1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x+1) = xf(x) \text{ et } f''(x) > 0.$$

1. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $f(c) = 0$. Montrer qu'il existe $u \in]c, c+1[$ et $v \in]c+1, c+2[$ tels que $f'(u) = f'(v) = 0$. En déduire une contradiction puis justifier que $f(x)$ est de signe constant sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f' est croissante et ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en un point α appartenant à $]1,2[$. En déduire que f est toujours positive.

3. a) Donner une relation entre $f(n)$ et $f(2)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Donner le tableau des variations de f.

4. On considère dans cette question une fonction f de $D =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant, pour tout $x \in D$: $f(x+1) = xf(x)$, et pour tout $x \in]0,+\infty[, f''(x) > 0$.

Donner le signe de f sur $]-1,0[$ et les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures et lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Solution :

1. Avec $f(c) = 0$, on a $f(c+1) = cf(c) = 0$, puis $f(c+2) = (c+1)f(c+1) = 0$. Le théorème de Rolle nous assure alors de l'existence de u et v convenables.

Toujours par le théorème de Rolle appliqué maintenant à f', il existe $w > 0$ tel que $f''(w) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

On en déduit que f ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires (et la continuité de f), elle est donc de signe constant.

2. Comme $f''(x) > 0$, on en déduit que f' est strictement croissante.
Or $f(2) = 1 \times f(1) = f(1)$, donc il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
On en déduit que f est décroissante sur $]0, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$.
Mais $f(3) = 2f(2)$, donc si $f(2) < 0$, on aurait $f(3) < f(2)$ ce qui est contradictoire. Ainsi $f(2) > 0$. Comme f est de signe constant, f est toujours positive.

3. a) On obtient par récurrence $f(n) = f(2)(n-1)!$.

On en déduit que $f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor) = f(2)\lfloor (x-1) \rfloor !$, (où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction «partie entière») donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

b) La relation $f(x+1) = xf(x)$ donne quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$f(x) \sim \frac{f(1)}{x} \text{ (car } f(1) \neq 0)$$

donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ en lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. On a pour $x \in]-1, 0[$, $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x}$. Or $x < 0$ donc $f(x) < 0$. En faisant tendre x vers 0 par valeurs inférieures, on montre, comme au 3. b), que $f(x) \sim \dfrac{f(1)}{x}$ donc $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend ves 0 par valeurs inférieures, car cette fois-ci, $x < 0$.

Dans la relation $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x}$, on pose $x = -1 + h$; elle devient

$$f(-1+h) = \frac{f(h)}{h-1}.$$

On fait tendre x vers -1 par valeurs supérieures donc h vers 0 et on obtient que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Exercice 1.2.

On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. On suppose dans cette question que f est décroissante, strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

a) Soit r un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\int_{kr}^{(k+1)r} f(t)\,dt \leqslant rf(kr) \leqslant \int_{(k-1)r}^{kr} f(t)\,dt$$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(kr) \leqslant \frac{1}{r}\int_0^{nr} f(t)dt.$$

En déduire que la série $\sum\limits_{k\geq 1} f(kr)$ est convergente. On note $\varphi(r)$ la somme de cette série.

c) Donner un équivalent de $\varphi(r)$ lorsque r tend vers 0 par valeurs supérieures.

2. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

a) Soient (a, b) un couple de réels tels que $0 < a < b$ et x un réel strictement positif. Prouver que l'on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\gamma(t) = \sup\limits_{s\in[0,t]} |f(s) - f(0)|$.

Montrer que la fonction γ est bien définie , croissante, et tend vers 0 lorsque t tend vers 0.
Prouver l'inégalité suivante :

$$\Big|\int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,dt\Big| \leqslant \gamma(bx)\ln\frac{b}{a}.$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt$ est convergente et la calculer.

3. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{\mathrm{e}^{-kr} - \mathrm{e}^{-2kr}}{k}$, où $r > 0$? Que peut-on dire de sa somme lorsque r tend vers 0 ?

Solution :

1. a) Si $r > 0$, comme f est décroissante, on a :

$$\int_{kr}^{(k+1)r} f(t)dt \leqslant \int_{kr}^{(k+1)r} f(kr)dt = rf(kr).$$

On a aussi, pour $k \geqslant 1$: $\displaystyle\int_{(k-1)r}^{kr} f(t)dt \geqslant \int_{(k-1)r}^{kr} f(kr)dt = rf(kr)$.

b) En utilisant la question précédente, on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} rf(kr) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)r}^{kr} f(t)dt = \int_0^{nr} f(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Comme la série considérée est à termes positifs, on en déduit qu'elle est convergente.

c) En utilisant à nouveau la question a), on voit que

$$\int_r^{(n+1)r} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{kr}^{(k+1)r} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} r f(kr)$$

Finalement, on obtient : $\displaystyle\int_r^{+\infty} f(t)dt \leqslant r\,\varphi(r) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

Comme l'intégrale de f est convergente et de valeur non nulle, on en déduit que :

$$\varphi(r) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

2. a) Soient (a,b) un couple de réels tels que $0<a<b$ et x un réel strictement positif. Compte tenu de l'hypothèse, il n'y a pas vraiment de problème de convergence en $+\infty$ et on a avec des changements de variables évidents :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,dt\\ &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du\end{aligned}$$

b) Comme la fonction $s \mapsto |f(s)-f(0)|$ est continue sur le segment $[0,t]$, elle y est bornée et par conséquent la borne supérieure $\gamma(t)$ est bien définie. La croissance de γ est évidente puisque $[0,t_1] \subseteq [0,t_2]$ si $t_1 \leqslant t_2$. Le fait que γ converge vers 0 en 0^+ provient directement du fait que f est continue en 0^+.

Par ailleurs, on obtient :

$$\Big|\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt\Big| \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\gamma(bx)}{t}dt = \gamma(bx)\ln\frac{b}{a}.$$

c) On observe que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt - f(0)\ln\frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt.$

Or l'intégrale du membre de droite tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$. On en déduit à la fois la convergence et la valeur $f(0)\ln(b/a)$ de l'intégrale considérée.

3. On introduit la fonction $h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$, strictement positive et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t>0$, on a :

$$h'(t) = \frac{-(1+t)e^{-t}+(1+2t)e^{-2t}}{t^2} = \frac{e^{-2t}}{t^2}\left[1+2t-(1+t)e^{t}\right]$$

Une étude rapide la fonction $\psi(t) = 1+2t-(1+t)e^t$ donne $\psi'(t) = 2-(2+t)e^t < 0$ et comme $\psi(0)=0$, la fonction ψ est négative et h décroît. On peut donc utiliser les résultats précédents et on obtient la convergence de la série et le fait que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kr}-\mathrm{e}^{-2kr}}{k} \underset{(0^+)}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t} dt = \ln 2$$

et par conséquent la somme converge vers $\ln 2$ lorsque r tend vers 0.

Exercice 1.3.

Soit F la fonction de la variable réelle définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1)$. En déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$, puis calculer $F(2)$.

c) Plus généralement, établir une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Exprimer, sous forme de somme, $F(-n)$ pour n entier naturel non nul. Donner les valeurs de $F(-1)$ et $F(-2)$ sous forme de fractions.

3. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour $x < 0$, étudier les variations de $\varphi_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$ sur $[0,1]$, et calculer $\varphi_x\big(\frac{1}{2}\big)$.

En déduire la limite de F en $-\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

5. Montrer que pour $u \in [0,1], \ln(1+u) \geqslant u \ln 2$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Solution :

1. Pour tout réel x, l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur le segment d'intégration).

2. a) $F(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}$.

b) On réalise une intégration par parties :

$$u'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \Longleftarrow u(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)} \ ; \ v(t) = t \implies v'(t) = 1$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la manoeuvre est légitime et donne :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \Big[-\frac{t}{2(1+t^2)}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1)$$

Or :

$F(2)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2ln(1+t^2)}dt=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt=\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$
ce qui donne :

$$F(2)=F(1)-\big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}F(1)\big)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

c) Procédons de façon analogue :

$$\begin{aligned}F(n+1)&=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt=\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt\\&=F(n)-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt\end{aligned}$$

Notons $J_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$ et intégrons par parties :

$$u'(t)=\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \Longleftarrow u(t)=-\frac{1}{2n(1+t^2)^n}\ ;\ v(t)=t \implies v'(t)=1$$

Les fonctions utilisées sont de classe C^1 et :

$$J_{n+1}=\Big[-\frac{t}{2n(1+t^2)^n}\Big]_0^1+\frac{1}{2n}F(n)$$

Ainsi : $J_{n+1}=-\dfrac{1}{n2^{n+1}}+\dfrac{1}{2n}F(n)$. En reportant, on obtient la relation cherchée :

$$F(n+1)=\big(1-\frac{1}{2n}\big)F(n)+\frac{1}{n2^{n+1}}$$

d) Pour $n\in\mathbb{N}$:

$$F(-n)=\int_0^1 (1+t^2)^n dt=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}.$$

En particulier : $F(-1)=\dfrac{4}{3}$ et $F(-2)=\dfrac{28}{15}$.

3. F est décroissante sur $\mathbb{R}$, car si x et x' sont deux réels tels que $x\leqslant x'$, $\ln(1+t^2)$ étant positif pour tout réel t, on a : $\mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}\geqslant \mathrm{e}^{-x'\ln(1+t^2)}$, puis en intégrant $F(x)\geqslant F(x')$

4. Pour $x<0$, $\varphi_x : t\mapsto \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$ est croissante sur $[0,1]$, et $\varphi_x(\frac{1}{2})=\big(\frac{5}{4}\big)^{-x}$.
Alors : $F(x)\geqslant \displaystyle\int_{1/2}^1 \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}\,dt\geqslant \frac{1}{2}\big(\frac{5}{4}\big)^{-x}$.

On en déduit (limites classiques) que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{-x}=+\infty$.

5. Par convexité $u\in[0,1]\implies \ln(1+u)\geqslant u\ln 2$ (on tient la corde) et donc pour $x>0$:

$$F(x)\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x\ln 2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{x\ln 2}}\int_0^{\sqrt{x\ln 2}}\mathrm{e}^{-u^2}\,du\leqslant \frac{1}{\sqrt{x\ln 2}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,du$$

Ainsi, F étant à valeurs positives : $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.

Exercice 1.4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour $k \in [\![0,2]\!]$, déterminer un polynôme P_k de degré au plus k tel que :

$$I_n = P_k\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^k}\big) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

5. a) Pour tout polynôme Q de degré au plus q, montrer l'existence d'un polynôme R de degré au plus q tel que :

$$Q\big(\frac{1}{n+1}\big) = R\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^q}\big) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré au plus k tel que :

$$I_n = P_k\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^k}\big) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

Solution :

1. Un calcul immédiat donne : $I_0 = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}$

$$I_1 = \left[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I_0 = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$, donc la suite (I_n) décroît.

2. La suite est décroissante et positive donc elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$, donc en intégrant : $\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Donc (la majoration suffisait) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = \frac{1-(n+1)I_n}{2}$$

Ainsi $I_n = \dfrac{1-2I_{n+1}}{n+1} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = 1$$

4. On a : $I_n = 0 + o(1)$, donc $P_0 = 0$, on vient de voir que $nI_n = 1 + o(1)$, donc $I_n = \dfrac{1}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$ et $P_1 = X$.
Comme $nI_n = (1-2I_{n+1})\dfrac{n}{n+1}$, on a :

$$n(nI_n - 1) = n\Big(\big(\frac{n}{n+1} - 1\big) - 2I_{n+1}\frac{n}{n+1}\Big) = -\frac{n}{n+1} - 2(n+1)I_{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 - 2 = -3$$

Donc
$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) \text{ et } P_2 = X - 3X^2$$

5. a) Soit le polynôme $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_qX^q$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ donc elle admet un développement limité à l'ordre q. Alors, classe oblige, $Q\big(\dfrac{x}{1+x}\big)$ admet un développement limité d'ordre q en 0 ; notons $R(x)$ sa partie principale (de degré au plus q) ; on a :

$$Q\big(\frac{x}{1+x}\big) = R(x) + o(x^q)$$

Si on prend $x = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1}{n+1}$, donc : $Q\big(\dfrac{1}{n+1}\big) = R\big(\dfrac{1}{n}\big) + o\big(\dfrac{1}{n^q}\big)$.

b) Par récurrence sur k. Si P_k existe, on a :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n+1}(1 - 2I_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\Big(1 - 2P_k\big(\frac{1}{n+1}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^k}\big)\Big)\\
&= \frac{1}{n+1}\Big(1 - 2P_k\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big) = Q\big(\frac{1}{n+1}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{avec } Q = X(1-2P_k)\\
&= P_{k+1}\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^{k+1}}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big), \text{ par 5.a, avec } P_{k+1} = R\\
&= P_{k+1}\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^{k+1}}\big)
\end{aligned}$$

Et alors P_{k+1} est de degré au plus $k+1$ comme Q.

Exercice 1.5.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (u, f) un couple de fonctions continues sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$ à valeurs réelles. On suppose que u est positive et qu'il existe une constante k telle que, pour x de I, on a :

$$f(x) \leqslant k + \int_a^x u(t)f(t)\,dt$$

1. On considère la fonction F définie sur I par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x u(t)f(t)\,dt$..

a) Montrer que F est de classe C^1 sur I.

b) Prouver que pour x de I, on a : $F'(x) \leqslant ku(x) + u(x)F(x)$,où F' est la fonction dérivée de F.

c) Vérifier que la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \big(F'(x) - u(x)F(x)\big)\exp\Big(-\int_a^x u(t)\,dt\Big)$$

est la dérivée d'une fonction que l'on déterminera.

d) En déduire que pour x de I, on a : $F(x) \leqslant -k + k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$

e) Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$.

2. Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui satisfait l'équation suivante :

$$f'(x) + \mathrm{e}^{-x} f(x) = \frac{x \cos x}{(1+x^2)^2}$$

et telle que $f(0) = 0$ (on ne cherchera pas à déterminer cette fonction ni même à montrer son existence).

a) Montrer que pour x réel positif, on a :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} |f(t)|\, dt$$

b) Prouver que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto u(t) f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues, donc F est continue sur I, dérivable sur $]a, +\infty[$ et on a $F'(t) = u(t)f(t)$, donc F' est continue sur $]a, +\infty[$.
Comme $F'(t)$ admet une limite égale à $u(a)f(a)$, la fonction F est de classe C^1 sur I.

b) On sait que $f(x) \leqslant k + \int_a^x u(t)f(t)dt = k + F(x)$. Comme u est une fonction positive, on en déduit que

$$F'(x) = u(x)f(x) \leqslant ku(x) + u(x)F(x)$$

c) La forme de la fonction suggère que c'est la dérivée de la fonction

$$G : x \mapsto F(x) \exp\Big(-\int_a^x u(t)dt\Big)$$

On le justifie en observant que les règles de dérivation d'un produit et d'une fonction composée s'appliquent.

d) Avec la question b), on voit que :

$$G'(x) \leqslant ku(x) \exp\Big(-\int_a^x u(t)dt\Big) = H'(x)$$

où $H(x) = -k \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big)$.

D'où : $G(x) = G(x) - G(a) \leqslant k - k \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big)$

Ce qui entraîne que : $F(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big) - k$.

e) En combinant l'hypothèse et l'inégalité de la question d), on obtient pour $x \in I$:

$$f(x) \leqslant k + F(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$$

2. a) Comme $f(0) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
|f(x)| = \big|\int_0^x f'(t)dt\big| &\leqslant \int_0^x \big|\frac{t\cos t}{(1+t^2)^2} - \mathrm{e}^{-t} f(t)\big|dt \\
&\leqslant \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt \\
&\leqslant \Big[\frac{-1}{2(1+t^2)}\Big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt = \frac{-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt
\end{aligned}$$

b) Les hypothèses de la question 1 sont satisfaites, on a donc d'après 1. e) et pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\exp\big(\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt\big) = \frac{1}{2}\exp\big[1 - \mathrm{e}^{-x}\big] \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}$$

Exercice 1.6.

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Écrire la définition mathématique de la convergence de la suite (a_n) vers ℓ.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}$$

c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et pour } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\big)$ existe et est un réel non nul.

c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Solution :

1. a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n_0, |a_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$

b) n_0 ayant le sens précédent, pour $n \geqslant n_0$, on peut « casser » la sommation :

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - \ell)\Big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_k - \ell)\Big|$$
$$\leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|a_k - \ell| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Et : $\exists n_1, \forall n \geqslant n_1, \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n \geqslant N = \max(n_0, n_1)$ on a : $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers ℓ.

2. a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \,]0, \pi/2[$, ce qui montre que $u_n > 0$. La suite (u_n) est décroissante puisque, pour tout réel $x > 0$, on a $\sin x < x$ (inégalité standard). Ainsi, la suite (u_n) est convergente. En notant ℓ sa limite, on a $\ell = \sin \ell$, ce qui donne $\ell = 0$.

b) Grâce au développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0, à l'ordre 3, il vient :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

Donc

$$u_{n+1}^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}(1 + \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2))$$

et

$$\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{\alpha}{6} u_n^{2-\alpha}$$

Ceci est de limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = 2$, la limite valant alors $\frac{1}{3}$.

3. On utilise le résultat de la question 1. : la suite v définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}\Big(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\Big) = \frac{1}{3}$$

Ainsi $n u_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, soit $u_n^2 \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{3}{n}$ et par positivité, $u_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 1.7.

Dans cet exercice, n et p sont deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$. Soit (E) l'équation d'inconnue t appartenant à $\mathbb{R}^+$ et de paramètre réel x :

$$t^n + xt^p - 1 = 0.$$

1. Montrer que pour tout x réel, (E) admet une unique solution strictement positive y. On pose $y = f(x)$.

2. a) Montrer que la fonction f ainsi définie est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) On admet que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa dérivée f' à l'aide de f.

3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5. Soit α et β deux réels. Déterminer en fonction de α et β la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^\alpha x^\beta dx$.

Solution :

1. Soit x réel fixé. Posons $\varphi_x : t \to t^n + xt^p - 1$. La fonction φ_x est polynomiale donc dérivable et :

$$\varphi'_x(y) = ny^{p-1}\big(y^{n-p} + \frac{xp}{n}\big).$$

$\star$ Si $x \geqslant 0$, φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $\varphi_x(0) = -1 < 0$ et $\varphi_x(1) = x \geqslant 0$ ou $\lim\limits_{+\infty} \varphi_x = +\infty$, on conclut à l'existence et l'unicité de la solution de (E).

$\star$ Si $x < 0$, φ'_x s'annule en $t_0 = \big(-\dfrac{xp}{n}\big)^{\frac{1}{n-p}} > 0$ et la fonction φ_x décroît strictement sur $[0, t_0]$, croît strictement sur $[t, +\infty[$. On conclut par le même argument.

2. a) Soit $x_1 < x_2$.
Posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Pour tout $y \geqslant 0$: $y^n + x_1y^p - 1 \leqslant y^n + x_2y^p - 1$ et :

$$0 = y_1^n + x_1y_1^p - 1 \leqslant y_1^n + x_2y_1^p - 1$$

ce qui montre que $\varphi_{x_2}(y_1) \geqslant 0$. Comme φ_{x_2} n'est positive que sur $[y_2, +\infty[$, on conclut : $y_1 \geqslant y_2$.

Ainsi la fonction f est décroissante (même en fait strictement).

b) On sait que, pour tout x réel, $[f(x)]^n + x[f(x)]^p - 1 = 0$. Comme f est supposée dérivable, il vient : $nf'(x)[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^p + xpf'(x)[f(x)]^{p-1} = 0$, soit (toujours parceque la dérivabilité a été admise) :

$$f'(x) = -\frac{[f(x)]^p}{n[f(x)]^{n-1} + xp[f(x)]^{p-1}}$$

Comme $f(0) = 1$, il vient $f'(0) = -\dfrac{1}{n}$.

3. On a supposé que f est de classe C^∞. Ainsi un développement limité en 0 à l'ordre 2 est donné par :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2).$$

En redérivant :

$$nf''(x)[f(x)]^{n-1} + n(n-1)[f'(x)]^2[f(x)]^{n-2} + pf'(x)[f(x)]^{p-1} + pf'(x)[f(x)]^{p-1} + xpf''(x)[f(x)]^{p-1} + xp(p-1)[f'(x)]^2[f(x)]^{p-2} = 0$$

Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{n}$, il vient $f''(0) = \dfrac{2p+1-n}{n^2}$

et

$$f(x) = 1 - \frac{x}{n} + \frac{(2p+1-n)x^2}{2n^2} + o(x^2)$$

4. a) $\star$ La fonction f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc admet une limite λ en $+\infty$.

Supposons $\lambda > 0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x) = \lambda^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^p(x) = \lambda^p$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x) + xf^p(x) - 1 = \infty$, en contradiction avec $f^n(x) + xf^p(x) - 1 = 0$. Donc $\lambda = 0$.

$\star$ On a : $[f(x)]^p(x + [f(x)]^{n-p}) = 1$, donc par le résultat précédent

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^p x = 1 \text{ et } f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x^{-1/p}.$$

b) Si l'on suppose que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f^n(x) = \mu^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f^p(x) = \mu^p$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x) + xf^p(x) - 1 = \infty$ en contradiction avec $f^n(x) + xf^p(x) - 1 = 0$.

Ainsi μ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, par décroissance de f sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction $h : x \mapsto x^\beta [f(x)]^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- au voisinage de 0, $h(x) \sim x^\beta$ et $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ converge si et seulement si $\beta > -1$.
- au voisinage de $+\infty$, $h(x) \sim x^{\beta-\alpha/p}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge si et seulement si $\dfrac{\alpha}{p} - \beta > 1$.

Bref, l'intégrale existe si et seulement si $\beta > -1$ et $\alpha > p(1+\beta)$.

Exercice 1.8.

Soit $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et f définie sur A par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \text{ et } f(0,0) = 0$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}, 0 \leqslant f(x,y) \leqslant \|(x,y)\|$
En déduire que f est continue sur A.
2. Déterminer le minimum de f sur A.
3. Montrer que si $x > 10$ ou $y > 10$, alors $f(x,y) \leqslant \dfrac{1}{10}$.
Justifier que f est bornée sur A et atteint ses bornes.
4. Déterminer le maximum de f sur A.
5. Montrer que pour $(x,y) \in A$, de norme assez grande, $f(x,y)$ est aussi petit que l'on veut.

Solution :

1. On a pour $(x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ (tout est positif) :
$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{x}{x+y} \times y \leqslant y \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$
Ceci entraîne que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ et f est continue en $(0,0)$.

2. Comme $f(1,0) = 0$ et f est positive sur A, il vient $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y) = 0$.

3. On a, pour $x > 10, y > 10$:
$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{x}{1+x} \times \frac{y}{1+y} \times \frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{10}$$
Soit $K = [0,10]^2$. L'ensemble K est fermé borné, donc $\sup\limits_K f$ existe et est atteint. Comme $\sup\limits_{A\setminus K} f \leqslant \dfrac{1}{10}$, la fonction f est bornée sur A. de plus $f(1,1) = \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{10}$; donc $\sup\limits_A f = \sup\limits_K f$.

4. Le maximum de f n'est pas atteint en un point du bord de K, et comme f est de classe C^1 sur l'intérieur de K, il est atteint en un point critique. Or
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+y)^2(1+x)(y+x)^2}$$
Les points critiques vérifient $y = x^2$ et $x = y^2$, et comme x, y sont non nuls, ceci est équivalent à $x = y = 1$. C'est le point où le maximum est atteint.

5. Pour x, y positifs, on a $x + y \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$, d'où $0 \leqslant f(x,y) \leqslant \dfrac{1}{x+y}$, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.9.

1. Montrer que, pour tout réel y, les intégrales
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)\,dx,\ \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)\,dx \text{ et } \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)\,dx$$

sont convergentes.

On définit ainsi une fonction F qui à tout réel y, associe le nombre :

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)dx$$

2. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall\, p, q \in \mathbb{R}, \cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

3. a) Établir, pour tout réel x, l'inégalité : $|\sin x| \leqslant |x|$.

b) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

4. a) Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, |\cos(a+b) - \cos a + b \sin a| \leqslant \dfrac{b^2}{2}$.

b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel y, la dérivée F' de F est donnée par :

$$F'(y) = -2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)dx$$

c) En déduire que pour tout réel y, $F'(y) = -2yF(y)$.

d) Montrer que pour tout réel y : $F(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-y^2}$.

Solution :

1. Pour tout réel y, $|\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On conclut par le théorème de majoration. De même $|x\mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)| \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $|x^2\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)| \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ et les fonctions majorantes sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

2. L'inégalité ci-dessus montre que pour tout y réel : $|F(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. a) C'est l'inégalité des accroissement finis pour la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$.

b) Soit y réel fixé. Grâce à la formule rappelée :

$$\begin{aligned} |F(y+h) - F(y)| &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} |\cos(2x(y+h)) - \cos(2xy)| dx \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} |\sin(2xy+xh)| \cdot |\sin(xh)| dx \\ &\leqslant 2|h| \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Il reste à faire tendre h vers 0 pour montrer la continuité de F en y, donc sur $\mathbb{R}$.

4. a) Soit $\varphi : x \mapsto \cos x$. On a $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \dfrac{b^2}{2} \sup\limits_{[a,a+b]} |\varphi''| \leqslant \dfrac{b^2}{2}$

Ce qui est exactement le résultat demandé.

b) Pour y réel et h non nul, on écrit alors :

$$\Delta = \Big|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,dx\Big|$$
$$= \Big|\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}(\cos(2xy+2xh) - \cos(2xy) + 2xh\sin(2xy))\,dx\Big|$$
$$\Delta \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}|\cos(2xy+2xh) - \cos(2xy) + 2xh\sin(2xy)|\,dx$$
$$\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} 2x^2h^2\,dx \leqslant 2|h|\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Le majorant est de limite nulle quand h tend vers 0, donc F est dérivable en y et

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} -2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,dx$$

c) Effectuons une intégration par parties sur $[0, A]$. Toutes les fonctions en jeu sont de classe C^1.

$$\int_0^A (-2x\mathrm{e}^{-x^2})\sin(2xy)dx = \big[\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\big]_0^A - 2y\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)dx$$

On fait tendre A vers $+\infty$. Il vient : $F'(y) = -2yF(y)$

d)) Cette équation différentielle linéaire s'intègre en $F(y) = K\mathrm{e}^{-y^2}$. La constante K est déterminée par $K = F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 1.10.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$, et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{2\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in\,]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $C^1([0, \pi])$.

