degré $\geqslant 2$. Dans ce dernier cas, on cherchera une condition sur le nombre de racines distinctes de P.

2. Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall\, P \in E, \forall\, x \in \mathbb{C}, (u(P))(x) = (x^2+1)P'(x) - nxP(x)$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

3. Vérifier que le complexe λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe un polynôme P non nul de E tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}, (x^2+1)P'(x) = (nx+\lambda)P(x) \qquad (1)$$

4. a) Montrer que $-in$ et in sont valeurs propres de u (avec $i^2 = -1$).

b) Soit $\lambda \notin \{-in, in\}$. Montrer que P ne peut être solution de (1) que s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $P(x) = (x^2+1)^k Q(x)$. Que devient alors l'égalité (1) ?

c) Montrer que $-i(n-2k)$ et $i(n-2k)$ sont valeurs propres de u.

d) En déduire que u est diagonalisable.

Solution :

1. $\star$ Si $P = 0$, alors $P' = 0$ et P' divise P.
$\star$ Si P est un polynôme constant non nul, $P' = 0$ et P' ne divise pas P.
$\star$ Si $\deg P = 1$, P' est constant non nul et P' divise P.

Supposons donc $\deg P \geqslant 2$, soient $z_1, \ldots, z_k$ les racines (dans $\mathbb{C}$) distinctes de P' et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leurs ordres de multiplicité. On a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \deg P' = \deg P - 1$.
Comme P' divise P, $z_1, \ldots, z_k$ sont aussi racines de P et on sait alors que les ordres de multiplicité sont $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_k + 1$.
On a donc :

$$(\alpha_1 + 1) + \cdots + (\alpha_k + 1) = \deg P - 1 + k \leqslant \deg P$$

Ainsi $k \leqslant 1$ et comme $k \geqslant 1$, $k = 1$: z_1 est racine de P d'ordre $\alpha_1 = \deg P$, ce qui signifie que P est de la forme :

$$P(X) = a(X - z)^r$$

2. La linéarité de u est claire et si $P = a_n X^n + \cdots + a_0$, alors :
$u(P) = (X^2+1)(na_n X^{n-1} + \cdots) - nX(a_n X^n + \cdots) = (na_n - na_n)X^{n+1} + \cdots$
et $u(P)$ est bien de degré inférieur ou égal à n.

$$u \in \mathcal{L}(E)$$

3. Evident.

4. a) Pour $\lambda = -ni$, la relation (1) s'écrit : $\forall\, x \in \mathbb{C}, (x + i)P'(x) = nP(x)$.
D'après la première question $-i$ est la seule racine de P, et la considération des coefficients dominants dans (1) montre que P est de degré exactement n, donc :

$$-ni \text{ est valeur propre de } u \text{ et } E_{(-ni)}(u) = \mathrm{Vect}((X + i)^n)$$

De la même façon ni est valeur propre de u, avec $E_{(ni)}(u) = \mathrm{Vect}((X - i)^n)$

b) La relation (1) montre que si P est solution avec $\lambda \notin \{-in, in\}$, alors $P(i) = P(-i) = 0$ et P est divisible par $(X^2 + 1)$.
Si k est le plus grand des entiers p tels que $(X^2 + 1)^p$ divise P, on écrit :

$$P(X) = (X^2 + 1)^k Q(X), \text{ avec } 2k \leqslant n$$

En remplaçant dans (1), il vient :

$$(X^2 + 1)Q'(X) = ((n - 2k)X + \lambda)Q(X) \quad (2)$$

c) En appliquant les résultats de 4. a) à l'entier $n-2k$ et à Q, on trouve que pour $\lambda = -(n-2k)i$, $Q(X) = (X+i)^{n-2k}$ est solution de (2), donc que $P(X) = (X^2+1)^k(X+i)^{n-2k}$ est solution de (1).

De la même façon, pour $\lambda = (n-2k)i$, $P(X) = (X^2+1)^k(X-i)^{n-2k}$ est solution de (1).

d) Ainsi, $-ni, -(n-2)i, \ldots, -(n-2k)i, \ldots, ni$ sont valeurs propres de u. Ce qui nous fait $n+1$ valeurs propres pour u (k varie de 0 à n) et comme $\dim E = n+1$, u est bien diagonalisable.

Exercice 2.14.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$. On désigne par $\|\ \|$ la norme associée.
L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p. On confond l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ des matrices à p lignes et 1 colonne et $\mathbb{R}^p$.
Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.
On dit qu'une matrice A est positive si elle est symétrique et si $\langle A(x) \mid x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée ; on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est A. Si λ est une valeur propre de A, on note p_λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$.

a) Justifier les propriétés suivantes :
- $p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- $\sum\limits_{\lambda\in\sigma(A)} p_\lambda = Id$.

b) Montrer que l'endomorphisme $v = \sum\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda$ vérifie l'égalité : $v\circ v = u$.
En déduire que la matrice R associée à v est solution de l'équation $X^2 = A$.

c) Soit Y une matrice positive telle que $Y^2 = A$. On note w l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est Y. Montrer que $\sigma(Y) = \left\{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.

Prouver ensuite que si $\lambda \in \sigma(A)$, on a $F_{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda} Id) \subset E_\lambda$. En déduire que $w = v$, puis qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.
On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

d) Montrer que la matrice $\sqrt{A}$ commute avec A.

Solution :

1. $\star$ Soit A positive, λ une valeur propre de A et x un vecteur unitaire propre associé. On a :

$$\lambda = \lambda\langle x, x\rangle = \langle A(x), x\rangle \geqslant 0$$

$\star$ Réciproquement, si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, on considère une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a :

$$\langle A(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k, \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell e_\ell\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant 0$$

2. a) $\star$ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $E_{\lambda_2} \perp E_{\lambda_1}$, donc $\mathrm{Im}(p_{\lambda_2}) = E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_1}^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_{\lambda_1})$, soit :

$$p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$$

$\star$ $\mathbb{R}^p$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de A, donc :

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda = Id.$$

b) On développe :

$$v \circ v = \Big(\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda\Big) \circ \Big(\sum_{\mu \in \sigma(A)} \sqrt{\mu}\, p_\mu\Big) = \sum_{\lambda, \mu} \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu} p_\lambda \circ p_\mu = \sum_\lambda \lambda p_\lambda.$$

Ainsi en revenant à la base $(e_1, \dots, e_n)$ vue à la question 1. :

$$v \circ v(x) = \sum_k \lambda_k x_k = u\Big(\sum_k x_k e_k\Big) = u(x).$$

Par suite la matrice R vérifie bien $R^2 = A$.

c) Soit μ une valeur propre de w et x un vecteur propre associé.

On a $u(x) = w^2(x) = \mu^2 x$ et donc x est vecteur propre de u associé à la valeur propre μ^2. Comme A est positive, ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ et il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\mu = \sqrt{\lambda}$. Donc $\sigma(Y) \subset \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda} Id)$, on a $w(x) = \sqrt{\lambda} x$ et $u(x) = w^2(x) = \lambda x$, donc $F_{\sqrt{\lambda}} \subset E_\lambda$.

Or u et w sont symétriques, donc :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda \text{ et } E = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} F_{\sqrt{\lambda}}$$

Ainsi, les inclusions vues précédemment sont toutes des égalités, ce qui prouve que $\sigma(Y) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$, avec $F_{\sqrt{\lambda}} = E_\lambda$ et donc $w = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = v$. Ce qui est le résultat voulu.

d) Il suffit d'écrire :

$$\sqrt{A}.A = \sqrt{A}.(\sqrt{A})^2 = (\sqrt{A})^3 = (\sqrt{A})^2.\sqrt{A} = A\sqrt{A}$$

Exercice 2.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. a) Montrer que A est semblable à une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

b) Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $b_n \neq 0$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit une matrice de projecteur.

2. a) Montrer qu'il existe deux vecteurs-colonne U et V appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U\,{}^tV$, où ${}^tV$ désigne la transposée de V.

b) Soit (U, V) deux vecteurs-colonne tels que $A = U\,{}^tV$.
Déterminer, en fonction de U et V, tous les couples $(U', V') \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$ tels que $A = U'\,{}^tV'$.

c) En déduire que le réel ${}^tV'\,U'$ est indépendant du couple (U', V') vérifiant $A = U'\,{}^tV'$. On le note $T(A)$.

d) Vérifier que si B est semblable à A, alors $T(B) = T(A)$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur $T(A)$ pour que A soit diagonalisable.

Solution :

1. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ainsi associé à A.

Comme A est de rang 1, on a $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$ et on peut construire une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telle que $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} u$. Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

avec $u(e'_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k e'_k$.

b) B est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres se lisent dans sa diagonale et on distingue deux cas.

$\rightarrow$ Si $b_n = 0$, $\operatorname{Spec}(B) = \{0\}$ et comme B est de rang 1, on a $B \neq 0$ et B n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $b_n \neq 0$, $\operatorname{Spec}(B) = \{0, b_n\}$â et comme $E_{(0)}(B) = \operatorname{Ker} B$ est de dimension $n-1$, alors on a nécessairement $\dim E_{(b_n)}(B) = 1$ (des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont toujours en somme directe) et B est diagonalisable.

c) B est une matrice de projecteur si et seulement si $b_n = 1$. En effet, B est une matrice de projecteur si et seulement si B est diagonalisable telle que $\operatorname{Spec} B \subset \{0, 1\}$.

2. a) A est de rang 1, il existe donc une colonne U non nulle, telle que toutes les colonnes de A sont proportionnelles à U : $\forall j \in [\![1, n]\!], \exists\, \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j = v_j U$. En notant ${}^tV = (\, v_1 \quad \dots \quad v_n \,)$, on a alors :

$$A = U.{}^tV$$

b) La colonne U, qui engendre $\operatorname{Im} A$, est définie à un coefficient multiplicatif non nul près et si on change U en αU, alors V est changée en $\dfrac{1}{\alpha}V$.

c) ${}^tV'U' = \dfrac{1}{\alpha}{}^tV\alpha U = {}^tVU$.

d) Si $B = P^{-1}U.{}^tVP = (P^{-1}U)^t({}^tPV)$, alors :

$$T(B) = {}^t({}^tPV)(P^{-1}U) = {}^tVPP^{-1}U = {}^tVU = T(A)$$

3. Pour la matrice B de l'énoncé, on a :

$$U = {}^t(\, b_1 \quad \dots \quad b_n \,),\ V = {}^t(\, 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \,)$$

Ainsi $T(B) = {}^tVU = b_n = T(A)$ et on a vu que :

$$\text{si } \operatorname{rg}(A) = 1, \text{ alors } A \text{ diagonalisable} \iff T(A) \neq 0$$

Exercice 2.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I - C^tC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

où C est un vecteur-colonne non nul, ${}^tC$ la transposée de C et I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

2. A quelle condition sur C l'application f est-elle une symétrie ? Préciser celle-ci.

3. A quelle condition sur C l'application f est-elle une projection ? Préciser celle-ci.

4. Dans cette question, $n = 4$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - t = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ satisfont l'équation $x - y + z - t = 0$.

a) Quelle est la dimension de H ? On justifiera la réponse.

b) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le réel α défini par $\alpha = \inf\big\{\|U - X\|, X \in H\big\}$.

La valeur α est-elle atteinte et si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.

c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.

Solution :

1. $\star$ On a ${}^tA = {}^t(I - C.{}^tC) = I - {}^{tt}C.{}^tC = I - C.{}^tC = A$. Donc A est symétrique réelle et par conséquent est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\star$ Soit X une matrice colonne, et λ un scalaire. On a :

$$AX = \lambda X \iff (I - C.{}^tC)X = \lambda X \iff ({}^tCX)C = (1-\lambda)X$$

(en effet, ${}^tCX$ est une matrice carrée d'ordre 1, que l'on confond avec son unique coefficient et on peut placer ce scalaire dans n'importe quelle position)

$\rightarrow$ Si $\lambda = 1$, il reste ${}^tCX = 0$ (C est non nulle), donc 1 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est l'hyperplan orthogonal à C.

$\rightarrow$ Si $\lambda \neq 1$, X est nécessairement colinéaire à C et comme

$$AC = (I - C.{}^tC)C = C - C({}^tCC) = (1 - {}^tCC)C$$

$\alpha = 1 - {}^tCC = 1 - \|C\|^2$ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé la droite engendrée par C.

$$E_{(1)}(A) = \mathrm{Vect}(C)^\perp \ ; \ E_{(\alpha)}(A) = \mathrm{Vect}\, C$$

2. f est une symétrie si et seulement si $\alpha = -1$, soit si et seulement si $\|C\| = \sqrt{2}$, et f est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(C)^\perp$.

3. f est une projection si et seulement si $\alpha = 0$, soit si et seulement si $\|C\| = 1$, et f est alors la projection orthogonale sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(C)^\perp$.

4. a) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur un espace de dimension 4, donc $\dim H = 3$.

b) On sait que le réel α est atteint pour un vecteur V et un seul, à savoir la projection orthogonale de U sur H. Comme C est unitaire, la question 3. montre ce vecteur V est défini par :

$$V = (I - C{}^tC)U = U - C({}^tCU) = U - ({}^tCU)C = U - C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

c) Et $B = I - C{}^tC = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Exercice 2.17.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u est périodique s'il existe un entier naturel *non nul* p tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$. On dit alors que p est une période de la suite u. On note p_u la plus petite période non nulle de la suite u, et on admet que toutes les autres périodes sont des multiples de p_u.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles périodiques, et $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

2. Soit $u \in \mathcal{P}$. On note $M(u) = \dfrac{1}{p_u}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k$.

a) Calculer $M(u)$ lorsque u est une suite constante.

b) Montrer que, pour toute période p de la suite u, on a : $M(u) = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k$.

c) Démontrer que l'application $M : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, u \mapsto M(u)$ est une application linéaire.

d) On note $\mathcal{P}_0$ le noyau de M, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites constantes. Démontrer que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{C}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}$.

3. Pour $u \in \mathcal{P}$, on définit la suite réelle u' par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, u \mapsto u'$.

b) Déterminer le noyau et l'image de D.

Solution :

1. La suite nulle est périodique, donc $\mathcal{P}$ est non vide et toute suite périodique ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes donc est bornée et $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$.
D'autre part, si u et v sont périodiques de périodes fondamentales respectives p_u et p_v, alors ces deux suites sont, par exemple, $p = p_u \times p_v$-périodiques (on peut aussi prendre le ppcm de ces deux périodes) et il est clair que pour tout scalaire λ, $u + \lambda v$ est encore périodique de période p.
Ainsi $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites bornées (on ne demande pas de montrer que $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel).

2. a) Si u est constante de valeur λ, on a clairement $M(u) = \lambda$.

b) Toute période p de u est un multiple de p_u : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = np_u$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \sum_{j=0}^{n-1}\ \sum_{k=jp_u}^{(j+1)p_u-1} u_k = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_{jp_u+k} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = n\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k$$

Donc :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{n}{p}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = \frac{1}{p_u}\sum_{k=0}^{p_u-1} u_k = M(u)$$

c) Deux suites u et v périodiques ont une période commune, par exemple $p = p_u p_v$, et $u + \lambda v$ admet p pour période, quel que soit le scalaire λ, d'où immédiatement, par propriété des opérations :

$$M(u + \lambda v) = M(u) + \lambda M(v).$$

d) Toute suite périodique s'écrit d'une façon et d'une seule comme somme d'une suite périodique de moyenne M nulle et d'une suite constante, à savoir :

$u = u - M(u)\mathbf{1} + M(u)\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la suite constante égale à 1.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{C}$$

3. a) Si u est périodique, alors u' est clairement périodique de même période, donc $u' \in \mathcal{P}$ et la linéarité de D est évidente.

b) $\star$ $u \in \operatorname{Ker} D \iff \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \iff u \in \mathcal{C}$.

$$\operatorname{Ker} D = \mathcal{C}$$

$\star$ Si p est une période de u, donc de u' :

$$M(u') = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u'_k = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{k+1} - u_k = u_0 - u_p = 0, \text{ donc } u' \in \mathcal{P}_0$$

$\star$ Réciproquement, soit $v \in \mathcal{P}_0$ de période p, on définit alors la suite u par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

on a, pour tout n : $u_{n+p} - u_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k = \sum_{k=0}^{p-1} v_k = pM(v) = 0$, donc u est périodique et p est une période de u.

De plus, par construction, $D(u) = v$, donc $v \in \operatorname{Im} D$.

$$\operatorname{Im} D = \mathcal{P}_0$$

Exercice 2.18.

Soit E un espace euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. On dit qu'un endomorphisme u de E est une contraction, si on a $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$, pour tout vecteur $x \in E$.

1. Dans cette question, on prend pour E l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et on considère l'endomorphisme u dont la matrice A dans le base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels non nuls fixés tels que $a^2 + b^2 \leqslant 1$.
Montrer que u est une contraction.