2. Déterminer une constante C telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, pour tout réel t de $]0, \pi]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}} + C$$

3. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1([0,\pi])$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\,dt = 0$$

Soit la fonction ζ définie par : $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^x}$.

4. Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ.

5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt$.

6.Déduire des questions précédentes que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Solution :

1. Sur $]0,\pi]$ les théorèmes généraux permettent de conclure, g est même de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec pour $t > 0$:

$$g'(t) = \frac{(\frac{t}{\pi}-1)2\sin\frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi}-t)\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{(\frac{t}{\pi}-1)t - (\frac{t^2}{2\pi}-t) + o(t^2)}{t^2} \sim \frac{1}{2\pi}$$

Comme $h(t) \underset{(0)}{\sim} -t$ et $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$, on a $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = -1 = g(0)$ et g est continue en 0.

Le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ s'applique et g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \dfrac{1}{2\pi}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$.

2. Comme $t \in]0,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et par un calcul classique :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}t} \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos(\frac{n}{2}t).\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

La forme demandée exige de transformer le produit du numérateur en somme :

$$\begin{aligned}\cos(\frac{n}{2}t).\sin(\frac{n+1}{2}t) &= \frac{1}{2}[\sin(\frac{n+1}{2}t - \frac{nt}{2}) + \sin(\frac{n+1}{2}t + \frac{nt}{2})]\\ &= \frac{1}{2}[\sin(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{2n+1}{2}t)]\end{aligned}$$

On obtient la formule voulue, avec $C = \dfrac{1}{2}$.

3. En intégrant par parties :

$$I_n = \int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)tdt = \Big[f(t)\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{-(n+\frac{1}{2})}\Big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t)\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}dt$$

Soit :

$$I_n = -\frac{2f(0)}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos((n+\frac{1}{2})t)dt$$

Or : $\left|\int_0^\pi f'(t).\cos((n+\frac{1}{2})t)dt\right| \leqslant \int_0^\pi |f'(t)|dt$, donc :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)t\,dt = 0$$

4. Ce sont des séries de Riemann, la fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, On fait deux intégrations par parties (en dérivant la partie polynomiale) :

$$I_k = \int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt = -\frac{1}{k}\int_0^\pi h'(t)\sin(kt)\,dt = \cdots = \frac{1}{k^2}$$

On déduit de (2) : $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(kt) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2}$, puis, en reportant :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt = \int_0^\pi h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt\\ &= \int_0^\pi g(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)tdt - \int_0^\pi \frac{h(t)}{2}dt.\end{aligned}$$

On fait tendre n vers l'infini, on applique le résultat de 3. à la fonction g de la question 1. et comme on a : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{h(t)}{2}dt = -\frac{\pi^2}{6}$, il reste :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 1.11.

Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. On note S le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. On confond fonction polynomiale et polynôme associé.

1. Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.
Étudier les variations de f et justifier que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note λ.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant sous la forme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k X^k$.

a) On pose $Q(X) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\big(\sum\limits_{i=0}^{k-1}a^{k-i-1}X^i\big)$.

Établir que $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$. En déduire que $(X-a)^2$ divise $(P(X)-P(a))$ si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n}k\alpha_k a^{k-1} = 0$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine au moins double de P.

b) Montrer que le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ admet $(2p+1)$ racines simples dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles. On les notera $z_1, z_2, \cdots, z_{2p+1}$ avec $z_{2p+1} = \lambda$.
Montrer que pour tout k de $[\![1, 2p+1]\!]$, $|z_k| \geqslant \lambda$. (On pourra considérer $f(|z_k|)$). Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $k = 2p+1$.

3. **Exemple.** Soit $P(X) = X^3 + X^2 - 2$.

a) Montrer que P admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées dont on déterminera le module et un argument.

b) Soit $E = \{(u_n)_{n\geq 0} \;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 2u_n\}$. Montrer que E est un sous-espace-vectoriel de S.

c) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 2^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{4}}, w_n = 2^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-i\frac{3n\pi}{4}}, x_n = 1$.
Montrer que la famille $((v_n)_n, (w_n)_n, (x_n)_n)$ est une base de E.

Solution :

1. On a $f'(x) = x^{2p-1}((2p+1)x + 2p)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Avec $\alpha = -\dfrac{2p}{2p+1}$ et $f(\alpha) = \left(\dfrac{2p}{2p+1}\right)^{2p}\left(1 - \dfrac{2p}{2p+1}\right) - 2p < 0$, car le premier terme de cette expression vaut moins que 1. Ceci prouve que f s'annule sur $\mathbb{R}$ en un unique point λ, avec $\lambda > 0$.

2. a) $\star$ $P(X) - P(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k X^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k (X^k - a^k)$
et comme $X^k - a^k = (X-a)(X^{k-1} + aX^{k-2} + \cdots + a^{k-1})$, on a bien :
$$P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$$
$\star$ Ainsi $(X-a)^2 | P(X) - P(a) \iff X - a | Q(X) \iff Q(a) = 0$
$$\iff \sum_k k\alpha_k a^{k-1} = 0$$
Ainsi a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$ (ce que l'on sait pour le cas réel, mais n'est pas au programme pour les polynômes complexes).

b) $\star$ a est racine multiple de $P = X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$ si et seulememnt si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$. La deuxième condition s'écrit $(2p+1)a^{2p} + 2pa^{2p-1} = 0$, soit $a = 0$ ou $a = -\dfrac{2p}{2p+1}$ et on sait depuis la question 1. que ces nombres ne sont pas racines de P.
Ainsi P admet $2p+1$ racines dans $\mathbb{C}$ et elles sont toutes simples.
$\star$ $f(|z_k|) = |z_k|^{2p}(|z_k|+1) - 2p \geqslant |z_k|^{2p}(|z_k+1|) - 2p = |z_k^{2p+1} + z_k^{2p}| - 2p = 0$

Donc, de par l'étude des variations de f : $|z_k| \geqslant \lambda$ et il ne peut y avoir égalité que si $|z_k| + 1 = |z_k + 1|$, ce qui impose que z_k soit un réel positif (revenir aux parties réelles et imaginaires ...), donc que $z_k = \lambda$, *i.e.* $k = 2p + 1$.

3. a) $X^3 + X^2 - 2 = (X - 1)(X^2 + 2X + 2) = (X - 1)((X + 1)^2 + 1)$, donc les racines de P sont :

$$1, -1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}, -1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

b) E contient la suite nulle, est clairement stable par combinaison linéaire et l'application de E dans $\mathbb{C}^3$ qui à u associe le triplet (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme, (la linéarité est banale et la bijectivité est justement le fait de la relation de récurrence).

c) $\star$ La suite $(r^n)_n$ est élément de E si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, r^{n+3} + r^{n+2} - 2r^n = 0$$

et ceci a lieu pour tout n si et seulement si ceci a lieu pour $n = 0$.
Bref les suites géométriques (v_n), (w_n) et (x_n) appartiennent à E.

Enfin, soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \alpha u_n + \beta v_n + \gamma x_n = 0$.

La suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est donc convergente (de limite $-\gamma$), et ceci n'a lieu que pour $\alpha = \beta = 0$, et il reste alors $\gamma = 0$. Donc la famille considérée est libre de cardinal *ad hoc* et est une base de E.

Exercice 1.12.

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$: $u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$.

1. Montrer que la série de terme général u_p converge. Soit γ sa somme. Montrer que $\gamma \in [0, 1]$.

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\big(\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n\big)dt$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $t \in [0, n]$, on a :

$$\big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

c) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\big(1 - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n\big)dt$.

a) Justifier l'existence de J_n.

b) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1 - \frac{t}{n}\big)^k dt = n\big(\ln(n + 1) + \sum_{p=1}^{n} u_p\big)$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $J_n = \ln(n + 1) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p$.

4. On pose : $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$ et $V = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$.

a) Justifier l'existence de U et de V.

b) Démontrer que $U - V = \gamma$.

Solution :

1. La méthode de comparaison série-intégrale pour la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ montre que $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$. Ceci montre que la série de terme général u_p converge puisque les sommes partielles vérifient

$$0 \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

La suite des sommes partielles est donc croissante majorée par 1 : elle admet une limite $\gamma \in [0,1]$.

2. a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\big(\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n\big)$ est continue sur $]0,n]$. Au voisinage de $t = 0$, il vient :

$$f(t) = \frac{1}{t}\big(1 - t + o(t) - (1 - t + o(t))\big) = o(1)$$

Ainsi la fonction f admet un prolongement par continuité en $t = 0$, avec $f(0) = 0$. L'intégrale est « faussement » impropre.

b) Par convexité de la fonction exponentielle, pour tout x réel : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. Ainsi

$$1 - \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-t/n} \text{ et } 1 + \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{t/n}$$

donc

$$\big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} \text{ et } \big(1 + \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{t}$$

Il reste à multiplier la dernière inégalité par le réel positif $\big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n \mathrm{e}^{-t}$ pour obtenir l'inégalité de gauche.

c) Les deux inégalités ci-dessus montrent que

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\big(1 - \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n\big)$$

La fonction $x \mapsto (1-x)^n$ est convexe sur $[0,1]$;
donc pour $x \in [0,1], (1-x)^n \geqslant 1 - nx$. Ceci entraîne que :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}\big(1 + \frac{nt^2}{n^2} - 1\big) = \mathrm{e}^{-t} \times \frac{t^2}{n}$$

Ainsi $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n t\mathrm{e}^{-t}dt \leqslant \dfrac{\Gamma(2)}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}\big(1 - \big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n\big)$ est continue sur $[0,n]$. Au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre 1 montre que $g(t) \sim \dfrac{1}{t} \times t = 1$. Ainsi J_n est-elle faussement impropre.

b) Comme $u_p = \dfrac{1}{p} - \ln(p+1) + \ln(p)$, il vient $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} - \ln(n+1)$.

Or, le changement de variable affine $u = 1 - \dfrac{t}{n}$ (ou l'intégration directe) donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1-\tfrac{t}{n}\big)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 n u^k du = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = n(\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n} u_p)$$

Donc :

$$\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1-\tfrac{t}{n}\big)^k dt = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{1-(1-t/n)^n}{1-(1-t/n)} dt$$
$$= \int_0^n \frac{1}{t}\Big(1 - \big(1-\tfrac{t}{n}\big)^n\Big) dt = J_n$$

4. a) L'intégrale U est faussement impropre, puisque la fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par 1.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, positive et majorée par $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, ce qui montre que V est bien définie.

b) Par la question 3. b, $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p = J_n - \ln(n+1)$, et $J_n - I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} dt$.

Donc :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = I_n + \int_0^n \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} dt - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt$$
$$= I_n + \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{t} dt - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$$
$$= I_n + U - \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\gamma = U - V$.

Exercice 1.13.

1. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des réels strictement positifs.

En appliquant l'inégalité précédente à chacun des nombres $a_i = \dfrac{x_i}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$,

montrer que : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant \ln\big(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big)$

Connaissez-vous une autre faon de démontrer ce résultat ?

2. a) Soit g la fonction définie pour tout x strictement positif par :

$$g(x) = \ln\big(1+\frac{1}{x}\big) - \frac{1}{1+x}.$$

Étudier les variations de g et préciser les limites de g aux bornes de l'intervalle d'étude.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f définie pour tout x strictement positif par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

3. a) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.

c) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant \int_0^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

d) En utilisant les résultats de la question 1, montrer que

$$\frac{1}{n} \int_0^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \leqslant \ln(v_n) \leqslant 1$$

e) En déduire que la suite $(v_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Solution :

1. a) Inégalité classique qui se démontre par concavité de la fonction ln et position de la courbe par rapport à sa tangente en $(1, 0)$ ou par étude simple de la fonction associée.

b) On pose $a_i = \dfrac{x_i}{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$, élément de $\mathbb{R}_+^*$ puisque les x_i le sont.

On peut donc leur appliquer l'inégalité de la première question, puis ajouter ces n inégalités. On obtient : $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(a_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - 1)$ ou encore :

$$\ln\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^n}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n$. On a donc bien prouvé que $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n \ln\left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant 0$, ou encore :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Inégalité qui peut aussi se démontrer par récurrence et par l'inégalité de définition de la concavité.

2. a) g est dérivable et $g'(x) = -\dfrac{1}{x(1+x)^2}$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Clairement : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=0$, et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x)=+\infty$.

b) f a même sens de variation que $h=\ln\circ f$.
$h(x)=x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big) \implies h'(x)=\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)+x\big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\big)=g(x)$
Donc h et f sont strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} h(x)=0, \text{ donc } \lim_{+\infty} f=\mathrm{e} \text{ et } \lim_{0} f=1$$

3. a) la limite de la suite u est e (revu en 2. b))

b) u est la restriction de f à $\mathbb{N}^*$, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, u est croissante et $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant nu_n$. Par conséquent $v_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\leqslant u_n$.
D'autre part, e est la limite de la suite croissante u. Finalement on a bien

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, v_n\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}.$$

c) On a vu que h est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ prolongeable par continuité en 0, donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $k\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\geqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k} x\ln(1+\frac{1}{x})\,dx$, et par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\geqslant\int_0^n x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)\,dx$$

d) Les réels u_k sont strictement positifs, ils peuvent donc jouer le rôle des x_k de la première question. On obtient alors : $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(u_k)\leqslant\ln(v_n)$.
Or, $\ln(u_k)=k\ln(1+\frac{1}{k})$, et l'on vient de minorer $\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln(1+\frac{1}{k})$ par l'intégrale $\displaystyle\int_0^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx$. On obtient ainsi, en se rappelant que v_n est majorée par e :

$$\frac{1}{n}\int_1^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx\leqslant\ln(v_n)\leqslant 1$$

e) En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx=\Big[\frac{x^2}{2}\ln(\frac{x+1}{x})\Big]_{\to 0}^{n}+\frac{1}{2}\int_0^n\frac{x}{x+1}\,dx\\ &=\frac{n^2}{2}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\ln(n+1)\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}I_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ et donc $\ln v_n\to 1$, *i.e.* $\lim v=\mathrm{e}$.

Exercice 1.14.

Une fonction f définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles est dite *strictement convexe* si pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, avec $x<y$, et pour tout $t\in\,]0,1[$:

$$f(tx+(1-t)y)<tf(x)+(1-t)f(y).$$

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, de classe C^1, strictement convexe telle que $f(1)=1$. On note $f_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et on suppose que la suite $(f_n(0))_{n\geq 1}$ est croissante.

1. a) Montrer que la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite notée q.

b) Montrer que $f(q)=q$.

2. On suppose que $f'(1) \leqslant 1$.
Montrer que pour tout $s \in [0,1[$, on a $f(s) > s$. Quelle est la valeur de q ?

3. On suppose que $f'(1) > 1$.

a) Montrer qu'il existe $s_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $s \in [s_0, 1[$, $f(s) < s$.

b) On suppose qu'il existe deux solutions distinctes q_1, $q_2 \in [0,1[$ à l'équation $f(s)=s$. Montrer qu'il existe deux réels distincts $\xi_1, \xi_2 \in]0,1[$ tels que

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1.$$

c) En déduire que q est l'unique solution dans $[0,1[$ de l'équation $f(s)=s$.

Solution :

1. a) La suite $(f_n(0))_n$ est croissante bornée par 1, donc convergente.

b) On remarque ensuite en utilisant la définition que $f_{n+1}(0) = f \circ f_n(0)$. Ainsi, comme f est continue, on obtient $f(q)=q$.

2. On suppose que $f'(1) \leqslant 1$.
Soit $g : s \mapsto f(s) - s$. On a pour tout $s \in [0,1[$, $g'(s) = f'(s) - 1 < f'(1) - 1$. Donc $g'(s) < 0$ et g est strictement décroissante.
Donc, pour tout $s \in [0,1[$, $f(s) - s > f(1) - 1$, soit $f(s) > s$.

L'équation $f(s)=s$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $[0,1[$, donc $q=1$.

3. On suppose que $f'(1) > 1$. Posons encore $g(s) = f(s) - s$, $s \in [0,1]$.

a) On remarque que $g'(1) > 0$. Ainsi, comme g' est continue, il existe un réel s_0 tel que pour tout $s \in [s_0, 1]$, $g'(s) > 0$. g est strictement croissante sur $[s_0, 1]$ et pour tout $s \in [s_0, 1[$, $g(s) < g(1) = 0$, soit $f(s) < s$.

b) On remarque que que $g(q_1) = g(q_2) = g(1) = 0$.
Comme g est continue sur $[q_1, q_2]$ et dérivable sur $]q_1, q_2[$ et continue sur $[q_2, 1]$ et dérivable sur $]q_2, 1[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\xi_1 \in]q_1, q_2[$ et $\xi_2 \in]q_2, 1[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. On obtient ainsi $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$

c) Comme f est strictement convexe, f' est strictement croissante (si f' est croissante sans être strictement croissante, il existe un intervalle sur lequel f' est constante et sur cet intervalle f est affine, donc n'est pas strictement

convexe). Ainsi, s'il existe deux solutions dans $]0,1[$, d'après la question précédente, on obtient une contradiction.
Enfin, si l'équation $f(s)=s$ n'avait pas de solution dans $[0,1[$, on aurait $q=1$, et il existerait un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(0) \in [s_0,1]$, soit $f_{n+1}(0)=f(f_n(0))<f_n(0)$, ce qui est impossible.

Finalement, $q \in [0,1[$ et est bien l'unique solution de l'équation $f(s)=s$ dans l'intervalle $[0,1[$.

Exercice 1.15.

On considère la suite u définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à valeurs strictement positives.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$$

En déduire la seule limite finie possible pour la suite $(u_n)_n$.

Dans toute la suite, l'entier p est fixé, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{2} - 1$, et on considère la suite $(x_n)_{n \geq p}$ définie par :

$$x_p = |w_p|,\ x_{p+1} = |w_{p+1}|, \text{ et pour tout } n \geqslant p : x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{3}$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq p}$ converge vers 0.

5. Montrer, par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies x_n \geqslant |w_n|$.
En déduire que la suite $(w_n)_n$ est convergente.

6. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Solution :

1. Clair, par récurrence.

2. $\star$ *A priori* la suite u peut diverger vers $+\infty$, et si elle converge (dans $\mathbb{R}^+$), alors sa limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$, dont les solutions sont $\ell = 0$ et $\ell = 4$.
Conclusion : les limites possibles pour u sont : $0, 4, +\infty$.

$\star$ Supposons que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 1$. La suite u serait alors croissante à partir de u_1 car pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_{n-1}} + (\sqrt{u_n} - u_n)$ serait positif ou nul comme somme de deux positifs, puisque dans $[0,1]$, $\sqrt{x} \geqslant x$.

Donc u serait croissante à partir de u_1 et majorée par 1 donc convergente vers ℓ appartenant à $[u_1, 1]$, ce qui n'est pas possible.

On peut donc en conclure que u ne vérifie pas l'hypothèse prise : il y a donc au moins un entier p tel que $u_p > 1$ et la relation de définition montre que pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n > 1$, car :

$\rightarrow$ Si $p \geqslant 1$, $u_{p+1} = \sqrt{u_p} + \sqrt{u_{p-1}} \geqslant \sqrt{u_p} > 1$, et ainsi de suite par une récurrence immédiate.

$\rightarrow$ Si $p = 0$, alors $u_2 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} > 1$ et on peut donc remplacer p par 2 et se ramener au cas précédent.

On a bien prouvé ce qui était demandé : il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$$

Et finalement, la seule limite finie possible pour u est 4.

3. L'équation caractéristique associée à x est $3r^2 - r - 1 = 0$, dont les deux racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$. La suite x est donc de la forme :

$$\forall n \geqslant p, x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où les constantes α et β sont déterminées de façon unique par les conditions : $x_p = |w_p|, x_{p+1} = |w_{p+1}|$

Comme $\sqrt{13} \in [3, 4]$, on a : $0 < r_1 < 1$, $-1 < r_2 < 0$, et la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

4. Pour $n \geqslant p$, soit la propriété $\mathcal{Q}(n)$ suivante :

« du rang p au rang n, on a : $x_k \geqslant |w_k|$ »

$\star$ $\mathcal{Q}(p+1)$ est banalement vraie.

$\star$ Supposons la propriété acquise à un certain rang $n+1$, avec $n \geqslant p$, alors :

$$\begin{aligned} x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{3} &\geqslant \frac{1}{3}(|w_n| + |w_{n+1}|) = \frac{1}{3}\Big(\Big|\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\Big| + \Big|\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 1\Big|\Big), \\ &\geqslant \frac{1}{3}\Big|\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 1\Big| = \frac{1}{3}\Big|\frac{u_{n+2}}{2} - 2\Big| \end{aligned}$$

Ainsi : $x_{n+2} \geqslant \dfrac{1}{6}|u_{n+2} - 4| = \dfrac{1}{6}(\sqrt{u_{n+2}} + 2)|\sqrt{u_{n+2}} - 2| \geqslant \dfrac{1}{2}|\sqrt{u_{n+2}} - 2|$

(car $\sqrt{u_{n+2}} + 2 \geqslant 3$)

Ainsi, on a encore $x_{n+2} \geqslant |w_{n+2}|$ et la propriété est encore vraie au rang $n+2$. On conclut par le principe de récurrence.

On en déduit par le théorème d'encadrement que w converge aussi vers 0.

5. Ainsi w converge vers 0, donc $\Big(\dfrac{\sqrt{u_n}}{2}\Big)$ converge vers 1 et finalement u converge vers 4

Exercice 1.16.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des involutions de $[\![1, n]\!]$.

On rappelle qu'une application $\sigma : [\![1, n]\!] \rightarrow [\![1, n]\!]$ *est une involution si et seulement si* $\sigma \circ \sigma = id$.

1. On pose $d_0 = 1$.

a) Calculer d_1, d_2 et d_3.

b) Montrer que : pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.

c) Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `Function D(n : integer) : integer ;` permettant de calculer d_n.

2. On pose pour tout réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.

a) Prouver l'existence d'un développement limité pour f à tout ordre n au voisinage de 0.
On peut donc définir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_n soit le coefficient de x^n dans le développement limité, à un ordre au moins égal à n, de f. On a ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}, p+2q=n} \frac{1}{p!}\times\frac{1}{2^q q!}$.

c) Montrer que la dérivée f' de f admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de 0 et le déterminer à l'aide des coefficients a_k

d) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = a_n \times n!.$$

Solution :

1. a) $\star$ Pour $n = 1$, il n'y a qu'une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$: l'identité et elle est involutive : $d_1 = 1$.

$\star$ Pour $n = 2$, les deux applications id et la transposition $\tau_{1,2}$ sont involutives : $d_2 = 2$.

$\star$ Pour $n = 3$, id et les trois transpositions sont involutives : $d_3 = 4$.

b) Pour $n \geqslant 2$, les involutions de $[\![1, n]\!]$ sont de deux catégories qui s'excluent :
$\rightarrow$ celles pour lesquelles $f(n) = n$, qui sont obtenues en prolongeant les involutions de $[\![1, n-1]\!]$: il y en a d_{n-1} ;
$\rightarrow$ celles pour lesquelles $f(n) = p \in [\![1, n-1]\!]$, p peut alors se choisir de $n-1$ faons et à chaque fois, on a $f(p) = n$ et f est alors obtenue en prolongeant une involution d'un ensemble de cardinal $n-2$ (rien à faire si $n = 2$, et on ne fait rien d'une seule faon !) : il y en a $(n-1)d_{n-2}$ (le nombre d'involutions d'un ensemble de cardinal c ne dépend que de c).
Bref :

$$d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$$

c) On peut opter pour un traitement récursif :

```
Function D(n : integer) : integer ;
begin
If n=0 ou n=1 then d :=1 else D :=D(n-1)+(n-1)*D(n-2) ; end,
```

2. a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par composition), donc admet un développement limité à tout ordre et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) On a $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}x^k + o(x^n)$, donc :

$$e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k!}x^{2k} + o(x^n)$$

En effectuant le produit de ces développements limités, on a donc :
$f(x) = e^x e^{x^2/2} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, avec : $a_k = \sum\limits_{p+2q=k} \dfrac{1}{p!} \times \dfrac{1}{2^q q!}$

c) La fonction f' est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, avec

$$b_k = \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k+1))}(0)}{k!} = (k+1)a_{k+1}$$
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}x^k + o(x^n)$$

d) On a $f'(x) = (1+x)e^{x+\frac{x^2}{2}} = (1+x)f(x)$. Ainsi

$$f'(x) = (1+x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k-1})x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité à tout ordre de f', il vient donc :

$$a_0 = a_1 \text{ et pour } k \geqslant 1,\ (k+1)a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$$

Posons $c_n = n!{\times}a_n$, on a $c_0 = a_0 = f(0) = 1, c_1 = a_1 = f'(0) = 1$ et comme pour $k \geqslant 1$, $(k+1)!a_{k+1} = k!a_k + k(k-1)!a_{k-1}$, on a : $c_{k+1} = c_k + kc_{k-1}$.

Les suites c et d vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et ont les mêmes deux premiers termes : elles sont égales, ce qui est le résultat attendu.

Exercice 1.17.

On considère une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$ et on note E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x réel : $f''(x)+\varphi(x)f(x) = 0$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On suppose que E contient une fonction u qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$, et on pose :

$$v(x) = u(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2}$$

2. Montrer que $v \in E$, puis que (u, v) est une famille libre de E. En déduire que la dimension de E est supérieure ou égale à 2.
On admettra que E est de dimension 2.