2. On considère un endomorphisme u de E.

a) Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$, on considère l'endomorphisme ${}^t u$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la transposée de A. Montrer que ${}^t u$ est l'unique endomorphisme v de E qui vérifie, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

En déduire que la définition de ${}^t u$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

b) Soit $a \in E$. Prouver que $\|a\|$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels $|\langle a, b \rangle|$ lorsque b décrit la boule unité de E, c'est-à-dire que l'on a :

$$\|a\| = \sup \{ |\langle a, b \rangle| \, , \|b\| \leqslant 1 \}$$

En déduire que si u est une contraction, alors ${}^t u$ est encore une contraction.

3. On considère une contraction u sur l'espace E.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda \in [-1, 1]$.

b) Prouver que $\mathrm{Ker}({}^t u - Id) = \mathrm{Ker}(u - Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux.

d) Si $x \in E$, on pose, pour tout entier strictement positif n :

$$u_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)).$$

Soit $p(x)$ la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Ker}(u - Id)$. En utilisant la question précédente, prouver que $(\|u_n(x) - p(x)\|)_n$ converge vers 0.

Solution :

1. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= x_1^2 + (ax_2 - bx_3)^2 + (bx_2 + ax_3)^2 = x_1^2 + (a^2 + b^2)(x_2^2 + x_3^2) \\ &\leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

donc u est une contraction.

2. a) On a : $\langle u(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tX({}^tAY) = \langle x, {}^tu(y)\rangle$.

Soient v_1, v_2 vérifiant tous deux la relation demandée. On a alors :

$$\forall\, x, y \in E, \langle x, v_1(y) - v_2(y)\rangle = 0$$

et $v_1(y) - v_2(y)$ est orthogonal à tout l'espace, donc est le vecteur nul, ce qui prouve que $v_1 = v_2$.

b) $\star$ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $|\langle a, b\rangle| \leqslant \|a\|.\|b\| = \|a\|$.

Réciproquement, si on prend $b = \dfrac{1}{\|a\|}a$, alors $\langle a, b\rangle = \dfrac{1}{\|a\|}\|a\|^2 = \|a\|$

Donc :

$$\sup\big\{|\langle a, b\rangle|, \|b\| \leqslant 1\big\} = \|a\|$$

Soit alors u une contraction et b un vecteur de la boule unité. On a :

$$|\langle {}^tu(a), b\rangle| = |\langle a, u(b)\rangle \leqslant \|a\|.\|u(b)\| \leqslant \|a\|.\|b\| \leqslant \|a\|$$

En prenant la borne supérieure lorsque b décrit la boule unité, le résultat précédent donne $\|{}^tu(a)\| \leqslant \|a\|$ et ${}^tu$ est encore une contraction.

3. a) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. On a :

$$|\lambda|\|x\| = \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

et donc $|\lambda| \leqslant 1$.

b) $\star$ Soit $x \in \mathrm{Ker}({}^tu - Id) \setminus \{0\}$, écrivons $u(x) = \alpha x + y$, avec y orthogonal à x. On a :

$$\alpha\|x\|^2 = \langle u(x), x\rangle = \langle x, {}^tu(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

donc $\alpha = 1$ et par le théorème de Pythagore, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Comme $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$, il reste $\|y\| = 0$ et $y = 0$, soit $u(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - Id)$.

$\star$ On peut procéder de la même façon pour obtenir $\mathrm{Ker}(u-Id) \subset \mathrm{Ker}({}^tu-Id)$, ou mieux, remarquer que ${}^{tt}u = u$.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u-Id)$ et $y \in \mathrm{Im}(u-Id)$. Il existe $a \in E$ tel que $y = u(a)-a$. On a :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, u(a)\rangle - \langle x, a\rangle = \langle {}^tu(x), a\rangle - \langle x, a\rangle = \langle ({}^tu - Id)(a), a\rangle\\ &= \langle 0, a\rangle = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(u-Id)$ et $\mathrm{Im}(u-Id)$ sont orthogonaux. Comme les dimensions sont *ad hoc*, on conclut :

$$E = \mathrm{Ker}(u - Id) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u - Id)$$

d) Soit $x \in E$, on écrit $x = a + b$, avec $a = p(x) \in \mathrm{Ker}(u - Id)$, et $b \in \mathrm{Im}(u - Id)$. Il existe donc un vecteur c dans E tel que $b = c - u(c)$ et comme $u(a) = a$, il vient :

$$\begin{aligned}u_n(x) &= a + \frac{1}{n}(b + u(b) + \cdots + u^{n-1}(b))\\ &= a + \frac{1}{n}[c - u(c) + (u(c) - u^2(c)) + \cdots + (u^{n-1}(c) - u^n(c)]\\ &= a + \frac{1}{n}[c - u^n(c)]\end{aligned}$$

et comme u est une contraction, on a donc :

$$\|u_n(x) - p(x)\| = \|u_n(x) - a\| \leqslant \frac{1}{n}(\|c\| + \|u^n(c)\|) \leqslant \frac{2}{n}\|c\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 2.19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.
On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Justifier que f vérifie $f \circ f = -id$.

b) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si la famille $\big(u, v, f(u)\big)$ est libre, alors la famille $\big(u, v, f(u), f(v)\big)$ est libre.

c) En déduire que n ne peut pas être égal à 3.

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

2. On note $F = \mathrm{Ker}(f^2 + id)$.

a) Montrer que $E = \mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus F$.

b) Montrer que F est stable par f, et que $\dim(F) \neq 1$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, e_2 un vecteur non nul de F et $e_3 = f(e_2)$.
Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

b) Exprimer la matrice B de f dans cette base.

Solution :

1. a) Si A est inversible, la relation $A^3 + A = 0$ est équivalente à $A^2 + I = 0$ et on a bien $f \circ f = -id$.

b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma f(u) + \delta f(v) = 0$.
En appliquant f, il vient puisque $f^2 = -id$:

$$\alpha f(u) + \beta f(v) - \gamma u - \delta v = 0$$

En éliminant $f(v)$ entre les deux relations, il vient :

$$(\alpha\beta+\gamma\delta)u+(\beta^2+\delta^2)v+(\beta\gamma-\alpha\delta)f(u)=0$$

et la liberté de cette famille donne : $\begin{cases} \alpha\beta+\gamma\delta=0 \\ \beta^2+\delta^2=0 \\ \beta\gamma-\alpha\delta=0 \end{cases}$, d'où $\beta=\delta=0$.

Il reste donc $\alpha u+\gamma f(u)=0$ et la liberté de $(u,f(u))$ donne $\alpha=\gamma=0$.

$$\big(u,v,f(u)\big) \text{ libre } \implies \big(u,v,f(u),f(v)\big) \text{ libre}$$

c) On a $f\circ f=-id$, donc f n'a aucune valeur propre et pour tout vecteur u non nul, la famille $(u,f(u))$ est libre.

Si on a $n>2$, alors on peut trouver un vecteur v tel que $(u,f(u),v)$ soit libre et dans ce cas $\big(u,v,f(u),f(v)\big)$ est aussi libre, ce qui impose d'avoir $n\geqslant 4$. On ne peut donc pas avoir $n=3$ (dans le cas où A est inversible).

2. a) $\star$ Soit $u\in \operatorname{Ker} f\cap F$, alors $f(u)=0$ et $f^2(u)+u=0$; il s'ensuit clairement $u=0$, donc $\operatorname{Ker} f$ et F sont en somme directe.

$\star$ Soit $u\in E$, on écrit $u=[u+f^2(u)]-f^2(u)$.

Comme $f^3+f=0$, on a :

$f(u+f^2(u))=f(u)+f^3(u)=0$ et

$(f^2+id)(-f^2(u))=-f^4(u)-f^2(u)=-f(f^3(u)+f(u))=0$.

Ainsi le premier vecteur est dans $\operatorname{Ker} f$ et le second dans $\operatorname{Ker}(f^2+id)$ et E est somme de ces deux espaces. Finalement :

$$E=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f^2+id)$$

b) $u\in F \implies f^2(u)+u=0 \implies f(f^2(u)+u)=0 \implies f^2(f(u))+f(u)=0$
$\implies f(u)\in F$, donc F est stable par f.

Si on avait $\dim F=1$, alors tout vecteur u non nul de F serait tel que $f(u)$ soit proportionnel à u (par stabilité de F), on aurait alors $f(u)=\lambda u$ et $f^2(u)+u=0$ devient $\lambda^2+1=0$, ce qui n'est pas raisonnable dans $\mathbb{R}$.

c) On a donc $\dim\operatorname{Ker} f\neq 2$. Or f n'est pas bijectif (on est dans le cas $n=3$, voir fin de la question 1.) et f n'est pas l'application nulle. Ne reste que la possibilité :

$$\dim\operatorname{Ker} f=1$$

3. a) F est stable par f et la restriction de f à F est sans vecteur propre, donc la famille $(e_2,f(e_2))$ est une base de F. Ainsi, par concaténation, (e_1,e_2,e_3) est une base de E adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker} f\oplus F$.

b) On a $f(e_1)=0$, $f(e_2)=e_3$ et $f(e_3)=f^2(e_2)=-e_2$, car $e_2\in\operatorname{Ker}(f^2+id)$, donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On confondra dans cet exercice polynôme et fonction polynôme sur le segment $[-1, 1]$ associée.

1. a) Montrer que pour tous P et Q éléments de E_n, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est convergente.

b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est un produit scalaire sur E_n.

2. Soit φ définie sur E_n par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

où P' et P'' désignent les deux premiers polynômes dérivés du polynôme P.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E_n.

b) φ est-il inversible ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

3. a) Montrer que pour tous P et Q de E_n :

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt$$

b) Retrouver ainsi le fait que φ est diagonalisable.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue sur $]-1, 1]$ et :

$$\lim_{t \to -1^+} (1+t)^{2/3}P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0$$

Ainsi, la règle de Riemann donne la convergence demandée.

b) $s : (P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique et positive.

Enfin si $s(P, P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$, ceci prouve, par continuité et positivité de la fonction à intégrer, que la fonction à intégrer est nulle en tout point de $]-1,1[$, donc que P admet une infinité de racines et est le polynôme nul.

2. a) $\star$ La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétés des opérations.

$\star$ Si $\deg(P) \leqslant n$, alors $\deg\big((X^2+1)P''\big) \leqslant n$ et $\deg\big((2X+1)P'\big) \leqslant n$, donc $\deg \varphi(P) \leqslant n$

$$\varphi \subset \mathcal{L}(E_n)$$

b) $\operatorname{Ker}\varphi$ contient $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$, donc φ n'est pas injective et *a fortiori* pas inversible.

c) On a :

$$\varphi(1) = 0, \varphi(X) = 2X+1, \ldots, \varphi(X^k) = k(k+1)X^k + \cdots, \ldots$$

Ainsi la matrice dans la base canonique de φ est trigonale supérieure, de coefficients diagonaux : $0, 2, 6, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$.

Les valeurs propres de φ sont ainsi mises en évidence, car se lisent sur la diagonale. Donc φ admet $(n+1)$ valeurs propres, ce qui prouve que φ est diagonalisable.

3. a) On part de l'expression de droite et on intègre par parties :

$v'(t) = Q'(t) \Longleftarrow v(t) = Q(t)$

$u(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t) \implies$

$u'(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\big((1-t^2)P''(t) - (2t+1)P'(t)\big)$

Comme $u(1)v(1) = 0$ et $u(-1)v(-1) = 0$ et u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert d'intégration, on peut procéder directement sur le segment $[-1,1]$, et

$$I = \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\big((1-t^2)P''(t) - (2t+1)P'(t)\big)dt = \langle \varphi(P), Q\rangle$$

b) On vient de trouver une expression de $\langle \varphi(P), Q\rangle$ clairement symétrique par rapport à P et Q, donc $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$ et φ est un endomorphisme de E_n symétrique pour le produit scalaire considéré. On retrouve bien le fait que φ est diagonalisable.

Exercice 2.21.

Soit a, b, c trois réels et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid XM = MX\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On suppose dans cette question que $ac > 0$.
Déterminer les éléments propres de M. En déduire que M est diagonalisable.

On suppose désormais que $ac > 0$ et $b^2 \neq ac$.

3. a) Soit X un élément de $\mathcal{C}(M)$. Soit λ une valeur propre de M et u un vecteur propre associé. Montrer qu'il existe un réel α tel que $Xu = \alpha u$.

b) En déduire que X est diagonalisable.

4. a) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

b) Donner une base de $\mathcal{C}(M)$, lorsque $a = c$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}(M)$ est-il alors constitué de matrices symétriques ?

Solution :

1. La matrice nulle commute avec M et si A, B commutent avec M, alors pour tout scalaire λ :

$$(A + \lambda B)M = AM + \lambda BM = MA + \lambda MB = M(A + \lambda B)$$

Et $\mathcal{C}(M)$ est stable par combinaison linéaire, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. $$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & c \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 & -\lambda \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & c \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} a & 0 & -\lambda \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & ac-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi M admet pour valeurs propres b, $\sqrt{ac}$ et $-\sqrt{ac}$.

$\rightarrow$ Si $b^2 \neq ac$, M a trois valeurs propres et donc est diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $b = \sqrt{ac}$, on voit que E_b est engendré par les vecteurs $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, \sqrt{a/c})$, tandis que $E_{-\sqrt{ac}}$ est engendré par $(1, 0, -\sqrt{a/c})$, donc M est encore diagonalisable.

$\to$ Si $b = -\sqrt{ac}$, E_b est engendré par $(0,1,0)$ et $(1,0,-\sqrt{a/c})$, tandis que $E_{\sqrt{ac}}$ est engendré par $(1,0,\sqrt{a/c})$, donc M est encore diagonalisable.

3. Les hypothèses faites montrent que M admet trois valeurs propres et les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

a) $Mu = \lambda u$ donne $XMu = \lambda Xu$, soit $MXu = \lambda Xu$ et $Xu \in E_\lambda(M)$, donc Xu est colinéaire à u :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, Xu = \alpha u$$

b) En particulier X est diagonalisable, puisque la base

$$\mathcal{B} = (0,1,0),(1,0,\sqrt{a/c}),(1,0,-\sqrt{a/c}))$$

est propre à la fois pour M et pour X.

4. a) Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, alors X est de la forme PDP^{-1}, où D est une matrice diagonale quelconque (car $X = P\Delta P^{-1}$, avec Δ diagonale et les matrices diagonales commutent entre-elles), donc :

$$\dim \mathcal{C}(M) = 3$$

b) Si $a = c$, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et il est alors plus agréable de normaliser les vecteurs propres, pour prendre $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, qui est une matrice othogonale et les matrices de $\mathcal{C}(M)$ sont alors de la forme $P'DP'^{-1} = P'D\,{}^tP'$, et ce sont des matrices symétriques.

Exercice 2.22.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

On appelle isométrie de $\mathbb{R}^n$ tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

1. Montrer que u est une isométrie si et seulement si pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

2. Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^2 = I$, où I représente l'application identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est une isométrie.

3. Soit u un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$, montrer que u est une isométrie. A-t-on la réciproque ?

4. Soit l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Montrer que u est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $u(S) = S$.

5. Soit u une isométrie de $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme u est-il toujours diagonalisable ?

Solution :

1. $\star$ Si l'endomorphisme u est une isométrie, alors pour tous vecteurs u et v :

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|u(x)+u(y)\|^2 + \|u(x)-u(y)\|^2\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\|u(x+y)\|^2 + \|u(x-y)\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big)\\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

$\star$ Réciproquement, si u est une application linéaire qui conserve le produit scalaire, il est clair que u conserve *a fortiori* la norme donc est une isométrie.

2. L'endomorphisme u est symétrique et est involutif, donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(f - I)$ (parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + I)$).

3. Soit P la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a ${}^tP = P^{-1}$, donc pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, et en notant X la matrice colonne associée :

$$\|PX\|^2 = {}^t(PX)(PX) = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|^2$$

et u est bien une isométrie.

Réciproquement, si u est une isométrie, alors u conserve le produit scalaire, donc transforme une base orthonormée en une base orthonormée et sa matrice relativement à une base orthonormée est orthogonale.

4. $\star$ Si u est une isométrie, $\|x\| = 1 \implies \|u(x)\| = 1$, donc $u(S) \subset S$; comme u^{-1} existe et est ausi une isométrie, on a également $u^{-1}(S) \subset S$, soit $S \subset u(S)$ et l'égalité.

$\star$ Réciproquement, si $u(S) = S$, alors $\|x\| = 1 \implies \|u(x)\| = 1$ et pour tout vecteur y non nul :

$$\frac{1}{\|y\|}y = 1 \implies \|u\big(\frac{1}{\|y\|}y\big)\| = \frac{1}{\|y\|}\|u(y)\| = 1, \text{ soit } \|u(y)\| = \|y\|$$

Le résultat vaut clairement pour le vecteur nul et u est une isométrie.

5. La réponse est évidemment oui si $n = 1$ et est non si $n \geqslant 2$.

Il suffit en effet de considérer l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

(on a pris la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan formé par les deux premiers vecteurs de base, et l'identité sur l'espace engendré par les $n-2$ autres vecteurs de base ; ainsi 1 est la seule valeur propre et le sous-espace propre n'est pas $\mathbb{R}^n$).

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère deux variables aléatoires indépendantes, X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,2])$, on pose $q = 1 - p$.

On pose : $T = X + Y$, $Z = \lfloor T \rfloor$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet que T et Z sont des variables aléatoires définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit qu'une variable aléatoire V est à densité généralisée si sa fonction de répartition F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf sur un ensemble dénombrable de points. Une densité f_V de V s'obtient alors, en tout point où F_V est dérivable, par la relation $F'_V = f_V$.

1. On note F_T la fonction de répartition de T.

a) Donner, pour tout réel t, l'expression de $F_T(t)$ en distinguant a priori les cas :
$t < 1$, $1 \leqslant t < 2$, $2 \leqslant t < 3$ et $k \leqslant t < k+1$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
(on remarquera que le cas particulier $2 \leqslant t < 3$ rejoint le cas général, $k \geqslant 3$).

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité généralisée.

c) Donner l'expression d'une densité de T.

2. a) Donner la loi de Z.

b) Calculer $E(Z)$.

c) Donner la loi de $\lfloor Y \rfloor$ ainsi que son espérance.

d) En remarquant que si x est un entier naturel et y un nombre réel, alors $\lfloor x+y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$, retrouver la loi de Z et donner la valeur de son espérance.

Solution :

1. a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = pq^{k-1}$. D'autre part $Y(\Omega) = [0,2]$ et pour tout y de $[0,2]$, on $F_Y(y) = \dfrac{y}{2}$. On a donc $T(\Omega) = [1,+\infty[$.

i) Si $t < 1$, on a évidemment $F_T(t) = 0$.

ii) Si $t \in [1,2[$, on a :

$$(X+Y \leqslant t) = ([X=1] \cap [X+Y \leqslant t]) = ([X=1] \cap [Y \leqslant t-1])$$

On a donc : $P(X+Y \leqslant t) = P([X=1] \cap [Y \leqslant t-1])$ et comme les variables X et Y sont indépendantes, on obtient :

$$P(X+Y \leqslant t) = P([X=1])P([Y \leqslant t-1]) = \frac{p(t-1)}{2}$$

iii) Si $t \in [2,3[$, on a :

$$\begin{aligned}(X+Y \leqslant t) &= (([X=1] \cap [X+Y \leqslant t]) \cup ((([X=2] \cap [X+Y \leqslant t]))\\ &= (([X=1] \cap [Y \leqslant t-1]) \cup ((([X=2] \cap [Y \leqslant t-2])).\end{aligned}$$

Par incompatibilité et par indépendance, on obtient :

$$P(X+Y \leqslant t) = P([X=1])P([Y \leqslant t-1]) + P([X=2])P([Y \leqslant t-2])$$

Soit :

$$P(X+Y \leqslant t) = \frac{p(t-1)}{2} + \frac{pq(t-2)}{2}$$

iv) Soit $k \geqslant 3$ et $t \in [k,k+1[$. On a alors :

$$\begin{aligned}[T \leqslant t] &= [X \leqslant k-2] \cup ([X=k-1] \cap [X+Y \leqslant t]) \cup ([X=k] \cap [X+Y \leqslant t])\\ &= [X \leqslant k-2] \cup ([X=k-1] \cap [Y \leqslant t-k+1]) \cup ([X=k] \cap [Y \leqslant t-k])\end{aligned}$$

Là encore, par indépendance et incompatibilité, on obtient :

$$\begin{aligned}P([T \leqslant t]) = P([X \leqslant k-2]) &+ P([X=k-1])P([Y \leqslant t-k+1])\\ &+ P([X=k])P([Y \leqslant t-k])\end{aligned}$$

Or $P([X \leqslant k-2]) = \sum\limits_{j=1}^{k-2} P([X=j]) = \sum\limits_{j=1}^{k-2} pq^{j-1} = p\dfrac{1-q^{k-2}}{1-q} = 1 - q^{k-2}$ (on peut aussi, si on préfère, calculer $P(X > k-2)$). D'où :

$$P([T \leqslant t]) = 1 - q^{k-2} + pq^{k-2}\frac{t-k+1}{2} + pq^{k-1}\frac{t-k}{2}$$

On constate que le cas $k = 2$ rejoint le cas général, on a donc finalement :

$$\begin{cases} \text{si } t < 1, F_T(t) = 0 \\ \text{si } t \in [1, 2[, F_T(t) = \dfrac{p(t-1)}{2} \\ \text{si } t \in [k, k+1[,\ k \geqslant 2,\ F_T(t) = 1 - q^{k-2} + pq^{k-2}\dfrac{t-k+1}{2} + pq^{k-1}\dfrac{t-k}{2} \end{cases}$$

b) F_T est clairement continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en tout point de $\mathbb{N}^*$, ensemble qui est bien dénombrable. Il reste à étudier la continuité aux points de $\mathbb{N}^*$.

i) Continuité en 1 : on a : $\lim\limits_{t \to 1^-} F_T(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 1^+} F_T(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{p(t-1)}{2} = 0$, ce qui prouve la continuité de F_T au point 1.

ii) Continuité en 2 :

$$\lim_{t \to 2^-} F_T(t) = \lim_{t \to 2^-} \frac{p(t-1)}{2} = \frac{p}{2} \text{ et}$$

$$\lim_{t \to 2^+} F_T(t) = \lim_{t \to 2^+} \frac{p(t-1)}{2} + \frac{pq(t-2)}{2} = \frac{p}{2}.$$

En conclusion, F_T est continue en 2.

iii) Continuité en k où k est un entier naturel supérieur ou égal à 3 :

$$\lim_{t \to k^-} F_T(t) = \lim_{t \to k^-} (1 - q^{k-3} + qq^{k-3}\frac{t-k+2}{2} + pq^{k-2}\frac{t-k+1}{2})$$

$$= 1 - q^{k-3} + pq^{k-3} + \frac{pq^{k-2}}{2}$$

Soit $\lim\limits_{t \to k^-} F_T(t) = 1 - q^{k-2} + \dfrac{pq^{k-2}}{2}$.

D'autre part :

$$\lim_{t \to k^+} F_T(t) = \lim_{t \to k^+} 1 - q^{k-2} + pq^{k-2}\frac{t-k+1}{2} + pq^{k-1}\frac{t-k}{2}$$

$$= 1 - q^{k-2} + \frac{pq^{k-2}}{2}.$$

Ainsi, F_T est bien continue en tout point k entier tel que $k \geqslant 3$.

En conclusion : F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux points appartenant à $\mathbb{N}^*$ qui est un ensemble dénombrable. T est donc bien une variable à densité.

c) On obtient une densité de T en dérivant F_T sur tous les intervalles ouverts où elle est dérivable et en affectant une valeur arbitraire à sa dérivée f_T aux points de $\mathbb{N}^*$.

On obtient :

$$\begin{cases} \text{si } t < 1,\ f_T(t) = 0 \\ \text{si } t \in [1, 2[,\ f_T(t) = \dfrac{p}{2} \\ \text{si } t \in [k, k+1[, k \geqslant 2,\quad f_T(t) = \dfrac{pq^{k-2}}{2} + \dfrac{pq^{k-1}}{2} \end{cases}$$

2. a) On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(Z = 1) = P(T < 2) = F_T(2) = \frac{p}{2}$.
Pour $k \geqslant 2$: $P(Z = k) = P(k \leqslant T < k+1) = F_T(k+1) - F_T(k)$, d'où :

$$P(Z = k) = \left[1 - q^{k-2} + pq^{k-2} + \frac{pq^{k-1}}{2}\right] - \left[1 - q^{k-2} + \frac{pq^{k-2}}{2}\right]$$

Finalement :

$$\begin{cases} P(Z = 1) = \frac{p}{2} \\ \forall\, k \geqslant 2,\ P(Z = k) = \dfrac{pq^{k-2}(1+q)}{2} \end{cases}$$

b) on a :

$$E(Z) = \frac{p}{2} + \frac{p(1+q)}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-2} = \frac{p}{2} + \frac{p(1+q)}{2q} \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1}$$
$$= \frac{p}{2} + \frac{p(1+q)}{2q}\left[\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right]$$

Après simplification :

$$E(Z) = \frac{p+2}{2p}$$

c) On a $\lfloor Y \rfloor(\Omega) = \{0, 1\}$, et $P(\lfloor Y \rfloor = 0) = P(Y < 1) = \frac{1}{2}$.
De même $P(\lfloor Y \rfloor = 1) = P(1 \leqslant Y < 2) = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\lfloor Y \rfloor \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2), \text{ et } E(\lfloor Y \rfloor) = \frac{1}{2}$$

d) On a défini la variable Z par $Z = \lfloor X + Y \rfloor$. Or X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, d'où : $\lfloor X + Y \rfloor = X + \lfloor Y \rfloor$.

On a donc, par indépendance : $P(Z = 1) = P(X = 1 \cap \lfloor Y \rfloor = 1) = p \times \frac{1}{2}$.

Pour $k \geqslant 2$, $P(Z = k) = P(((X = k) \cap (\lfloor Y \rfloor = 0)) \cup ((X = k-1) \cap (\lfloor Y \rfloor = 1)))$.

Par incompatibilité et indépendance, on obtient : $P(Z = k) = pq^{k-1} \times \frac{1}{2} + pq^{k-2} \times \frac{1}{2}$.

Enfin, X et $\lfloor Y \rfloor$ sont des variables aléatoires discrètes admettant des espérances, d'où : $E(Z) = E(X) + E(\lfloor Y \rfloor)$.

On obtient donc :

$$E(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$$

Exercice 3.2.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

En revenant à la définition de la limite d'une suite, montrer que la suite (v_n) converge vers λ.

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose que Y admet une espérance.

Montrer que $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(Y \geqslant k)$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et admettant une espérance.

On se propose de déterminer un développement de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X < k)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

3. a) Déterminer un équivalent de S_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $S_n - n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On suppose que X admet un moment d'ordre 2, $E(X^2)$.

a) Montrer que : $S_n - n + E(X) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{n}$.

b) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$S_n = n - E(X) + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Solution :

1. Traduisons le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, on a $|u_n - \lambda| < \varepsilon/2$.
On peut écrire, pour $n \geqslant N+1$:

$$|v_n - \lambda| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} u_k - \lambda\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - \lambda| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - \lambda|$$

Or : $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}|u_k - \lambda| \leqslant \dfrac{(n-N)}{n}\times\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|u_k - \lambda| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{C_N}{n} = 0$, il existe donc $N' \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N'$, alors $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|u_k - \lambda| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geqslant \max(N+1, N')$, on a donc $|v_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve le résultat demandé.

2. La permutation des signes $\sum$ étant autorisée pour des termes positifs ou nuls, on écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P(Y=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} P(Y=i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} iP(Y=i) = E(Y)\end{aligned}$$

3. a) On sait que $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X<k) = 1$. Par la première question :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(Y<k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1$$

Donc $S_n \sim n$, lorsque n tend vers ∞.

b) On a : $S_n - n = \sum\limits_{k=1}^{n} (P(X<k)-1) = -\sum\limits_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$

Cette dernière quantité tend vers $-E(X)$ par la question 2. Donc, comme $E(X) \neq 0$, $S_n - n \sim -E(X)$.

4. a) On a :

$$S_n - n + E(X) = -\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Par l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{E(X^2)}{k^2}$. Donc :

$$S_n - n + E(X) \leqslant E(X^2)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

En utilisant une comparaison série/intégrale, avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, il vient facilement $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc :

$$S_n - n + E(X) \leqslant \frac{E(X^2)}{n}$$

b) On obtient donc le développement asymptotique de S_n :

$$S_n = n - E(X) + O\big(\frac{1}{n}\big)$$

Ce qui contient en particulier le résultat demandé.

Exercice 3.3.

Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_1(x)f_2(y) = g(x^2 + y^2)$$

1. On suppose dans cette question uniquement que X_1 et X_2 suivent la même loi normale centrée réduite. Montrer que la condition précédente est réalisée et déterminer g.

2. a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$ en fonction de $g(x^2 + y^2)$ et $g'(x^2 + y^2)$.

b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.
Montrer que h est constante. On note a cette constante.

3. a) On définit la fonction k sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}$
Montrer que la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$ (on étudiera dans un premier temps les restrictions de k à $\mathbb{R}_+^*$, puis à $\mathbb{R}_-^*$).
En déduire une expression de f_1.

b) Montrer que $a < 0$.

c) Montrer que X_1 suit une loi normale. Quels sont ses paramètres ?

4. a) Calculer $g(1)$.

b) Montrer que X_2 suit la même loi que X_1.

Solution :

1. Si X_1 et X_2 suivent la loi normale centrée réduite, on a :

$$f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2} = g(x^2 + y^2)$$

avec $g(t) = \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-t/2}$, et g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) On sait que pour tous x, y réels, $f_1(x)f_2(y) = g(x^2+y^2)$, avec g dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi pour tous x et y :

$$f_1'(x)f_2(y) = 2xg'(x^2 + y^2)$$

Comme $f_1(x) \neq 0$, il vient, pour $x \neq 0$ et y réel :

$$\frac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = 2\times\frac{g'(x^2 + y^2)}{g(x^2 + y^2)}$$

b) Soit $x_1 \neq x_2$ deux réels non nuls, on a alors en prenant $x = x_1$ et $y = x_2$ puis $x = x_2$ et $y = x_1$:

$$h(x_1) = \frac{f_1'(x_1)}{x_1 f_1(x_1)} = 2\times\frac{g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)} = 2\times\frac{g'(x_2^2+x_1^2)}{g(x_2^2+x_1^2)} = \frac{f_1'(x_2)}{x_2 f_1(x_2)} = h(x_2)$$

ce qui montre que h est constante.

3. a) La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour $x \neq 0$:

$$k'(x) = f_1'(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2} - axf_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2} = xf_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2}\big(h(x)-a\big) = 0$$

Ainsi k est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et étant dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ et finalement constante sur $\mathbb{R}$.

$$\exists\, C \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_1(x) = C\mathrm{e}^{ax^2/2}$$

b) La fonction f_1 est une densité de probabilité.

Donc $C > 0$ et $a < 0$, car autrement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx$ divergerait ou ne pourrait pas avoir pour valeur 1 (qui est strictement positif !).

c) Posons $\sigma_1 = \sqrt{-\dfrac{1}{a}}$. On reconnaît une densité d'une loi normale centrée d'écart-type σ_1, ce qui impose de prendre $C = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$ et X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$.

Par un raisonnement analogue, on montre que X_2 suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ pour une certaine valeur de σ_2.

4. a) On a :
$g(1) = f_1(1)\times f_2(0) = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2\sigma_1^2}\times\dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$

b) Comme on a aussi $g(1) = f_1(0)\times f_2(1)$, il vient :

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2\sigma_1^2}\times\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-1/2\sigma_2^2}\times\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$$

Soit $\mathrm{e}^{-1/2\sigma_1^2} = \mathrm{e}^{-1/2\sigma_2^2}$ et par injectivité de la fonction exponentielle : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, puis, par positivité $\sigma_1 = \sigma_2$.

Ainsi X_1 et X_2 suivent la même loi normale centrée.

Exercice 3.4.

Un individu gravit un escalier. A chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois ou l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche et $E(Y_n)$ l'espérance de Y_n.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?

b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$P(Y_n = k) = p{\times}P(Y_{n-1} = k-1) + (1-p){\times}P(Y_{n-2} = k-1)$$

d) Montrer que pour $n \geqslant 3$, $E(Y_n) = p.E(Y_{n-1}) + (1-p)E(Y_{n-2}) + 1$.

3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$, on ait :

$$u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1$$

a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à E.

b) Montrer que u appartient à E si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = pv_{n-1} + (1-p)v_{n-2}$.

c) En déduire la valeur de $E(Y_n)$.

Solution :

1. a) On a : $X_n = n + X'_n$ (n pas font n marches, plus une marche à chaque fois que l'on gravit deux marches d'un coup). Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$ et si l'on note $q = 1-p$, comme X'_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$:

$$P(X_n = n+k) = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}$$

b) On a évidemment $E(X_n) = n + nq$ et $V(X_n) = npq$.

2. a) On a $Y_n(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, n]\!]$ (pour aller vite on ne fait que des enjambées de deux marches, on peut prendre son temps et monter les marches une par une et toutes les situations intermédiaires sont possibles).

b) $\star$ Comme $Y_1(\Omega) = \{1\}$, on a $Y_1 = 1$ et $E(Y_1) = 1$.