3. Pour f, g éléments de E, pour tout réel x, on pose :

$$\theta_{f,g}(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

a) Montrer que $\theta_{f,g}$ est une fonction constante. On pose alors $W(f, g) = \theta_{f,g}(0)$.

b) Montrer que W est une forme bilinéaire et que $W(u, v)$ n'est pas nul.

c) Montrer que $W(f, g) = 0$ si et seulement si f et g sont liés.

4. a) Montrer qu'un élément de E qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $f(x) = \varepsilon e^{h(x)}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et avec h de classe C^2 qui vérifie :

$$h''(x) + (h'(x))^2 + \varphi(x) = 0, \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

b) Déterminer tous les éléments de E vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)$
(on laissera le résultat sous forme intégrale).

Solution :

Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) = -\lambda\varphi(x)f(x) - \mu\varphi(x)g(x)\\ &= -\varphi(x)(\lambda f + \mu g)(x))\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda f + \mu g \in E$. Comme E contient la fonction nulle, il n'est pas vide et c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On a $v'(x) = u'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + u(x)\frac{1}{(u(x))^2} = u'(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + \frac{1}{u(x)}$, d'où

$$v''(x) = u''(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + u'(x)\frac{1}{(u(x))^2} - \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = u''(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2}.$$

En remplaçant $u''(x)$ par $-\varphi(x)u(x)$, on obtient donc $v''(x) + \varphi(x)v(x) = 0$, ce qui prouve que $v \in E$.

On a $v(0) = 0$ et $u(0) \neq 0$, donc il ne peut exister de scalaire λ tel que $u = \lambda v$. D'autre part la fonction v n'est pas la fonction nulle (par exemple parceque $v'(0) \neq 0$), donc u n'est pas colinéaire à la fonction non nulle v et (u, v) est libre.

On en déduit que la dimension de E est supérieure ou égale à deux.

3. a) Posons $h(x) = \theta_{f,g}(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$. Alors h est dérivable et pour tout x :

$$h'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

En écrivant que $f''(x) = -\varphi(x)f(x)$ et $g''(x) = -\varphi(x)g(x)$, on obtient $h'(x) = 0$. On en déduit que h est constante.

b) Clairement $W(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda W(f_1, g) + \mu W(f_2, g)$;
de plus $W(f, g) = -W(g, f)$ donc on obtient la linéarité par rapport au deuxième argument, ce qui montre le résultat.

On a : $W(u, v) = u(0)v'(0) - u'(0)v(0) = u(0) \times \dfrac{1}{u(0)} = 1 \neq 0$.

c) Si $g = \lambda f$ (ou l'inverse), il est clair que $W(f, g) = 0$.

Si (f, g) est libre, c'est une base de E. On écrit alors u, v en fonction de f et g. Par bilinéarité et antisymétrie :

$$1 = W(u, v) = W(\alpha f + \beta g, \gamma f + \delta g) = (\alpha\delta - \beta\gamma)W(f, g),$$

donc $W(f, g) \neq 0$.

4. a) Une solution f qui ne s'annule pas est de signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. On pose alors $h(x) = \ln(|f(t)|)$ et $\varepsilon = \pm 1$ selon le signe de f. On a bien $f(x) = \varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$.

On dérive deux fois $x \mapsto f(x) = \varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$ et on obtient $f'(x) = \varepsilon h'(x)\mathrm{e}^{h(x)}$ et $f''(x) = \varepsilon(h''(x) + (h'(x))^2)\mathrm{e}^{h(x)} = -\varphi(x)\varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$, d'où l'égalité souhaitée.

b) On pense à chercher h telle que $h''(x) = 1$ et $(h'(x))^2 = x^2$. La fonction $x \mapsto h(x) = x^2/2$ nous tend les bras. On vérifie alors que $u(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$ est solution et on pose $v(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

Alors les solutions sont les combinaisons linéaires de u et v.

Exercice 1.18.

On considère l'espace vectoriel $C(\mathbb{R}^+)$ des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in C(\mathbb{R}^+)$, on définit la fonction $T(f)$ en posant :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$; pour $t \geqslant 0$, on pose $\varphi(t) = \sup\limits_{s \in [0,t]} |f(s) - f(0)|$.

a) Montrer que φ est bien définie et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Justifier le fait que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$.

c) Établir l'inégalité suivante : $\forall\, x \geqslant 0, |T(f)(x) - f(0)| \leqslant \varphi(x)$.

En déduire que la fonction $T(f)$ est continue en 0. Montrer que T est un endomorphisme de $C(\mathbb{R}^+)$.

2. Montrer que T est injectif. Est-il surjectif ? Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.

3. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On pose $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x)|$.

b) On définit ψ sur $\mathbb{R}^+$ en posant $\psi(t) = \sup\limits_{s\in[t,+\infty]} |f(s) - \ell|$. Montrer que ψ est une fonction décroissante telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$.

c) Prouver que pour tout $x > 1$, on a $|T(f)(x) - \ell| \leqslant \dfrac{2M}{\sqrt{x}} + \psi(\sqrt{x})\dfrac{(x-\sqrt{x})}{x}$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = \ell$.

4. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ dont la représentation graphique admet une asymptote d'équation $y = ax + b$. Montrer que la représentation de $T(f)$ admet une asymptote que l'on déterminera.

Solution :

Notons F la primitive de f nulle en 0.

1. a) La fonction $s \mapsto |f(s) - f(0)|$ est continue sur l'intervalle $[0, t]$, elle y est donc bornée et par suite φ est bien définie. La croissance de φ sur $\mathbb{R}^+$ est une conséquence directe des propriétés des bornes supérieures.

b) La définition de la continuité de f au point 0 implique que $\lim\limits_{t\to0^+} \varphi(t) = 0$.

c) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}|T(f)(x) - f(0)| &= \Big|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - f(0)\Big| = \Big|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - f(0))dt\Big|\\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(x)dt = \varphi(x)\end{aligned}$$

Avec b), ceci implique que $\lim\limits_{x\to0^+} |T(f)(x) - f(0)| = 0$ et par conséquent que $T(f)$ est continue en 0. Comme la continuité en un point $x > 0$ provient d'une application directe du cours on a bien $T(f) \in C(\mathbb{R}^+)$.
La linéarité étant évidente, il en résulte que T est un endomorphisme de $C(\mathbb{R}^+)$.

2. $\star$ Soit $f \in \operatorname{Ker} T$, alors pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x}F(x) = 0$ et F est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}^+$, par continuité. T est bien injectif.
$\star$ Il n'est pas surjectif. Pour le voir, il suffit de remarquer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc l'application $t \mapsto |t-1|$, (qui est dans $C(\mathbb{R}^+)$) n'est l'image par T de personne.

$\star$ Si λ est une valeur propre (non nulle puisque T est injectif) de T, il existe une fonction $f \in C(\mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$, telle que $F(x) = \lambda x f(x)$ pour tout $x > 0$. D'où par dérivation $\forall\, x > 0, f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x))$ ou encore $f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$.
Ceci s'intègre en $f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, avec $C \neq 0$.
Mais on doit avoir $f \in C(\mathbb{R}^+)$, ce qui impose $\lambda \in\,]0,1]$ (sinon f a une limite infinie en 0). En résumé :

$$\mathrm{Spec}(T) = \,]0,1]$$

3. a) Il existe un réel $a > 0$ telle que $|f(x) - \ell| \leqslant 1$ dès que $x > a$. Comme f est continue sur l'intervalle $[0, a]$, elle y est bornée et il existe donc un réel strictement positif M_0 telle que $|f(x)| \leqslant M_0$ pour $x \in [0, a]$.
On voit donc que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par la constante $M_1 = |\ell| + 1 + M_0$. La borne supérieure $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x)|$ est donc bien définie.

b) Avec la question précédente, on voit que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. La décroissance de ψ est une conséquence de la définition d'une borne supérieure et la convergence de ψ vers 0 en $+\infty$ résulte directement de la convergence de f vers ℓ en $+\infty$.

c) Soit $x > 1$, comme la majoration demandée fait intervenir $\psi(\sqrt{x})$, il est judicieux et possible de couper les intégrales en $\sqrt{x}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}|T(f)(x) - \ell| = \Big|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - \ell)dt\Big| &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} |f(t) - \ell|dt + \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x |f(t) - \ell|dt \\ &\leqslant \frac{2M\sqrt{x}}{x} + \psi(\sqrt{x})\frac{(x - \sqrt{x})}{x} = \frac{2M}{\sqrt{x}} + \psi(\sqrt{x})\frac{(x - \sqrt{x})}{x}\end{aligned}$$

Une fois cette majoration établie, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(\sqrt{x}) = 0$, on en déduit que $T(f)(x)$ converge aussi vers ℓ lorsque $x \to +\infty$.

4. Si f est une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ qui admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, on peut écrire par définition $f(x) = ax + b + g(x)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Clairement $g \in C(\mathbb{R}^+)$ et par linéarité de T : $T(f)(x) = (a/2)x + b + T(g)(x)$. En appliquant 3. c) à la fonction g, on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(g)(x) = 0$ et par suite la courbe représentative de la fonction $T(f)$ admet la droite d'équation $y = (a/2)x + b$ comme asymptote.

Exercice 1.19.

1. On rappelle les deux formules suivantes : pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big) \\ \sin p - \sin q = 2\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\end{cases}$$

Montrer que $\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$.

2. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ convergent et qu'elles sont égales.

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}dt,\ A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt,\ \text{et}\quad B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t}dt$$

Montrer que $B_n \leqslant I_n \leqslant A_n$.

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ puis $A_n - B_n$.

b) En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.

5. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt$, et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Solution :

1. Les deux premières formules donnent :

$$\begin{aligned}\sin^2 p - \sin^2 q &= (\sin p - \sin q)(\sin p + \sin q)\\ &= 4\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

On conclut alors en appliquant deux fois la formule $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

$$\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$$

2. Les problèmes sont dus uniquement à la borne infinie, car les fonctions à intégrer sont continues sur $]0,+\infty[$ et prolongeables par continuité en 0.

$\star$ On écrit, pour $x \geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Lorque x tend vers l'infini le deuxième terme est de limite nulle et comme $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, la règle de Riemann montre que $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ a une limite lorsque x tend vers l'infini (l'intégrale sur $[1,+\infty[$ est même absolument convergente).

$\star$ Pour la seconde intégrale, la convergence absolue s'obtient directement, et pour $a,b>0$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^2 t\times\frac{1}{t^2}\,dt &= \Big[-\frac{\sin^2 t}{t}\Big]_a^b + \int_a^b 2\sin t\cos t\times\frac{1}{t}\,dt\\ &= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \sin(2t)\times\frac{dt}{t}\\ &= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_{2a}^{2b} \sin(u)\times\frac{du}{u}\end{aligned}$$

Comme $\sin^2 a \underset{(0)}{\sim} a^2$, on peut passer à la limite lorsque a tend vers 0 et b vers l'infini, pour obtenir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$

3. Une étude rapide de fonctions donne à l'économie :

$$\forall\, t \in\,]0, \pi/2[, 0 < \sin t \leqslant t \leqslant \tan t$$

Dans les mêmes conditions : $0 < \dfrac{1}{\tan^2 t} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 t}$, on multiplie alors par $\sin^2(nt) \geqslant 0$ et on intègre cet encadrement (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

$$B_n \leqslant I_n \leqslant A_n$$

4. a) $\star$ En «cassant» $2A_{n+1}$ en deux, on écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}\\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t}(\sin^2(nt) - \sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) - \sin^2((n+1)t))\,dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}(-\sin((2n+1)t) + \sin((2n+3)t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t)\,dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

$\star$ D'autre part, pour $n \geqslant 1$ (on a $A_0 = B_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}
A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\Big(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\Big)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \cos(2nt)\big)dt = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

b) On a $A_n - A_{n+1} = A_{n+1} - A_{n+2}$, donc la suite (A_n) est arihmétique. Avec $A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$A_n = \frac{n\pi}{2} \text{ et pour } n \geqslant 1,\ B_n = \frac{(2n-1)\pi}{4}$$

5. Finalement, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(2n-1)\pi}{4} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2n\pi}{4}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\dfrac{I_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\,dt = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$, par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.20.

Dans cet exercice, on note $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère l'application L définie sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$$

1. Montrer que $L(f)$ est un élément de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui admet une dérivée seconde en 0.

2. L'application L est-elle linéaire ? est-elle surjective ? est-elle injective ?

3. Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'application g définie par $g(x) = f(ax)$. Déterminer une relation entre $L(f)$ et $L(g)$. Qu'en déduit-on lorsque f est une fonction paire ? lorsque f est une fonction impaire ?

4. Soit $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée . On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : f - L(f) = h, \text{ d'inconnue } f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - xf(x) = h'(x), \text{ et } f(0) = h(0).$$

b) Pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $K(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Montrer que f est solution de $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ si et seulement si K est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra.
Conclure.

Solution :

1. $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $L(f)'(x) = xf(x)$, donc $L(f)'$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi L_f est un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(f)'(x) - L(f)'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x)}{x} = f(0)$, donc $L(f)'$ est dérivable en 0.

2. La linéarité de L est claire.

On vient de voir que $\mathrm{Im}(L) \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc L n'est pas surjective.

$f \in \mathrm{Ker}(L) \iff L(f) = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, L(f)'(x) = x.f(x) = 0$
$\implies \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, f est la fonction nulle. Donc L est injective.

3. $L(g)(x) = \displaystyle\int_0^x t f(at)\, dt = \int_0^{ax} \frac{u}{a} f(u)\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a^2} L(f)(ax)$

En particulier pour $a = -1$: $L(g)(x) = L(f)(-x)$

→ Dans le cas d'une fonction f paire : $g = f$, donc $L(f)$ est paire.

→ Dans le cas d'une fonction f impaire : $g = -f$, donc

$$L(f)(-x) = L(g)(x) = L(-f)(x) = -L(f)(x), \text{ donc } L(f) \text{ est impaire.}$$

4 .a) ⋆ Si f est solution de (E), f est dérivable et, en dérivant les 2 membres de (E) : $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ De plus, pour $x = 0$, on obtient bien, en remplaçant dans (E) : $f(0) = h(0)$.

$\star$ Réciproquement : $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ prouve que les deux fonctions $f - L(f)$ et h ont même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante laquelle est nulle car $f(0) = h(0)$.
Donc on a bien l'équivalence : f est solution de $(E) \iff f'(x)-xf(x) = h'(x)$, avec $f(0) = h(0)$

b) Puisque f est dérivable, il en est de même de la fonction K et comme $f(x) = K(x)e^{x^2/2}$, on a :

$$f'(x) = K'(x)e^{x^2/2} + K(x)\times xe^{x^2/2} = K'(x)e^{x^2/2} + xf(x)$$

En utilisant la question précédente et en remplaçant, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) - xf(x) = h'(x) &\iff e^{\frac{x^2}{2}}.K'(x) = h'(x) \\ &\iff K(x) = \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &\iff f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt + C\right] \end{aligned}$$

et $f(0) = h(0) \implies C = h(0)$, d'où :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left[h(0) + \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt\right]$$

Exercice 1.21.

Dans cet exercice, on pose :

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x\to\pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0\}$$

où $f^{(q)}$ désigne la dérivée $q^{\text{ème}}$ de f.

1. En considérant la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$, montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
(On montrera que pour tout entier naturel q, $\varphi^{(q)}(x) = (-1)^q H_q(x)\varphi(x)$, où H_q est un polynôme dont on donnera le degré et le coefficient dominant.)

2. Montrer les propriétés suivantes :

a) si $f \in \mathcal{S}$, alors $f' \in \mathcal{S}$.

b) si $f \in \mathcal{S}$, pour toute fonction polynôme P, $Pf \in \mathcal{S}$

c) si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $fg \in \mathcal{S}$

d) si $f \in \mathcal{S}$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

e) l'application définie sur $\mathcal{S}^2$ par : $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}$ noté $\langle\ ,\ \rangle$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$.

a) Montrer que tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in \mathcal{S}$.

b) En déduire que $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension finie.

4. Pour tout entier naturel q, on pose $\psi_q(x) = H_q(x)e^{-x^2/2}$. Calculer pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \neq q$, $\langle \psi_p, \psi_q \rangle$.

Solution :

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n.

- pour $n = 0$, $H_0 = 1$ et pour $n = 1$, $H_1(x) = -2x$.
- supposons que pour un certain rang n, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n ; alors en dérivant :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(-1)^n(H_n'(x) - 2xH_n(x)).$$

On termine aisément la récurrence. On obtient ainsi que φ est un élément de $\mathcal{S}$, avec de plus H_n polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n.

2. a) Quasiment évident puisque $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$.

b) Il suffit de remarquer, avec G. Leibniz, que $(Pf)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} f^{(k)}$.

c) De la même façon $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$x^{2p} f^{(n-k)} g^{(k)} = x^p f^{(n-k)} \times x^p g^{(k)}$, et $x^{2p+1} f^{(n-k)} g^{(k)} = x^p f^{(n-k)} \times x^{p+1} g^{(k)}$.

Ce qui permet tous les passages à la limite exigés.

d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 f(x) = 0$; deux applications de la règle de Riemann donnent la conclusion.

e) On vérifie sans problème que l'application est bien définie (car $fg \in \mathcal{S}$), est bilinéaire, symétrique et définie positive.

3. a) φ_k est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier p, on a : $\varphi_k^{(p)} = \varphi^{(p)}(x - k)$. On écrit alors pour tout n :

$$x^n = (x - k + k)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - k)^i k^{n-i}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n \varphi_k^{(p)}(x) = 0$ et $\varphi_k \in \mathcal{S}$.

b) Choisissons $0 < k_1 < \cdots < k_p$ et supposons $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e^{-(x-k_i)^2} = 0$.

On a alors, en posant $u_j = (x - k_j)^2$: $\mathrm{e}^{-u_1^2}\big(\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{u_2^2 - u_1^2} + \cdots + \lambda_p \mathrm{e}^{u_p^2 - u_1^2}\big) = 0$.

Après simplification par $\mathrm{e}^{-u_1^2}$, et en prenant la limite lorsque x tend vers l'infini, il vient $\lambda_1 = 0$. On recommence ensuite pour montrer que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ainsi, on peut trouver dans $\mathcal{S}$ une famille libre de cardinal p aussi grand que l'on veut et $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension finie.

4. a) On a montré dans la première question que $\varphi^{(q)}(x) = (-1)^q H_q \mathrm{e}^{-x^2}$, avec H_q polynôme de degré q et de coefficient dominant 2^q.

b) On peut alors écrire, en supposant $p < q$ et avec plusieurs intégrations par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_p \psi_q = \int_{\mathbb{R}} H_p(x) H_q(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_p \varphi^{(q)} = -\int_{\mathbb{R}} H_p' \varphi^{(q-1)} = \cdots$$

$$= (-1)^k \int_{\mathbb{R}} H_p^{(k)} \varphi^{(q-k)} = (-1)^p 2^p p! \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(q-p)} = 0$$

Exercice 1.22.

On considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout n entier naturel non nul par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} ; G_n = H_n - \ln(n) \text{ et } K_n = H_n - \ln(n+1)$$

On admet que pour tout couple (s, r) d'entiers naturels non nuls vérifiant $r < s$, on a $\sum\limits_{k=r}^{s} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 4, et pour tout $r \in \{1, \dots, n-1\}$, on note :

$$p_{n,r} = \frac{r}{n}\Big(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1}\Big),$$

et pour tout $r \in \{1, \dots, n-2\}$, on note : $\delta_{n,r} = n(p_{n,r+1} - p_{n,r})$.

1. Étudier la monotonie des suites $(G_n)_n$ et $(K_n)_n$. Montrer qu'elles convergent vers une même limite que l'on note γ.

2. On considère la suite $(S_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, r \in \mathbb{N}^*, S_r = \sum_{k=r+1}^{2r} \frac{1}{k}$$

a) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{2} \leqslant S_r < 1$, puis que $S_r + S_{2r} > 1$.

b) Pour tout $r \in \{1, \dots, n-2\}$, montrer que : $\delta_{n,r} = H_{n-1} - H_r - 1$. Montrer que la suite finie $(\delta_{n,r})_{1\leq r\leq n-2}$ est strictement monotone ; préciser sa monotonie.

c) Montrer qu'il existe un unique q tel que $\delta_q < 0$ et $\delta_{q-1} > 0$. On le note $q = r(n)$. Montrer que le maximum de $p_{n,r}$ pour $r \in \{1, \dots, n-1\}$ et n fixé, vaut $p_{n,r(n)}$.

Solution :

1. Pour $n \geqslant 1$: $G_{n+1}-G_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)+\ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0$,
et de même $K_{n+1} - K_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} > 0$. De plus
$$\lim_{n\to\infty} (G_n - K_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0.$$
Les deux suites sont adjacentes, donc convergentes de même limite.

2. a) On a : $\dfrac{1}{2} = r \times \dfrac{1}{2r} \leqslant S_r \leqslant r \times \dfrac{1}{r+1} < 1$.
D'autre part l'inégalité $\dfrac{1}{2} \leqslant S_r$ n'est une égalité que pour $r = 1$ et donc
$$S_r + S_{2r} > 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

b) On a :
$\delta_{n,r} = n(p_{n,r+1} - p_{n,r}) = (r+1)\big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big) - r\big(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big)$,
soit :
$$\begin{aligned}\delta_{n,r} &= r\big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big) + \big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big) - r\big(\frac{1}{r}\big)\\ &\qquad -r\big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big)\\ &= H_{n-1} - H_r - 1.\end{aligned}$$
La suite $(H_r)_r$ est clairement strictement croissante, donc la suite $(\delta_{n,r})_r$ (n est fixé) est strictement décroissante et il en est de même *a fortiori* de la séquence étudiée.

c) Comme $n \geqslant 5$, on a : $\delta_{n,1} = H_{n-1} - 2 \geqslant H_4 - 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{12} > 0$.
De plus on a : $\delta_{n,n-2} = \dfrac{1}{n-1} - 1 < 0$.
On remarque que $\delta_{n,r} = H_{n-1} - H_r - 1 = \sum\limits_{k=r+1}^{n-1} \dfrac{1}{k} - 1 \notin \mathbb{N}$.
Donc la séquence $(\delta_{n,r})_{1\leq r\leq n-2}$ décroît d'une valeur positive à une valeur négative sans s'annuler, donc elle change de signe entre deux entiers successifs $q-1$ et q.

D'après ce qui précède $\delta_{n,r} < 0$ si $r \geqslant q$ et $\delta_{n,r} > 0$ si $r < q$. Comme $p_{n,r+1} - p_{n,r}$ est du signe de $\delta_{n,r}$ on voit que la séquence $(p_{n,r})_{1\leq r\leq n-1}$ est croissante sur $\{1, \ldots, q\}$ et décroissante sur $\{q, \ldots, n-1\}$.
Elle atteint donc son maximum en q.

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés.

1. a) Montrer que l'on a : $\begin{cases} \mathrm{Ker}(b) \subseteq \mathrm{Ker}(a \circ b) \\ \mathrm{Im}(a \circ b) \subseteq \mathrm{Im}(a) \end{cases}$

b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$$

c) Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3. On considère les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I - AB$.

Solution :

1. a) Si $Bx = 0$, alors $ABx = 0$. De même tout vecteur ABx s'écrit $A(Bx)$.

b) Si la matrice AB est inversible, il vient $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB) = \{0\}$, ce qui entraîne que B est inversible. De même $\mathbb{R}^p = \operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.

2. Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
Alors $BAx = \lambda x \implies ABAx = \lambda Ax$, ce qui donne :
$Ax \in \operatorname{Ker}(\lambda I - AB) = \{0\}$. Donc $Ax = 0$ et $0 = BAx = \lambda x$ entraîne que $\lambda x = 0$. Enfin $\lambda \neq 0$ entraîne que $x = 0$.
Les matrices AB et BA jouant des rles symétriques, on obtient la réciproque demandée.

b) Posons $X = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$. Il vient :

$$\begin{aligned}(\lambda I - AB)X &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{\lambda A - ABA}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B\\ &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{A(\lambda I - BA)}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B\\ &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{AB}{\lambda} = I\end{aligned}$$

c) La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

3. En effectuant le produit BA, on trouve : $BA = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I - AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), qui donne :

$$(I - AB)^{-1} = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1\\ 1 & (2-p) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & (2-p)\end{pmatrix}$$

Exercice 2.2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, non réduit au vecteur nul. On note :

$$\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \ / \ u \circ v - v \circ u = id_E\}$$

1. Montrer que :

$$(u, v) \in \mathcal{C} \implies \forall \lambda \neq 0, (\lambda u, \frac{v}{\lambda}) \in \mathcal{C}$$

Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}$? $\mathcal{C}$ est-il un espace vectoriel ?

2. Dans cette question seulement, on suppose que E est de dimension finie n.

a) Montrer que l'application tr définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles par :

$$\text{pour tout } A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n},\ tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

est une application linéaire.

b) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) En déduire que $\mathcal{C} = \emptyset$.

3. Soit (u, v) un couple d'endomorphismes de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$$

En déduire que :

- ni u ni v ne peuvent être des projecteurs ;
- ni u ni v ne peuvent être nilpotents (on dit qu'un endomorphisme f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$).

4. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application v définie sur E par $v(P) = XP$. Déterminer u tel que $(u, v) \in \mathcal{C}$.

Solution :

1. Pour $\lambda \neq 0$, on a : $(\lambda u)\circ(\frac{1}{\lambda}v) - (\frac{1}{\lambda}v)\circ\lambda u = u\circ v - v\circ u$, d'où l'équivalence.

Si $\mathcal{C}$ n'est pas vide, il contient au moins un couple (u_0, v_0), avec u_0 et v_0 distincts de l'endomorphisme nul et donc l'infinité des couples de la forme $(\lambda u_0, \frac{1}{\lambda}v_0)$.
$(0, 0) \notin \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ n'est pas un espace vectoriel.