$\star$ De même $Y_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$, et $P(Y_2 = 2) = p, P(Y_2 = 1) = q$. Ainsi $E(Y_2) = 2p + q = 1 + p$.

c) Soit A l'événement « le premier pas permet de gravir une marche », et B l'événement « le premier pas permet de gravir deux marches ». La famille (A, B) forme évidemment un système complet d'événements utile et, pour tout k :

$$\begin{aligned} P(Y_n = k) &= P_A(Y_n = k)P(A) + P_B(Y_n = k)P(B) \\ &= p \times P(Y_{n-1} = k-1) + q \times P(Y_{n-2} = k-1) \end{aligned}$$

d) Les variables aléatoires en jeu étant finies, les espérances existent et :

$$\begin{aligned} \sum_k kP(Y_n = k) &= p \sum_k kP(Y_{n-1} = k-1) + q \sum_k kP(Y_{n-2} = k-1) \\ &= pE(Y_{n-1} + 1) + qE(Y_{n-2} + 1) \\ &= pE(Y_{n-1}) + qE(Y_{n-2}) + 1 \end{aligned}$$

3. a) Si la suite (αn) vérifie la récurrence, il vient :

$$\alpha n = p\alpha(n-1) + q\alpha(n-2) + 1$$

D'où $\alpha = \dfrac{1}{1+q}$

b) Il suffit de faire la différence pour montrer cette question.

c) L'équation caractéristique de la suite est $r^2 - pr - q = 0$. Ses racines sont $-q$ et 1. Ainsi, il existe λ, μ réels tels que pour tout $n \geqslant 1$:

$$E(Y_n) = \lambda(1)^n + \mu(-q)^n + \frac{n}{1+q}$$

Les calculs de $E(Y_1)$ et $E(Y_2)$ donnent alors :

$$\lambda = \frac{2p^2 - 6p + 3}{(2-p)^2}, \ \mu = \frac{p^2 - 3p + 1}{(1-p)(2-p)^2}$$

Exercice 3.5.

1. On ouvre un guichet au temps 0. Des clients se présentent à ce guichet aux instants aléatoires $T_1, T_2, \ldots$ On suppose que les variables aléatoires $E_1, E_2, \ldots$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\begin{cases} E_1 = T_1 \\ E_2 = T_2 - T_1 \\ E_3 = T_3 - T_2 \\ \ldots \end{cases}$$

sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note X le nombre de clients arrivant dans l'intervalle $[0,1]$.

a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de T_n.

b) Calculer $P[X=0]$.

c) Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1, P[X=n] = P[T_{n+1} > 1] - P[T_n > 1]$.

d) En déduire la loi de X.

2. On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $E_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(U_i)$, où $U_1, U_2, \ldots$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On considère :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda} \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid U_1U_2\cdots U_n < \mathrm{e}^{-\lambda}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que Y est une variable aléatoire.

b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

3. En déduire une fonction Pascal qui simule une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution :

1. a) On a : $T_n = E_1 + \cdots + E_n$, avec $n \geqslant 1$. Ainsi T_n suit une loi $\Gamma(\lambda, n)$ comme somme de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$. Une densité de T_n est :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On a : $[X=0] = [T_1 > 1] = [E_1 > 1]$, donc

$$P[X=0] = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

c) De même : $[X=n] = [T_n \leqslant 1 < T_{n+1}]$.

Or :

$$\begin{aligned}[1 < T_{n+1}] &= ([T_n \leqslant 1] \cup [T_n > 1]) \cap [1 < T_{n+1}] \\ &= ([T_n \leqslant 1] \cap [1 < T_{n+1}]) \cup ([T_n > 1] \cap [1 < T_{n+1}])\end{aligned}$$

(événements incompatibles)

Donc :

$$\begin{aligned}P[1 < T_{n+1}] &= P([T_n \leqslant 1] \cap [1 < T_{n+1}]) + P((([T_n > 1] \cap [1 < T_{n+1}]) \\ &= P([T_n \leqslant 1] \cap [1 < T_{n+1}]) + P([T_n > 1]) \\ &= P[X=n] + P([T_n > 1])\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall\, n \geqslant 1, P[X = n] = P[1 < T_{n+1}] - P[1 < T_n].$$

d) Ainsi

$$P[X = n] = \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx - \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

et, en intégrant par parties :

$$P[X = n] = \Big[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\frac{x^n}{n!}\lambda^{n+1}\Big]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda} n \frac{x^{n-1}}{n!}\lambda^{n+1} dx - \int_1^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre λ.

2. a) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$[Y \leqslant t] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < 0 \\ [U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda}] & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ [U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda}] \cup [U_1U_2 < \mathrm{e}^{-\lambda}] \cup \cdots \cup [U_1 \cdots U_n < \mathrm{e}^{-\lambda}] & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc pour tout t, $[Y \leqslant t] \in \mathcal{P}(\Omega)$, ce qui prouve que Y est bien une variable aléatoire.

b) On a :

$$[X = 0] = [T_1 > 1] = [E_1 > 1] = \Big[-\frac{1}{\lambda}\ln U_1 > 1\Big] = [U_1 < \mathrm{e}^{-\lambda}] = [Y = 0]$$

Donc $P([X = 0]) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}[X = n] &= [E_1 + E_2 + \cdots + E_n \leqslant 1 < E_1 + E_2 + \cdots + E_n + E_{n+1}] \\ &= [-\frac{1}{\lambda}\ln(U_1) - \cdots - \frac{1}{\lambda}\ln(U_n) \leqslant 1 < -\frac{1}{\lambda}\ln(U_1) - \cdots - \frac{1}{\lambda}\ln(U_{n+1})] \\ &= [U_1U_2\cdots U_n \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda} > U_1U_2\cdots U_nU_{n+1}] = [Y = n].\end{aligned}$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, P[X = n] = P[Y = n]$, les variables aléatoires X et Y suivent donc la même loi.

3. Voici une proposition de fonction Pascal de simulation d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

```
function Simul_Poisson_Escp(lambda : real) :integer ;
Var N : integer ;
    P : real ;
Begin
N := 0 ;
P := random ;
```

```
while (P ⩾ exp(-lambda)) do
      begin
      P := P*random ;
      N := N+1 ;
      end ;
Simul_Poisson_Escp := N ;
End.
```

Exercice 3.6.

Soit α un réel strictement positif. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de loi donnée par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2}$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\cosh(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

On admet que pour tout réel t : $\cosh(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.

1. a) Soit β un réel strictement positif. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que :

$$1^\beta + 2^\beta + \ldots + n^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$$

quand n tend vers l'infini.

b) Calculer la variance de S_n et en donner un équivalent quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que si $\alpha < \dfrac{1}{2}$, la suite $\big(\dfrac{S_n}{n}\big)_n$ tend vers 0 en probabilité.

2. Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs positives d'espérance $E(Y)$, et a un réel strictement positif. Montrer que :

$$E(Y) \geqslant a.P([Y \geqslant a])$$

3. On suppose $\alpha < \dfrac{1}{2}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$.

a) Montrer que : $P(S_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \exp(-n^{1-2\alpha}\varepsilon\tau)E(\mathrm{e}^{\tau\frac{S_n}{n^{2\alpha}}})$.

b) Montrer que : $P(S_n \geqslant n\varepsilon) \leqslant \exp(-n^{1-2\alpha}\varepsilon\tau)\exp(\dfrac{\tau^2}{2}n^{1-2\alpha})$.

c) En déduire que : $P(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp(-\dfrac{n^{1-2\alpha}\varepsilon^2}{2})$.

Solution :

1.a) On a : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} t^\beta dt \leqslant k^\beta \leqslant \int_{k}^{k+1} t^\beta dt$, puis en sommant :

$$\int_0^n t^\beta dt \leqslant \sum_1^n k^\beta \leqslant \int_1^{n+1} t^\beta dt$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \leqslant \sum_{k=1}^n k^\beta \leqslant \frac{(n+1)^{\beta+1}}{\beta+1} - 1.$

D'où l'équivalent souhaité : $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$

b) On a : $V(S_n) = E(S_n^2)$ car S_n est centrée.

Or $E(S_n^2) = E\big(\sum_{j=1}^n X_j^2 + 2\sum_{i<j} X_iX_j\big)$, puis par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \sum_{j=1}^n E(X_j^2) + 2\sum_{i<j} E(X_iX_j) = \sum_{j=1}^n \big(\tfrac{1}{2}(j^\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}(-j^\alpha)^2\big) + 2\sum_{i<j} 0 \\ &= \sum_{j=1}^n j^{2\alpha} \text{ (en effet par indépendance } E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 0) \end{aligned}$$

D'où $V(S_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{n^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$.

c) On peut écrire :

$$P(|\frac{S_n}{n} - 0| > \varepsilon) = P(|S_n - 0| > n\varepsilon) \leqslant \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

Or $\dfrac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \sim \dfrac{n^{2\alpha-1}}{(2\alpha+1)\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $2\alpha-1 < 0$), ce qui prouve la convergence demandée.

2. Il s'agit de l'inégalité de Markov, qui fait partie du cours.

3. a) On a

$E(\exp(\tau\dfrac{S_n}{n^{2\alpha}})) = E(\exp(\tau\dfrac{S_n}{n^{2\alpha}})(\mathbf{1}_{S_n>n\varepsilon} + \mathbf{1}_{S_n\leqslant n\varepsilon})) \geqslant E(\exp(\tau\frac{S_n}{n^{2\alpha}})\mathbf{1}_{S_n>n\varepsilon})$

Donc :

$$E(\exp(\tau\frac{S_n}{n^{2\alpha}})) \geqslant \exp(\tau\frac{n\varepsilon}{n^{2\alpha}})E(\mathbf{1}_{S_n>n\varepsilon}) = \exp(\tau\frac{n\varepsilon}{n^{2\alpha}})P(S_n \geqslant n\varepsilon)$$

ce qui est l'inégalité souhaitée à l'ordre des termes près.

b) Par indépendance :

$$E(\exp(\tau\frac{S_n}{n^{2\alpha}})) = E(\prod_{j=1}^n \exp(\frac{\tau}{n^{2\alpha}}X_j)) = \prod_{j=1}^n E(\exp(\frac{\tau}{n^{2\alpha}}X_j))$$

Or :

$E(\exp(\dfrac{\tau}{n^{2\alpha}}X_j)) = \dfrac{1}{2}\exp(\dfrac{\tau}{n^{2\alpha}}n^\alpha) + \dfrac{1}{2}\exp(\dfrac{\tau}{n^{2\alpha}}(-n^\alpha)) = \cosh(\tau n^{-\alpha})$

$$\leqslant \exp(\frac{(\tau n^{-\alpha})^2}{2})$$

Donc :

$$E(\exp(\tau \frac{S_n}{n^{2\alpha}})) \leqslant \exp(\frac{\tau}{2} n^{-2\alpha+1})$$

c) On a alors : $P(\frac{S_n}{n} > \varepsilon) \leqslant \exp(-n^{1-2\alpha}(\varepsilon\tau - \frac{\tau^2}{2}))$

On pose $f(\tau) = \varepsilon\tau - \frac{\tau^2}{2}$. Alors $f(\tau)$ est maximale pour $\tau = \varepsilon$. On a donc bien :

$$P(\frac{S_n}{n} > \varepsilon) \leqslant \exp(-n^{1-2\alpha}\frac{\varepsilon^2}{2})$$

Exercice 3.7.

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \inf(X_1, \ldots, X_n)$, c'est à dire que :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Donner la fonction de répartition et une densité de Z_n.

2. Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer une densité de $-U$.

b) Déterminer une densité g de $Z_n - U$.

c) En considérant la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \inf(X_2, \ldots, X_n)$, déduire de ce qui précède la valeur de $P(Z_n = X_1)$.
Ce résultat était-il prévisible ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle une variable à densité ? La variable aléatoire $Z_n - X_1$ est-elle discrète ?

3. On pose $W_n = \ln(Z_n)$.

a) Déterminer une densité de W_n.

b) Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

i) Déterminer une densité de $T_{n+1} = -\frac{Y_{n+1}}{n+1}$.

ii) On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{Y_k}{k}$.

Montrer que S_n et W_n possèdent la même densité.

c) Montrer, sans calculer explicitement l'intégrale, que

$$\int_{-\infty}^{0} x.\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)^{n-1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Solution :

1. On commence classiquement par chercher la fonction d'antirépartition de Z_n :

$P(Z_n \geqslant x) = P((X_1 \geqslant x) \cap \ldots \cap (X_n \geqslant x))$ et comme les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont supposées indépendantes, on en déduit :

$$P(Z_n \geqslant x) = \big(1 - F_1(x)\big)^n.$$

En remplaçant $F_1(x)$ par sa valeur, on obtient :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On obtient une densité en dérivant sur chacun des intervalles ouverts et en rajoutant des valeurs quelconques aux points manquants ; on obtient par exemple :

$$f_{Z_n}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Soit par le calcul, soit directement, $-U$ suit la loi uniforme sur $[-1,0]$. Une densité de $-U$ est donc la fonction f_{-U} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{-U}(x) = \mathbf{1}_{[-1,0]}(x)$$

b) Comme les variables $-U$ et Z_n sont indépendantes, on peut effectuer un produit de convolution pour déterminer la fonction g :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_n}(t) f_{-U}(x-t)\, dt.$$

Dans un premier temps, il reste : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 n(1-t)^{n-1} f_{-U}(x-t)dt$.

On remarque alors que la variable $Z_n - U$ prend ses valeurs dans $[-1,1]$ et deux cas se présentent :

- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $g(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} n(1-t)^{n-1}\, dt = 1-(-x)^n$,

• si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $g(x) = \displaystyle\int_x^1 n(1-t)^{n-1}\,dt = (1-x)^n$.

c) On a $P(Z_n = X_1) = P(X_1 \leqslant M_n) = P(M_n - X_1 \geqslant 0)$. On applique alors ce qui précède, où M_n joue le rôle de Z_n et X_1 celui de U.

On obtient donc : $P(Z_n = X_1) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{n}$.

Le résultat est logique pour des raisons d'indépendance et de symétrie.

⋆ La variable $Z_n - X_1$ n'est pas à densité puisque $P(Z_n - X_1 = 0) \neq 0$.

⋆ La variable $Z_n - X_1$ n'est pas une variable discrète puisque $(Z_n - X_1)(\Omega)$ n'est pas un ensemble dénombrable.

3. a) On a $W_n(\Omega) =]-\infty, 0]$ et $P(W_n \leqslant x) = P(\ln Z_n \leqslant x) = P(Z_n \leqslant \mathrm{e}^x)$.
En conclusion :

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1-\mathrm{e}^x)^n & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit une densité de W_n :

$$f_{W_n}(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)^{n-1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) i) $P(T_{n+1} \leqslant x) = P(Y_{n+1} \geqslant -(n+1)x) = 1 - P(Y_{n+1} \leqslant -(n+1)x)$.
Ainsi T_{n+1} admet comme fonction de répartition

$$F_{T_{n+1}}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(n+1)x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit une densité de T_{n+1} :

$$f_{T_{n+1}}(x) = \begin{cases} (n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ii) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons h_n une densité de S_n.

⋆ Pour $n = 1$, on a $S_1 = -Y_1$ et une densité de S_1 est donc : $h_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(x)$, qui est bien une densité de W_1.

⋆ Supposons que pour un certain n, une densité de S_n soit f_{W_n} et déterminons une densité de S_{n+1}.

On a $S_{n+1} = S_n - \dfrac{Y_{n+1}}{n+1} = S_n + T_{n+1}$. Le lemme des coalitions permet d'affirmer que S_n et T_{n+1} sont indépendantes ; on peut donc effectuer un produit de convolution.
Comme $S_{n+1}(\Omega) = \mathbb{R}^-$, on effectue le calcul pour $x < 0$:

$$f_{S_{n+1}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(t) f_{T_{n+1}}(x-t)dt = \int_x^0 n\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^t)^{n-1}(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)(x-t)}dt$$

$$= n(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}\int_x^0 \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{-t}-1\right)^{n-1} dt$$
$$= n(n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}\big[-\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{-t}-1)^n\big]_0^x$$

Finalement : $f_{S_{n+1}}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{(n+1)x}(1-\mathrm{e}^x)^n$, ce qui est bien une densité de W_{n+1} et ce qui achève la récurrence.

c) Comme les variables Y_k admettent une espérance, la variable S_n admet une espérance et, par linéarité, $E(S_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{E(Y_k)}{k} = -\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

Comme W_n suit la même loi que S_n, on en déduit que W_n admet une espérance, qui vaut donc $-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Mais $E(W_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{W_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xn\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)^{n-1}dx$.

On a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)^{n-1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

d'où le résultat demandé.

Exercice 3.8.

1. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit h une fonction réelle positive et croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel a :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(h(X))}{h(a)}$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$ (on a donc $P(X=1)=p$).
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

2. Déterminer la limite en probabilité de la suite $(\overline{X}_n)$.

3. Soit a tel que $p < a < 1$.

a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$P(\overline{X}_n \geqslant a) \leqslant \big(E(\mathrm{e}^{\lambda X_1})\big)^n \mathrm{e}^{-an\lambda}$$

b) En déduire que $P(\overline{X}_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-nh_p(a)}$,

où pour tout $x \in]0,1[$, on a posé : $h_p(x) = x\ln\big(\frac{x}{p}\big) + (1-x)\ln\big(\frac{1-x}{1-p}\big)$.