2. a) $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$ et on vérifie directement : $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$. Ainsi $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

b) Avec des notations standard :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(A)_{i,j}(B)_{j,i} \\ \mathrm{tr}(BA) = \sum\limits_{i=1}^{n}(BA)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(B)_{i,j}(A)_{j,i} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(B)_{i,j}(A)_{j,i} \end{cases}$$

Dans la dernière somme on permute les rles de i et j et on reconnaît $\mathrm{tr}(AB)$. Ainsi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) Soit $(u, v) \in \mathcal{C}$, si on note U et V les matrices associées à u et v dans une base $\mathcal{B}$ de E, la relation de définition de $\mathcal{C}$ donne : $UV - VU = I_n$, d'où :

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(UV - VU) = \mathrm{tr}(UV) - \mathrm{tr}(VU) = 0$$

Ce qui nie la première hypothèse faite sur E. Ainsi il n'existe pas de couple convenant et $\mathcal{C} = \emptyset$.

3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$\rightarrow$ Pour $n=1$, comme $u^0 = Id$, il s'agit simplement du fait que $(u,v) \in \mathcal{C}$.
$\rightarrow$ On suppose le résultat au rang n acquis, alors :

$$\begin{aligned} u^{n+1} \circ v - v \circ u^{n+1} &= u \circ u^n \circ v - v \circ u^{n+1} = u \circ (nu^{n-1} + v \circ u^n) - v \circ u \circ u^n \\ &= nu^n + (u \circ v - v \circ u) \circ u^n = nu^n + u^n = (n+1)u^n \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $n+1$. On conclut par le principe de récurrence.

$\star$ Si u est un projecteur, alors $\forall\, n \geqslant 1, u^n = u$, donc :
$2u = u^2 \circ v - v \circ u^2 = u \circ v - v \circ u = id_E$, soit $u = \dfrac{1}{2} id_E$, ce qui n'est pas raisonnable pour un projecteur.

$\star$ Si u est nilpotent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ son indice de nilpotence, il vient :
$0 = u^p \circ v - v \circ u^p = pu^{p-1}$, donc $u^{p-1} = 0$, ce qui contredit la minimalité de p.

Pour conclure, il reste à faire le même travail pour v, pour cela on remarque que :

$$u \circ v - v \circ u = id_E \Longleftrightarrow v \circ (-u) - (-u) \circ v = id_E$$

Ainsi $(u,v) \in \mathcal{C} \implies (v,-u) \in \mathcal{C}$ et les conclusions sur v en découlent.

4. Si $[u(P)](X) = X.P(X)$, on doit avoir :

$$Xv(P) - v(PX) = P, \text{ donc } v(XP) = Xv(P) + P$$

ce qui est vérifié pour l'opération de dérivation $v : P \mapsto P'$
On a bien alors $(X.P)' - X.P' = P + X.P' - XP' = P$, *i.e.* $u \circ v - v \circ u = id_E$.

Exercice 2.3.

On note

$$\mathcal{S} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}},\ \text{avec } x_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n,\ \lim_{n \to -\infty} x_n \text{ existent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{S}$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer son noyau.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs propres réelles de T, c'est-à-dire aux réels λ tels que $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$, *où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{S}$ et on pose* $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda U_k$. En déduire que pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a alors : $U_k = A_\lambda^k U_0$.

4. a) On suppose que $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Montrer que A_λ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En déduire que si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$, il existe des nombres complexes $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ tels que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on ait :

$$x_k = \alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$$

En distinguant les deux cas $|\lambda| > 2$ et $|\lambda| < 2$, montrer que $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) Que peut-on dire de $\operatorname{Ker}(T - 2Id)$?

c) Montrer que $\operatorname{Ker}(T + 2Id) = \{0\}$.

Conclure.

Solution :

1. $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$, car si $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to\pm\infty} y_n$ existent (si vous nous permettez ce regroupement de limites), alors pour tout λ réel, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} (x_n + \lambda y_n)$ existent.

2. On vérifie aisément que T est linéaire puis que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
Le noyau de T est formé des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z} : x_{n+1} = -x_{n-1}$.
On demande en plus que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n$ existent. Or, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $x_{2p} = (-1)^p x_0$ et $x_{2p+1} = (-1)^p x_1$. Les limites en $\pm\infty$ existent si et seulement si $x_0 = x_1 = 0$ et alors $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

3. On a $T(x) = \lambda x$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z} : x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$.
On a alors pour tout k :

$$U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = A_\lambda U_{k-1}$$

Une récurrence évidente montre que pour $k \in \mathbb{N}$, $U_k = A_\lambda^k U_0$. La matrice A_λ est inversible (son déterminant (produit en croix) est égal à 1), et $U_{-1} = A_\lambda^{-1} U_0$. Par récurrence, pour $k \in \mathbb{Z}^-$, $U_k = A_\lambda^k U_0$.

4. a) On montre que les valeurs propres de A_λ vérifient l'équation $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$.
Ainsi si $|\lambda| \neq 2$, A_λ admet deux valeurs propres distinctes réelles ou complexes μ_1, μ_2 avec$\mu_1\mu_2 = 1$ et $\mu_1 + \mu_2 = \lambda$. De plus, la matrice A_λ est diagonalisable.
En écrivant $A_\lambda^k = P \operatorname{diag}(\mu_1^k, \mu_2^k) P^{-1}$, valable pour $k \in \mathbb{Z}$, et en calculant le premier terme de $A_\lambda^k U_0$, on voit que x_k est bien de la forme $\alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$.
$\to$ Si $|\lambda| > 2$, les deux valeurs propres sont réelles.
On ne peut avoir $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, car $|\mu_1 + \mu_2| > 2$. Ainsi, par exemple, $|\mu_1| > 1$, et $|\mu_2| < 1$. Aussi, $\lim\limits_{k\to+\infty} |\mu_1|^k = +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} |\mu_2|^k = 0$. L'existence

d'une limite en $+\infty$ pour la suite x impose donc $\alpha = 0$. De même l'existence d'une limite en $-\infty$ impose $\beta = 0$ et x est la suite nulle.

$\rightarrow$ Si $|\lambda| < 2$, les deux valeurs propres sont complexes conjuguées et de module 1.

On peut alors écrire $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta} = A\cos(k\theta + \varphi)$, avec θ non congru à 0 modulo 2π et l'existence d'une limite en $+\infty$ impose $A = 0$ et donc $x = 0$. Dans les deux cas $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) $x \in \mathrm{Ker}(T - 2Id) \iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k-1} + x_{k+1} = 2x_k$

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Ceci caractérise les suites arithmétiques et l'existence de la limite en $+\infty$ impose que la suite x soit constante. La réciproque est claire

c) $x \in \mathrm{Ker}(T + 2Id) \iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} = 0$

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, (-1)^{k-1}x_{k-1} + 2(-1)^k x_k + (-1)^{k+1}x_{k+1} = 0$$

Ainsi la suite $((-1)^k x_k)_k$ est arithmétique (voir b)) et l'existence de la limite en $+\infty$ lui impose d'être la suite nulle

En conclusion la seule valeur propre de T est 2, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la suite constante égale à 1.

Exercice 2.4.

• Pour $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

• $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• On pose : $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments f de E bornés *i.e.* pour lesquels il existe un réel M positif ou nul (et dépendant de f) tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout x réel.

1. Soit $f \in E$. Justifier l'existence de l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ et son appartenance à E.

Cette application sera désormais notée $\varphi(f)$. L'application φ est donc une application de E dans lui-même.

2. Expliciter $\varphi(g)$ lorsque $g : t \longmapsto 1$ puis $\varphi(h)$ avec $h : t \longmapsto t$.

3. Prouver que φ est un endomorphisme de E.

4. Établir que φ est injective.

5. L'application φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

6. Démontrer que le sous-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de E est stable par φ.

7. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par φ.

8. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout segment $[0,x]$, donc l'intégrale existe et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x^2}$.

2. $\star$ $\varphi(g)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arc}\tan x$, donc $\varphi(g) = \operatorname{Arc}\tan$.

$\star$ $\varphi(h)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

3. La linéarité est claire et $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue.

4. Si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(f) = 0$ et *a fortiori* $\varphi(f)' = 0$, soit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{1+x^2}, \text{ soit } f = 0 \text{ et } \varphi \text{ est injective.}$$

5. On a déjà dit que pour $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi la fonction $x \mapsto |x|$, qui est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ n'est l'image de personne et φ n'est pas surjective.

Remarquons également que $\varphi(f)(0) = 0$.

Soit alors F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
Notons f la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x^2)F'(x)$. On a, pour tout réel x :

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2)F'(t)}{1+t^2}\,dt = F(x) - F(0) = F(x)$$

Ceci prouve que F est dans l'image de φ.

L'image de φ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nulles en 0.

6. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme $\varphi(f) : x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x^2}$, la fonction $\varphi(f)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

7. $\mathcal{B}$ est évidemment un sous-espace vectoriel de E et si f est bornée, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, |\varphi(f)(x)| = \Big|\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt\Big| \leqslant M(f)\Big|\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\Big| \leqslant M(f)\frac{\pi}{2}$$

Donc $\varphi(f)$ est bornée.

8. φ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de φ.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de φ non nulle et f une fonction propre associée. On a $\varphi(f) = \lambda f$ et, par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{1+x^2} = \lambda f'(x)$$

Soit :

$f'(x) = \dfrac{1}{\lambda(1+x^2)} \times f(x)$ et donc : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k \exp(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Arc\,tan}(x))$

Comme f n'est pas la fonction nulle, on a $k \neq 0$ et alors $f(0) = k \neq 0$, ce qui n'est pas compatible avec le résultat $0 = \varphi(f)(0) = \lambda f(0)$.

Ainsi le spectre de φ est vide.

Exercice 2.5.

Dans tout cet exercice, on confond $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on confond un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associée relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite définie positive si, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXSX > 0$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit M une matrice symétrique réelle définie positive. Soit $C \in \mathbb{R}^n$ donnée. On pose pour tout X de $\mathbb{R}^n$:

$$f_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_M(X) = {}^tXMX + 2.{}^tCX$$

a) Montrer que f_M admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^n$, valant $-M^{-1}C$

b) Montrer qu'en ce point f atteint son minimum.

Dans la suite, A et B sont deux matrices symétriques réelles définies positives.

3. a) Montrer que $A + B$ est inversible.

b) Montrer que :

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = A - A(A+B)^{-1}A = B - B(A+B)^{-1}B$$

c) Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ donné. Montrer que :

$$\inf\{{}^tXAX + {}^tYBY \ / \ X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } X + Y = Z\}$$

existe et est égal à ${}^tZNZ$ où N est une matrice réelle que l'on exprimera en fonction de A et B.

Solution :

1. $\star$ Supposons S symétrique réelle définie positive. Soit $SX = \lambda X$, avec $X \neq 0$.
Alors ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda\|X\|^2 > 0$, ce qui entraîne que λ est strictement positif.

$\star$ Réciproquement, supposons que les valeurs propres de S sont toutes strictement positives. Soit P une matrice orthogonale diagonalisante pour S. Pour toute colonne X non nulle, on a alors :

$${}^tXSX = {}^tXP\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n){}^tPX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

où $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne non nulle ${}^tPX$. Donc les réels y_i ne sont pas tous nuls et ${}^tXSX > 0$.

2. $\star$ On peut écrire :

$$\begin{aligned} f_M(X) = f_M(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i,j} m_{i,j}x_ix_j + 2\sum_i c_ix_i \\ &= m_{1,1}x_1^2 + 2x_1\Big(\sum_{j=2}^{n} m_{1,j}x_j + c_1\Big) + \cdots \ (M \text{ est symétrique}) \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 2\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}x_j + c_1\Big)$, *idem* pour les autres dérivées partielles.
Ainsi les éventuels points critiques X vérifient $MX + C = 0$. Comme M est inversible, il n'y en a qu'un valant :

$$X_0 = -M^{-1}C$$

$\star$ On écrit maintenant :

$$f_M(X_0 + H) - f_M(X_0) = 2{}^tX_0MH + 2{}^tCH + {}^tHMH = {}^tHMH$$

et cette quantité est strictement positive pour tout $H \neq 0$, on est donc en présence d'un minimum absolu strict.

3. a) La matrice $A + B$ qui est symétrique réelle est définie positive, car pour toute colonne X non nulle :

$${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX > 0.$$

b) On a : $A(A + B)^{-1} + B(A + B)^{-1} = I$, donc

$$\begin{cases} A(A+B)^{-1}B + B(A+B)^{-1}B = B \\ A(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}A = A \end{cases}$$

On a aussi : $(A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}B = I$, donc

$$\begin{cases} A(A+B)^{-1}A + A(A+B)^{-1}B = A \\ A(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}A = A \end{cases}$$

En mettant les termes du côté adéquat, ceci donne les égalités demandées.

b) On écrit $Y = Z - X$ et :

$$\begin{aligned} {}^tXAX + {}^tYBY &= {}^tXAX + {}^t(Z - X)B(Z - X) \\ &= {}^tXAX + {}^tZBZ + {}^tXBX - 2({}^tZB)X \end{aligned}$$

${}^tXAX + {}^tYBY = f_M(X) + {}^tZBZ$, avec :

$M = A + B$ et $C = -BZ$ (B est symétrique et $A + B$ est définie positive)
f admet donc un minimum atteint en $X_0 = M^{-1}C = -(A+B)^{-1}BZ$, le minimum valant :

$$\begin{aligned} f_M(X_0) + {}^tZBZ &= {}^tX_0MX_0 + 2{}^tZBX_0 + {}^tZBZ \\ &= {}^tZB(A+B)^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}BZ - 2{}^tZB(A+B)^{-1}BZ + {}^tZBZ \\ &= {}^tZNZ, \text{ avec } N = -B(A+B)^{-1}B + B \end{aligned}$$

Si l'on veut, on peut écrire grâce à b) que $N = A(A+B)^{-1}B$

Exercice 2.6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norme euclidienne usuelle de x.

On désigne par N l'application définie sue $\mathbb{R}^n$ par

$$N : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout λ réel :

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n}} N(x) \leqslant \|x\| \leqslant N(x)$$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note $M(T)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose dans toute la suite que toutes les valeurs propres de la matrice $M(T)$ (considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont réelles.

2. On note $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \leqslant 1\}$. Montrer que si $T(C) \subseteq C$, alors toutes les valeurs propres de T ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

On suppose dans toute la suite que les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice $M(T)$ sont tous positifs ou nuls et vérifient les n relations suivantes :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

3. a) Montrer que 1 est valeur propre de T.

b) Montrer que toutes les valeurs propres de T ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

4. On suppose que T est diagonalisable et que tous les sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres λ de T sont des droites vectorielles.
On note : $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

a) Montrer que si λ est valeur propre différente de 1, alors $E_\lambda \subseteq H$.

b) Montrer que $E_1 \not\subseteq H$.

c) En déduire que, si -1 n'est pas valeur propre de T, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(T^p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge (dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$) vers la projection du vecteur x sur la droite vectorielle E_1 parallèlement à H.

Solution :

1. $\star$ $N(\lambda x) = |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda|.N(x)$

$\star$ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée seconde négative), donc pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{\frac{1}{n}x_1^2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n^2} \geqslant \frac{1}{n}\sqrt{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{n}\sqrt{x_n^2} = \frac{1}{n}N(x) \implies \|x\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.N(x)$$

$\star$ Soit $y = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$,

$\|y\|^2 \leqslant N(y)^2 \iff x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2|x_1 x_2| + 2|x_1 x_3| + \cdots$, ce qui est banalement vrai.

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}}N(x) \leqslant \|x\| \leqslant N(x)$$

2. Supposons $T(C) \subseteq C$, soit λ une valeur propre de T : il existe $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tel que $T(v) = \lambda v$.

Soit $w = \dfrac{v}{N(v)}$, on a : $N(w) = 1$, donc $w \in C$ et $T(w) \in C$.

Or : $T(v) = \lambda v \implies T(w) = \lambda \dfrac{v}{N(v)} = \lambda.w$, d'où : $\lambda.w \in C$, soit

$$N(\lambda.w) = |\lambda|.N(w) \leqslant 1 \text{ et } |\lambda| \leqslant 1$$

3. a) Soit U la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1, on a : ${}^tMU = U$, donc 1 est valeur propre de ${}^tM$ et ${}^tM - I_n$ n'est pas inversible. Il en est donc de même de $M - I_n$ et 1 est aussi valeur propre de M, *i.e.* de T.

b) Soit $x \in C$, on a :

$$x = \sum_{j=1}^n x_j.e_j \implies T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_j m_{i,j}) e_i$$

d'où :

$$N(T(x)) = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \big(|x_j| \sum_{i=1}^n m_{i,j}\big)$$

Soit : $N(T(x)) \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j|.1 = N(x) \leqslant 1$ (car $x \in C$)

On peut donc appliquer le résultat de la question 2. et toutes les valeurs propres de T sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

4. a) Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre différente de 1, Soit $x \in E_\lambda$, on a $T(x) = \lambda.x$, donc pour tout indice i :

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Par sommation : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n m_{i,j}) x_j - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0$,

d'où : $(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i = 0$, on en déduit : $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, soit $x \in H$ et $E_\lambda \subseteq H$

b) Puisque T est diagonalisable, $\mathbb{R}^n$ se décompose en la somme directe des n sous-espaces propres.

Par l'absurde, si E_1 était inclus dans H, alors tous les espaces propres seraient inclus dans H et leur somme directe (qui est égale à $\mathbb{R}^n$) serait aussi incluse dans H, d'où l'absurdité. Donc $E_1 \not\subseteq H$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $x = y + z$, avec $y \in H, z \in E_1$. Pour tout entier p, on a : $T^p(x) = T^p(y) + T^p(z) = T^p(y) + z$ et $\|T^p(x) - z\| = \|T^p(y\|$

Mais $y \in H \Rightarrow y = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i$ où u_i est un élément de l'espace propre associé à l'une des $n-1$ valeurs propres λ_i différentes de 1.

Ainsi $T^p(y) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p.u_i$ et $\|T^p(y)\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p.\|u_i\|$ et $\lim\limits_{p\to\infty} \|T^p(y)\| = 0$.

Dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, la suite $(T^p(x))$ converge vers la projection du vecteur x sur la droite vectorielle E_1 parallèlement à l'hyperplan d'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Exercice 2.7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E c'est-à-dire tels que $A \oplus B = E$. Soit f une application linéaire de A vers B ($f \in \mathcal{L}(A, B)$). On pose, pour tout a de A :

$$\varphi_f(a) = a + f(a)$$

1. Montrer que l'application φ_f est linéaire et injective. Déterminer son rang.

Pour $f \in \mathcal{L}(A, B)$, on note $A_f = \text{Im}(\varphi_f)$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(A, B)$, on a $E = A_f \oplus B$.

3. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(A, B)$. Montrer que $A_f = A_g$ si et seulement si $f = g$.

4. Soit A' un sous-espace vectoriel de E tel que $E = A' \oplus B$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(A, B)$ tel que $A' = A_f$ (on pourra utiliser la projection sur B parallèlement à A').

5. En déduire qu'en général, B admet une infinité de supplémentaires dans E.

Solution :

1. L'application f peut être considérée comme une application linéaire de A vers E, l'application $a \mapsto a$ peut être considérée comme une application linéaire de A vers E. Ainsi l'application φ_f est linéaaire.

Elle est injective car si $a \in A$ vérifie $a + f(a) = 0$, on a : $a = -f(a) \in B$ et $A \cap B = \{0\}$ entraîne que $a = 0$.

Par le théorème du rang, on obtient $\operatorname{rg} \varphi_f = \dim A$.

2. $\dim A_f = \operatorname{rg} \varphi_f = \dim A$. Comme $\dim A + \dim B = \dim E$, il suffit de démontrer que $A_f \cap B = \{0\}$.

Soit $x \in A_f \cap B$: il existe $a \in A$ tel que $x = a + f(a) = b \in B$.
Donc $a = b - f(a) \in B$ et $A \cap B = \{0\}$ entraîne que $a = 0$, donc $f(a) = 0$ et $x = 0$.

3. Si $f = g$, alors $A_f = A_g$ (si, si !).

Réciproquement, si $A_f = A_g$, alors pour tout $a \in A$, il existe $a' \in A$ tel que $a + f(a) = a' + g(a')$. Donc
$a - a' = g(a') - f(a) \in B$. Toujours parce que $A \cap B = \{0\}$, il vient $a = a'$ et $f(a) = g(a)$ et $f = g$.

4. Soit p la projection sur B parallèlement à A'.
Pour $a \in A$, a s'écrit $a = a' + b$, avec $a' \in A'$ et $b \in B$. Alors
$\varphi_{-p}(a) = a - p(a) = b = a'$ est le projeté de a sur A' parallèlement à B.
Donc $\operatorname{Im} \varphi_{-p} \subset A'$ et comme les dimensions sont *ad hoc*, on a vérifie $A_{\varphi_{-p}} = A'$.

5. D'après les questions précédentes, il y a autant de supplémentaires de B dans E que d'applications $f \in \mathcal{L}(A, B)$. A part les cas dégénérés ($B = E$ et $B = \{0\}$), tout sous-espace admet donc une infinité de supplémentaires.

Exercice 2.8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On pose $F = E \times E$.

On rappelle que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ et } \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

1. Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, Montrer que

$$B' = ((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, e_1), (0, e_2), \ldots, (0, e_n))$$

est une base de F.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base B. Soit φ l'application de F dans F définie pour $(x, y) \in F$ par :

$$\varphi((x, y)) = (f(x) + f(y), f(y))$$

Montrer que φ est linéaire et donner sa matrice A' dans la base B' de F.

3. a) Montrer que f et φ possèdent les mêmes valeurs propres et que la dimension de l'espace propre de f associé à λ est inférieure ou égale à celle de φ associé à la même valeur propre.

b) On suppose que f est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de f. Montrer que les sous-espaces propres de f et de φ associés à λ sont de même dimension.

(On pourra considérer une base B constituée de vecteurs propres de f et comparer les rangs des matrices associées à $f-\lambda Id_E$ et $\varphi-\lambda Id_F$ relativement aux bases B et B' associée à B.)

Par le même raisonnement, montrer que la dimension du noyau de φ est le double de celui de f.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable.

Solution :

1. Supposons que : $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(0, e_i) = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i\big)$.

On en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i = 0$ et comme $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E, on a $\lambda_i = \mu_i = 0$ pout tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc B' est libre.

Soit $(x, y) \in E \times E$, on écrit $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ et $(x, 0)$ (resp. $(0, y)$) s'écrit à l'aide des vecteurs $(e_i, 0$ (resp. $(0, e_i)$, donc B' est génératrice de F.

$$B' \text{ est une base de } F.$$

2. La linéarité est claire et $A' = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

3. a) $\star$ Soit $(x, y) \in F$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. Alors

$$\varphi((x, y)) = (f(x) + f(y), f(y)) = (\lambda x, \lambda y)$$

donc $f(y) = \lambda y$.

$\to$ Si $y \neq 0$, c'est un vecteur propre de f et λ est une valeur propre de f.

$\to$ Si $y = 0$ alors $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$ (sinon (x, y) serait le vecteur nul de E^2), donc x est un vecteur propre de f et λ est une valeur propre de f.

$\star$ Soit $x \in E$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors

$$\varphi((x, 0)) = (f(x) + f(0), f(0)) = (f(x), f(0)) = (\lambda x, 0) = \lambda(x, 0).$$

Ceci montre que $(x, 0) \neq (0, 0)$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. De plus $x \mapsto (x, 0)$ est une application linéaire injective du sous-espace propre $E_\lambda(f)$ dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$. On en déduit l'inégalité demandée sur les dimensions.

b) Prenons une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f ; notons D la matrice de f dans B et $T = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ celle de φ dans la base B' associée.

Supposons que la valeur propre $\lambda_1 \neq 0$ apparaisse k fois en haut de la diagonale de D, alors le rang de $D - \lambda_1 I_n$ est $n - k$, donc l'espace propre associé à λ_1 est de dimension k.

Dans la matrice $T - \lambda_1 I_{2n}$, les k premières colonnes sont nulles et une permutation des colonnes restantes montre que celles-ci forment une famille échelonnée donc libre. Ainsi $T - \lambda_1 I_{2n}$ est de rang $2n - k$ et la dimension du sous-espace propre de φ associé à λ_1 est donc $2n - (2n - k) = k$.

Par le même raisonnement pour $\lambda = 0$ (si 0 est valeur propre que l'on peut alors mettre en tête ...), on obtient que la dimension du noyau de φ est le double de celui de f.

L'application f étant diagonalisable, la somme des dimensions des sous espaces propres de f vaut n. Dès que f possède une valeur propre non nulle, la somme des dimensions des sous espaces propres de φ est strictement inférieure à $2n$ donc φ n'est pas diagonalisable.
En revanche si $f = 0$ alors $\varphi = 0$ qui est diagonalisable !

Exercice 2.9.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On note v_1 le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M avec :

$$M = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les coefficients diagonaux valent 0 et les autres valent $\frac{1}{n-1}$)

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. a) La matrice $M - I$ est-elle diagonalisable ?
   b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id)$

2. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - Id)$.
   a) Déterminer $p(v_1)$ puis $p(e_1), \dots, p(e_n)$.
   b) Expliciter la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit q le projecteur sur $\operatorname{Im}(f - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - Id)$. Expliciter la matrice Q de q dans la base $\mathcal{B}$.

4. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire M^k pour tout entier naturel k non nul. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k$ (la limite s'entendant coefficient par coefficient).

5. Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} ainsi que M^{-k}, pour tout entier naturel non nul k, en fonction de P et de Q.