4. Soit a tel que $0 < a < p$. Deduire de ce qui précède une majoration de $P(\overline{X}_n \leqslant a)$.

Solution :

1. Par le théorème de transfert, et par croissance de la fonction h :

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= \sum_{x_k} h(x_k)P(X = x_k) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} h(x_k)P(X = x_k) \\ &\geqslant h(a) \sum_{x_k \geqslant a} P(X = x_k) = h(a)P(X \geqslant a) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Nous sommes dans le cas d'utilisation de la loi faible des grands nombres. Ainsi, la suite $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers $p = E(X)$.

3. a) Soit $h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. C'est une fonction positive croissante, si $\lambda > 0$. Ainsi par indépendance :

$$\begin{aligned} P(\overline{X_n} \geqslant a) = P(n\overline{X_n} \geqslant na) &\leqslant \frac{E(h(n\overline{X_n}))}{h(na)} = \mathrm{e}^{-n\lambda a} E\big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda X_i}\big) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-n\lambda a}\big(E(\mathrm{e}^{\lambda X_1})\big)^n \end{aligned}$$

b) Lorsque X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, $E(\mathrm{e}^{\lambda X}) = (1-p)+p\mathrm{e}^{\lambda}$. Donc, pour tout $\lambda > 0$

$$P(\overline{X_n} \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-n\lambda a}(1 - p + p\mathrm{e}^{\lambda})^n$$

On étudie donc l'application $\varphi : \lambda \mapsto \mathrm{e}^{-n\lambda a}(1-p+p\mathrm{e}^{\lambda})^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on majore $P(\overline{X_n} \geqslant a)$ par le minimum de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Des calculs simples montrent que la dérivée $\varphi'(\lambda)$ s'annule pour λ tel que

$$(1 - a)p\mathrm{e}^{\lambda(1-a)} = a(1 - p)\mathrm{e}^{-\lambda a},$$

soit pour :

$$\lambda = \lambda_0 = \ln\big(\frac{a(1 - p)}{(1 - a)p}\big)$$

et est décroissante sur $]0, \lambda_0[$, croissante sur $[\lambda_0, +\infty[$, ce qui donne le minimum de $\varphi(\lambda_0)$ et :

$$P(\overline{X_n} \geqslant a) \leqslant \exp\big[-na\ln\big(\frac{a(1 - p)}{(1 - a)p}\big)\big]\big(\frac{1 - p}{1 - a}\big)^n = \mathrm{e}^{-nh_p(a)}$$

4. Lorsque $0 < a < p$, alors $1 - p < 1 - a < 1$ et $Y_n = 1 - X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$. La question précédente donne :

$$P(\overline{Y_n} \geqslant 1 - a) \leqslant \mathrm{e}^{-nh_{1-p}(1-a)}$$

ou :

$$P(\overline{X_n} \leqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-nh_{1-p}(1-a)} = \mathrm{e}^{-nh_p(a)}$$

Exercice 3.9.

Un vendeur de cycles vend des pédales de bicyclette qu'il se procure chez son grossiste par boîtes de deux ; toutes les boîtes sont supposées identiques et dans chaque boîte il y a une pédale droite et une pédale gauche.

⋆ Lorsqu'un client demande le remplacement de ses deux pédales de vélo, le commerçant lui vend une boîte complète et lui fait payer la somme de $2r$ euros.

⋆ Lorsqu'un client demande le remplacement d'une seule des deux pédales, le commerçant décide de ne pas obliger le client à acheter une boîte complète, mais majore le prix de la pédale dans une proportion α, c'est-à-dire lui fait payer la somme de $(1+\alpha)r$ euros.

Pour la simplicité de l'étude, on suppose que l'on sait que le nombre de pédales à poser séparément pendant la durée de l'étude vaut $2n$, où n est un entier naturel non nul. On suppose que le vendeur ne dispose au départ que de boîtes complètes et en nombre suffisant Soit p la probabilité qu'une demande d'un client qui ne demande qu'une pédale corresponde à une pédale droite (p n'est pas nécessairement égal à $1/2$) et X le nombre de boîtes nécessaires à la satisfaction de ces $2n$ demandes. (le commerçant n'ouvre une boîte que s'il ne dispose pas d'une boîte entamée lui permettant d'accéder à la demande du client)

1. Quelle est la loi de X ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par X.

2. Montrer que X peut s'écrire : $X = a + |Y - b|$, où a et b sont des constantes qu'on précisera et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

Donner l'expression l'espérance de $E(X)$ en fonction de n et p.

Dans la suite, on prendra la valeur $p = 1/2$.

3. Quelle majoration α le marchand de cycles doit-il appliquer au prix de chaque pédale vendue séparément pour qu'en moyenne le prix de vente des $2n$ pédales vendues séparément soit égal au prix de vente des X boîtes nécessaires vendues $2r$ euros chacune.

La valeur α trouvée dépend de n et on la note dorénavant α_n. Prouver que la suite (α_n) est décroissante. Donner un équivalent simple de α_n et la limite de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

⟦On admettra la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ ⟧

Solution :

1. Soit X_1 le nombre de pédales droites demandées (et X_2 le nombre de pédales gauches). On a $X_1 + X_2 = 2n$ et X_1 et X_2 suivent la loi binomiale de paramètres $2n$ et p.
Or $X = \max(X_1, X_2)$. D'où : $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$, et la loi de X est donnée par :

$$\begin{cases} P(X = n) = P(X_1 = n) \\ \forall\, k \in [\![n+1, 2n]\!], P(X = k) = P(X_1 = k) + P(X_1 = 2n - k) \end{cases}$$

Soit, avec $q = 1 - p$:

$$\begin{cases} P(X = n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \\ \forall\, k \in [\![n+1, 2n]\!], P(X = k) = \binom{2n}{k} [p^k q^{2n-k} + p^{2n-k} q^k] \end{cases}$$

2. $\max(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b) + \dfrac{1}{2}|a - b|$, donc

$$X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) + \frac{1}{2}\,|X_1 - X_2| = n + |X_1 - n|$$

On a :

$$E(X) = n\binom{2n}{n} p^n q^n + \sum_{k=n+1}^{2n} k\binom{2n}{k}(p^k q^{2n-k} + q^k p^{2n-k})$$

Ainsi pour $p = q = \dfrac{1}{2}$:

$$E(X) = n\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + 2n\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n-1}{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

Et comme $\dbinom{2n-1}{k} = \dbinom{2n-1}{2n-1-k}$

$$E(X) = n\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n-1}{k-1}$$

$$= n\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-1} 2^{2n-1}$$

$$E(X) = n\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + n$$

3. Ainsi on veut $2rE(X) = 2nr(1 + \alpha_n)$, d'où :

$$\alpha_n = \frac{1}{n}E(X) - 1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$$

On a alors, en revenant aux factorielles :

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{2n(2n-1)}{4n^2} \leqslant 1$$

Donc la suite (α_n) est décroissante.

De plus, la formule de Stirling donne après quelques simplifications :

$$\alpha_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et en particulier $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Exercice 3.10.

On note n et r deux entiers vérifiant $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $R_1, R_2, \ldots, R_r$ de probabilités respectives $x_1, x_2, \ldots, x_r$ telles que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus. Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si R_i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. a) Que vaut $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i$?

b) Exprimer la variable aléatoire X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

c) Donner la loi de X_i pour tout i de $[\![1, r]\!]$.

d) En déduire que l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$$

2. On considère l'application f de $\Omega = (]0, 1[)^r$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \Omega, f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$$

a) Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^r$.

b) Démontrer que f est de classe C^2 sur Ω et déterminer la hessienne $\nabla^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ de f, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ de Ω.

c) Vérifier que la forme quadratique associée à la hessienne au point $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ de Ω prend des valeurs strictement positives sur les vecteurs non nuls.

3. On cherche les extremums de f sous la contrainte linéaire $(C) : x_1 + \cdots + x_r = 1$.

a) Montrer que f admet pour cette optimisation sous contrainte un unique point critique A que l'on déterminera.

b) En utilisant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer que f présente en A un minimum global sous la contrainte (C).

c) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

Solution :

1. a) La famille $R_1, R_2, \dots, R_r$ constituant un système complet d'événements, on a $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$.

b) On a : $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$.

c) X_i est une variable de Bernoulli, de paramètre $P(X_i = 1) = (1 - x_i)^n$.

d) Donc : $E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

2. a) Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^r$ en tant que produit d'ouverts convexes de $\mathbb{R}$ (c'est un pavé ouvert).

b) La fonction f en tant que fonction polynôme des x_i, est de classe C^∞ sur Ω, avec :

$$\forall\, i \in [\![1, r]\!], \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -n(1 - x_i)^{n-1}$$

puis :

$$\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ n(n-1)(1-x_i)^{n-2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

On en déduit :

$$\nabla^2 f(x) = n(n-1) \begin{pmatrix} (1-x_1)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-x_2)^{n-2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (1-x_r)^{n-2} \end{pmatrix}$$

c) Notons q_α la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2 f(x)$ au point $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$. Alors :

$$\forall (h_1, h_2, \dots, h_r) \in \mathbb{R}^r, q_\alpha(h_1, h_2, \dots, h_r) = \sum_{i=1}^{r} n(n-1)(1-x_i)^{n-2} h_i^2$$

qui est strictement positif si les h_i ne sont pas tous nuls.

3. a) Si l'on pose :

$$\mathcal{H} = \left\{ H = (h_1, \dots, h_r) / \sum_{i=1}^{r} h_i = 0 \right\}$$

les points critiques A sous la contrainte donnée sont les solutions éventuelles du système :

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 1 \text{ et } \forall\, H \in \mathcal{H}, \langle \nabla f(A), H\rangle = 0$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 1 \text{ et } \nabla f(A) \in \mathcal{H}^{\perp} = \mathrm{Vect}((1,\dots,1))$$

ce qui indique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : :

$$\begin{cases} -n(1-x_i)^{n-1} + \lambda = 0 \text{ si } i \in [\![1,r]\!] \\ x_1 + \cdots + x_r = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $A = \big(\frac{1}{r},\dots,\frac{1}{r}\big)$.

b) Si $H = (h_1,\dots,h_r)$ est élément de $\mathcal{H}$, grâce à la convexité de Ω, le segment $[A, A+H]$ est inclus dans Ω, alors, d'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe un réel $\theta \in \,]0,1[$ tel que :

$$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H\rangle + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$$

Comme $H \in \mathcal{H}$, on a $\langle \nabla f(A), H\rangle = 0$, donc :

$$f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$$

quantité positive d'après ce qui précède. Ainsi, f présente bien en A un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

c) En ce point, la valeur minimum de l'espérance est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} \big(1 - \frac{1}{r}\big)^n = r\big(1-\frac{1}{r}\big)^n = \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}}$$

Exercice 3.11.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telles que $M = U^tV$.

b) On pose $\lambda = {}^tVU$. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}M$ est la matrice d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et à valeurs dans $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre n, de terme général :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, a_{i,j} = P_{[Y=j]}(X=i)$$

a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On pose :

$$B = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$$

Montrer que $B \in \mathrm{Im}(f)$

c) Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, le rang de A est égal à 1.

Solution :

1. a) Le rang de M vaut 1, donc il existe une matrice colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ (non nulle) telle que pour tout j de $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne C_j de M soit de la forme $\lambda_j C$, (l'un au moins des λ_j étant non nul). Ainsi on a :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 C & \lambda_2 C & \dots & \lambda_n C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut donc prendre $U = C$ et $V = {}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

b) On pose $\lambda = {}^tVU$ (λ appartient à $\mathbb{R}$). On suppose $\lambda \neq 0$, alors :

$$\left(\frac{1}{\lambda}M\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}(U^tV)(U^tV) = \frac{1}{\lambda^2}U({}^tVU)^tV = \frac{1}{\lambda^2}\lambda U^tV = \frac{1}{\lambda}M$$

donc $\frac{1}{\lambda}M$ est la matrice d'un projecteur. Son image est la droite engendrée par la colonne $C = U$ et son noyau est l'hyperplan d'équation $MX = 0$, soit $U^tVX = 0$, et comme $U \neq 0$ et ${}^tVX \in \mathbb{R}$, cela équivaut à ${}^tVX = 0$.

2. a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n P_{[Y=j]}(X=i) = \sum_{i=1}^n \frac{P(X=i \cap Y=j)}{P(Y=j)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j)}{P(Y=j)}$$

Or les événements $(X=i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment un système complet d'événements, donc :

$$\sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) = P(Y=j)$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = \frac{P(Y=j)}{P(Y=j)} = 1$$

b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} P_{[Y=j]}(X=i)P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}P(Y=j)$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(Y=1) \\ P(Y=2) \\ \vdots \\ P(Y=n) \end{pmatrix}$$

ce qui prouve le résultat demandé.

c) $\star$ Supposons X et Y indépendantes. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P_{[Y=j]}(X=i) = P(X=i)$$

Donc toutes les colonnes de A sont égales à : $\begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$ qui est non nulle puisque $\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = 1$. La matrice A est bien de rang 1.

$\star$ Réciproquement, supposons le rang de A égal à 1. Alors $\mathrm{Im}(A)$ est une droite vectorielle. D'après la question précédente, le vecteur $U = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$ engendre alors $\mathrm{Im}(A)$. Donc :

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \exists \lambda_j \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$$

D'après la question 2.a, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j P(X=i) = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \lambda_j$$

Donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = 1$. Par suite, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P_{[Y=j]}(X=i) = a_{i,j} = \lambda_j P(X=i) = P(X=i)$$

ce qui revient à écrire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, P(X=i \cap Y=j) = P(X=i)P(X=j)$$

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

Exercice 3.12.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, continue, de densité f et de fonction de répartition F. On note U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $-\dfrac{1}{\alpha}\ln(U)$ est une variable aléatoire réelle dont on déterminera la loi.

2. On suppose dans cette question seulement que f n'est jamais nulle.

a) Montrer que F est alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Est-il possible de lever l'hypothèse « f jamais nulle » en conservant le caractère bijectif de F ?

b) Montrer que $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire de densité f.

3. Pour tout réel $x \in]0, 1[$, on note :

$$I_x = \{a \in \mathbb{R}, F(a) \geqslant x\} \text{ et } F^{-1}(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) = x\}$$

a) Montrer que I_x est une demi-droite fermée à gauche.

b) Montrer l'existence de $G(x) = \inf I_x$ et de $\inf F^{-1}(x)$, puis montrer leur égalité.

c) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, x \in [0, 1], G(x) \leqslant t \implies F(t) \geqslant x$.

d) En déduire que les variables aléatoires X et $G(U)$ ont la même loi.

Solution :

1. Soit $Y = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(U)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}, [Y \leqslant t] = [\ln U \geqslant -\alpha t] = [U \geqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}] \in \mathcal{P}(\Omega)$, car U est une variable aléatoire définie sur Ω. Donc Y est bien une variable aléatoire, et :

$$P[Y \leqslant t] = P[U \geqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}] = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

2. a) La fonction F est dérivable et $F' = f$ qui est à valeurs strictement positives. F est une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) =]0, 1[$.

[0 ne peut être atteint sinon il existerait un réel x_0 tel que $F(x_0) = 0$ et la croissance de F entraînerait $\forall\, x \leqslant x_0, F(x) = 0$ et donc $\forall\, x < x_0, F'(x) = f(x) = 0$ ce qui est impossible. De la même manière 1 ne peut être atteint.]

Ainsi F est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) =]0, 1[$.

Si on suppose seulement $f \geqslant 0$:

La fonction F est croissante au sens large car sa dérivée f est positive ou nulle. Si F était constante sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors sa dérivée f serait nulle sur cet intervalle. f ne peut donc s'annuler qu'en des points isolés si on veut conserver le caractère bijectif de F.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}, [F^{-1}(U) \leqslant t] = [U \leqslant F(t)]$ et $P([U \leqslant F(t)]) = F(t)$. Ainsi $F^{-1}(U)$ est donc une variable aléatoire de fonction de répartition F et de densité f.

3. a) Soit $a_1 \in I_x,\ F(a_1) \geqslant x \implies \forall\, a_2 \geqslant a_1,\ F(a_2) \geqslant F(a_1)$ (F croissante), donc I_x est une demi-droite.

F étant une fonction numérique continue, l'image réciproque du fermé $[x, +\infty[$ est un fermé, donc I_x est une demi-droite fermée à gauche.

b) • Existence : $\forall\, x \in]0, 1[$:

$\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = 1 \implies \exists a_1, F(a_1) \geqslant x$, donc I_x est non vide.

$\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = 0 \implies \exists\, a_2, \forall a \leqslant a_2, F(a) < x$, donc I_x est minorée par a_2.

Ainsi I_x, partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure.

Le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a_2, a_1]$ prouve que $F^{-1}\{x\}$ est non vide, minorée par a_2 ; c'est donc aussi une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, il admet une borne inférieure, d'où l'existence de $\inf F^{-1}\{x\}$.

• Égalité : on a : $F^{-1}\{x\} \subset I_x \implies G(x) \leqslant \inf F^{-1}\{x\}$.
$\alpha = \inf F^{-1}\{x\} \implies \forall\, a < \alpha, F(a) < x$ (F croissante) $\implies \alpha \leqslant G(x)$, d'où :

$$\inf F^{-1}\{x\} = G(x)$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$G(x) \leqslant t \iff \inf F^{-1}\{x\} \leqslant t \iff F(t) \geqslant x$$

d) $[G(U) \leqslant t] = [F(t) \geqslant U]$, donc :

$$P[G(U) \leqslant t] = P[F(t) \geqslant U] = F(t) = P[X \leqslant t].$$

Les variables aléatoires X et $G(U)$ suivent donc la même loi.

Exercice 3.13.

Dans un gratte-ciel, un ascenseur n'assure que la descente. Il part du sommet à l'étage n, et à chaque fermeture de la porte, il descend pour s'arrêter aléatoirement à un étage strictement inférieur jusqu'à ce qu'il parvienne au rez-de-chaussée (étage 0) : on suppose qu'à chaque fois le numéro de l'étage d'arrêt suit une loi uniforme sur l'ensemble des numéros des étages encore accessibles.

On note $A(p,n)$ la probabilité que, lors de sa descente, l'ascenseur s'arrête à l'étage p, avec $0 \leqslant p < n$.

1. Calculer $A(0,n), A(n-1,n),\ A(n-2,n)$.

2. Démontrer, en utilisant la position du premier arrêt, la relation :

$$\mathcal{R}(n) : \forall\, p \in [\![0, n-2]\!], A(p,n) = \frac{1}{n}\big[1 + \sum_{j=p+1}^{n-1} A(p,j)\big]$$

3. En utilisant $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{R}(n-1)$, en déduire que :

$$\forall\, p \in [\![0, n-3]\!], A(p,n) = A(p,n-1).$$

4. Déterminer $A(p,n)$ pour $0 \leqslant p < n$.

5. Soit p tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$; on note E_p la variable aléatoire valant 1 si lors de sa descente, l'ascenseur s'arrête à l'étage p et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de E_p. Les variables aléatoires $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}$ sont-elles 2 à 2 indépendantes ?

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts lors de la descente. Exprimer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

Solution :

1. $\star$ $A(0,n) = 1$: à force de descendre, on arrive au rez-de-chaussée !

$\star$ $A(n-1,n) = \dfrac{1}{n}$: on descend directement d'un étage.

$\star$ $A(n-2,n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$: on descend directement de deux étages, ou bien 2 fois d'un étage.

2. On a :

$$A(p,n) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_1 = j) \times P(\text{un arrêt à l'étage } p \;/\; \text{premier arrêt à l'étage } j)$$

Or :

$$P(\text{un arrêt à l'étage } p \;/\; \text{premier arrêt à l'étage } j) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = j \\ 0 & \text{si } p > j \\ A(p,j) & \text{si } p < j \end{cases}$$

d'où :

$$\forall\, p \in [\![0, n-2]\!], A(p,n) = \frac{1}{n}\big[1 + \sum_{j=p+1}^{n-1} A(p,j)\big]$$

3. Par le même procédé en partant de l'étage $n-1$, on obtient :

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!], A(p, n-1) = \frac{1}{n-1}\left[1 + \sum_{j=p+1}^{n-2} A(p, j)\right]$$

Ainsi :

$$1 + \sum_{j=p+1}^{n-2} A(p, j) = (n-1)A(p, n-1) = nA(p, n) - A(p, n-1)$$

Donc :

$$A(p, n) = A(p, n-1), \text{ pour tout } p \text{ de } [\![0, n-3]\!]$$

4. Pour tout $p \in [\![0, n-3]\!], A(p, n) = A(p, n-1)$, d'où par récurrence :

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!], A(p, n) = A(p, p+3).$$

Donc :

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!], A(p, n) = A(p, p+3) = \frac{1}{p+1}.$$

Or pour $p \in \{n-2, n-1\}$, on a déjà $A(p, n) = \dfrac{1}{p+1}$. D'où :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], A(p, n) = \frac{1}{p+1}$$

5. $\star$ $P([E_p = 1]) = A(n, p) = \dfrac{1}{p+1}$, donc $E_p \hookrightarrow \mathcal{B}\big(\dfrac{1}{p+1}\big)$.

$\star$ Soient i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant n-1$. Alors :

$$\begin{aligned} P([E_i = 1] \cap [E_j = 1]) &= P([E_i = 1]/[E_j = 1]).P([E_j = 1]) \\ &= A(j, i)A(n, j) = \frac{1}{i+1} \times \frac{1}{j+1} \\ &= P([E_i = 1]).P([E_j = 1]) \end{aligned}$$

d'où l'indépendance.

b) On a : $X = E_0 + E_1 + \cdots + E_{n-1}$. Ainsi par indépendance pour le calcul de la variance

- $E(X) = E(E_0) + E(E_1) + \cdots + E(E_{n-1}) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.
- $V(X) = V(E_0) + V(E_1) + \cdots + V(E_{n-1}) = 1 \times 0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n-1}{n}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad ; \quad V(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$$

Exercice 3.14.

Soient U , V, W trois variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que U et W suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et V suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. On pose : $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et de Y (on redémontrera ce résultat du cours).

2. a) Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et la calculer.

b) En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et de Y.

3. Soit n un entier naturel.

a) Déterminer la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

b) En déduire que l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est égale à $\lambda + \dfrac{n\mu}{\lambda + \mu}$.

c) Montrer que cette espérance est supérieure ou égale à n si et seulement si on a : $E(X) \geqslant n$.

4. On suppose que la taille d'un individu est la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une représentant l'effet du patrimoine génétique, l'autre celui du mode de vie, et que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. La variable aléatoire X désigne alors la taille d'un père et Y celle de son fils. Donner une interprétation du résultat de la question 3.

Solution :

1. $U+V$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a par indépendance :

$$\begin{aligned}P(U+V=n) &= \sum_{i=0}^{n} P((U=i)\cap(V=n-i)) = \sum_{i=0}^{n} P(U=i)P(V=n-i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\times\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n\end{aligned}$$

Ainsi $X = U+V$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$, idem pour $V+W$.

2. a) Comme X et Y admettent chacune une espérance, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe si et seulement si XY a une espérance.
Or : $XY = UV + UW + VW + V^2$ et U, V, W sont indépendantes admettant une espérance, donc les produits deux à deux de ces variables admettent une espérance (valant le produit des espérances) et V admet une variance, donc un moment d'ordre deux. Bref $E(XY)$ existe et :

$$\begin{aligned}E(XY) &= E(U)E(V) + E(U)E(W) + E(V)E(W) + \mathrm{Var}(V) + E(V)^2\\ &= \lambda\mu + \lambda^2 + \lambda\mu + \mu + \mu^2 = (\lambda+\mu)^2 + \mu\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = (\lambda+\mu)^2 + \mu - (\lambda+\mu)^2 = \mu$$

b) Comme, par indépendance : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \lambda + \mu$, il vient :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

3. a) Si $(X = n)$ est réalisé, alors V peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, n$ et :

$$P_{(X=n)}(V = k) = \frac{P((X = n) \cap (V = k))}{P(X = n)} = \frac{P((X = n) \cap (U = n - k))}{P(X = n)}$$

$$= \frac{P(X = n)P(U = n - k)}{P(X = n)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}$$

$$P_{(X=n)}(V = k) = \binom{n}{k}\Big(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)^k\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^{n-k}$$

Autrement dit, la loi de V conditionnellement à la réalisation de l'événement $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

b) Ainsi $E_{(X=n)}(V) = \dfrac{n\mu}{\lambda+\mu}$.

Comme W est indépendante de X, on a $E_{(X=n)}(W) = E(W) = \lambda$, et par linéarité :

$$E_{(X=n)}(Y) = \lambda + \frac{n\mu}{\lambda+\mu}$$

c) $\lambda + \dfrac{n\mu}{\lambda+\mu} \geqslant n \iff \lambda^2 + \lambda\mu + n\mu \geqslant n\lambda + n\mu \iff \lambda + \mu \geqslant n$.

4. Dans une telle population, il y a une tendance à la stabilisation des tailles autour de la moyenne dans le sens où les fils nés de pères plus petits que la moyenne sont en moyenne plus grands que leur père, alors que les fils nés de pères plus grands que la moyenne sont en moyenne plus petits que leur père.

Exercice 3.15.

Une urne contient R boules rouges et B boules blanches. On pose $N = R+B$. On effectue une suite de tirages au hasard d'une boule de cette urne selon le processus suivant :

• lorsqu'on tire une boule rouge, celle-ci est enlevée de l'urne et remplacée par une boule blanche, avant de passer au tirage suivant.

• lorsqu'on tire une boule blanche, celle-ci est enlevée de l'urne et remplacée par une boule rouge, avant de passer au tirage suivant.

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ tirage amène une boule rouge ». Soit R_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage.

1. Soit $n \geqslant 0$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[R_n=k]}(A_{n+1})$ de A_{n+1} conditionnellement à l'événement $[R_n = k]$.
En déduire $P(A_{n+1})$ en fonction de l'espérance $E(R_n)$

2. a) Soit $\mathbf{1}_{n+1}$ la fonction indicatrice de A_{n+1}. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n et $\mathbf{1}_{n+1}$.

b) En déduire une relation de récurrence sur la suite $(E(R_n))_n$.

c) Exprimer $E(R_n)$ en fonction de n, $E(R_0)$ et de N. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} E(R_n)$.

3. a) Soit $Z_n = R_n.\mathbf{1}_{n+1}$. Déterminer la loi de Z_n en fonction de la loi de R_n.

b) En déduire que $E(Z_n) = \dfrac{E(R_n^2)}{N}$.

Solution :

1. Si $[R_n = k]$ est un événement non quasi-impossible et est réalisé, alors il y a k boules rouges dans l'urne avant le tirage et :

$$P_{[R_n=k]}(A_{n+1}) = \frac{k}{N}$$

En ne conservant en fait que les événements non quasi-impossibles, on a :

$$P(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N} P(A_{n+1} \cap [R_n = k]) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} P([R_n = k]) = \frac{1}{N} E(R_n)$$

2. a) Si on obtient une boule blanche, alors on ajoute une boule rouge et si on obtient une boule rouge on enlève une boule rouge, soit :

$$R_{n+1} = R_n + 1 - 2.\mathbf{1}_{n+1}$$

b) Comme $E(\mathbf{1}_{n+1}) = \dfrac{1}{N} E(R_N)$, il vient par linéarité de l'espérance :

$$E(R_{n+1}) = \big(1 - \frac{2}{N}\big) E(R_n) + 1$$

c) On est en présence d'une suite arithmético-géométrique, de point fixe $\dfrac{N}{2}$ et on obtient classiquement :

$$E(R_n) = \Big(E(R_0) - \frac{N}{2}\Big)\big(1 - \frac{2}{N}\big)^n + \frac{N}{2}\ ;\ \lim_{n\to\infty} E(R_n) = \frac{N}{2}$$

3. a) $\star$ Si $k \in [\![1, N]\!]$, on a $[Z_n = k] = [R_n = k] \cap [\mathbf{1}_{n+1} = 1] = [R_n = k] \cap A_{n+1}$ et donc par le résultat de la question 1. :

$$P(Z_n = k) = P(R_n = k) \times \frac{k}{N}$$

$\star$ Donc :

$$P(Z_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{N} P(Z_n = k) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} kP(R_n = k) = 1 - \frac{1}{N}E(R_n)$$

b) Ainsi $E(Z_n) = \sum_{k=0}^{N} kP(Z_n = k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 P(R_n = k) = \frac{1}{N}\, E(R_n^2)$.

Exercice 3.16.

Sur le cercle de centre O et de rayon 1, on considère un point A fixe et un point B choisi aléatoirement (la suite du texte précisera le sens à donner à cette expression). On note L la variable aléatoire égale à la distance de O à la corde AB : L est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ prenant ses valeurs dans $[0, 1]$.

On considère la mesure θ de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ prise dans $[0, 2\pi[$.

1. Exprimer L en fonction de θ.

2. a) Montrer que la restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$ admet une fonction réciproque qui est dérivable sur $]-1, 1[$.

b) On note arccos cette fonction réciproque. Calculer pour tout $x \in\,]-1, 1[$, la dérivée $\arccos'(x)$.

3. On suppose que θ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, suivant une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Donner la fonction de répartition F de L et montrer que L admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \end{cases}$$

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, L^k admet une espérance que l'on notera m_k.

5. a) Calculer m_0 et m_1.

b) Trouver une relation entre m_{k+2} et m_k. En déduire les valeurs de m_{2k} et m_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{m_k}{m_{k+1}}$.

d) Étudier la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $S_k = (k + 1) m_k m_{k+1}$, et en déduire un équivalent de m_k lorsque $k \to +\infty$.

Solution :

1. Soit H le mileu de $[A,B]$, le triangle OHA est rectangle en H et $\dfrac{OH}{OA} = |\cos(\frac{\theta}{2})|$, soit :

$$L = OH = |\cos(\frac{\theta}{2})|$$

2. a) La restriction de la fonction cos au segment $[0,\pi]$ réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Comme la dérivée de la fonction cos est non nulle sur $]0,\pi[$, la bijection réciproque Arc cos est dérivable sur $]-1,1[$.

b) Avec : $\operatorname{Arc}\cos'(t) = \dfrac{1}{\cos'(\operatorname{Arc}\cos t)} = -\dfrac{1}{\sin(\operatorname{Arc}\cos t)}$

Or sur le domaine utile, la fonction sin est positive et :

$$\sin(\operatorname{Arc}\cos t) = \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{Arc}\cos t)} = \sqrt{1-t^2}$$

soit :

$$\operatorname{Arc}\cos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

3. L prend ses valeurs dans $[0,1]$, et pour $x \in [0,1]$:

$$F_L(x) = P(L \leqslant x) = P(|\cos(\theta/2)| \leqslant x) = P(-x \leqslant \cos(\theta/2) \leqslant x)$$

et par décroissance de la fonction cos sur le domaine considéré :

$$\begin{aligned} F_L(x) &= P(\operatorname{Arc}\cos x \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant \operatorname{Arc}\cos(-x)) \\ &= P(2\operatorname{Arc}\cos x \leqslant \theta \leqslant \pi - 2\operatorname{Arc}\cos(x)) = \frac{1}{2\pi}(\pi - 4\operatorname{Arc}\cos x) \end{aligned}$$

F_L est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et L est une variable à densité. Par dérivation on peut alors prendre pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \end{cases}$$

4. L est une variable aléatoire bornée, elle admet donc des moments de tous ordres.

5. a) $\star$ $m_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\big[-\operatorname{Arc}\cos x\big]_0^1 = 1,$

$\star$ $m_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\big[-\sqrt{1-x^2}\,\big]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$

b) On écrit : $m_{k+2} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 x^{k+1} \times \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et on procède à l'intégration par parties ainsi préparée :

$$\begin{aligned} m_{k+2} &= \frac{2}{\pi}\left[x^{k+1}(-\sqrt{1-x^2})\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}(k+1)\int_0^1 x^k\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}(k+1)\int_0^1 x^k\,\frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (k+1)(m_k - m_{k+2}) \end{aligned}$$

D'où :

$$m_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}\,m_k$$

On en déduit, par récurrence :

$$m_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k-3}{2k-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times 1\ ;\ m_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\times\frac{2k-2}{2k-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{\pi}$$

On peut, si on le souhaite, « compacter » ces écritures à l'aide de factorielles, ce qui donne :

$$m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\ ;\ m_{2k+1} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}\times\frac{2}{\pi}$$

c) Par encadrement des fonctions à intégrer, on a pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$0 < m_{k+1} \leqslant m_k \leqslant m_{k-1}$$

Comme $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{m_{k-1}}{m_{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k} = 1$, il vient, par encadrement :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{m_k}{m_{k+1}} = 1$$

d) La relation de récurrence donne : $(k+2)m_{k+2}m_{k+1} = (k+1)m_{k+1}m_k$. Ainsi la suite (S_k) est constante égale à $S_0 = m_0 m_1 = \dfrac{2}{\pi}$.

Comme $m_k \sim m_{k+1}$, il vient : $km_k^2 \sim \dfrac{2}{\pi}$, et par positivité de m_k :

$$m_k \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{2}{k\pi}}$$

Exercice 3.17.

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
On note $p, (0 < p < 1)$ la probabilité d'un succès S et $q = 1 - p$ la probabilité d'un échec E. On appelle séquence de succès de longueur r, toute suite ininterrompue de r succès consécutifs. On considère la variable aléatoire T égale au nombre d'épreuves précédant la première séquence de succès de longueur 3. La suite d'épreuves s'arrête alors au troisième succès de cette séquence. Par exemple l'événement élémentaire $\{SSESSS\}$ appartient à l'événement $[T = 3]$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note pour tout entier k, $t_k = P(T = k)$.

1. Calculer les probabilités t_0, t_1, t_2 et t_3.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n la probabilité de l'événement A_n : « n'obtenir aucune séquence de succès de longueur 3 dans une suite de n épreuves ». Exprimer, pour $n \geqslant 1$, t_n en fonction de q_{n-1}.

3. En posant $q_0 = 1$, montrer que, pour tout $n \geqslant 3$:

$$q_n = q(q_{n-1} + pq_{n-2} + p^2 q_{n-3})$$

Calculer les nombres q_0, q_1, q_2 et q_3.