Solution :

1. a) $M - I$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

b) $\to$ Ceci est une propriété générale des endomorphismes φ diagonalisables :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Spec}(\varphi)} E_{(\lambda)}(\varphi) = E_{(0)}(\varphi) \oplus \big(\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Spec}(\varphi)\setminus\{0\}} E_{(\lambda)}(\varphi)\big)$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (si 0 est valeur propre) et les éventuels autres sous-espaces propres (qui sont en somme directe) sont contenus dans l'image de φ, car pour $\lambda \neq 0$, $f(x) = \lambda x \implies x = f(\frac{1}{\lambda}x) \in \mathrm{Im}\, f$.
On conclut grâce aux dimensions.

$\to$ On peut aussi dire, en étant un peu moins général, que pour un endomorphisme φ symétrique, on a même $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ supplémentaires orthogonaux, car pour x quelconque et y dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$:

$$\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle = 0$$

$\to$ Enfin , on peut tout faire à la main et déterminer noyau (droite engendrée par v_1) et image (contient les vecteurs $e_1 - e_k$, pour $k \geqslant 2$ et on conclut grâce aux dimensions).

2. a) Comme $f(v_1) = v_1$, on a $p(v_1) = 0$;
Pour tout $k \geqslant 2$, $f(e_1 - e_k) = -\dfrac{1}{n-1}(e_1 - e_k)$, donc $e_1 - e_k$ appartient à $\mathrm{Im}(f - Id)$ et $p(e_1) = p(e_k)$.
Ainsi $v_1 = p(v_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(e_i)$ et $p(e_i) = \dfrac{1}{n}v_1$.

b) Ainsi $P = M_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{n}J$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3. q est le projecteur associé à p et donc $Q = I - P$.

4. On a : $\alpha P + \beta Q = \dfrac{\alpha}{n}J + \beta(I - \dfrac{1}{n}J) = \beta I + \dfrac{\alpha-\beta}{n}J$, donc
$M = \dfrac{1}{n-1}(J - I)$ est de la forme $\alpha P + \beta Q$ pour $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{1}{1-n}$

$$M = P + \frac{1}{1-n}Q$$

$\star$ Pour $k \geqslant 2$, on a :

$$M^k = P^k + \frac{1}{(1-n)^k}Q^k = P + \frac{1}{(1-n)^k}Q, \text{ car } P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0$$

et le résultat vaut pour $k = 1$ (mais pas pour $k = 0$).

5. $(P + \frac{1}{1-n}Q)(aP + bQ) = I = P + Q$ est vérifié pour $a = 1$ et $\frac{b}{1-n} = 1$, ceci prouve que M est inversible avec $M^{-1} = P + (1-n)Q$.

Et alors, pour $k \geqslant 2$:

$$M^{-k} = (M^{-1})^k = (P + (1-n)Q)^k = P + (1-n)^k Q$$

A nouveau la formule est valide au rang 1, mais pas au rang 0.

Exercice 2.10.

On note :

- F l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$;
- E le sous-espace de F formé des fonctions polynômes ; E_n le sous-espace de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n (où $n \in \mathbb{N}$) ;
- T l'application définie sur F, qui à f associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \big(T(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1. Montrer que T est linéaire et que E est stable par T.

On notera Δ l'endomorphisme de E induit par T.

2. a) Déterminer le noyau de Δ.

b) Montrer que Δ admet une unique valeur propre ; préciser cette valeur propre et l'espace propre associé.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\Delta(E_n) = E_{n-1}$.

b) Justifier que si $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

4. a) Déterminer $A \in E_4$ tel que : $A(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$A(x+1) - A(x) = x^3.$$

b) En déduire la valeur de $S = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $G_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, I)$.

a) Montrer qu'il existe un élément $\varphi \in G_\lambda$ tel que pour tout $x \in]0,1], \varphi(x) = 1$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de T.

Solution :

1. La linéarité de T est claire et si $x \mapsto f(x)$ est polynomiale, il en est de même de $x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

2. a) Si f est polynomiale telle que $\Delta f = 0$, alors f est 1-périodique, donc bornée. Si $\deg f \geqslant 1$, la fonction polynomiale f est de limite infinie en $+\infty$, ce qui contredit le fait qu'elle est bornée, donc $\Delta f = 0 \implies f$ est constante. La réciproque est claire, donc :

$$\operatorname{Ker} \Delta = E_0 = \mathbb{R}_0[X]$$

b) Si $\lambda \neq 0$ et f polynomiale non nulle, alors $\Delta f = \lambda f \implies \deg \Delta f = \deg f$. Or si f est non nulle, il est clair que dans le calcul de $f(x+1) - f(x)$ les termes de degré $\deg f$ s'éliminent : il y a une contradiction et seule 0 peut être valeur propre, donc d'après a) :

$$\operatorname{Spec} \Delta = \{0\} \text{ et } E_{(0)}(\Delta) = \operatorname{Ker} \Delta = E_0$$

3. $\star$ On vient de voir que pour $n \geqslant 1$, $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$. Comme le noyau de Δ est de dimension 1 et inclus dans E_n, le théorème du rang donne l'égalité des dimensions et :

$$\Delta(E_n) = E_{n-1}$$

$\star$ L'ensemble des polynômes P de E_n tels que $P(0) = 0$ est un supplémentaire de $E_0 = \operatorname{Ker} \Delta$ dans E_n, donc Δ induit un isomorphisme de cet espace sur E_{n-1}, d'où le résultat.

4. La question précédente montre que A existe et est unique. Par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve :

$$A(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 2x^3 + x^2) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = A(n+1) - A(0) = A(n+1) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

5. La relation : $\forall\, x > 0, \varphi(x+1) - \varphi(x) = \lambda\varphi(x)$ s'écrit $\varphi(x+1) = (1+\lambda)\varphi(x)$ et la connaissance de φ sur $]0,1]$ la détermine parfaitement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Ainsi φ vaut 1 sur $]0,1]$, vaut $(1+\lambda)$ sur $]1,2]$, $(1+\lambda)^2$ sur $]2,3]$, ...
Par conséquent $\operatorname{Spec} T = \mathbb{R}$.

Exercice 2.11.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. On rappelle que tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ se factorise sous la forme $P(X) = a \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement deux à deux distinctes.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, Q un polynôme non nul tel que $Q(M) = 0_n$, de degré aussi petit que possible (il n'est pas nécessaire de redémontrer qu'un tel polynôme existe).

a) Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $Q(\lambda) = 0$.

b) Soit λ une racine du polynôme Q ; on note alors $Q(X) = Q_1(X)(X-\lambda)$. Montrer que $Q_1(M) \neq 0_n$; en déduire que $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

c) En déduire que $\sigma(M)$ est l'ensemble des racines du polynôme Q.

2. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$.
Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = XP(B)$.

b) En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de B tel que $Q(A)$ soit inversible.

c) Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), X \mapsto AX - XB$ est injective.

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Prouver que l'équation $AX - XB = Y$ possède une unique solution X.

3. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $EE(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe une matrice non nulle X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$AX = \lambda XA.$$

a) Soit $A \in$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $EE(A) \subseteq \left\{\frac{\alpha}{\beta} \text{ tel que } (\alpha,\beta) \in \sigma(A)^2\right\}$.

b) Montrer que la transposée ${}^tA$ d'une matrice diagonalisable est diagonalisable. Déterminer $\sigma({}^tA)$.

c) On suppose que A est inversible et diagonalisable.
Montrer que $EE(A) = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \sigma(A)^2\right\}$ (on pourra utiliser des matrices construites à l'aide de colonnes propres de A et de ${}^tA$).

Solution :

1. a) Soit C un vecteur colonne propre (donc non nul) pour M, associé à la valeur propre λ.
On a $M^0C = I_nC = C = \lambda^0 C$, $MC = \lambda C$, donc

$$M^2C = MMC = M\lambda C = \lambda MC = \lambda^2 C,$$

et par une récurrence simple, $M^kC = \lambda^k C$, puis par linéarité :

$0 = Q(M)C = Q(\lambda)C$, d'où $Q(\lambda) = 0$, puisque C n'est pas la colonne nulle.

b) On a : $0 = Q(M) = Q_1(M)(M - \lambda I_n)$ et $Q_1(M)$ n'est pas la matrice nulle (sinon cela contrdirait la minimalité du degré du polynôme annulateur Q. Par conséquent $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible et λ est valeur propre de M.

En conclusion l'ensemble des racines de Q est exactement le spectre de M.

2. a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. On prouve par une récurrence facile que $A^kX = XB^k$ pour tout entier k (même pour $k = 0$). On en tire immédiatement que $P(A)X = XP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) D'après 1., on sait qu'il existe un polynôme annulateur $Q = a \prod_{k=1}^{\ell} (X - z_k)$ non nul de B dont toutes les racines $z_1, \ldots, z_\ell$ appartiennent à $\sigma(B)$. Comme $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, les points $z_1, \ldots, z_\ell$ n'appartiennent pas à $\sigma(A)$ et les matrices $(A - z_k I_n)$ sont donc inversibles.
Or un produit de matrices inversibles étant trivialement inversible, on voit que $Q(A)$ est inversible.

c) T est évidemmment linéaire. Soit $X \in \operatorname{Ker} T$, on a donc $AX = XB$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe un polynôme Q qui annule B et tel que $Q(A)$ soit inversible. Avec a) on voit que $Q(A)X = XQ(B) = 0_n$. Par conséquent $X = 0_n$ et le noyau de T est réduit à 0_n. Par suite T est injective.

d) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, T est bijective et par suite l'équation $AX - XB = Y$ possède une unique solution X pour chaque matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. a) Soit $\lambda \in EE(A)$ et X une matrice non nulle telle que $AX = \lambda XA$. En posant $B = \lambda A$, on voit que $X \in \operatorname{Ker}(T)$, où T est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considéré dans la question 2.
On est donc dans le cas où T n'est pas injectif, ce qui implique, d'après 2. c), que $\emptyset \neq \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) = \sigma(A) \cap (\lambda \sigma(A))$.
Il existe donc α et β dans $\sigma(A)$ tels que $\alpha = \lambda\beta$. Ceci termine la question puisque A est inversible et par conséquent $0 \notin \sigma(A)$, donc $\beta \neq 0$.

b) La matrice ${}^tA$ est diagonalisable puisque que si $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale, on a : ${}^tA = ({}^tP)D({}^tP)^{-1}$.

Comme $({}^tA - \lambda I) = {}^t(A - \lambda I)$, et comme la transposée d'une matrice inversible est inversible, on voit facilement que $\sigma({}^tA) = \sigma(A)$.

c) Soient A une matrice diagonalisable inversible et $(\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2$ (on a donc $\beta \neq 0$). On choisit deux matrices colonnes non nulles X et Y telles que $AX = \alpha X$ et ${}^tAY = \beta Y$. On considère la matrice $B = X{}^tY$ et on vérifie qu'elle est non nulle (colonne $\times$ ligne). On observe que :

$$AB = (AX){}^tY = \alpha X{}^tY = (\frac{\alpha}{\beta})X({}^t(\beta Y)) = (\frac{\alpha}{\beta})X({}^t({}^tAY)) = (\frac{\alpha}{\beta})X{}^tYA$$
$$= (\frac{\alpha}{\beta})BA.$$

On a donc $\left\{\frac{\alpha}{\beta}; (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2\right\} \subset EE(A)$ et par conséquent l'égalité souhaitée en tenant compte de la question a).

Exercice 2.12.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :
- $f^p(x_0) = x_0$,
- la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,
- la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée *un cycle* de f.

Soit f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p
et soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p \geqslant n$.

2. Déterminer l'endomorphisme f^p. En déduire que f est inversible.

3. On note m le plus grand des entiers k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$, et qu'il en est de même pour $f^k(x_0)$ pour tout $k > m$.

4. En déduire que $m = n$ et que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

5. Déterminer la forme de la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ précédente.

6. a) Soit λ une valeur propre de f. Montrer que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Solution :

1. Comme la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de cardinal p, il vient $p \geqslant n$.

2. Cette famille étant génératrice de E, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)$. Donc

$$f^p(x) = f^p\Big(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)\Big) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+p}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(f^p(x_0))$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = x$$

Ainsi $f^p = Id$ et f est inversible d'inverse f^{p-1}.

3. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est libre maximale, donc la famille $(x_0, \ldots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée. Ainsi, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ complexes

non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. Si $\lambda_m = 0$, on obtient une contradiction à la liberté de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$. Donc $\lambda_m \neq 0$, ce qui entraîne que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.

On termine la question par récurrence sur $k \geqslant m$.

4. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est ainsi libre et génératrice de E ; c'est une base de E et $m = n$

5. Il existe $a_0, \ldots, a_{n-1}$ complexes tels que $f^m(x_0) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x_0)$.

La matrice associée à f dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est la matrice compagnon :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

6. a) On regarde le rang de $M - \lambda I$.
- Comme λ est une valeur propre, ce rang est inférieur ou égal à $n - 1$.
- Par échelonnement, les $(n-1)$ premières colonnes de $M - \lambda I$ sont libres.

Ainsi le rang est supérieur ou égal à $(n-1)$.
La matrice $M - \lambda I$ et donc de rang $n - 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda I) = 1$.

b) Les sous-espaces propres étant de dimension 1, la matrice M est diagonalisable si et seulement si M admet n valeurs propres distinctes.

Enfin, la méthode du pivot appliquée à $M - \lambda I$ (ou la résolution directe du système définissant les vecteurs propres ...) montre que λ est valeur propre de M si et seulement si λ est racine du polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Ainsi, la matrice M est diagonalisable si et seulement si ce polynôme (qui est scindé) n'admet que des racines simples.

Exercice 2.13.

Dans cet exercice, m est un entier supérieur ou égal à 2. On pose :

$$V_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \ldots & m^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

et

$U_m = \begin{pmatrix} (-1)^m\binom{m}{0} & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & \cdots & (-1)^{m-k}\binom{m}{k} & \cdots & (-1)^0\binom{m}{m} \end{pmatrix}$

(U_m est donc un élément de $\mathcal{M}_{1,m+1}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que pour tout i de $[\![0,m]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que pour tout j de $[\![0,m]\!]$, $L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Préciser le degré et le coefficient dominant de L_i.

2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$.

3. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_m[X]$ par $\varphi(P) = P^{(m)}(0)$, où $P^{(m)}$ est la dérivée d'ordre m de P. Montrer que φ est une forme linéaire. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{L}$.

4. Montrer *sans calculs* que la matrice V_m est inversible. Comment pourrait-on calculer V_m^{-1} ?

5. Calculer le produit $U_m V_m$.

Solution :

1. Il s'agit bien entendu des polynômes de Lagrange aux points $0, 1, 2, \ldots, m$, soit :

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X-j)}{(i-j)}$$

Pour tout i de $[\![0,m]\!]$, L_i est un polynôme réel de degré m et de coefficient dominant :

$$\frac{1}{(i-0)(i-1)\ldots 1 \ldots (-1)(-2)\ldots(i-m)} = \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}$$

2. On écrit $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i L_i = 0$, ce qui entraîne que $0 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i L_i(j) = \alpha_j$. Ainsi la famille $(L_0, L_1 \ldots, L_m)$ est libre et de cardinal $m+1$: c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, et pour tout P de cet espace :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} P(i) L_i$$

3. L'application φ est effectivement une forme linéaire par la linéarité de la dérivation et le fait que la dérivée $m^{\text{ème}}$ de P est une constante. Comme $(X^m)^{(m)} = m!$, pour tout i de $[\![0,m]\!]$, on a :

$$L_i^{(m)}(X) = \frac{(-1)^{m-i} m!}{i!(m-i)!} = (-1)^{m-i}\binom{m}{i}$$

Ainsi la matrice ligne demandée est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^m\binom{m}{0} & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & \cdots & (-1)^0\binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

4. Les colonnes de la matrice V_m représentent les coordonnées des vecteurs de la famille $(1, X, X^2, \dots, X^m)$ dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$. La matrice V_m est donc une matrice de changement de base et, à ce titre, est inversible.

Pour calculer V_m^{-1}, il suffit d'exprimer chaque vecteur L_i dans la base $(1, X, \dots, X^m)$ ce qui revient à développer chaque polynôme L_i suivant les puissances de X.

On obtient des formules dites de Stirling, mais les résultats ne sont pas simples ...

5. La matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & m! \end{pmatrix}$ représente la matrice associée à la forme linéaire φ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ (et $\mathbb{R}$ est rapporté à sa base (1)).

La matrice ligne U_m représente φ dans la base $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ (et $\mathbb{R}$ est toujours rapporté à sa base (1)). Enfin, la matrice V_m est la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base canonique $\mathcal{C}$.

Par la théorie du changement de base, il vient $U_m V_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & m! \end{pmatrix}$.

Exercice 2.14.

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique (qui est donc orthonormée), notée $\mathcal{C}$.
Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Déterminer le noyau $K = \text{Ker}(f)$ puis une équation et une base $\mathcal{B}'$ de $P = K^\perp$.

3. Vérifier que P est stable par f, c'est-à-dire que $f(P) \subseteq P$.
Déterminer la matrice B de l'endomorphisme g de P induit par f, dans la base $\mathcal{B}'$.

4. Montrer plus généralement que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g.

6. En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable et f est diagonalisable. On sait même que l'on peut construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

2. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$

Donc :

$$K = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(0, 1, 1)$$

Par conséquent $P = (\operatorname{Vect}(u))^{\perp}$ est le plan d'équation $y + z = 0$ et on peut choisir pour base $\mathcal{B}'$ de P la famille (v, w) avec $v = (1, 0, 0)$ et $w = (0, 1, -1)$.

3. $Av = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 11v - 5w$ et

$$Aw = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -10v + 6w$$

Ces calculs montrent que l'image de $\mathcal{B}'$ est une famille de vecteurs de P, donc par linéarité, P est stable par f. De plus :

$$B = M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Plus généralement, soit F un sous-espace stable et $y \in F^{\perp}$. Alors pour tout vecteur x de E et avec des notations évidentes :
$\langle x, f(y) \rangle = {}^tX(AY) = {}^t(AX)Y = \langle f(x), y \rangle = 0$, puisque $f(x) \in F$ est orthogonal à y. Ainsi $f(y)$ est orthogonal à F et $F^{\perp}$ est stable par f.

5. $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (11 - \lambda)x - 10y = 0 \\ -5x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$

Le déterminant de ce système vaut $(11 - \lambda)(6 - \lambda) - 50 = \lambda^2 - 17\lambda + 16$.

Les valeurs propres de B (donc de g) sont 1 et 16 et facilement

$$E_{(1)}(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E_{(16)}(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit : $\begin{cases} E_{(1)}(g) = \operatorname{Vect}(v + w) = \operatorname{Vect}(1, 1, -1) \\ E_{(16)}(g) = \operatorname{Vect}(2v - w) = \operatorname{Vect}(2, -1, 1) \end{cases}$

6. Pour achever le travail, il n'y a plus qu'à normaliser (on avait pris la précaution de prendre v et w orthogonaux) :

$$\mathcal{B} = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)\big)$$

Exercice 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On suppose que A est une matrice symétrique réelle.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

Montrer que l'on peut supposer $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite de cet exercice.

On note $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

2. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}^2$, puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2$.

3. a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \langle e_i, \varepsilon_j \rangle$.

b) Établir que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i) \rangle$ puis en déduire que :

$$a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2$$

4. a) Montrer que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $a_{i,i} \leqslant \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2$.

b) En déduire que pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Par conséquent, f est diagonalisable dans une base orthonormale (en tant qu'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$). De plus si on effectue une permutation des vecteurs de cette nouvelle base, on ne change pas son caractère orthonormé. On peut donc ordonner les valeurs propres associées dans tout ordre voulu.

2. La matrice de passage est orthogonale et les deux égalités ${}^tPP = I$ et $P\,{}^tP = I$ donnent, en revenant à la définition du produit matriciel, les égalités demandées. On peut aussi dire que les colonnes de P et de ${}^tP$ sont de norme 1.

3. a) On sait que $\varepsilon_j = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j} e_k$. Il reste à utiliser le fait que la base canonique est orthonormale : $\langle e_i, \varepsilon_j \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j} \langle e_i, e_k \rangle = p_{i,j}$

b) On a : $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$. Donc $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i) \rangle$.

De plus, comme $P^{-1} = {}^t P$ est la matrice de passage de la base ε à la base e, on a :

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} ({}^t P)_{k,i} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} \varepsilon_k$$

On en déduit :

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} f(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_k \rangle \lambda_k \varepsilon_k$$

Donc :

$$a_{i,i} = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_k \rangle \lambda_k \varepsilon_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_i, \varepsilon_k \rangle^2$$

4. a) Ainsi :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 + \lambda_k \sum_{j=k+1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 + \lambda_k \Big(1 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 + \lambda_k \end{aligned}$$

b) Par sommation, il vient :

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 + k\lambda_k$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} &\leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} p_{i,j}^2 + k\lambda_k \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 + k\lambda_k \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) + k\lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \end{aligned}$$

Exercice 2.16.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, le produit scalaire associé est noté $\langle ., . \rangle$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice M relativement à la base $\mathcal{B}$, on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^t M$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par $\sigma(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

0. Vérifier que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\forall\, x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, {}^t u(y) \rangle$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tout vecteur x de E, on a :

$$\|u(x)\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2}$$

En déduire que la quantité $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \{\|u(x)\|\}$ est bien définie et appartient à $\mathbb{R}^+$.

On note $\|u\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \{\|u(x)\|\}$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|u(x)\| \leqslant \|u\|\|x\|$ pour tout $x \in E$. Prouver que $\|u \circ v\| \leqslant \|u\|\|v\|$, pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Si u et v sont deux endomorphismes sur E et α un nombre réel, montrer que l'on a les propriétés suivantes :

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \; ; \; \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\| \text{ et } \|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ${}^t u \circ u$ est diagonalisable dans une base orthonormée de E et que $\sigma({}^t u \circ u) \subseteq \mathbb{R}^+$.

En déduire que $\|u\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} \;/\; \lambda \in \sigma({}^t u \circ u)\right\}$ et qu'il existe un vecteur unitaire e de E tel que $\|u\| = \|u(e)\|$.

Solution :

0. On écrit, avec des notations matricielles évidentes :

$$\langle u(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX({}^tMY) = \langle x, {}^tu(y)\rangle$$

1. Avec l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &= \Big\|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\|u(e_i)\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2} \\ &= \|x\|\sqrt{\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2}\end{aligned}$$

L'ensemble $\{\|u(x)\|; \|x\| \leqslant 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, majorée par $\sqrt{\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2}$, elle admet donc une borne supérieure positive.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $x = 0$, l'inégalité souhaitée est évidente, sinon il suffit de remarquer que le vecteur $x/\|x\|$ est dans la boule unité et par conséquent que $\|u\| \geqslant \|u(x/\|x\|)\| = \|u(x)\|/\|x\|$.

En utilisant l'inégalité précédente, on voit que $\|u(v(x))\| \leqslant \|u\|\|v(x)\| \leqslant \|u\|\|v\|\|x\|$, et il suffit alors de prendre la borne supérieure sur la boule unité pour obtenir $\|u \circ v\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

Si u et v sont deux endomorphismes de E et α un nombre réel, les propriétés : $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ et $\|\alpha v\| = |\alpha|\|u\|$ découlent immédiatement des propriétés des bornes supérieures.
L'implication $\|u\| = 0 \implies u = 0$ résulte de la première inégalité prouvée dans cette question et l'autre implication est évidente.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\langle {}^tu \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, {}^tu \circ u(y)\rangle$. L'endomorphisme ${}^tu \circ u$ est donc symétrique et par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E (on peut aussi dire que la matrice ${}^tMM$ est clairement symétrique …).

Si $\lambda \in \sigma({}^t u \circ u)$ et si x est un vecteur propre unitaire associé à λ, on a

$$0 \leqslant \|u(x)\|^2 = \langle {}^t u \circ u(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda$$

et par suite $\sigma({}^t u \circ u) \subseteq \mathbb{R}^+$.
(on peut aussi écrire, avec $X \neq 0$:
$${}^t MMX = \lambda X \implies {}^t X {}^t MMX = \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \implies \lambda \neq 0).$$
Si on note λ_i la valeur propre associé au vecteur propre ε_i et λ_{i_0} la plus grande valeur propre, on voit que

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leqslant \lambda_{i_0} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \lambda_{i_0} \|x\|^2.$$

On en déduit que $\|u\| \leqslant \sqrt{\lambda_{i_0}}$ et comme on a $\|u(\varepsilon_{i_0})\|^2 = \lambda_{i_0}$, il en résulte que

$$\|u\| = \max\{\sqrt{\lambda}; \lambda \in \sigma({}^t u \circ u)\}$$

et qu'il existe bien un vecteur unitaire $e = \varepsilon_{i_0}$ de E tel que $\|u\| = \|u(e)\|$.

Exercice 2.17.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Soit un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k \in E$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

1. Déterminer la dimension de E_n.

Montrer que l'application $D_n : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E_n, où f' désigne la dérivée de f.

2. a) Montrer que D_n est bijectif si et seulement si $\alpha \neq 0$.

b) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme $P(D_n)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P.

c) Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q(\alpha) \neq 0$, et soit le polynôme $R = PQ$. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} R(D_n) = \operatorname{Ker} P(D_n)$$

3. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que la matrice de l'endomorphisme $P(D_n)$ dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est :

$$M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \text{ , avec } m_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j}{i} P^{(j-i)}(\alpha) & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme P.

Attention : *contrairement aux conventions habituelles, la numérotation des lignes et des colonnes commence à* 0.

En déduire que si r est la multiplicité de α comme racine de P, alors :

$$\operatorname{Im} P(D_n) = E_{n-r} \text{ et } \operatorname{Ker} P(D_n) = E_{r-1}$$

4. Trouver une fonction $f \in E$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$f'''(x) - 2\alpha f''(x) + \alpha^2 f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Solution :

1. Pour tout $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, on a pour tout x réel : $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$.

Le polynôme $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n X^n$ a donc une infinité de racines, donc est nul. Ainsi $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, donc est une base de E_n et $\dim E_n = n+1$.