4. Étudier la monotonie de la suite (q_n). Quelle est la valeur la plus probable de T ?

5. a) Montrer que pour tout s réel tel que $|s| < 1$, la série de terme général $q_n s^n$ est convergente.

On pose alors $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n s^n$.

b) Montrer que : $F(s) = \dfrac{1 + ps + p^2 s^2}{1 - qs(1 + ps + p^2 s^2)}$.

c) En admettant que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n = \lim\limits_{s \to 1} F(s)$, retrouver la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} t_k$.

Solution :

1. $t_0 = P(SSS) = p^3$, $t_1 = P(ESSS) = qp^3$, $t_2 = P(.ESSS) = qp^3$, où le point signifie que le résultat du premier essai est sans intérêt.
De même $t_3 = P(..ESSS) = qp^3$ (même remarque).

2. Réaliser $[T = n]$, c'est ne pas avoir trois succès consécutifs au cours des $(n-1)$ premières épreuves, avoir un échec au rang n et enfin trois succès consécutifs. Par indépendance, il vient :

$$t_n = q_{n-1} q p^3$$

3. Pour $n \geqslant 3$, on regarde ce qui se passe au début. Réaliser A_n c'est :
→ Soit commencer par un échec, puis ne pas avoir de triplet de succès au cours des $(n-1)$ épreuves suivantes.
→ Commencer par un succès suivi d'un échec, puis ne pas avoir de triplet de succès au cours des $(n-2)$ épreuves suivantes.
→ Commencer par deux succès suivi d'un échec, puis ne pas avoir de triplet de succès au cours des $(n-3)$ épreuves suivantes.

Donc, par incompatibilité et indépendance :

$$\forall\, n \geqslant 3, q_n = qq_{n-1} + pqq_{n-2} + p^2qq_{n-3}$$

Comme $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, il vient alors :

$$q_3 = q(1+p+p^2) = 1-p^3 \text{ (ce qui se voit directement)}$$

4. Comme $A_n \subset A_{n-1}$, la suite (q_n) est décroissante. La valeur la plus probable de T est donc clairement 0.

5. a) Pour $|s| < 1$, on a : $0 \leqslant |q_n s^n| \leqslant |s|^n$ et la convergence de la série géométrique de terme général $|s|^n$ donne la convergence (absolue) de la série définissant $F(s)$.

b) On écrit :

$$\begin{aligned}F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = 1+s+s^2+\sum_{n=3}^{\infty} q(q_{n-1}+pq_{n-2}+p^2q_{n-3})s^n\\ &= 1+s+s^2+qs\sum_{n=3}^{\infty} q_{n-1}s^{n-1}+pqs^2\sum_{n=3}^{\infty} q_{n-2}s^{n-2}+qp^2s^3\sum_{n=3}^{\infty} q_{n-3}s^{n-3}\\ &= 1+s+s^2+qs(F(s)-1-s)+pqs^2(F(s)-1)+qp^2s^3F(s)\end{aligned}$$

et en développant et en regroupant :

$$F(s) = \frac{1+ps+p^2s^2}{1-qs(1+ps+p^2s^2)}$$

c) En admettant :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \frac{1+p+p^2}{1-q(1+p+p^2)} = \frac{1-p^3}{1-p-q(1-p^3)} = \frac{1-p^3}{qp^3}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} t_k = p^3 + qp^3\,\frac{1-p^3}{qp^3} = 1$$

On retrouve ainsi le fait que T est bien une variable aléatoire, puisque définie « presque partout ».

Exercice 3.18.

Soit $I =]1/2, 1[$, p un paramètre réel de I et $q = 1-p$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{2, 4, 6, \ldots, 2x, \ldots\}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P([X=2x]) = \begin{cases} 1-2pq & \text{si } x = 1\\ (2pq)^2(1-2pq)^{x-2} & \text{si } x \geqslant 2\end{cases}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $(X_1, \ldots, X_N)$ un N-échantillon i.i.d. de la loi de X.

Soit $(2x_1, \dots, 2x_N)$ un N-échantillon de réalisations du N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ tel que, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $x_k \in \mathbb{N}^*$.

On pose : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$, et on désigne par m le nombre de réalisations égales à 2.

On suppose que : $\overline{x} > \max\big(1; 4(1-\dfrac{m}{N})\big)$, et on note : $E = \{k \in [\![1, N]\!] \mid x_k \geqslant 2\}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k\in E} x_k = N\overline{x} - m$.

2. Soit L et H les deux fonctions définies sur I par

$$L(p) = P\big(\bigcap_{k=1}^{N}[X_k = 2x_k]\big) \text{ et } H = \ln\circ L$$

   a) Donner, pour tout p de I, l'expression de $L(p)$.

   b) Montrer que H est de classe C^1 sur I.

   c) Montrer que H admet un maximum sur I en un point noté $\widehat{p}$.

Solution :

1. On a : $N\overline{x} = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k = \sum\limits_{k\in E} x_k + \sum\limits_{k\notin E} x_k = \sum\limits_{k\in E} x_k + m\times 1$, soit :

$$\sum_{k\in E} x_k = N\overline{x} - m$$

2. a) On a :

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{k=1}^{N} P([X_k = 2x_k]) = \prod_{k\notin E} P([X_k = 2])\times \prod_{k\in E} P([X_k = 2x_k]) \\ &= (1-2pq)^m\times(2pq)^{2(N-m)}(1-2pq)^{\sum x_k - 2(N-m)} \end{aligned}$$

$$L(p) = (2pq)^{2(N-m)}(1-2pq)^{N\overline{x}-2(N-m)}$$

   b) En développant :

$$H(p) = 2(N-m)\ln(2p(1-p)) + (N\overline{x} - 2(N-m))\ln(1-2p(1-p))$$

Or $p \in \,]1/2, 1[\implies 0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$ et H est clairement de classe $\mathcal{C}^1$.

   c) $H'(p) = 2(N-m)\dfrac{1-2p}{p(1-p)} + (N\overline{x} - 2(N-m))\dfrac{-2+4p}{1-2p(1-p)}$

Soit : $H'(p) = \dfrac{2(1-2p)}{pq(1-2pq)}\big((N-m)(1-2pq) + (2(N-m) - N\overline{x})pq\big)$

Ou encore :

$$H'(p) = \frac{2(1-2p)}{pq(1-2pq)}((N-m) - N\overline{x}p(1-p))$$

Comme $p > \dfrac{1}{2}$, le signe de $H'(p)$ est l'opposé de celui de $p^2 - p + \dfrac{N-m}{N\overline{x}}$.
Ce trinôme du second degré a deux racines de somme 1 et de produit $N - m$ positif. Ainsi ces deux racines sont entre 0 et 1, et on retient la racine supérieure à $1/2$:

$$\widehat{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4(N-m)}{N\overline{x}}}$$

qui donne le tableau de variations ($H'(p)$ est positif entre les racines) :

p	$1/2$		$\widehat{p}$		1
H	$-N\overline{x}\ln 2$	$\nearrow$	$H(\widehat{p})$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3.19.

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a invité n personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle « auditoire » l'ensemble des personnes qui viennent. On note p_k la probabilité que cet auditoire soit formé de k personnes fixées et on suppose que p_k ne dépend que de k, et pas des personnes composant cet auditoire. On suppose aussi que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, un auditoire de k personnes est k fois plus probable qu'un auditoire d'une seule personne *i.e.* $p_k = kp_1$.

1. Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?

2. Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$. Déterminer la loi du nombre X de personnes qui viennent.

3. Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

4. Montrer que, avec cette modélisation, les événements « l'invité a est présent » et « l'invité b est présent » ne sont pas indépendants.

5. Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle qui comporte exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chances de trouver un siège que les personnes invitées.
Déterminer la probabilité q_n que cette personne reste debout et déterminer un équivalent simple de q_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Comme $\operatorname{card}\mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{card} E}$, il y a 2^n auditoires possibles, dont $\binom{n}{k}$ auditoires formés de k personnes, pour $k \in [\![0,n]\!]$.

2. Il y a $\binom{n}{k}$ auditoires de k personnes, chacun de probabilité $p_k = kp_1$, donc par partition de l'univers des possibles :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k = p_1 \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = p_1 \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

(Notons que l'on a $p_0 = 0$, il est donc quasi-impossible que le conférencier se retrouve seul !)

Pour $k \geqslant 1$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et donc $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$ et donc :

$$p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$$

Ainsi :

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p_k = \frac{k}{n2^{n-1}}\binom{n}{k}$$

3. La probabilité qu'un invité donné « I » soit présent est la somme des probabilités de tous les auditoires où figure I.

Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ auditoires de k personnes contenant I et ainsi la probabilité P_I cherchée vaut :

$$\begin{aligned} P_I &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_k = p_1 \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} = p_1 \sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\binom{n-1}{k-1} \\ &= p_1\Big(\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\Big) = p_1((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}) \end{aligned}$$

$$p_I = \frac{(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}$$

4. De même la probabilité que deux individus « a » et « b » donnés soient présents est donnée par

$$\begin{aligned} P_{a,b} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p_k = p_1\Big(\sum_{k=0}^{n-2} k\binom{n-2}{k} + 2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\Big) \\ &= \frac{(n-2)2^{n-3} + 2.2^{n-2}}{n2^{n-1}} = \frac{n+2}{4n} \end{aligned}$$

et :

$$P_{a,b} - P_a P_b = \frac{n+2}{4n} - \Big(\frac{n+1}{2n}\Big)^2 = -\frac{1}{4n^2} \neq 0$$

Ce qui prouve la non-indépendance des événements.

5. La probabilité que la personne en question reste debout, sachant que l'auditoire comporte k personnes, est $\dfrac{1}{k+1}$. Par la formule des probabilités totales, il vient alors :

$$q_n = p_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \times k\binom{n}{k} = p_1\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\Big)$$

$$= p_1\Big(2^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\Big) = \frac{1}{n2^{n-1}}\Big(2^n - \frac{2^{n+1}-1}{n+1}\Big)$$

$$q_n = \frac{2}{n} - \frac{4}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)2^{n-1}} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{2}{n}$$

Exercice 3.20.

1. Soit t un réel tel que $t \notin \{-1, 1\}$. Déterminer deux réels $A(t)$ et $B(t)$ tels que pour tout réel $u \geqslant 0$:

$$\frac{1}{(1+u)(1+t^2u)} = \frac{A(t)}{1+u} + \frac{B(t)}{1+t^2u}$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$ par : $g(t) = \dfrac{2}{\pi^2} \times \dfrac{\ln|t|}{t^2-1}$.

a) Montrer que g se prolonge par continuité en -1 et 1.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ est convergente.

3. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont une densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, de même loi que X. On pose $T = \dfrac{X}{Y}$, et on *admet* qu'une densité f_T de T est donnée, pour tout t réel non nul , par :

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(y) f(ty)dy$$

a) Montrer que pour tout réel t non nul :

$$f_T(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y^2)(1+t^2y^2)}dy$$

b) En déduire l'expression de f_T.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$.

Solution :

1. Par réduction au même dénominateur et identification, il vient :

$$A(t) = -\frac{1}{t^2-1} \quad ; \quad B(t) = \frac{t^2}{t^2-1}$$

2. a) La fonction g est paire et $\ln t \underset{(1)}{\sim} t-1 \implies g(t) \underset{(1)}{\sim} \dfrac{2}{\pi^2}\times\dfrac{t-1}{t^2-1} = \dfrac{2}{\pi^2}\times\dfrac{1}{t+1}$, d'où $\lim\limits_{t\to 1} g(t) = \dfrac{1}{\pi^2}$ et donc $\lim\limits_{t\to -1} g(t) = \dfrac{1}{\pi^2}$.
On pose donc : $g(-1) = g(1) = \dfrac{1}{\pi^2}$.

b) La fonction h à intégrer est bien entendu implicitement supposée prolongée par continuité en 1. Cette fonction est positive et :

⋆ $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}h(t) = 0$ (négligeabilité classique) et la règle de Riemann montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$ converge.

⋆ $h(t) \underset{(0^+)}{\sim} -\ln t$ et la convergence connue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ donne celle de $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt$.

L'intégrale proposée converge.

3. a) Le résultat admis donne, par parité :

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\times\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+y^2}\times\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+t^2y^2}\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{2y}{(1+y^2)(1+t^2y^2)}\,dy$$

b) Le changement de variable $u = y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, donc légitime et donne :

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u)(1+t^2u^2)}$$

Or, par le résultat de la question 1. et pour $t \notin \{-1,1\}$:

$$\int_0^A \frac{du}{(1+u)(1+t^2u^2)} = \frac{1}{t^2-1}\Big[\ln\big(\frac{1+t^2u}{1+u}\big)\Big]_0^A = \frac{1}{t^2-1}\ln\big(\frac{1+t^2A}{1+A}\big)$$

et donc pour $t \neq 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u)(1+t^2u^2)} = \frac{1}{t^2-1}\ln(t^2)$, soit :

$$\forall\, t \notin \{-1, 0, 1\}, f_T(t) = \frac{2}{\pi^2} \times \frac{\ln |t|}{t^2 - 1}$$

et on peut décider de poser $f_T(-1) = f_T(1) = \dfrac{1}{\pi^2}$.

c) Comme T est une variable paire, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \frac{1}{2}$ et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1}\, dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 3.21.

On suppose que toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La lettre a désigne un réel strictement positif donné.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité. Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+1)^n x^a}{\Gamma(n)} (-\ln x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a (-\ln x)^{n-1} dx$.

b) À l'aide du changement de variable $u = -\ln x$, montrer que g_n est une densité de probabilité.

Soit T_n une variable aléatoire réelle de densité g_n.

c) Vérifier que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

3. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi que X. On pose $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$.

a) Donner une densité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies par $Y_1 = \ln X_1$ et $Y_2 = -\ln X_2$.

b) En déduire une densité de la variable $T = \ln Z$.

c) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{a+1}{2}x^a & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{a+1}{2}x^{-(a+2)} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Montrer que h est une densité de Z.

4. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On pose $W_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la variable aléatoire W_n admet g_n comme densité.

Solution :

1. a) La fonction f est positive, continue par morceaux et

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^1 (a+1)x^a dx = \left[x^{a+1}\right]_0^1 = 1$$

f est une densité de probabilité

b) $E(X) = \displaystyle\int_0^1 (a+1)x^{a+1}dx = \frac{a+1}{a+2}$.

2. a) La fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et comme $a > 0$, elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 0$ (limite classique), l'intégrale est « faussement impropre » ...

b) ... et le changement de variable $u = -\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, donc légitime et donne :

$$\int_0^1 x^a(-\ln x)^{n-1}dx = \int_{+\infty}^0 (\mathrm{e}^{-u})^a u^{n-1}(-\mathrm{e}^{-u})du = \int_0^{+\infty} u^{n-1}\mathrm{e}^{-(a+1)u}du$$

La connaissance des lois Gamma montre alors que g_n, qui est positive et continue par morceaux est bien une densité de probabilité.

c) T_n est une variable aléatoire bornée, elle admet donc une espérance et :

$$E(T_n) = \int_0^1 \frac{(a+1)x^{a+1}}{\Gamma(n)}(-\ln x)^{n-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{(a+1)^n}{\Gamma(n)}\mathrm{e}^{-(a+2)u}u^{n-1}du$$

$$= \frac{(a+1)^n}{(a+2)^n}\int_0^{+\infty} \frac{(a+2)^n}{\Gamma(n)}\mathrm{e}^{-(a+2)u}u^{n-1}du$$

et en reconnaissant encore une intégrale de densité d'une loi Γ :

$$E(T_n) = \frac{(a+1)^n}{(a+2)^n}$$

3. a) $\star$ Y_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^-$, et pour $y < 0$:
$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \leqslant y) = P(\ln X_1 \leqslant y) = P(X_1 \leqslant \mathrm{e}^y) = F_{X_1}(\mathrm{e}^y) = (\mathrm{e}^y)^{a+1}$
On peut donc prendre pour densité de Y_1 la fonction f_1 définie par :

$$f_1(y) = (a+1)\mathrm{e}^{(a+1)y} \text{ si } y \leqslant 0 \text{ et } f_1(y) = 0 \text{ si } y > 0$$

$\star$ On obtient symétriquement et en notant f_2 une densité de Y_2 :

$$f_2(y) = (a+1)\mathrm{e}^{-(a+1)y} \text{ si } y \geqslant 0 \text{ et } f_2(y) = 0 \text{ si } y < 0$$

b) X_1 et X_2 sont indépendantes, donc Y_1 et Y_2 aussi et, par convolution, une densité f_T de T est définie par :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt$$

et les expressions de f_1 et f_2 obligent à distinguer deux cas :
$\star$ Si $x \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_0^{+\infty} (a+1)\mathrm{e}^{(a+1)(x-t)}(a+1)\mathrm{e}^{-(a+1)t} dt \\ &= (a+1)^2 \mathrm{e}^{(a+1)x} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(a+1)t} dt = \frac{1}{2}(a+1)\mathrm{e}^{(a+1)x} \end{aligned}$$

$\star$ Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_x^{+\infty} (a+1)\mathrm{e}^{(a+1)(x-t)}(a+1)\mathrm{e}^{-(a+1)t} dt \\ &= (a+1)^2 \mathrm{e}^{(a+1)x} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2(a+1)t} dt = \frac{1}{2}(a+1)\mathrm{e}^{-(a+1)x} \end{aligned}$$

c) Z prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $x > 0$,

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(T \leqslant \ln x) = F_T(\ln x)$$

On peut donc prendre, toujours pour $x > 0$, $h(x) = \dfrac{1}{x} f_T(\ln x)$, soit :

$$h(x) = \frac{1}{2}(a+1)x^a, \text{ si } 0 < x < 1 \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(a+1)x^{-(a+2)} \text{ si } x \geqslant 1$$

4. W_n prend ses valeurs dans $[0,1]$ et pour $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= P(W_n \leqslant x) = P(\ln W_n \leqslant \ln x) = P(-\ln W_n \geqslant -\ln x) \\ &= 1 - P(\sum_{k=1}^{n} -\ln X_k \leqslant -\ln x) \end{aligned}$$

Chaque variable aléatoire $-\ln(X_k)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a+1)$, donc, par indépendance, leur somme suit la loi Gamma de paramètres $\dfrac{1}{a+1}$ et n.
Par dérivation de la fonction de répartition d'une telle loi, on peut alors prendre :

$$\forall\, x \in \,]0,1[,\, f_{W_n}(x) = \frac{1}{x}\frac{(a+1)^n}{\Gamma(n)}\mathrm{e}^{(a+1)\ln x}(-\ln x)^{n-1}$$

Exercice 3.22.

Un sondage consiste à proposer l'affirmation « A » à certaines personnes d'une population donnée. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas.

L'enquêteur dispose d'un paquet de 20 cartes, numérotées de 1 à 20, qu'il remet à la personne sondée. Celle-ci tire une carte au hasard et ne la montre pas à l'enquêteur.

La règle est alors la suivante :

- si la carte porte le numéro 1, la personne sondée répond « vrai » si elle est d'accord avec l'affirmation « A » et « faux » sinon,
- si la carte porte un autre numéro, la personne sondée répond « vrai » si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation « A » et « faux » sinon.

Le but de l'enquête est d'évaluer la proportion p de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation « A ».

1. On interroge une personne selon la règle précédente et on considère l'événement suivant, noté V : « la personne répond « vrai » ». On note θ la probabilité de l'événement V.
Exprimer θ en fonction de p, puis en déduire p en fonction de θ.

2. Certaines considérations théoriques laissent penser que $p = 17/18$.

a) Calculer θ.

b) Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant répondu « vrai » soit d'accord avec l'affirmation « A ».

On revient au cas général où on ne connaît ni p, ni θ.

3. On considère un échantillon aléatoire, de taille n, extrait de la population considérée et on note S_n le nombre de réponses « vrai » obtenues. On suppose n assez grand pour pouvoir considérer que cet échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise.

a) Donner la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.

b) Montrer que $\dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4. Dans cette question, on suppose que l'on a réalisé un échantillon de 100 personnes et on constate que 23 personnes ont répondu « vrai ».

a) Donner une estimation ponctuelle de θ et de p.

b) Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance 0.95 de θ puis de p.

On rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1.96) = 0.975$.

Solution :

1. Notons T_1 l'événement « la personne tire la carte 1 », $(T_1, \overline{T_1})$ est un système complet, et :

$$\theta = P(V) = P(T_1)P_{T_1}(V) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(V) = \frac{1}{20}p + \frac{19}{20}(1-p)$$

$$\theta = \frac{19 - 18p}{20},\ p = \frac{19 - 20\theta}{18}$$

2. a) $p = \dfrac{17}{18}$ donne $\theta = \dfrac{1}{10}$.

b) Notons D l'événement « la personne est d'accord avec l'affirmation A », on a :

$$P_V(D) = \frac{P(D)P_D(V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{20}p}{\theta} = \frac{17}{36}$$

3. a) S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \theta)$ d'espérance $n\theta$ et de variance $n\theta(1-\theta)$.

b) Ainsi $E(S_n/n) = \theta$ et $V(S_n/n) = \dfrac{1}{n}\theta(1-\theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$(S_n/n) \text{ est un estimateur sans biais convergent de } \theta$$

4. a) Puisque 23 personnes ont dit « vrai », une estimation ponctuelle de θ est $\widehat{\theta} = 0{,}23$ et une estimation ponctuelle de p est alors $\widehat{p} = \dfrac{19 - 20\theta}{18} = 0{,}8$.

b) On a $t_{0,95} \simeq 1{,}96$ et $[0{,}23 - \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}}; 0{,}23 + \dfrac{t_{0,95}}{2\sqrt{100}}]$ est un intervalle de confiance symétrique de θ au niveau de confiance de 0,95. Ce qui donne ici pour intervalle de confiance de θ :

$$[0{,}132\ ; 0{,}328]$$

Avec $p = \dfrac{19 - 20\theta}{18}$, un intervalle de confiance de p, au même niveau de confiance, est donc :

$$[0{,}6911\ ; 0{,}9089]$$

Exercice 3.23.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall\, t \neq 0, g(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$$

1. a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement, encore noté g, admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

b) Tracer la représentation graphique de g.

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, et $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

b) Démontrer que, pour tout r de $\mathbb{N}$, Y^r admet une espérance $E(Y^r)$.

c) Calculer l'espérance de Y. Exprimer la variance de Y en fonction de la somme

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)^2 n!}.$$

3. a) Démontrer l'encadrement , valable pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \lambda]$:

$$0 \leqslant g(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{(n+1)!} \leqslant \frac{\mathrm{e}^\lambda \lambda^N}{(N+1)!}$$

b) En déduire l'expression de la somme de la série de terme général $\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n+1)^2 n!}$, $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une intégrale.

c) Expliciter la variance $V(Y)$ à l'aide de la fonction g.

Solution :

1. a) $\star$ On sait que $\mathrm{e}^t - 1 \underset{(0)}{\sim} t$, donc $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 1$ et g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 1$.

$\star$ On sait que $\mathrm{e}^t \underset{(0)}{=} \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{t^k}{k!} + o(t^{n+1})$, donc $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{t^{k-1}}{k!} + o(t^n)$ et g admet bien un développement limité à l'odre n, au voisinage de 0.

b) Pas de problème, la représentation graphique de g a même allure que la représentation graphique de la fonction exp.

2. a) On a $Y(\Omega) = \{\dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(Y = \dfrac{1}{n+1}) = \dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

b) Y est une variable aléatoire bornée, elle admet donc des moments de tous ordres, ce que l'on peut vérifier aisément sur la série définissant $E(Y^r)$.

c) $\star$ $E(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{(n+1)!} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

$$E(Y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$$

$\star$ $E(Y^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{(n+1)^2 n!} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}S(\lambda)$, d'où :

$$V(Y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}S(\lambda) - \big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\big)^2$$

3. a) D'après la formule de Taylor-Lagrange et la connaissance du développement de la fonction exponentielle, on a :

$$g(t) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{t^N}{(N+1)!}\,\mathrm{e}^c, \text{ pour un certain } c \text{ de } [0,t]$$

Soit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,\lambda], 0 \leqslant g(t) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{t^n}{(n+1)!} \leqslant \frac{\lambda^N}{(N+1)!}\,\mathrm{e}^{\lambda}$$

b) En intégrant sur le segment $[0,\lambda]$:

$$0 \leqslant \int_0^{\lambda} g(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)^2 n!} \leqslant \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!}\,\mathrm{e}^{\lambda}$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!}\,\mathrm{e}^{\lambda} = 0$, il vient, par encadrement : $S(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} g(t)\,dt$

c) Et donc : $V(Y) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\lambda} g(t)\,dt - [g(-\lambda)]^2$

Exercice 3.24.

Un joueur prend pour cible un mur muni d'un repère orthonormé (O,i,j). On note X et Y les variables aléatoires désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'impact du tir sur le mur, et on suppose que X et Y sont indépendantes, de même loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X.

1. Donner une densité de $|X|$. Montrer que la variable aléatoire $Z = |X|+|Y|$ admet comme densité la fonction h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-t^2/4}\displaystyle\int_{-t/2}^{t/2}\mathrm{e}^{-v^2}dv & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Déterminer la dérivée de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{e}^{-v^2} dv$$

b) Étudier les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

3. On peint sur le mur le carré plein de sommets $(1,0), (0,1), (-1,0)$ et $(0,-1)$. On note p la probabilité pour que l'impact soit dans le carré. Déterminer p en fonction de Φ.

Solution :

1. La variable aléatoire $|X|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

Par dérivation légitime, une densité f de $|X|$ est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

X et Y étant indépendantes, il en est de même de $|X|$ et $|Y|$ et une densité h de Z s'obtient par convolution (Z est une variable aléatoire clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on prend donc h nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) :

$$\forall\, t \geqslant 0, h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f(t-u) du = \int_0^t \frac{4}{2\pi} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{e}^{-(t-u)^2/2} du$$

Le changement de variable $v = u - \dfrac{t}{2}$ donne alors :

$$\forall\, t \geqslant 0, h(t) = \frac{2\mathrm{e}^{-t^2/4}}{\pi} \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{e}^{-v^2} dv$$

2. a) $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-(t/2)^2} - (-\frac{1}{2})\, \mathrm{e}^{-(-t/2)^2} = \mathrm{e}^{-t^2/4}$.

b) Ainsi la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, clairement impaire et de limite en $+\infty$ valant $2\sqrt{\pi}$. Le tracé s'en déduit sans peine.

3. Le carré en question est vu comme un losange et est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient $|x| + |y| \leqslant 1$, ce qui correspond donc à l'événement $Z \leqslant 1$.

$$P(Z \leqslant 1) = \int_0^1 h(t)\, dt = \int_0^1 \Big(\frac{2}{\pi} \mathrm{e}^{-t^2/4} \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{e}^{-v^2} dv \Big) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 2\varphi'(t)\varphi(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \big[\varphi^2(t)\big]_0^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-v^2} dv$$

Enfin, le changement de variable $v = \dfrac{w}{\sqrt{2}}$ donne :

$$P(Z \leqslant 1) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-w^2/2} dw = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\big(2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 1\big)$$

Exercice 3.25.

Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une densité de X. On note Y la variable aléatoire égale à la partie entière de X.

1. a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, expliciter $P(Y = k)$ au moyen d'une intégrale.

b) On suppose que f est nulle sur $\mathbb{R}^-$. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si X en admet une et que, dans ce cas :

$$E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y) + 1$$

c) Expliciter la loi de Y et son espérance dans le cas où X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Dans cette question X suit la loi normale centrée réduite.

a) Expliciter la loi de Y à l'aide de la fonction de répartition Φ de X.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparer $P(Y = -k)$ et $P(Y = k - 1)$.

c) Montrer que Y admet une espérance et calculer celle-ci.

Solution :

1. a) On a $(Y = k) = (k \leqslant X < k + 1)$ et comme une variable aléatoire à densité ne charge pas les points :

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} f(t)dt$$

b) Si f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$\to$ $kP(Y = k) = k\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,dt$

donc l'existence de $E(X)$, *i.e.* de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$, prouve la convergence de la série de terme général $kP(Y = k)$, donc de l'espérance de Y et, par prolongement des inégalités à la limite :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k) \leqslant \int_0^{+\infty} tf()\,dt = E(X)$$

$\to$ De même $(k+1)P(Y = k) = (k+1)\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \geqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,dt.$

Si $E(Y)$ existe, alors $E(Y+1)$ aussi et la suite $n \mapsto \displaystyle\int_0^{n+1} tf(t)\,dt$, qui est croissante, est majorée, donc a une limite ℓ lorsque n tend vers l'infini.
Ainsi la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$ est une fonction croissante majorée (l'intégrale sur $[0,x]$ est majorée par l'intégrale sur $[0,\lfloor x\rfloor+1]$, elle-même majorée par ℓ), donc a une limite en $+\infty$ et $E(X)$ existe et $E(Y+1) \geqslant E(X)$.

$$E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y)+1$$

c) Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $P(Y=k) = \displaystyle\int_k^{k+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)}$, et :

$$E(Y) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} k(\mathrm{e}^{-\lambda})^k = (1-\mathrm{e}^{-\lambda}) \times \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

2. a) $P(Y=k) = \Phi(k+1) - \Phi(k)$.

b) Pour tout k, on a : $P(Y=-k) = \Phi(-k+1) - \Phi(-k)$. Or $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, donc :
$P(Y=-k) = (1-\Phi(k-1)) - (1-\Phi(k)) = \Phi(k) - \Phi(k-1)$
c'est-à-dire :

$$P(Y=-k) = P(Y=k-1)$$

c) Pour $k>0$, on a $kP(Y=k) = \dfrac{k}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} k.\mathrm{e}^{-k^2/2}$

Donc $k^3 P(Y=k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k)$ converge.
De la même façon (cf. b)), $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} -kP(Y=-k)$ converge et finalement Y admet une espérance.
On peut écrire maintenant, en regroupant :
$E(Y) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(P(Y=k) - P(Y=-k))$
Soit :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [kP(Y=k) - kP(Y=k-1)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(Y=k) - \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)P(Y=k-1) - \sum_{k=1}^{\infty} P(Y=k-1) \\ &= -P(Y \geqslant 0) = -P(X \geqslant 0) \end{aligned}$$

$$E(Y) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3.26.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant comme densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

1. Montrer que la variable aléatoire X_1 définie par :

$$X_1 = \begin{cases} \ln|X| & \text{si } X \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X_1.

2. Prouver que la variable aléatoire $Z = \ln|XY|$ admet comme densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4xe^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que $T = |XY|$ est une variable à densité et donner une densité de T.

4. En déduire la convergence et la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx, \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx$$

Solution :

1. X_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leqslant x) = P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant \mathrm{e}^x) = P(-\mathrm{e}^x \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^x)$$

$$= \int_{-\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \int_0^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{\pi(1+t^2)}\,dt$$

La fonction F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que X_1 est une variable à densité et, par dérivation d'une composée, on peut prendre pour densité la fonction f_{X_1} définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = f_{X_1}(x) = \frac{2}{\pi(1+\mathrm{e}^{2x})}\,\mathrm{e}^x$$

2. On a $Z = \ln|X| + \ln|Y|$ et les variables aléatoires $X_1 = \ln|X|$ et $Y_1 = \ln|Y|$ sont indépendantes et de même loi . Ainsi Z est une variable à densité et une densité g de Z s'obtient par (auto)-convolution :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(x-u)\, du = \frac{4\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+\mathrm{e}^{2u})(1+\mathrm{e}^{2(x-u)})}$$
$$= \frac{4\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2u}du}{(1+\mathrm{e}^{2u})(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2u})}$$

Par le changement de variable légitime $v = \mathrm{e}^{2u}$ il vient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v)(\mathrm{e}^{2x}+v)}$$

Pour $x \neq 0$, la décomposition de la fraction rationnelle donne :

$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)}\int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+v} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+v})dv$$
$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)}\Big[\ln\big(\frac{1+v}{\mathrm{e}^{2x}+v}\big)\Big]_0^{\to+\infty} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)}\ln(\mathrm{e}^{2x})$$

et on peut donner à g n'importe quelle valeur en 0, par exemple $\dfrac{2}{\pi^2}$ (qui rend g continue sur $\mathbb{R}$), soit :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4xe^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. $T = \mathrm{e}^Z$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$, on a :

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = P(Z \leqslant \ln t) = \int_{-\infty}^{\ln t} \frac{4u\mathrm{e}^u}{\pi^2(\mathrm{e}^{2u}-1)}du$$

et le changement de variable autorisé $u = \ln y$ donne le résultat :

$$\forall\, t > 0, F_T(t) = \int_0^t \frac{4\ln y}{\pi^2(y^2-1)}dy$$

(la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 1, il n'y a donc pas de problème)

Par dérivation, une densité φ de T est :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2}\times\dfrac{\ln t}{t^2-1} & \text{si } t > 0 \text{ et } t \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi^2} & \text{si } t = 1 \text{ (pour la continuité } \ldots) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. L'intégrale de φ sur $\mathbb{R}$ valant 1, on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx$ et ainsi :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{8}$$

5

QUESTIONS COURTES

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

2. Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables de Bernoulli de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3. On suppose ces variables définies sur le même espace probabilisé et indépendantes. On suppose que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Déterminer la valeur maximale de la variance de S et préciser quand elle est atteinte.

3. Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$. Montrer que A est diagonalisable.

4. L'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
Donner un exemple non trivial d'une matrice nilpotente telle que l'équation matricielle $X^2 = A$ possède des solutions.

5. On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.

Montrer que $|z| = 1$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

6. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in E^2, f(u+v) - f(u-v) = 4\langle u, v \rangle$$

7. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe des réels $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^{\alpha}$$

A-t-on le même résultat si on suppose $0 < \alpha < 1$?

8. Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.