La linéarité de la dérivation est connue. De plus, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a :

$$D_n(f_k) = \begin{cases} \alpha f_k + k f_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ \alpha f_k & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Donc, pour tout $f \in E_n$, on a $D_n(f) \in E_n$, ce qui règle le côté «endo» de la chose.

2. a) D'après la question précédente, la matrice de D_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est :

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & n \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

Comme M_n est triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.

b) La matrice de $P(D_n)$ dans la même base est $P(M_n) = \begin{pmatrix} P(\alpha) & & \\ 0 & \ddots & \\ & & P(\alpha) \end{pmatrix}$,

donc inversible si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$.

c) Comme $R = QP$, on a : $R(D_n) = Q(D_n) \circ P(D_n)$. D'après la question 2. b), l'endomorphisme $Q(D_n)$ est bijectif. On a donc :

$$R(D_n)(f) = 0 \Longleftrightarrow Q(D_n)(P(D_n)(f)) = 0 \Longleftrightarrow P(D_n)(f) = 0$$

3. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on a : $(D_n - \alpha Id)(f_k) = k f_{k-1}$ (à condition de poser $f_0 = 0$). Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(D_n - \alpha Id)^j(f_k) = k(k-1)\cdots(k-j+1) f_{k-j} \text{ si } k \geqslant j,\ 0 \text{ sinon}$$

En particulier, si $j > n$, on voit que $(D_n - \alpha Id)^j = 0$. D'après la formule de Taylor quel que soit le degré de P on en déduit que :

$$P(D_n) = P(\alpha) Id + P'(\alpha)(D_n - \alpha Id) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(D_n - \alpha Id)^n$$

Donc, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a avec $\dfrac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} = \dbinom{k}{j}$:

$$\begin{aligned} P(D_n)(f_k) &= P(\alpha)f_k + P'(\alpha)kf_{k-1} + \cdots \\ &= P(\alpha)f_k + \binom{k}{1}P'(\alpha)f_{k-1} + \cdots + \binom{k}{k}P^{(k)}(\alpha)f_0 \end{aligned}$$

D'où la matrice annoncée.

On sait que la multiplicité est caractérisée par :

α racine d'ordre $r \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$

d'où les résultats annoncés en observant la matrice (échelonnée) M précédente.

4. Si $\alpha = 0$ la relation s'écrit $f'''(x) = 1$, donc $f(x) = \dfrac{x^3}{6}$ convient. Si $\alpha \neq 0$, et si on cherche f dans E_n, où la relation s'écrit :

$$P(D_n)(f) = f_0 \text{ avec } P = X(X-\alpha)^2$$

Comme α est racine double de P, on sait que $\operatorname{Im} P(D_n) = E_{n-2}$.

Le problème admet donc une solution $f \in E_2$ c'est-à-dire de la forme

$$f = af_0 + bf_1 + cf_2.$$

D'après la question 3, la matrice de $P(D_2)$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et la relation voulue est équivalente à $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc les solutions sont $c = \dfrac{1}{2\alpha}$ et a, b quelconques et $f = \dfrac{1}{2\alpha}f_2$ convient.

Exercice 2.18.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Justifier que A est diagonalisable.

On note alors D une matrice diagonale semblable à A.

2. Déterminer un polynôme annulateur Q de D, unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré minimum.
En déduire un polynôme annulateur de A ayant les mêmes propriétés.

3. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par la famille $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Comparer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

Solution :

1. $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}(1-\lambda)x+y-z=0\\x+(1-\lambda)y+z=0\\x+y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$

$$\iff\begin{cases}x+y+(1-\lambda)z=0\\-\lambda y+\lambda z=0\\(1-\lambda)x+y-z=0\end{cases}$$

$\star$ $\lambda=0$ donne $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-z=0\end{cases}$, soit $\begin{cases}z=0\\y=-x\end{cases}$

$$0 \text{ est valeur propre et } E_{(0)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\star$ Si $\lambda\neq 0$, le système devient : $\begin{cases}y=z\\x+(2-\lambda)z=0\\(1-\lambda)x=0\end{cases}$

Pour $\lambda=1$, il reste $\begin{cases}y=z\\x+z=0\end{cases}$, sinon $x=0$ et pour $\lambda=2$, il reste $y=z$.

Ainsi 1 et 2 sont les autres valeurs propres, avec :

$$E_{(1)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et } E_{(2)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

A est diagonalisable, car carrée d'ordre trois admettant trois valeurs propres.

2. Pour $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(0,1,2)$, on a $A=PDP^{-1}$, d'où pour tout polynôme R :

$$R(A)=PR(D)P^{-1} \text{ et } R(A)=0\iff R(D)=0.$$

et comme $R(D)=\mathrm{diag}(R(0),R(1),R(2))$, **la** solution est le polynôme

$$Q=X(X-1)(X-2)$$

3. On a $Q(A)=0$, donc en développant $A^3=3A^2-2A\in\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$. Par une récurrence simple, $k\geqslant 3\implies A^k\in\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$ et $\mathcal{E}=\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

De plus comme il n'existe pas de polynôme de degré 2 annulateur de A, la famille précédente est libre, donc est une base de $\mathcal{E}$. Soit :

$$\dim\mathcal{E}=3$$

4. $MA=AM\iff MPDP^{-1}=PDP^{-1}M\iff P^{-1}MPD=DP^{-1}MP$.

En posant $N=P^{-1}MP$, on voit aisément que les solutions de l'équation $ND=DN$ sont les matrices diagonales, qui forment un espace de dimension 3., donc :

$$\mathcal{C}=\{P\,\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$$

Cet espace est donc aussi de dimension 3, et comme I, A, A^2 commutent avec A :

$$\mathcal{C} = \mathcal{E}$$

Exercice 2.19.

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel, celui pour lequel la base canonique $\mathcal{C}$ est orthonormée.

Soit la matrice : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

On note D (respectivement P) le sous-espace propre de f de dimension 1 *(respectivement* 2*). Soit u et v les projections orthogonales de $\mathbb{R}^3$ sur D et P respectivement.*

2. Vérifier que D et P sont orthogonaux.

3. Que valent $u + v$ et $u \circ v$?

4. Montrer qu'il existe des polynômes réels R et Q tels que $u = R(f)$ et $v = Q(f)$.
Déterminer de deux façons les matrices U et V des endomorphismes u et v respectivement, dans la base $\mathcal{C}$.

5. Calculer les valeurs de $\mathrm{rg}(U)$, $\mathrm{rg}(V)$, puis déterminer les matrices $U + V$ et UV. Expliquer pouquoi les matrices U et V sont symétriques.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle, donc A (et aussi f) est diagonalisable, et on peut même choisir la matrice de passage diagonalisante orthogonale.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (7-3\lambda)x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + (7-3\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + (7-3\lambda)z = 0 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donne $3(3-\lambda)(y+z) = 0$ et la discussion est alors banale :

$\star$ Si $\lambda = 3$, le système se réduit $2x + 2y - 2z = 0$, donc 3 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est le plan P d'équation $x + y - z = 0$ que l'on peut engendrer par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, -2, -1)$ (on a pris la précaution de les prendre orthogonaux).

$\star$ Si $\lambda \neq 3$, L_2 donne donc $z = -y$ et le système devient :

$$\begin{cases} (7-3\lambda)x - 4y = 0 \\ z = -y \\ 2x + (3\lambda - 5)y = 0 \end{cases}$$

$(7-3\lambda)(3\lambda-5)+8 = 9(3-\lambda)(\lambda-1)$, donc la dernière valeur propre de f est 1 le sous-espace propre étant la droite D dirigée par le vecteur $(1,1,-1)$.

Pour $H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, on a ${}^tH = H^{-1}$ et $A = P\,\mathrm{diag}(1,3,3)^tP$

2. On sait que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3.On a $D \oplus^{\perp} P = \mathbb{R}^3$, donc u et v sont les deux projecteurs associés à une somme directe et $u+v = Id$, $u \circ v = v \circ u = 0$.

4. Dans la base $\mathcal{B}$ orthonormée obtenue dans la question 1. (voir les colonnes de H), on a :

$U' = M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(1,0,0)$. Avec $D = \mathrm{diag}(1,3,3)$, on a :

$$U' = R(D) \iff \begin{cases} R(1) = 1 \\ R(3) = 0 \end{cases}$$

$V' = M_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{diag}(0,1,1)$ et on a $V' = Q(D) \iff \begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(3) = 1 \end{cases}$

On peut donc prendre $R = -\frac{1}{2}(X-3)$ et $Q = \frac{1}{2}(X-1)$.

Par la théorie du changement de base, on a donc $U = R(A)$ et $V = Q(A)$ ou $U = HU'^tH$ et $V = HV'^tH$, d'où :

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, V = I_3 - U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On a $\mathrm{rg}\, U = \mathrm{rg}\, u = 1$, $\mathrm{rg}\, V = \mathrm{rg}\, v = 2$, $U + V = I_3$, $UV = VU = 0$.

Les matrices U et V sont symétriques, car elles traduisent dans une base orthonormée des projecteurs orthogonaux, ces projecteurs sont donc des endomorphismes symétriques.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi exponentielle de paramètre λ et Y la loi exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?

2. Soit u un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $S = Y - uX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u} \, \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u} \, \mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

3. a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}\cdot$

b) Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.

c) La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}\cdot$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.

Solution :

1. La variable aléatoire λX suit la loi exponentielle de paramètre 1.

2. Notons f_k la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre k.
Comme $u > 0$, la variable aléatoire $-uX$ est à densité et une densité est la fonction

$$g_u : t \mapsto \frac{1}{u} f_\lambda\big(-\frac{t}{u}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Comme les variables aléatoires Y et $-uX$ sont indépendantes, leur somme S est une variable à densité, dont une densité est obtenue par convolution :

$$h = g_u \star f_\mu : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(t) f_\mu(x-t)dt$$

Pour tout x réel :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \frac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u} \mu.\mathrm{e}^{-\mu(x-t)}\,dt = \frac{\lambda\mu}{u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \mathrm{e}^{(\mu + \frac{\lambda}{u})t}\,dt$$

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u} \mathrm{e}^{-\mu x + (\mu + \frac{\lambda}{u})\min(0,x)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. On a $[R \leqslant 0] = ([X < 0] \cap [Y \geqslant 0]) \cup ([X > 0] \cap [Y \leqslant 0])$.
Les événements en présence étant quasi-impossibles, l'événement $[R \leqslant 0]$ est donc de probabilité nulle. Donc pour tout $u \leqslant 0, P(R \leqslant u) = 0$.
Pour tout réel $u > 0, P(R \leqslant u) = P(Y - uX \leqslant 0)$ et en conséquence :

$$F_R(u) = P(S \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\lambda t/u}\,dt = \frac{\mu u}{\lambda + \mu u}$$

Comme F_R est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, une densité de R est la fonction

$$\rho : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu u)^2} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $u.\rho(u) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu u}$, la variable aléatoire R n'admet pas d'espérance.

4. On montre comme précédemment que les événements $(U \leqslant 0)$ et $(U \geqslant 1)$ sont de probabilité nulle. Puis, pour $u \in]0, 1[$:

$$P(U \leqslant u) = P((1-u)Y \leqslant uX) = F_R\big(\frac{u}{1-u}\big) = \frac{\mu u}{\lambda(1-u) + \mu u}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, la variable U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, et admet pour espérance $\frac{1}{2}$ et pour variance $\frac{1}{12}$.

Exercice 3.2.

Une puce se déplace dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3).

À l'instant 0, elle se trouve en l'origine $O = (0,0,0)$; à tout instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle effectue un déplacement $D_n = (D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3})$.
On suppose que les trois variables aléatoires $D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3}$ sont indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose de plus que tous les différents déplacements sont indépendants.

Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $S_{n,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} D_{k,i}$ et $S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$.

On étudie l'événement $A_n = [S_n \in [-1,1]^3]$.

1. a) Déterminer la loi de $S_{n,1}$.

b) Exprimer la probabilité $P([|S_{n,1}| \leqslant 1])$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, et en déduire un équivalent de $P([|S_{n,1}| \leqslant 1])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de $P(A_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. a) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a : $P\big(\bigcup\limits_{k=n}^{n+m} A_k\big) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+m} P(A_k)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\big)$.

c) Déterminer $P\big(\bigcap\limits_{n\geq 1}\big(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\big)\big)$.

3. L'événement A_n se réalisera-t-il un nombre fini de fois ou une infinité de fois presque sûrement ?

Solution :

1. a) La variable aléatoire $S_{n,1}$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Aussi $S_{n,1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,n)$.

b) On remarque que $\dfrac{S_{n,1}}{\sqrt{n}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc :

$$P(-1 \leqslant S_{n,1} \leqslant 1) = P\Big(\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_{n,1}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - 1$$

Or $\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(0) + o(x) = \dfrac{1}{2} + x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + o(x)$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$P(-1 \leqslant S_{n,1} \leqslant 1) = 2\Big(\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - \frac{1}{2}\Big) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

c) Par indépendance :

$$P(A_n) = P([|S_{n,1}| \leqslant 1] \cap [|S_{n,2}| \leqslant 1] \cap [|S_{n,3}| \leqslant 1]) \sim \frac{C}{n^{3/2}}$$

Avec : $C = (2/\pi)^{3/2}$.

On remarque que la série $\sum_n P(A_n)$ est convergente.

2. a) Démonstration par récurrence sur m :

- pour $m = 1$:

$P(A_n \cup A_{n+1}) = P(A_n) + P(A_{n+1}) - P(A_n \cap A_{n+1}) \leqslant P(A_n) + P(A_{n+1})$.

- Supposons la relation vérifiée pour un certain rang m. Alors :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k \cup A_{n+m+1}\Big) &\leqslant P\Big(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\Big) + P(A_{n+m+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k) + P(A_{n+m+1}) \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

b) La série $\sum_n P(A_n)$ étant convergente, la question précédente montre que $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) = 0$, par majoration par le reste d'une série numérique convergente.

c) La suite d'événements $\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Le théorème de la limite monotone montre que :

$$P\Big(\bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$$

3. La probabilité précédente est nulle. Avec la probabilité 1, la puce ne pourra se trouver qu'un nombre fini de fois dans le cube $[-1, 1]^3$.

Exercice 3.3.

Dans cet exercice, b est un réel strictement positif.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de fonction de répartition F définie pour tout x réel par :

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire X_1. La variable aléatoire X_1 admet-elle une espérance ?

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle strictement croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de $M_n - a_n$

3. Etudier la convergence en loi de la suite $(M_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

a) $a_n = \dfrac{\ln n}{b}$.

b) $a_n = c\ln n$, avec c réel positif.

4. Écrire un programme Pascal qui simule la loi limite obtenue en 3. a).

Solution :

1. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc prendre pour densite f_X de X la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$

La fonction $h : x \mapsto x f_X(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $b > 0$:

- au voisinage de $+\infty$, $h(x) \sim x\mathrm{e}^{-bx} = o(1/x^2)$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge.
- au voisinage de $-\infty$, $h(x) \sim \dfrac{x\mathrm{e}^{-bx}}{(\mathrm{e}^{-bx})^2} = x\mathrm{e}^{bx} = o(1/x^2)$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(x)dx$ converge.

Donc X_1 admet une espérance.

2. On sait calculer la loi du supremum de variables aléatoires indépendantes. Ainsi, pour x réel :

$$P(M_n - a_n \leqslant x) = P(M_n \leqslant x + a_n) = (F_X(x+a_n))^n = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-b(x+a_n)})^n}$$

3. a) On suppose que $a_n = \dfrac{\ln n}{b}$. Ainsi :

$\mathrm{e}^{-b(x+a_n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-bx}}{n}$ et $\big(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}/n}\big)^n = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{n})}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n - a_,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-bx}}.$$

Cette dernière fonction vérifie les propriétés d'une fonction de répartition (limites en $\pm\infty$, croissance) et il s'agit même d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

b) On suppose que $a_n = c\ln n$. On a alors :

$$\mathrm{e}^{-b(x+a_n)} = \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{n^{bc}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc}}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc})}$$

Enfin, en supposant $c \neq \dfrac{1}{b}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\ln(1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc})} = \begin{cases} 0 & \text{si } bc < 1 \\ 1 & \text{si } bc > 1 \end{cases}.$$

La fonction constante nulle et la fonction constante égale à 1 ne sont pas de fonctions de répartition : il n'y a pas convergence en loi.

4. On utilise la méthode de la fonction de répartition : si X est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F, alors $F(X)$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ (à vérifier rapidement). La loi de X est donc $F^{-1}(\mathcal{U})$.

Or
$$y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-bx}} \Longleftrightarrow x = -\frac{\ln(-\ln(y))}{b}$$
On peut donc proposer :

```
function EscpEurope(b : real) : real
Begin
randomize ;
EscpEurope := -ln(-ln(random))/b
End ;
```

Exercice 3.4.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de densité
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X_0.

2. Soit a un réel de $]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose, sous réserve d'existence :
$$S_a(\omega) = \min\{i \in \mathbb{N} \ / \ X_i(\omega) \geqslant \sqrt{a}\}$$
Montrer que S_a est une variable aléatoire. Donner sa loi.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $0 < a_n < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Déterminer la convergence en loi de la suite $((1-a_n)S_{a_n})_n$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \dfrac{2n}{3} + \varepsilon n\big)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \dfrac{2n}{3} + \sqrt{n}\big)$.

5. Soit α un réel. On pose $R_n = \inf(n^\alpha X_0, n^\alpha X_1, \ldots, n^\alpha X_{n-1})$. Étudier en fonction de α la convergence en loi de la suite (R_n).

Solution :

1. Un calcul immédiat donne :
$$F_{X_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}, \quad E(X_0) = \frac{2}{3}, \quad V(X_0) = \frac{1}{18}$$

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$\{\omega / S_a(\omega) = i\} = \Big[\bigcap_{j=0}^{i-1} \{\omega / X_j(\omega) \leqslant \sqrt{a}\}\Big] \cap \{\omega / X_i(\omega) > \sqrt{a}\}$$

(Si $i = 0$, alors le premier terme de l'expression disparaît)

Or, pour tous i et j, les ensembles ci-dessus sont éléments de la tribu $\mathcal{A}$, ce qui montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$: $\{\omega / S_a(\omega) = i\} \in \mathcal{A}$.

D'après ce que l'on vient de montrer, pour tout $i \in \mathbb{N}$ (même pour $i = 0$) :

$$P(S_a = i) = [F_X(\sqrt{a})]^i(1 - F_X(\sqrt{a})) = a^i(1 - a)$$

et $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a^i(1 - a) = 1$, ce qui prouve que S_n est définie presque partout, ce qui lui donne le statut de variable aléatoire.

3. Déterminons la loi de $(1 - a_n)S_{a_n}$. Notons pour cela $\alpha_n = \left\lfloor \dfrac{x}{1 - a_n} \right\rfloor$:

$$P((1 - a_n)S_{a_n} \leqslant x) = P(S_{a_n} \leqslant \frac{x}{1 - a_n}) = P(S_{a_n} \leqslant \alpha_n) = \sum_{k=0}^{\alpha_n} a_n^k(1 - a_n)$$
$$= 1 - a_n^{\alpha_n}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a_n^{\alpha_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \mathrm{e}^{\alpha_n \ln(a_n)} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

(Pour le démontrer on utilise le fait que, lorsque n tend vers l'infini : $\ln(a_n) \sim 1 - a_n$ et $\alpha_n \sim \dfrac{x}{1 - a_n}$.)

Ainsi $((1 - a_n)S_{a_n})_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.

4. a) On remarque que $E\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i\big) = \dfrac{2n}{3}$. Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, et en posant $\Sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i$, on a :

$$P\Big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \frac{2n}{3} + \varepsilon n\Big) = P\Big(\frac{\Sigma_n - E(\Sigma_n)}{n} \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) En utilisant le théorème de la limite centrée, comme $V(\Sigma_n) = \dfrac{n}{18}$:

$$P\Big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \frac{2n}{3} + \sqrt{n}\Big) = P\Big(\frac{\Sigma_n - E(\Sigma_n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^{-9t^2} dt = \Phi(3\sqrt{2})$$

5. Calculons la loi de R_n :

$$P(R_n > x) = (P(n^\alpha X_0 > x))^n = \Big(P\big(X_0 > \frac{x}{n^\alpha}\big)\Big)^n = \Big(1 - F_{X_0}\big(\frac{x}{n^\alpha}\big)\Big)^n$$

Donc :

$$F_{R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \big(1 - \dfrac{x^2}{x^{2\alpha}}\big)^n & \text{si } x \in [0, n^\alpha] \\ 1 & \text{si } x > n^\alpha \end{cases}$$

Ainsi :

- si $\alpha \in]0, 1/2[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,
- si $\alpha = 1/2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

• si $\alpha > 1/2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = 0$, qui n'est pas une fonction de répartition, il n'y a donc pas convergence en loi !

Exercice 3.5.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.

L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \big\{\omega \in \Omega \ / \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\big\}$$

1. Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.

On suppose désormais que $\alpha \in \,]0,1[$; on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

b) Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta-1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} P\big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big)$.

d) En déduire que $P\big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big)\big) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note :

$A_\beta = \{\omega \in \Omega \ / \ X_n(\omega) > n^\beta$ pour un nombre fini de valeurs de n uniquement$\}$.

3. a) Montrer que $A_\beta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\big(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^\beta]\big)$.

b) Montrer que $P(A_\beta) = 1$.

4. a) Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.

b) En déduire la probabilité de l'événement A.

Solution :

1. Comme, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_n(\omega) \geqslant 1$, il vient $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ et la série converge toujours : $P(A) = 1$.

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$; la probabilité d'une réunion étant majorée par la somme des probabilités constituantes :

$$P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^{\beta}]\big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n > n^{\beta}) = \sum_{n=k}^{\infty} q^{\lfloor n^{\beta}\rfloor} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^{\beta}-1}$$

La dernière inégalité étant justifiée par le fait que $n^{\beta} - 1\lfloor n^{\beta}\rfloor \implies q^{n^{\beta}-1} \geqslant q^{\lfloor n^{\beta}\rfloor}$ et l'égalité centrale par propriété d'une loi géométrique.

b) La série $\sum q^{n^{\beta}-1}$ converge car

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 q^{n^{\beta}-1} = \lim_{n\to\infty} \exp((n^{\beta}-1)\ln q + 2\ln n) = 0 \text{ (car } \ln q < 0).$$

c) Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} q^{n^{\beta}-1} = 0$, comme reste de série convergente, et

$$\lim_{k\to+\infty} P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^{\beta}]\big) = 0.$$

d) Par inclusion, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^{\beta}]\big)\big) \leqslant P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^{\beta}]\big)$$

Il reste à faire tendre k vers $+\infty$.

3. a) Dire que $\omega \in A_{\beta}$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ (dépendant de ω) tel que pour tout $n \geqslant k$, $X_n(\omega) \leqslant n^{\beta}$. Donc :

$$A_{\beta} = \big\{\omega \in \Omega \;/\; \exists\, k \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant k : X_n(\omega) \leqslant n^{\beta}\big\}$$

et :

$$A_{\beta} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\big(\bigcap_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^{\beta}]\big)$$

b) Calculons la probabilité de l'événement complémentaire de A_{β}.

$$P(\overline{A_{\beta}}) = P\big(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(\bigcap_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^{\beta}]\big)}\big) = P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^{\beta}]\big)\big) = 0 \text{ par la question 2. d)}$$

4. a) Soit $\omega \in A_{\beta}$. On a alors : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant k$, $\dfrac{X_n(\omega)}{n^{\beta}} \leqslant 1$.

Or :

$$\frac{X_n(\omega)}{n^{\beta}} \leqslant 1 \iff \frac{X_n(\omega)}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1 \iff \frac{1}{n^{\alpha}X_n(\omega)} \geqslant \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour tout $\omega \in A_{\beta}$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}X_n(\omega)}$ est divergente.

b) La question précédente montre que

$$A_{\beta} \subset \big\{\omega \in \Omega / \sum \frac{1}{n^{\alpha}X_n(\omega)} \text{ diverge}\big\} = \overline{A}.$$

Comme $P(A_{\beta}) = 1$, il vient que pour $\alpha \in]0,1[$, la probabilité de l'ensemble A est nulle et la série diverge presque sûrement.

Exercice 3.6.

On étudie dans cet exercice l'arrivée de clients à un guichet.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, avec $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, on note $A(n, t_1, t_2)$, l'événement : «il est arrivé n clients entre les instants t_1 et t_2».

On fait les hypothèses suivantes :

• la probabilité de $A(n, t_1, t_2)$ ne dépend que de n et de $t = t_2 - t_1$; on la note $P_n(t)$. On suppose que $P_0(0) = 1$ et $P_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$.
• Pour tout couple (n, n') de $\mathbb{N}^2$ et tout triplet (t_1, t_2, t_3) de $(\mathbb{R}^+)^3$, avec $t_1 t_2 t_3$, les événements $A(n, t_1, t_2)$ et $A(n', t_2, t_3)$ sont indépendants.
• $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{1 - P_0(t) - P_1(t)}{P_1(t)} = 0$.
• Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t \mapsto P_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que P_0 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) Montrer que $\forall\,(s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, P_0(s + t) = P_0(s)P_0(t)$ et en déduire par l'absurde que $P_0(1) \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe a réel strictement positif tel que pour $t \geqslant 0$, on a $P_0(t) = \mathrm{e}^{-at}$.

3. Montrer que $P_1'(0) = a$ et que $P_n'(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

4. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on considère l'événement

$$E_k = A(n - k, 0, t) \cap A(k, t, t + s).$$

a) Quel est l'événement $E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n$?

b) Montrer que $P_n(t + s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t)P_k(s)$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $P_n'(t) = a(P_{n-1}(t) - P_n(t))$.

c) Pour $t \geqslant 0$, on pose $Q_n(t) = \mathrm{e}^{at}P_n(t)$. Trouver une relation entre Q_n' et Q_{n-1}. En déduire $Q_n(t)$ puis $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$.

5. Soit X_t la variable aléatoire égale au nombre de clients arrivant au guichet pendant un intervalle de temps d'amplitude t. Quelle est la loi de X_t ?

Solution :

1. Pour u et t positifs, $P_0(t) = P(A(0, u, u + t))$.
Soit $0 \leqslant t \leqslant s$. S'il n'arrive aucun client entre les instants 0 et s, il n'est arrivé aucun client entre les instants 0 et t ; donc :

$$A(0, 0, s) \subset A(0, 0, t) \implies P(A(0, 0, s)) \leqslant P(A(0, 0, t)).$$

Ainsi P_0 est-elle décroissante.

2. a) Pour s, t positifs, on a $P_0(s + t) = P(A(0, 0, s + t))$.

Or $A(0,0,s+t) = A(0,0,s) \cap A(0,s,t+s)$ qui sont deux événements indépendants. Ainsi, par les hypothèses, $P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t)$.

Supposons que $P_0(1) = 0$. Par le résultat précédent, $P_0(1/2)^2 = P_0(1) = 0$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 1, P_0(1/2^n) = 0$. Par continuité de P_0, il vient $P_0(0) = 0$ en contradiction avec $P_0(0) = 1$.

b) La fonction dérivable P_0 vérifie, pour tous s, t positifs : $P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t)$. En dérivant par rapport à t, il vient :
$P_0'(s+t) = P_0(s)P_0'(t)$ et pour $t = 0$, $P_0'(s) = P_0(s)P_0'(0)$.

Notons $b = P_0'(0)$; la résolution de l'équation différentielle donne $P_0(s) = C\mathrm{e}^{bs}$, pour tout $s \geqslant 0$. Or $P_0(0) = 1 = C$. Donc $P_0(t) = \mathrm{e}^{bt}$, pour tout $t \geqslant 0$. la décroissance de P_0 entraîne que $b < 0$ et $a = -b > 0$.

3. Par définition $P_1'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P_1(t) - P_1(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P_1(t)}{t}$. Or
$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{-at} - P_1(t)}{P_1(t)} = 0 \implies P_1(t) \underset{(0)}{\sim} 1 - \mathrm{e}^{-at}$$
Donc $P_1'(0) = a$.

Le nombre de clients arrivant au guichet entre 0 et t étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$. Donc, pour tout $t > 0$, $P_0(t) + P_1(t) + P_n(t) \leqslant 1$.

Ainsi : $0 \leqslant \dfrac{P_n(t)}{t} \leqslant \dfrac{P_0(t) + P_1(t) + P_n(t)}{t} = \dfrac{P_0(t) + P_1(t) + P_n(t)}{P_1(t)} \times \dfrac{P_1(t)}{t}$ dernière quantité qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

4. a) L'événement E_k est réalisé, signifie qu'il arrive $(n-k)$ clients entre 0 et t puis, k clients entre t et $t+s$. Aussi $\bigcup\limits_{k=0}^{n} E_k$ correspond à l'arrivée de n clients entre les instants 0 et $t+s$.

b) Par incompatibilité des événements $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, il vient
$$P_n(t+s) = P_n\big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\big) = \sum_{k=0}^{n} P(E_k) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t)P_k(s)$$
On dérive par rapport à t : $P_n'(t+s) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_{n-k}'(t)P_k(s)$, puis pour $t = 0$:
$$P_n'(s) = P_0'(0)P_n(s) + P_1'(0)P_{n-1}(s) = a(P_{n-1}(s) - P_n(s))$$

c) En dérivant Q_n, il vient $Q_n'(t) = aQ_{n-1}(t)$. Or $Q_0(t) = 1$ et $Q_1'(t) = a$ entraînent que $Q_1(t) = at$ (car $Q_1(0) = 0$). De même, $Q_2(t) = \dfrac{a^2t^2}{2}$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $Q_n(t) = \dfrac{a^nt^n}{n!}$ et $P_n(t) = \dfrac{a^nt^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}$.

5. On a $X_t(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \geqslant 0$, $P(X_t = n) = P_n(t)$. Par la question précédente, X_t suit la loi de Poisson de paramètre at.

Exercice 3.7.

On note :

- $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes de limite nulle ;
- $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge absolument ;
- $R_n(U)$ le reste d'ordre n de la série U de terme général u_n.

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}, R_n(U) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier qu'on peut définir une application $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ qui, à $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ associe la suite $\big(R_n(U)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que Φ est linéaire.

2. a) L'application Φ est-elle injective ?

b) Montrer que Φ n'est pas surjective (on pourra considérer une série convergente mais non absolument convergente).

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance. On admet qu'alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance strictement positive ; on note $u_n = P(X = n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Justifier que la suite $\dfrac{1}{E(X)}\Phi(U)$, notée $\Psi(U)$, définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. On notera Y une variable aléatoire suivant cette loi.

4. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi G de paramètre $p \in\,]0, 1[$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ g_n = P(X = n) = p\, q^n \text{ où } q = 1 - p$$

Que peut-on dire de Y de loi $\Psi(G)$?

5. On suppose que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = P(Y = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ ; on note alors } V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$.

b) Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité U telle que Y soit de loi de probabilité $\Psi(U)$?

c) U est-elle unique ?

Solution :

1. La convergence absolue de la série prouve que les restes existent et forment une suite de limite nulle, et la linéarité de Φ est banale.

2. $\star$ $\Phi(U) = 0 \implies \forall\, n \geqslant 1, u_n = R_{n-1} - R_n = 0$, $\operatorname{Ker}\Phi$ est donc formé des suites nulles à partir du rang 1 et Φ n'est pas injective.

$\star$ Soit $\sum v_n$ une série semi-convergente (par exemple $v_n = (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$), on peut définir la suite de ses restes, qui appartient à $\mathcal{S}$, et s'il existait une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ ait cette suite de restes, alors (u_n) et (v_n) coï ncideraient à partir du rang 1, donc (u_n) ne peut appartenir à $\mathcal{C}$ et Φ n'est pas surjective.

3. La série de terme général u_n est à termes positifs et est (absolument) convergente (de somme 1).

De plus, pour tout n, $R_n(U) = P(X > n) \geqslant 0$ et la somme de cette série vaut $E(X)$. Donc $\Psi(U)$ est bien une loi de probabilité.

4. Ici $R_n(X) = P(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} pq^k = q^{n+1}$ et

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}.$$

Donc $P(Y = n) = \dfrac{p}{q} R_n(X) = pq^n$: Y suit la même loi que X.

5. a) Facilement : $v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

b) S'il existe X convenable d'espérance λ, on doit avoir :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = R_{n-1}(U) - R_n(U) = \lambda(v_{n-1} - v_n) = \frac{2\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

Puis $u_0 = 1 - R_0(U) = 1 - \lambda v_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{2}$.

On peut donc prendre $\lambda = 2$ et alors X est même à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

c) λ peut prendre toute valeur de $]0, 2[$, il n'y a donc pas unicité.

Exercice 3.8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. a) Montrer que la suite $(p_n)_n$ est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1[$.

b) Soit $k \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leqslant k$, alors $\ell = 0$.

Que peut-on dire de la suite $(p_n)_n$ si $(u_n)_n$ est décroissante ?

c) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ pour laquelle $\ell > 0$.

2. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec :

- X_0 est constante égale à 1,

• X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,

• pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=0 \text{ et } P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=u_{n+1}$$

a) Donner le paramètre de la loi de X_n et en déduire son espérance.

b) Les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont-elles indépendantes ?

3. On suppose que $\ell = 0$.

a) Quelle est la probabilité de l'événement A défini par $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X_n = 1)$?

b) On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} / X_n(\omega) = 1\} & \text{s'il existe} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comparer Y et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. En déduire, si elle existe, l'espérance de Y.

Solution :

1. a) Si $p_n \neq 0$, on a $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$, donc on a toujours $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n$; la suite (u_n) est donc décroissante minorée : elle converge vers $\ell u_1 < 1$.

b) Si $u_n \leqslant k$ pour $n \geqslant N$, alors $u_n \leqslant k^{n-N} u_N \leqslant k^{n-N}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors $u_n \leqslant u_1 < 1$ pour $n \geqslant 1$ donc, par ce qui précède, $\ell = 0$.

c) On a $\ln p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln u_k$. Il suffit donc de trouver une suite $(u_n)_n$ telle que la série de terme général $\ln u_n$ converge (avec $0 < u_n < 1$) et alors la limite de $p_n = \exp(\ln p_n)$ sera non nulle.

On peut proposer $u_n = \mathrm{e}^{-1/n^2}$, pour $n \geqslant 1$.

2. Montrons par récurrence que $P(X_n = 1) = p_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque $u_0 = p_0 = 1$ et $u_1 = p_1$. Supposons le résultat démontré pour n et montrons-le pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)P(X_n=1) \\ &\qquad\qquad + P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0)P(X_n=0) \\ &= u_{n+1}p_n + 0 = p_{n+1} \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

L'espérance de X_n vaut donc p_n.

b) Elles ne sont pas indépendantes ; en effet si $q > n > 0$,

$$P(X_q = 1)P(X_n = 1) = p_q p_n \neq P(X_q = 1 \cap X_n = 1) = P(X_q = 1) = p_q$$

3. a) On a $P(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k = 1))P(X_n = 1) = p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut par le théorème de limite monotone.

b) $\star$ On vient de voir que la probabilité de l'événement $(Y = -1)$ est nulle.

On a donc quasi-certainement $Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ (pour presque tous les ω la somme est en fait finie).

En effet, dire que $(Y = k)$ est réalisé, c'est dire que l'on réalise $(X_0 = 1)$, $\ldots$, $(X_k = 1)$ et enfin on réalise $(X_{k+1} = 0)$, $(X_{k+2} = 0)$, $\ldots$. L'événement $(X_0 = 1)$ est sûr et n'est pas à prendre en compte.

L'espérance de Y est donc, si elle existe, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$.

Exercice 3.9.

Soit θ un paramètre strictement positif. Les élèves d'un établissement numérotés $1, 2, \ldots$ arrivent successivement à la cantine qui abrite un grand nombre de tables très grandes (ainsi tous les élèves pourraient se placer à une même table, ou pourraient tous occuper des tables différentes, ...).

Le premier élève s'assied à une table au hasard.
Pour $k \geqslant 1$, lorsque le $(k+1)^{\text{ème}}$ élève arrive, il choisit au hasard un des k élèves déjà attablés et s'assied à sa table avec la probabilité $\dfrac{k}{k+\theta}$ ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\dfrac{\theta}{k+\theta}$

Pour $n \geqslant 1$, on note T_n la variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, égale au nombre de tables occupées lorsque n élèves ont pris place et pour $i \in [\![1, n]\!], p_{n,i} = P(T_n = i)$.

1. a) Montrer que $p_{n+1,1} = \dfrac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)}$. Calculer également $p_{n+1,n+1}$.

b) Déterminer une relation de récurrence entre $p_{n+1,i}, p_{n,i}$ et $p_{n,i-1}$, pour $i \in [\![2, n]\!]$.

2. a) On pose $Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i}x^i$ et $R_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$. Montrer que

$$Q_n(x) = \frac{R_n(\theta x)}{R_n(\theta)}$$

b) En déduire que l'espérance de T_n est donnée par :

$$E(T_n) = \theta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\theta+i}$$

On admet que la variance de T_n est donnée par : $V(T_n) = \theta \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{i}{(\theta+i)^2}$

3. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta+x}\,dx \leqslant E(T_n) \leqslant 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta+x}\,dx$$

En déduire un équivalent simple de $E(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $V(T_n) \leqslant E(T_n)$. En déduire que $\left(\frac{T_n}{\ln n}\right)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à θ.

Solution :

1. a) Le $(k+1)^{\text{ème}}$ élève s'assied à une table déjà occupée avec la probabilité $\dfrac{k}{k+\theta}$. Donc, par indépendance supposée des choix des différents élèves :

$$\begin{aligned} p_{n+1,1} = P(T_{n+1}=1) &= \frac{1}{1+\theta}\times\frac{2}{2+\theta}\times\cdots\times\frac{n}{n+\theta} \\ &= \frac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)} \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} p_{n+1,n+1} = P(T_{n+1}=n+1) &= \frac{\theta}{1+\theta}\times\frac{\theta}{2+\theta}\times\cdots\times\frac{\theta}{n+\theta} \\ &= \frac{\theta^n}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)} \end{aligned}$$

b) La famille $(T_n = i)_{1\leq i\leq n}$ forme un système complet d'événements. De plus, pour tout $k \notin \{i, i-1\}$, la probabilité conditionnelle $P(T_{n+1} = i/T_n = k)$ est nulle. Ainsi il reste pour $i \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} p_{n+1,i} = P(T_{n+1}=i) = P(T_{n+1} = i/T_n = i)&P(T_n = i) \\ &+ P(T_{n+1} = i/T_n = i-1)P(T_n = i-1) \end{aligned}$$

Soit :

$$p_{n+1,i} = \frac{n}{n+\theta}p_{n,i} + \frac{\theta}{n+\theta}p_{n,i-1}$$

2. a) On a : $Q_{n+1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} p_{n+1,i}x^i = p_{n+1,1}x + \sum\limits_{i=2}^{n} p_{n+1,i}x^i + p_{n+1,n+1}x^{n+1}$.

Soit :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= \frac{n!}{(1+\theta)\dots(n+\theta)}x + \sum_2^n \Big[\frac{n}{n+\theta}p_{n,i}x^i + \frac{\theta}{n+\theta}p_{n,i-1}x^i\Big] \\ &\qquad\qquad + \frac{\theta^n}{(1+\theta)\dots(n+\theta)}x^{n+1} \\ &= \frac{n}{n+\theta}\Big[\frac{(n-1)!}{(1+\theta)\dots(n-1+\theta)}x + \sum_2^n p_{n,i}x^i\Big] \\ &\qquad + \frac{\theta}{n+\theta}\Big[\sum_2^n p_{n,i-1}x^i + \frac{\theta^{n-1}}{(1+\theta)\dots(n-1+\theta)}x^{n+1}\Big] \end{aligned}$$

Un changement d'indice dans la deuxième somme et la réintégration des termes extrêmes donnent alors :

$$Q_{n+1}(x) = \frac{n+\theta x}{n+\theta}\,Q_n(x)$$

Enfin, comme $Q_1(x) = x$, il vient $Q_n(x) = \dfrac{R_n(\theta x)}{R_n(\theta)}$.

b) On vérifie que $Q_n(1) = 1$, et on voit que $E(T_n) = Q'_n(1)$ (fonction génératrice). On a $Q'_n(x) = \dfrac{\theta}{R_n(\theta)} R'_n(\theta x)$, donc $E(T_n) = \theta \dfrac{R'_n(\theta)}{R_n(\theta)}$.

Or $\dfrac{R'_n(x)}{R_n(x)} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{x+i}$ (dérivée logarithmique), d'où :

$$E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}$$

3. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\theta}{\theta + x}$ est monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi :

$$\frac{\theta}{\theta + i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + x}\, dx \leqslant \frac{\theta}{\theta + i - 1}$$

Par la procédure de sommation habituelle :

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta + x} dx \leqslant E(T_n) \leqslant 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta + x} dx$$

Soit : $\theta \ln(n + \theta) - \theta \ln \theta E(T_n) \theta \ln(n - 1 + \theta) - \theta \ln \theta$

On en déduit, par encadrement que $E(T_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \theta \ln n$.

b) Comme $0 < \dfrac{i}{\theta + i} < 1$, il vient $V(T_n) \leqslant E(T_n)$. Par l'inégalité de Bienaymé–Tchebicheff, pour $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{T_n}{\ln n} - \theta\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(T_n)}{(\varepsilon \ln n)^2} \leqslant \frac{\theta}{\varepsilon^2 \ln n}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $\left(\dfrac{T_n}{\ln n}\right)$ converge vers θ.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On rappelle que A est positive ($A \in S_n^+(\mathbb{R})$) si pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tUAU \geqslant 0$.

Dans cet exercice on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice **ligne** canoniquement associée à ce vecteur.

Si $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé, toutes d'espérance nulle, et admettant toutes un moment d'ordre 2, on pose :

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \text{ et } Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

et on appelle matrice de covariance du couple de variables aléatoires vectorielles X et Y, la matrice notée $\Sigma_{X,Y}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme d'indice de ligne i et d'indice de colonne j est $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$. La matrice $\Sigma_{X,X}$ sera notée plus simplement Σ_X.

1. a) Montrer que $\Sigma_{X,Y} = E({}^tXY)$, où pour toute matrice aléatoire $M = (m_{i,j})$ dont les coefficients admettent une espérance, $E(M)$ est la matrice de terme générique l'espérance $E(m_{i,j})$.

b) Montrer que si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixées, et si X, Y sont deux vecteurs aléatoires définis comme dans le préambule, alors :

$$\Sigma_{X^tA,YB} = A\Sigma_{X,Y}B$$

c) Montrer que pour tout vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$, formé de variables réduites ayant un moment d'ordre 2, la matrice Σ_X est symétrique réelle, positive.

2. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

3. a) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire formé de n variables aléatoires indépendantes, centrées réduites. Quelle est la matrice Σ_X ?

b) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ tel que $A = \Sigma_Y$.

4. Soit $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ deux matrices symétriques réelles positives d'ordre n. On pose $C = (c_{i,j})$, avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$.

On admet que l'on peut trouver deux vecteurs aléatoires X et Y **indépendants**, tels que $A = \Sigma_X$ et $B = \Sigma_Y$.

Montrer que C est une matrice symétrique réelle positive.

Solution :

1. a) Il suffit de faire le calcul : les matrices X et Y étant des matrices ligne, ${}^tXY$ est une matrice carrée d'ordre n, dont le terme d'indice (i,j) est X_iY_j.

Ainsi $E({}^tXY) = (E(X_iY_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Or les variables étant centrées :

$$\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = E(X_iY_j) - E(X_i)E(Y_j) = E(X_iY_j).$$

On a donc bien :

$$\Sigma_{X,Y} = E({}^tXY)$$

b) $\Sigma_{X^tA,YB} = E({}^t(X^tA)(YB)) = E(A({}^tXY)B)$

Les matrices A et B étant fixées, il suffit de revenir à la formule du produit matriciel, en notant $M = {}^tXY$ (qui est une matrice carrée) et d'appliquer la linéarité de l'opérateur espérance, pour obtenir $E(AMB) = AE(M)B$; et donc :

$$\Sigma_{X^tA,YB} = AE({}^tXY)B = A\Sigma_{X,Y}B$$

c) Soit $U = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} {}^tU\Sigma_X U &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \operatorname{Cov}(X_i, X_j) u_j = \operatorname{Cov}(\sum_{i=1}^n u_i X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j) \\ &= V\big(\sum_{i=1}^n u_i X_i\big) \geqslant 0 \end{aligned}$$

2. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée ; elle est positive : ses valeurs propres sont positives ou nulles. Ainsi, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ positifs ou nuls et une matrice P orthogonale telle que $A = PD^tP$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta^t P$.

Cette dernière matrice est symétrique réelle, positive (ses valeurs propres sont positives) et $B^2 = A$.

3. a) Les variables aléatoires étant indépendantes et réduites, les variances valent 1 et les autres covariances sont nulles : $\Sigma_X = I_n$.

b) X ayant les propriétes de la question a), posons $Y = XB$, on a :

$$\Sigma_Y = \Sigma_{XB} = E(B^t XXB) = BE({}^tXX)B = B^2 = A.$$

4. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_i, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires indépendants centrés tels que $A = \Sigma_X$ et $B = \Sigma_Y$.

Soit $Z = (Z_1, \dots, Z_n) = (X_1Y_1, \dots, X_nY_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) &= E(X_iY_iX_jY_j) = E(X_iX_jY_iY_j) = E(X_iX_j)E(Y_iY_j) \\ &= \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = a_{i,j}b_{i,j} = c_{i,j} \end{aligned}$$

La matrice C est la matrice Σ_Z donc est symétrique positive.

Exercice 3.11.

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que, pour tout $i \geqslant 1$, la variable Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\alpha$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. a) Rappeler l'expression de g_1 et calculer g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^{n-1}$.

c) Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini (on rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$).

d) Exprimer la variance $V(Z_n)$ de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

2. a) Calculer la fonction de répartition G_n de Z_n.

b) On définit $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

c) Étudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$. Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(U_n)$.

Solution :

1. a) $\star$ Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$, avec les conditions imposées par l'énoncé :

$$g_1 \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^- \text{ et pour } x > 0, g_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}.$$

Par convolution (Y_1 et Y_2 sont indépendantes et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\alpha)$), on a $g_2(x) = 0$ pour $x0$ et pour tout $x > 0$:

$$g_2(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} \times 2\alpha e^{-2\alpha(x-t)}\, dt = 2\alpha^2 e^{-2\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t}\, dt = 2\alpha e^{-2\alpha x}(e^{\alpha x} - 1)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$x > 0 \implies g_2(x) = 2\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})$$

b) On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ est traité par la question a). Supposons alors le résultat vrai au rang n.

Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}$ on obtient par convolution (Z_n et Y_{n+1} sont indépendantes), pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^x n\alpha e^{-\alpha y}(1 - e^{-\alpha y})^{n-1}(n+1)\alpha e^{-(n+1)\alpha(x-y)}\, dy \\ &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha y}(1 - e^{-\alpha y})^{n-1} e^{(n+1)\alpha y}\, dy \\ g_{n+1}(x) &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x} \int_0^x e^{\alpha y}(e^{\alpha y} - 1)^{n-1}\, dy \\ &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x}\left[\frac{1}{n\alpha}(e^{\alpha y} - 1)^n\right]_0^x = (n+1)\alpha e^{-(n+1)\alpha x}(e^{\alpha x} - 1)^n \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$x > 0 \implies g_{n+1}(x) = (n+1)\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^n,$$

ce qui conclut la preuve.

c) Grâce à la linéarité de l'espérance on $E(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^n E(Y_k) = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{\alpha k}$.

Par ailleurs, comme $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{k} \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$, on obtient : $E(Z_n) \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}\ln n$

d) Comme les Y_k sont indépendantes, on a $V(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^n V(Y_k) = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{\alpha^2 k^2}$.

Par ailleurs, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente , donc on en déduit que la suite $(V(Z_n))_n$ admet une limite.

2. a) Pour $x0$, on a $G_n(x) = 0$ et pour $x > 0$

$$G_n(x) = \int_0^x n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha y}(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})^{n-1}\,dy = \Big[(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})^n\Big]_0^x = (1-\mathrm{e}^{-\alpha x})^n$$

b) $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$ est encore à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $H_n(x) = 0$ pour tout $x0$. De plus pour tout $x > 0$ on a :

$$H_n(x) = P(Z_n nx) = G_n(nx) = (1-\mathrm{e}^{-\alpha n x})^n$$

c) $\star$ Pour $x \leqslant 0$, on a $H_n(x) = 0$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 0$.

$\star$ Pour $x > 0$, écrivons : $\ln H_n(x) = n\ln(1-\mathrm{e}^{-\alpha n x}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -n\mathrm{e}^{-\alpha n x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit : $\forall\, x > 0, \lim_{n\to\infty} H_n(x) = 1$.
Par conséquent, la fonction H_n converge en tout point de $\mathbb{R}^*$ vers la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0 (dont 0 est le seul point de discontinuité). On en déduit que la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

d) On a $E(U_n) = E(Z_n)/n \sim \dfrac{\ln n}{n\alpha}$ et $V(U_n) = V(Z_n)/n^2$, donc d'après les questions précédentes, on conclut que ces expressions sont de limite nulle.

Exercice 3.12.

Dans tout l'exercice $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $[0,1]$, qui sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. On note pour n entier naturel non nul, f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

a) Indiquer une relation entre f_{n+1} et f_n.

b) En déduire l'expression de $F_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

c) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier k tel que F_n soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\omega \in \Omega$ on pose $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n(\omega) > 1\}$, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) > 1$ et sinon, on pose $N(\omega) = 0$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

b) Montrer que N possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Donner la valeur de $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\big)$.

Solution :

1. a) On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et X_{n+1} est indépendante de S_n (car S_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$). Une densité f_{n+1} de S_{n+1} s'obtient donc par convolution de f_n et d'une densité de X_{n+1} :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\,dt = \int_{x-1}^{x} f_n(t)\,dt$$

b) S_n prend ses valeurs entre 0 et n, donc pour $x \in [0,1]$, l'intervalle utile d'intégration est $[0,x]$:

$$\forall\, x \in [0,1], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = F_n(x) - F_n(0) = F_n(x)$$

Ainsi, $\forall\, x \in [0,1], F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x F_n(t)\,dt$

Comme $\forall\, x \in [0,1], F_1(x) = x$, une récurrence simple donne :

$$\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*, F_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_n(x-1)$.

Ainsi si F_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors f_{n+1} aussi et F_{n+1}, qui est une primitive de f_{n+1}, est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme F_1 est seulement continue sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas dérivable en 0 et en 1), une récurrence simple montre que F_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$, sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Par construction, N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$\star$ L'événement $(N=0)$ est l'événement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N=0)P(S_n 1) = F_n(1) = \frac{1}{n!}$$

Donc $P(N=0) = 0$ et $(N=0)$ est donc quasi-impossible.

$\star$ Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}, P(N > n) = P(S_n 1) = \dfrac{1}{n!}$ (ceci vaut même pour $n = 0$) et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

b) Pour $n \geqslant 2$, $n.P(N=n) = n\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc N admet une espérance et comme $P(N=1) = 0$:

$$E(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n.P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \mathrm{e}$$

De même, les convergences étant évidentes :

$$E(N^2) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 3.\mathrm{e}$$

et :

$$V(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e})$$

3. On a $(S_n \geqslant n-1) = (n - S_n 1)$, or $n - S_n = (1-X_1) + \cdots + (1-X_n)$ et chaque X_i ayant même loi que $(1-X_i)$, et les variables $(1-X_i)$ étant indépendantes, $(n-S_n)$ a même loi que S_n, donc $P(S_n \geqslant n-1) = \dfrac{1}{n!}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big)P(S_k \geqslant k-1) = \dfrac{1}{k!}$, soit :

$$P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big) = 0$$

Exercice 3.13.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, les boules numérotées de 1 à M sont rouges et les autres blanches..

1. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne ($1 \leqslant n \leqslant N$). Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer le nombre d'éléments de Ω, noté $\mathrm{card}(\Omega)$.

2. Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. On introduit les événements :

pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k =$ « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge ».

a) Calculer la probabilité $P(A_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Calculer, pour $k \neq \ell$ ($(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$), la probabilité $P(A_k \cap A_\ell)$.

3. On introduit les variables aléatoires Z_k, ($1 \leqslant k \leqslant n$), définies par $Z_k = 1$ si la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge, $Z_k = 0$ sinon.
On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note p le rapport $\dfrac{M}{N}$.

a) Calculer la variance $V(S_n)$ en fonction de n et p.

b) Calculer la limite de $V(S_n)$, pour n fixé, quand M et N tendent vers l'infini de telle sorte que p tende vers un réel p_0 tel que $0 < p_0 < 1$.

Solution :

1. L'espace associé à cette expérience peut être décrit par

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n); a_i \in \{1, \cdots, N\}, a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}.$$

On a $\mathrm{card}(\Omega) = A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$.

2. L'espace Ω étant muni de la probabilité uniforme on a, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

a) On a $A_k = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega : a_k \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$, d'où :
$\mathrm{card}\, A_k = M(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$, et donc $P(A_k) = M/N$.

Remarquons que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne.

b) Pour $k \neq \ell$, on a :

$A_k \cap A_\ell = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega;\ a_k \in \{1, 2, \cdots, M\} \text{ et } a_\ell \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$, d'où $\text{card}(A_k \cap A_l) = M(M-1)(N-2)(N-3)\cdots(N-n+1)$, et donc :

$$P(A_k \cap A_\ell) = M(M-1)/(N(N-1)).$$

3. a) Remarquons d'abord que $V(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(Z_k) + 2 \sum\limits_{1\leq k<\ell\leq n} \text{Cov}(Z_k, Z_\ell)$.

D'après a) et b) de la question 2. on a $P(Z_k = 1) = M/N = p$, et pour $k \neq \ell$

$$P(Z_k = 1, Z_\ell = 1) = \frac{M}{N} \times \frac{M-1}{N-1} = p\frac{Np-1}{N-1}.$$

Comme les Z_k sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a aussi

$$V(Z_k) = E(Z_k^2) - [E(Z_k)]^2 = p - p^2 = p(1-p),$$

et pour $k \neq \ell$

$$\text{Cov}(Z_k, Z_\ell) = E(Z_k Z_\ell) - E(Z_k)E(Z_\ell) = p\frac{Np-1}{N-1} - p^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} V(S_n) &= np(1-p) + 2\frac{n(n-1)}{2}\big(p\frac{Np-1}{N-1} - p^2\big) \\ &= np\big(1 - p + (n-1)\big(\frac{Np-1}{N-1} - p\big)\big) = np(1-p)\big(1 - \frac{n-1}{N-1}\big). \end{aligned}$$

b) On a : $\lim\limits_{N\to\infty} V(S_n) \to np_0(1-p_0)$.

On reconnaît la variance d'une loi binomiale $B(n, p_0)$.

Exercice 3.14.

1. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$.

Donner deux éléments de E.

2. Pour $f \in E$, on note $F_f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Montrer que F_f est une fonction de classe C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $J =]0, 1[$, puis montrer que $G_f = F_f^{-1}$ est aussi de classe C^1.

3. Montrer qu'il existe une unique fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$$

et montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. Pour $f \in E$, on définit g_f sur $\mathbb{R}$, par : $g_f(t) = \dfrac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

a) Montrer que g_f est une densité de probabilité.

b) On considère une variable aléatoire X_f de densité g_f. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, paire et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f'(t)\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$.

Montrer que X_f possède une espérance et que celle-ci est nulle.

Solution :

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On connaît une densité de X qui prouve que la fonction constante égale à 1 convient.

Comme $V(X) = E(X^2) = 1$, on pourrait penser à prendre comme deuxième exemple la fonction $t \mapsto t^2$, mais cette fonction s'annule ... on peut alors prendre $t \mapsto \frac{1}{2}(t^2+1)$.

2. F_f est de classe C^1 et sa dérivée est $F_f'(t) = \dfrac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} > 0$, ce qui montre la croissance stricte de F_f.

De plus les limites respectives de F_f en $-\infty$ et $+\infty$ étant 0 et 1, le résultat en découle.

Par théorème d'inversion des fonctions de classe C^1 à dérivée jamais nulle, G_f est aussi de classe C^1.

3. Notons F_1 la fonction F_f pour f constante égale à 1. On a : $F_f(\varphi(x)) = F_1(x)$, donc φ est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = G_f \circ F_1(x)$$

et, par composition φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Par une intégration par parties, mais que l'on peut d'abord faire sur un segment avant de passer à la limite, on obtient :

$$E(X_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \Big[-\frac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big]_{\to-\infty}^{\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

Le crochet disparaît et l'intégrale résiduelle est convergente, de par les hypothèses faites sur f. L'imparité donne alors sa nullité.

$$E(X_f) = 0$$

Exercice 3.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier naturel k, on pose : $a_k = 1 - \big(1 - \frac{1}{2^k}\big)^{n-1}$.

Montrer que l'application qui à tout entier naturel k non nul associe le nombre $(a_{k-1} - a_k)$, définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.

3. Soit X_n une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui prend la valeur k avec la probabilité $a_{k-1} - a_k$. Montrer que X_n admet une espérance et que :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

4. Pour p entier naturel non nul et t réel, on pose : $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)dt$ est convergente. On note sa valeur I_p.

b) Calculer la valeur de $I_{p+1} - I_p$, pour $p \geqslant 1$.

c) En déduire que : $I_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

d) Montrer que : $\ln n I_{n-1} 1 + \ln(n-1)$.

e) Soit g_n la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par : $g_n(u) = 1 - \big(1 - \dfrac{1}{2^u}\big)^{n-1}$

Montrer que pour tout entier naturel $q \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{q} a_k \leqslant \int_0^q g_n(u)du \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

En déduire que $E(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n)$, et donner un équivalent simple au voisinage de l'infini de $E(X_n)$.

Solution :

1. Si on pose $p_k = a_{k-1} - a_k$, on a clairement $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 p_k 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k = a_0 - a_m = \big(1 - \dfrac{1}{2^m}\big)^{n-1}$, dont la limite est 1 quand m tend vers $+\infty$. Cela montre que la donnée des p_k définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. L'entier n est fixé, comme $(1-u)^{n-1} = 1 - (n-1)u + o(u)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, il vient :

$$a_k = (n-1)\frac{1}{2^k} + o\big(\frac{1}{2^k}\big) \sim (n-1)\big(\frac{1}{2}\big)^k$$

La convergence de la série en résulte.

3. Pour tout entier positif m, on a en développant et par télescopage partiel :

$$\sum_{k=1}^{m} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k - m a_m.$$

Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} m a_m = 0$ et comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ est convergente, on en déduit que X_n admet une espérance donnée par :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

4. a) On a : $1-(1-\mathrm{e}^{-t})^p \underset{(t\to+\infty)}{\sim} p\mathrm{e}^{-t}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. Par application de la règle d'équivalence pour les fonctions positives, on en déduit que I_p est convergente.

b) $\displaystyle I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} [(1-\mathrm{e}^{-t})^p - (1-\mathrm{e}^{-t})^{p+1}]\,dt = \int_0^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-t})^p \mathrm{e}^{-t}\,dt$

On a donc, en abrégé :

$$I_{p+1} - I_p = \left[\frac{1}{p+1}(1-\mathrm{e}^{-t})^{p+1}\right]_0^{\to+\infty} = \frac{1}{p+1}$$

c) En convenant de poser $I_0 = 0$ (avec la même formule on a $f_0 = 0$), on déduit du résultat précédent que :

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

d) On a par décroissance de la fonction à intégrer :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

Ce qui donne :

$$\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1).$$

e) On a, toujours par monotonie : $\displaystyle\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \leqslant \int_{k-1}^{k} g_n(u)\,du \leqslant a_{k-1}$,

d'où : $\displaystyle\forall q \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{q} a_k \leqslant \int_0^q g_n(u)\,du \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} a_k.$

Comme $2^u = \mathrm{e}^{u\ln 2}$, le changement de variable $t = u\ln 2$ donne

$$\int_0^q g_n(u)du = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\frac{q}{\ln 2}} f_{n-1}(t)dt.$$

D'où, par passage à la limite dans l'encadrement précédent, lorsque q tend vers l'infini :

$$E(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n).$$

Le résultat d) donnant $I_{n-1} \sim \ln n$, finalement : $\displaystyle E(X_n) \sim \frac{\ln n}{\ln 2} = \log_2(n)$.

Exercice 3.16.

Soient s, N deux entiers naturels non nuls. Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1-p$. Un individu dispose de s euros (avec $s \in \mathbb{N}^*$) et souhaite acheter un bien qui en coûte N (avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant s$). Pour tenter de gagner de l'argent, il propose le jeu suivant à une personne très fortunée : il sort de sa poche une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) et joue selon la règle suivante :

• si la pièce tombe sur face (ce qui se produit avec la probabilité p), il gagne 1 euro ;
• si la pièce tombe sur pile, il perd 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'individu est en possession des N euros lui permettant d'acheter le bien, soit lorsqu'il est ruiné (si au départ le joueur possède N euros, alors il ne prend même pas part au jeu) ...

Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on note p_k la probabilité de pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros. Le nombre N étant fixé, on admet que la variable aléatoire égale à la durée du jeu, lorsque l'individu possède au départ k euros, admet une espérance notée D_k.

1. a) Calculer p_0, p_N puis D_0, D_N.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$.

2. Lorsque $p = q = 1/2$, calculer p_s, c'est-à-dire calculer la probabilité de pouvoir acheter le bien à l'issue du jeu avec un avoir initial de s euros.

3. On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$. On cherche à calculer D_s, c'est-à-dire à calculer le temps moyen au bout duquel l'individu pourra acheter le bien ou sera ruiné, avec un avoir initial de s euros.

a) Montrer que la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $u_k = -k^2$ satisfait à la relation de récurrence :

$$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = -1$$

b) Montrer que la suite finie $(v_k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ définie par $v_k = D_k - u_k$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

c) En déduire la valeur de D_s.

4. Calculer p_s, lorsque $p \neq q$.

Solution :

1. a) $p_0 = 0$, $p_N = 1$ et $D_0 = D_N = 0$.

b) Notons P_1 l'événement « le premier lancer amène pile » et F_1 l'événement contraire. Notons aussi G_k l'événement « l'individu finit par pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros ».
On a :

$$P(G_k) = P(G_k/P_1)P(P_1) + P(G_k/F_1)P(F_1)$$

Or si P_1 est réalisé, l'individu se trouve avoir **maintenant** une fortune **initiale** de $(k-1)$ euros et s'il obtient face, il a une nouvelle fortune initiale de $(k+1)$ euros. Comme $P(P_1) = q$ et $P(F_1) = p$, il vient, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$:

$$p_k = p_{k-1} \times q + p_{k+1} \times p$$

c) En raisonnant comme précédemment, après un premier lancer de pièce :
→ soit, c'est comme si on partait avec une fortune initiale de $(k+1)$ euros et on a déjà franchi une étape, ceci se produisant avec la probabilité p,
→ soit, c'est comme si on partait avec une fortune initiale de $(k-1)$ euros et on a déjà franchi une étape, ceci se produisant avec la probabilité $q = 1-p$,
D'où la mise en équation :

$$D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$$

2. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire double de la question b) est :

$$pr^2 - r + q = 0, \text{ soit ici } (r-1)^2 = 0.$$

Ainsi, il existe deux réels α, β tels que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $p_k = (\alpha k + \beta)$.
(On pouvait aussi remarquer que la relation : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$ caractérise les suites arithmétiques.)
Avec $p_0 = 0$ et $p_N = 1$, il vient : $p_k = \dfrac{k}{N}$.

3. On suppose que le jeu est équilibré.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que $-\dfrac{(k+1)^2}{2} + k^2 - \dfrac{(k-1)^2}{2} = -1$.

b) On a : $\begin{cases} \frac{1}{2}D_{k+1} + \frac{1}{2}D_{k-1} - D_k = -1 \\ \frac{1}{2}u_{k+1} + \frac{1}{2}u_{k-1} - u_k = -1 \end{cases}$

Par différence, en posant $v_k = D_k + k^2$: $v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0$

c) Ainsi, il existe deux constantes réelles α, β telles que $D_k = -k^2 + \alpha + \beta k$, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.
Avec $D_0 = D_N = 0$, il vient $\alpha = 0$, $\beta N - N^2 = 0$, soit :

$$D_s = s(N - s)$$

(il est normal de trouver une expression symétrique par rapport à $N/2$)

4. L'équation caractéristique associée à la suite récurrente double est $pr^2 - r + q = 0$.
1 est racine évidente et l'autre vaut donc $\dfrac{q}{p}$
Il existe α et β tels que $\forall\, k \in [\![0, N]\!], p_k = \alpha\big(\frac{q}{p}\big)^k + \beta$. Les conditions initiales donnent :
$0 = \alpha + \beta$ et $1 = \alpha\big(\frac{q}{p}\big)^N + \beta$, soit $p_s = \dfrac{1 - (\frac{q}{p})^s}{1 - (\frac{q}{p})^N}$

Exercice 3.17.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $u_0 = 0$ et qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k)$$

Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$?

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

3. Soit $p \in\ ]0, 1[$, on pose $q = 1 - p$ et on suppose que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

a) Expliciter la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ (on sera amené à distinguer les deux cas $p < \dfrac{1}{2}$ et $p \geqslant \dfrac{1}{2}$).

c) On suppose que l'on a $p > \dfrac{1}{2}$.

i) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$, calculer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la valeur de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

ii) Montrer qu'il existe une variable aléatoire G à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(Gn) = u_n$$

Montrer que G admet une espérance.

Solution :

1. Supposons u_n défini avec $u_n \in [0, 1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant (u_n)^k P(X = k) \leqslant P(X = k).$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, par théorème de comparaison, la série

$$\sum_k (u_n)^k P(X = k)$$

converge, donc u_{n+1} existe et l'encadrement précédent donne alors :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1,$$

donc $u_{n+1} \in [0, 1]$. Par récurrence, la suite existe et est à valeurs dans $[0, 1]$.

Si $X(\Omega) \in \mathbb{N}^*$, alors $P(X = 0) = 0$, et $u_0 = 0$ donne $u_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0^k P(X = k) = 0$, puis $u_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0^k P(X = k) = 0, \ldots u$ est la suite nulle.

2. On a $u_1 \geqslant u_0$ et si pour un certain rang n on a $u_n \geqslant u_{n-1}$, alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_n)^k P(X = k) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} (u_{n-1})^k P(X = k) = u_n$$

Par le principe de récurrence, on en conclut que la suite u est croissante et comme elle est majorée elle converge.

3. a) On a : $\forall\, k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X + 1 = k + 1) = q^k p$ et donc :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_n)^k q^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} (qu_n)^k = \frac{p}{1 - qu_n} \text{ (car on a } \ 0 < qu_n q < 1)$$

b) Notons ℓ la limite de la suite u. On a $0\ell 1$ et $\ell = \dfrac{p}{1 - q\ell}$, soit $q\ell^2 - \ell + p = 0$, *i.e.*

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$$

$\rightarrow$ Si $p \geqslant \frac{1}{2}$, alors $\frac{p}{q} \geqslant 1$ et la seule limite possible est 1, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.
$\rightarrow$ Si $p < \frac{1}{2}$, alors $0 < \frac{p}{q} < 1$ et il reste un doute ...

Posons $f : x \mapsto \dfrac{p}{1 - qx}$, la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et $u_0 \frac{p}{q}$ implique $u_1 = f(u_0) f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$, ... et par l'argument de récurrence habituel, la suite u est majorée par $\frac{p}{q}$. Ainsi la valeur $\ell = 1$ est à exclure et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{p}{q}$.

c) i) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1 - qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qu_n}} = \frac{q}{p} \times \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} = \frac{q}{p} v_n$$

Par conséquent $v_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n v_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$ et comme $(\frac{p}{q} - u_n) v_n = 1 - u_n$, il vient :

$$u_n = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - v_n} = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - (\frac{q}{p})^{n+1}}$$

ii) Comme $u_0 = 0$ et u est croissante de limite 1, l'existence de G est claire, et en posant $x = \frac{q}{p} \in \,]0, 1[$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(G = n) = u_n - u_{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x^{n+1}} - \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x^n} = \frac{x^{n-1}(1 - 2x + x^2)}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}$$

Ainsi

$$P(G = n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} x^{n-1}(1 - x)^2$$

Comme $0 < x < 1$, la convergence de la série de terme général $nP(G = n)$ est acquise (règle d'équivalence et série géométrique dérivée de référence) et G admet une espérance.

Exercice 3.18.

Pour tout $(p, N) \in \mathbb{N}^2$, on définit la fonction $f_{p,N}$ sur $]-1, 1[$ par :

$$f_{0,N}(x) = \frac{x^N}{1 - x} \text{ et } f_{p+1,N}(x) = \int_0^x f_{p,N}(t)\, dt$$

1. a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_p de degré inférieur ou égal à $(p - 1)$ tel que pour tout x de $]-1, 1[$:

$$f_{p,0}(x) = -\frac{(x-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-x) + P_p(x)$$

b) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in \,]-1,1[$, on a :
$|f_{p,N}(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{p+N}}{1-|x|}$.

c) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in \,]-1,1[$, on a :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!} = f_{p,0}(x) - f_{p,N+1}(x)$.

d) Pour tout $x \in \,]-1,1[$ et tout $p \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!}$ et exprimer sa somme en fonction $f_{p,0}(x)$.

2. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche, d'un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant .
→ Si on obtient «face» au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on ajoute u_n boules rouges au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce.
→ La première fois que l'on obtient «pile», on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.
Calculer la probabilité r d'obtenir la boule blanche dans les cas suivants :

a) La suite $(u_n)_n$ est la suite nulle.
b) La suite $(u_n)_n$ est la suite constante égale à 1.
c) La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n+1$.

3. On procède de même mais la règle est maintenant la suivante :
→ Si on obtient «face» au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on lance une boule rouge en direction de l'urne et on a à chaque fois une chance sur deux pour que cette boule tombe dans l'urne, indépendamment de ce qui a pu se produire avant, puis on effectue le lancer suivant de la pièce.
→ La première fois que l'on obtient «pile», on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité que l'on obtienne n «pile» avant le premier «face» et que l'on obtienne alors la boule blanche.

b) En déduire la probabilité r d'obtenir la boule blanche.

Solution :

1. a) Par récurrence sur $p \geqslant 1$, le résultat étant clair pour $p = 1$, avec $P_1 = 0$. Si la propriété est vraie à un certain ordre $p \geqslant 1$, alors par intégration par parties on a :

$$f_{p+1,0}(x) = \int_0^x -\frac{(t-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-t)\,dt + \int_0^x P_p(t)\,dt$$

$$= \Big[-\frac{(t-1)^p}{p!}\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{(t-1)^p}{p!}\frac{1}{1-t}\,dt + \int_0^x P_p(t)\,dt$$
$$= -\frac{(x-1)^p}{p!}\ln(1-x) + P_{p+1}(x)$$

où la fonction P_{p+1} est clairement polynomiale et si $\deg P_p p-1$, alors $\deg P_{p+1} < p$. On conclut ... et on remarque que $P_2 = X$.

b) Par récurrence sur $p \geqslant 0$.

$\star$ On a : $|f_{0,N}(x)| = \dfrac{|x|^N}{|1-x|} \leqslant \dfrac{|x|^N}{1-|x|}$, car $|1-x| \geqslant 1-|x| > 0$.

$\star$ Si la propriété est vraie à l'ordre p, alors en prenant garde au fait que le signe de x est inconnu :

$$\big|f_{p+1,N}(x)\big| \leqslant \Big|\int_0^x |f_{p,N}(t)|\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x \frac{|x|^{p+N}}{1-|x|}\,dt\Big| = |x|\frac{|x|^{p+N}}{1-|x|} = \frac{|x|^{p+1+N}}{1-|x|}.$$

c) En intégrant p fois successivement entre 0 et x la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = f_{0,0}(x) - f_{0,N+1}(x),$$

on obtient le résultat demandé.

d) D'après 1. b) on a $\lim\limits_{N\to+\infty} |f_{p,N+1}(x)| = 0$. Donc 1. c) donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!} = f_{p,0}(x).$$

2. Soit B l'événement «la boule tirée est blanche». Soit A_n l'événement «la pièce donne n fois face avant de faire pile». Les $(A_n)_{n\geq 0}$ forment un système complet, avec $P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, donc :

$$r = P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+u_1+\cdots+u_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

a) Ici : $r = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1.$

b) D'après la question 1. d) pour $p = 1$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = f_{1,0}(x) = -\ln(1-x)$, donc :

$$r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

c) D'après la question 1. d) pour $p = 2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = f_{2,0}(x) = -(x-1)\ln(1-x) + x.$$

Or on a ici $1+u_1+\cdots+u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc

$$r = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = 4f_{2,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 2(1-\ln 2)$$

3. a) Notons S le nombre de boules rouges ajoutées dans l'urne. On a, avec les notations précédentes :

$$P(A_n\cap B) = \sum_{j=0}^{\infty} P(A_n\cap B\cap(S=j)) = \sum_{j=0}^{\infty} P(A_n)P_{A_n}(S=j)P_{A_n\cap(S=j)}(B).$$

La loi conditionnelle de S sachant que A_n est réalisé est la loi $\mathcal{B}(n,1/2)$ et à la fin on tire une boule dans une urne qui contient j boules rouges et 1 blanche. Ainsi, il reste :

$$P(A_n \cap B) = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1}{j+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

b) $r = P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n \cap B) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$= -2\ln\frac{1}{2} + 2\ln\frac{3}{4}$

$$r = 2\ln\frac{3}{2}.$$

Exercice 3.19.

Dans une urne, il y a n boules dont $m \geqslant 1$ sont noires et gagnantes et les autres blanches et perdantes, avec $n \geqslant 3m$.

1. Un joueur tire au hasard successivement et sans remise m boules de l'urne. Pour $k \in \{1,\dots,m\}$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est noire et à 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

a) Exprimer X à l'aide des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$.

b) Déterminer la loi de X et donner la valeur de son espérance.

c) En déduire les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k} = \binom{n}{m} \text{ et } \sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k} = \frac{m^2}{n}\binom{n}{m}.$$

2. Après cette première série de tirages, l'organisateur de ce jeu enlève m boules blanches de l'urne et propose au joueur le choix suivant :
soit il garde le résultat obtenu, soit il tire à nouveau successivement et au hasard et toujours sanx remise m boules parmi les $n-2m$ boules restant alors dans l'urne.

Le joueur choisit la deuxième option. Pour ce deuxième tirage, on note Y_i ($i \in \{1,\dots,m\}$) la variable aléatoire égale à 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule obtenue est noire et à 0 sinon, et par Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

a) Montrer que l'on a :

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{(n-2m)\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} (m-k)\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}.$$

En déduire une expression simple de $P(Y_i = 1)$.

b) Calculer l'espérance de Y. Le joueur a-t-il fait le bon choix ?

Solution :

1. a) On a $X = X_1 + \cdots + X_m$.

b) On reconnaît une loi hypergéométrique, et on a $X(\Omega) = \{0, \ldots, m\}$ et :

$$\forall\, k \in [\![0, m]\!], P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

Avec

$$E(X) = m \times \frac{m}{n}$$

c) On a donc $1 = \sum_{k=0}^{m} P(X = k) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}$, d'où la première égalité.

On remarque ensuite que :

$$\frac{m^2}{n} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}$$

2. On se place désormais dans la seconde phase lorsque le joueur décide de continuer.

a) Avec 1. b) et 1. c), on obtient par la formule des probabilités totales avec le système complet associé à la variable X :

$$\begin{aligned} P(Y_k = 1) &= \sum_{k=0}^{m} P(Y_k = 1/X = k)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m-k}{n-2m} \times \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}}{\binom{n}{m}} \\ &= \frac{1}{(n-2m)\binom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} (m-k)\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}. \end{aligned}$$

En séparant la somme en deux, les deux formules obtenues en 1. c) permettent alors d'écrire :

$$P(Y_k = 1) = \frac{1}{n-2m}\left(m - \frac{m^2}{n}\right) = \frac{(n-m)m}{(n-2m)n}$$

b) Comme $Y = Y_1 + \cdots + Y_m$, on obtient par linéarité de l'espérance :

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{m}E(Y_k)=\sum_{k=1}^{m}P(Y_k=1)=\frac{(n-m)\,m^2}{(n-2m)\,n}.$$

Comme $n-m>n-2m$, on remarque que $E\,(Y)>E\,(X)$, le joueur a donc fait le bon choix.

5

QUESTIONS COURTES

1. Extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{1-x-y}$, (x, y) décrivant $[0, 1]^2$.

(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

2. Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

3. Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$. Montrer que pour tout $x > 0$

$$[f'(x) \geqslant \frac{1}{\ln(f(x))}] \implies [f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}]$$

5. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit la fonction F sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en posant :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x + t} dt$$

Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^1 f(t) dt$$

6. Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{1 + x} \times \mathbf{1}_{[0,1]}$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \lfloor \dfrac{1}{X} \rfloor$ suit la même loi que X.

7. Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ tels que pour $i \neq j$: $\langle e_i, e_j \rangle < 0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

8. On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

9. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B})$$

10. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles. Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?